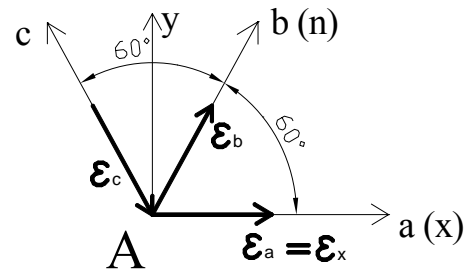


**ZADATAK:**

U točki A čelične konstrukcije postavljena su tri osjetila za mjerenje deformacija prema slici. Pri opterećenju konstrukcije izmjerene su relativne normalne (dužinske) deformacije:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= 50 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_x \\ \varepsilon_b &= 30 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_c &= -65 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$



Treba odrediti smjer i veličinu glavnih naprezanja, ako je modul elastičnosti  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa a Poissonov koeficijent  $\nu = 0,3$ , analitički i grafički odrediti vektor punog (totalnog) naprezanja naprezanja na ravninu čija normala s osi  $x$  zatvara kut od  $60^\circ$ .

**RJEŠENJE:**

Općenito, iznos normalne deformacije u smjeru normale  $n$  dan je izrazom:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi, \quad \text{gdje je } \varphi = \angle(x, n)$$

što bi za naš slučaj dalo za smjer  $a$  i smjer  $b$  dvije jednačbe:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_a \cos^2 60^\circ + \varepsilon_y \sin^2 60^\circ + \varepsilon_{xy} \sin(2 \cdot 60^\circ) \quad (1)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_a \cos^2 120^\circ + \varepsilon_y \sin^2 120^\circ + \varepsilon_{xy} \sin(2 \cdot 120^\circ) \quad (2)$$

koje čine sustav dviju jednačbi s dvije nepoznanice ( $\varepsilon_y$  i  $\varepsilon_{xy}$ ).

Rješenjem tog sustava jednačbi dobivamo:

$$\varepsilon_{xy} = 54,85 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_y = -40 \cdot 10^{-5}$$

Posmične deformacije su pozitivne što znači da dolazi do smanjenja pravog kuta između osi  $x$  i  $y$  za vrijednost  $\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy} = 1,097 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,06285^\circ = 0^\circ 3' 46''$

Sada možemo odrediti normalna naprezanja u smjerovima  $x$  i  $y$  te posmično naprezanje  $\tau_{xy}$ :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (50 \cdot 10^{-5} - 0,3 \cdot 40 \cdot 10^{-5}) = 83,52 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (-40 \cdot 10^{-5} + 0,3 \cdot 50 \cdot 10^{-5}) = -54,95 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot 2 \cdot \varepsilon_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon_{xy} = \frac{2 \cdot 10^5}{1+0,3} \cdot 54,85 \cdot 10^{-5} = 84,38 \text{ MPa} \quad \text{gdje je } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Tim vrijednostima je određeno stanje napreznaja u točki. Iz njih možemo dobiti veličine i smjerove glavnih napreznaja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{83,52 - 54,95}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(83,52 + 54,95)^2 + 4 \cdot 84,38^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 14,29 \pm 109,15$$

$$\sigma_1 = 123,44 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = -94,86 \text{ MPa}$$

Smjer glavnih napreznaja i smjer glavnih deformacija je jednak, a može se odrediti iz izraza:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = 1,21874 \Rightarrow \varphi_0 = 25,31^\circ$$

Time nije definirano je li to smjer prvog ili drugog glavnog napreznaja. Da bi odmah odredili smjer prvog i drugog glavnog napreznaja možemo upotrijebiti izraze:

$$\operatorname{tg} \varphi_{01} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{84,38}{123,44 + 54,95} = 0,473 \Rightarrow \varphi_{01} = 25,31^\circ = 25^\circ 19'$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{02} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{84,38}{-94,86 + 54,95} = -2,114 \Rightarrow \varphi_{02} = -64,68^\circ = -64^\circ 41'$$

Kontrola:

Zbroj normalnih napreznaja na dvije okomite ravnine (prva invarijanta napreznaja) je konstantan:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$123,44 - 94,86 = 83,52 - 54,95$$

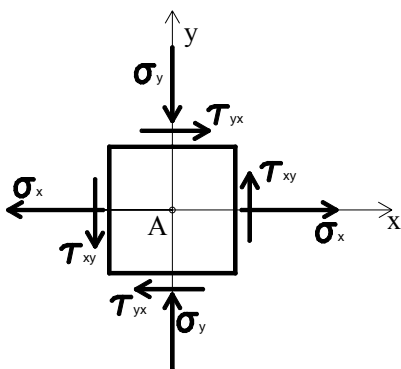
$$28,58 \approx 28,57$$

Glavna napreznaja leže na dva međusobno okomita pravca:

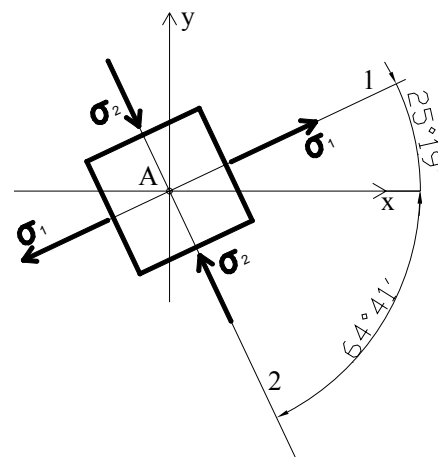
$$|\varphi_{01}| + |\varphi_{02}| = 90^\circ$$

$$25,31^\circ + 64,68^\circ = 90^\circ$$

$$89,99^\circ \approx 90^\circ$$



Sl.1: Stanje napreznaja u točki A



Sl.2: Glavna napreznaja u točki A

#### NAPOMENA:

Moguć je i postupak da se prvo odrede veličine i smjerovi glavnih deformacija  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  i  $\varphi_0$  iz  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, i \varepsilon_{xy}$  pa se iz njih odrede veličine glavnih napreznaja:  $\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)$ ,  $\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)$ . Smjer glavnih napreznaja jednak je smjeru glavnih deformacija.

Određivanje vektora punog (totalnog) napreznja na ravninu čija normala s osi x zatvara kut od 60°:

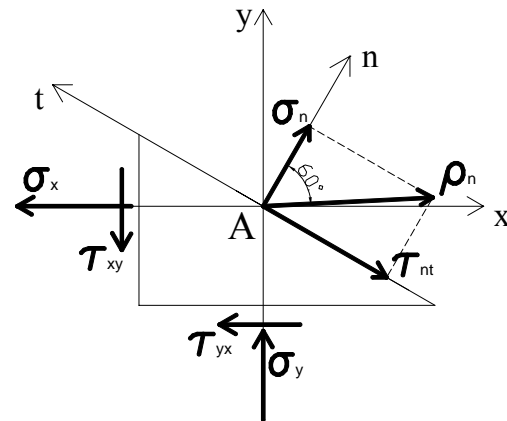
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = 52,74 \text{ MPa}$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

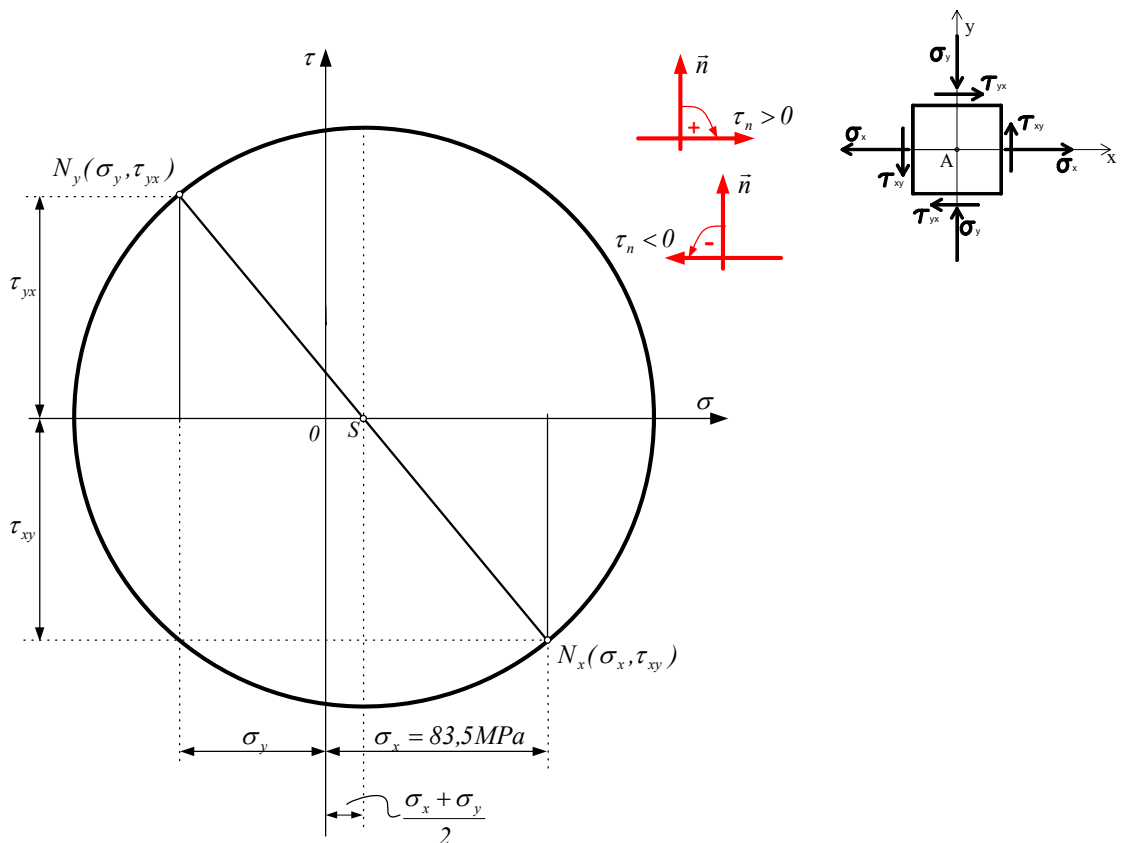
$$\tau_{nt} = -102,15 \text{ MPa}$$

$$\rho_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{nt}^2} = 114,96 \text{ MPa}$$

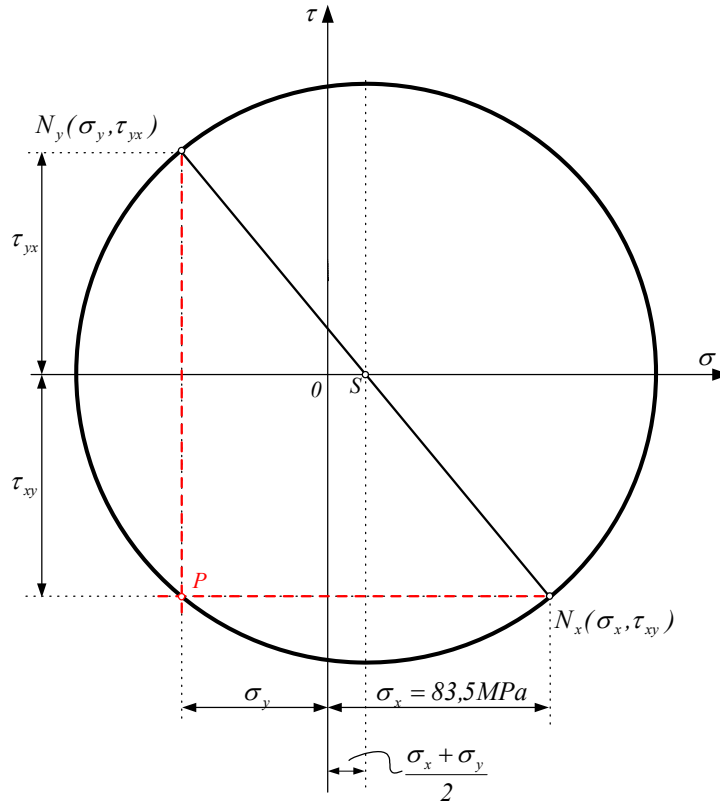


**GRAFIČKO RJEŠENJE**

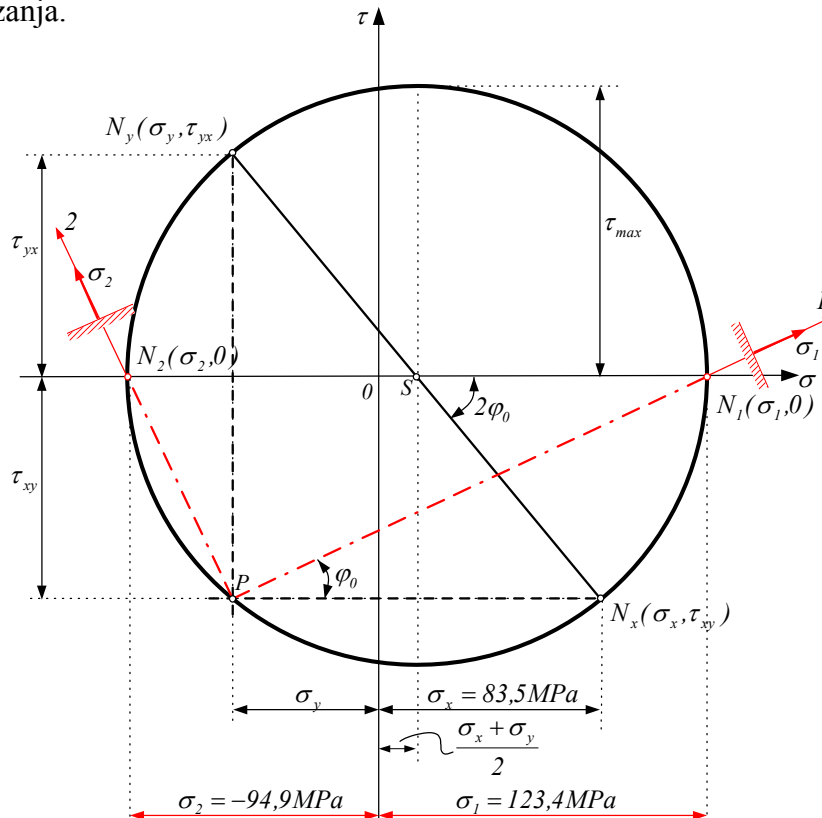
Konstrukcija Mohrove kružnice: U koordinatnom sustavu određujemo položaj točaka  $N_x$  ( $\sigma_x, \tau_{xy}$ ) i  $N_y$  ( $\sigma_y, \tau_{yx}$ ). Vodimo računa o predznaku posmičnih napreznja (posmična napreznja su pozitivna ako vanjsku normalu rotiramo u smjeru kazaljke na satu da bi se poklopila sa smjerom posmičnih napreznja). Dužina  $\vec{N_x N_y}$  promjer je na kojem konstruiramo Mohrovu kružnicu napreznja.



Određivanje pola Mohrove kružnice: Kroz točku  $N_x$  provlačimo paralelu s normalom x, a kroz točku  $N_y$  provlačimo paralelu s normalom y. Te se paralele sijeku na Mohrovoj kružnici u točki koja određuje pol Mohrove kružnice. Ako kroz pol povučemo bilo koju normalu, druga točka u kojoj ta normala siječe Mohrovu kružnicu naprezanja definira normalno i posmično naprezanje na ravninu čija je to normala.



Određivanje iznosa i smjera glavnih naprezanja: Točke  $N_1$  i  $N_2$  u kojima Mohrova kružnica naprezanja siječe os apscisu određuju veličine glavnih naprezanja (posmična naprezanja tj. ordinate tih točaka jednake su 0), a spojnice točaka  $N_1$  i  $N_2$  s polom određuju smjerove glavnih naprezanja.



Određivanje normalnog i posmičnog naprezanja na ravniku sa normalom  $n$  koja s osi  $x$  zatvara kut od  $60^\circ$ : Kroz pol Mohrove kružnice povlačimo paralelu s normalom  $n$ . Koordinate druge točke u kojoj taj pravac siječe kružnicu određuju veličine normalnog i posmičnog naprezanja na ravniku s normalom  $n$ .

