

ZAKRIVLJENI ŠTAPOVI

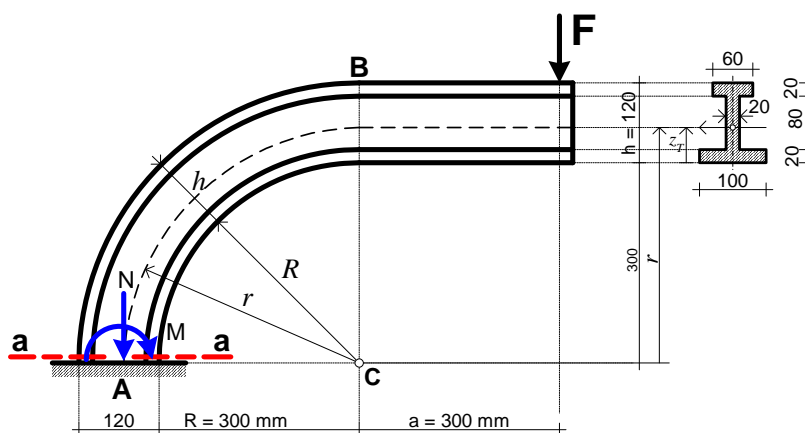
ZADATAK 10.

Za zakrivljeni štap opterećen prema slici, treba odrediti dopuštenu veličinu sile **F**, ako je zadano dopušteno naprezanje koje je jednako za rastezanje (vlak) i pritisak (tlak):

$$\sigma_{dop, vl} = \sigma_{dop, tl} = \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa}.$$

Za određenu veličinu sile treba izračunati i nacrtati dijagram normalnih naprezanja u kritičnom presjeku.

Izračunata maksimalna naprezanja u kritičnom presjeku usporediti s naprezanjima izračunatim po teoriji ravnih štapova.

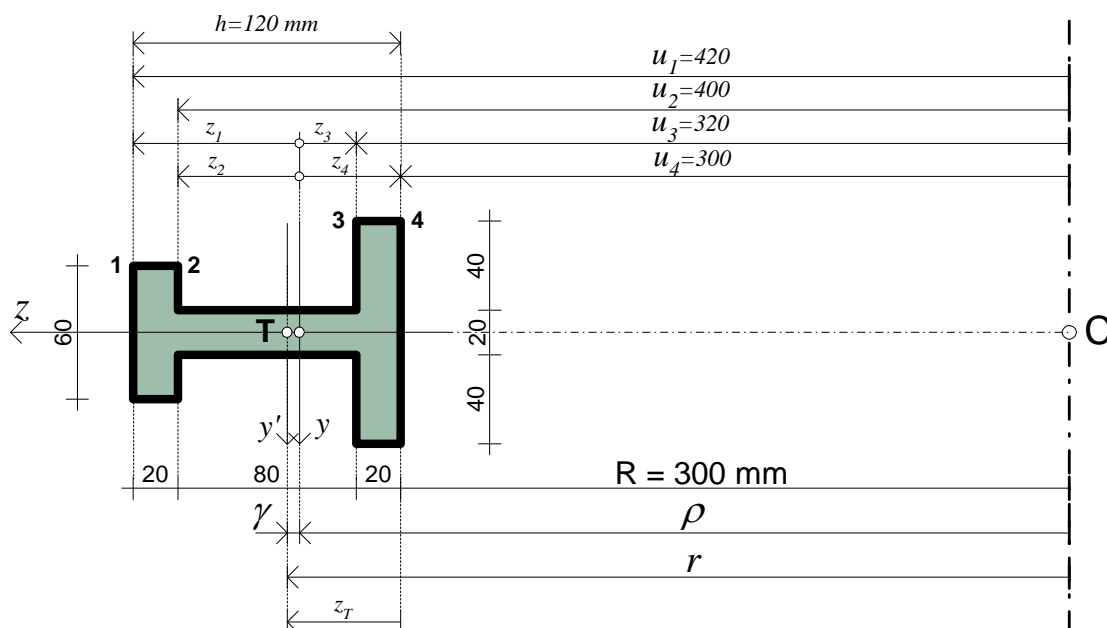


Presjek **a-a** je kritični presjek jer u tom presjeku moment savijanja **M** i uzdužna sila **N** istodobno dostižu najveću vrijednost:

$$M = +F \cdot (a + r) = +F \cdot 651,667 \text{ (Nmm)}$$

$$N = -F.$$

PRESJEK a - a



Površina poprečnog presjeka je: $A = 100 \cdot 20 + 80 \cdot 20 + 60 \cdot 20 = 4800 \text{ mm}^2$.

$$\text{Položaj težišta: } z_T = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{1}{4800} \cdot (100 \cdot 20 \cdot 10 + 80 \cdot 20 \cdot 60 + 60 \cdot 20 \cdot 110) = 51,667 \text{ mm}^2.$$

Polumjer zakrivljenosti osi štapa: $r = R + z_T = 351,667 \text{ kNm}$; $\frac{r}{h} = \frac{351,667}{120} = 2,93 < 5$.

Na dijelu **AB** štap je **velike zakrivljenosti**.

Polumjer zakrivljenosti neutralne osi:

$$\rho = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}} = \frac{4800}{100 \cdot \ln \frac{320}{300} + 20 \cdot \ln \frac{400}{320} + 60 \cdot \ln \frac{420}{400}} = \frac{4800}{13,844133} = 346,71727 \text{ mm} < r = 351,667 \text{ mm}.$$

Udaljenost neutralne osi od težišta presjeka: $\gamma = r - \rho = 4,9495 \text{ mm}$.

Statički moment površine poprečnog presjeka s obzirom na neutralnu os:

$$S_y = A \cdot \gamma = 23757,6 \text{ mm}^3.$$

Udaljenost karakterističnih točaka presjeka od neutralne osi:

$$z_1 = +(u_1 - \rho) = +(420 - 346,72) = +73,28 \text{ mm}$$

$$z_2 = +(u_2 - \rho) = +53,28 \text{ mm}$$

$$z_3 = -(\rho - u_3) = -26,72 \text{ mm}$$

$$z_4 = -(\rho - u_4) = -46,72 \text{ mm}.$$

Dopuštenu veličinu sile **F** odredit ćemo iz uvjeta da su maksimalne vrijednosti naprezanja u krajnjim vlaknima **1** i **4** presjeka **a-a** manja od dopuštenih naprezanja:

$$\sigma_{(1)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_1}{\rho + z_1} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_1}{u_1} = F \cdot \left(-\frac{1}{4800} + \frac{651,667}{23757,6} \cdot \frac{(+73,28)}{420} \right) \leq \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{(1)} = F \cdot (-2,0833 \cdot 10^{-4} + 47,8585 \cdot 10^{-4}) \leq \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa} \Rightarrow F \leq 34953,42 \text{ N} = \underline{34,95 \text{ kN}}$$

$$\sigma_{(4)} = \left| -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_4}{\rho + z_4} \right| = \left| -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_4}{u_4} \right| = F \cdot \left| -\frac{1}{4800} + \frac{651,667}{23757,6} \cdot \frac{(-46,72)}{300} \right| \leq \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{(4)} = F \cdot |-2,0833 \cdot 10^{-4} - 42,7174 \cdot 10^{-4}| \leq \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa} \Rightarrow F \leq 35713,73 \text{ N} = \underline{35,71 \text{ kN}}.$$

Mjerodavan je uvjet na rubu **1**, a za dopuštenu veličinu sile odabiremo manju vrijednost:

$$F_{dop} = 34,50 \text{ kN},$$

pa je moment savijanja u presjeku **a-a**:

$$M = 34,50 \cdot 10^3 \cdot 651,667 = 22,48 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 22,48 \text{ kNm}.$$

Za odabranu veličinu dopuštene sile računamo vrijednosti normalnih naprezanja u karakterističnim točkama presjeka i crtamo dijagram naprezanja.

$$\sigma_{(1)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_1}{u_1} = +157,90 \text{ MPa} \cong \sigma_{dop} = 160 \text{ MPa} \quad \sigma_{(2)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_2}{u_2} = +118,85 \text{ MPa}$$

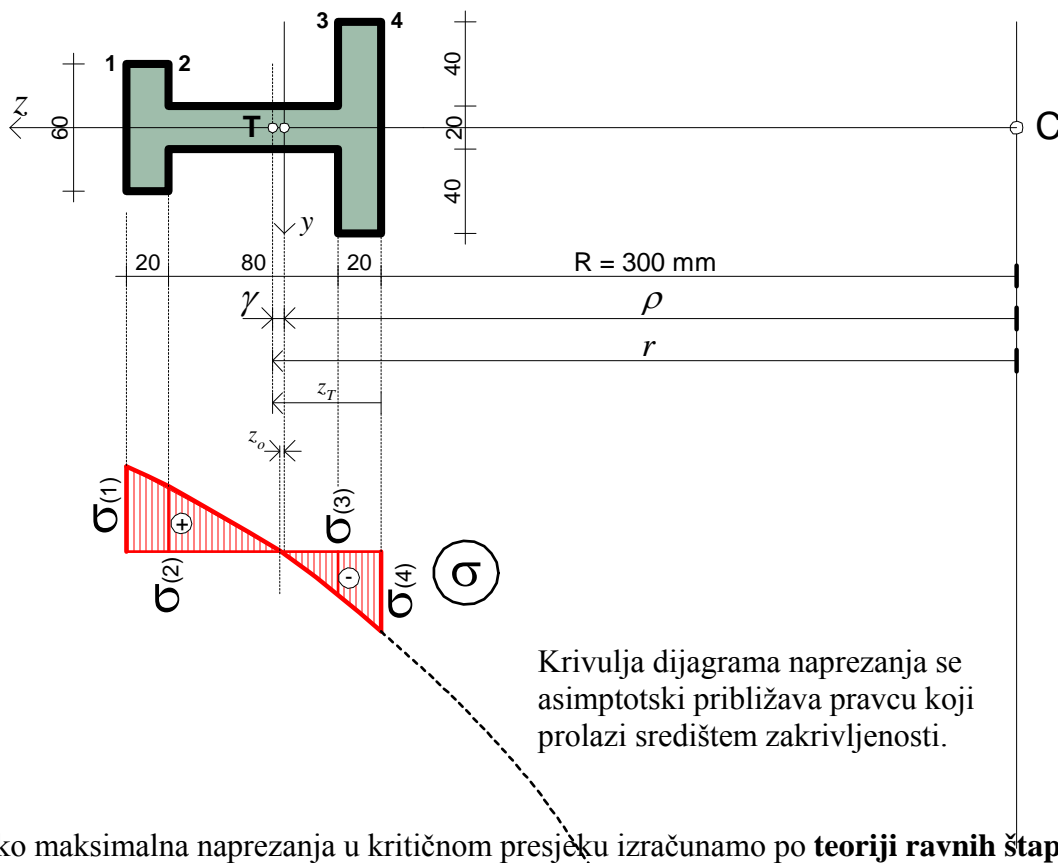
$$\sigma_{(3)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_3}{u_3} = -86,20 \text{ MPa} \quad \sigma_{(4)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{S_y} \cdot \frac{z_4}{u_4} = -154,55 \text{ MPa}.$$

Položaj neutralne osi za zajedničko djelovanje uzdužne sile $N = -F$ i momenta M u presjeku **a-a**:

$$z_o = -\gamma \cdot \frac{\rho}{\gamma + \frac{M}{N}} = -\gamma \cdot \frac{\rho}{\gamma + \frac{F \cdot (a+r)}{(-F)}} = -\gamma \cdot \frac{\rho}{\gamma - (a+r)} = \gamma \cdot \frac{\rho}{a+r-\gamma}$$

$$z_o = \gamma \cdot \frac{\rho}{a+r-\gamma} = 4,9495 \cdot \frac{346,71727}{300 + 351,667 - 4,9495} = +2,654 \text{ mm}.$$

PRESJEK a – a



Ako maksimalna naprezanja u kritičnom presjeku izračunamo po **teoriji ravnih štapova** dobit ćemo:

$$I_{y'} = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot 20 \cdot 41,667^2 + \frac{20 \cdot 80^3}{12} + 20 \cdot 80 \cdot 8,333^2 + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 60 \cdot 20 \cdot 58,333^2 = 8,627 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{I_{y'}} \cdot z'_1 = -7,1875 + \frac{22,48 \cdot 10^6}{8,627 \cdot 10^6} \cdot 68,333 = +170,87 \text{ MPa} \quad (\text{greška } +8,20 \%)$$

$$\sigma_{(4)} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{I_{y'}} \cdot z'_4 = -7,1875 + \frac{22,48 \cdot 10^6}{8,627 \cdot 10^6} \cdot (-51,667) = -141,82 \text{ MPa} \quad (\text{greška } -8,20 \%).$$