

MATEMATIKA III

11.2.2009.

A

1. Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine $l = 14$, toplinskog kapaciteta $\gamma = 12$ i koeficijenta provođenja $\delta = 48$ ako je inicijalna distribucija topline dana s $g(x) = \sin 2\pi x + 2x + 1$. Rubni uvjeti su: $u(0, t) = 1$ i $u(14, t) = 29$.
2. a) Teška žica duljine $l = \pi$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 100$ na lijevom kraju i ima linijsku gustoću $\rho = 100$. Drugi kraj je slobodan. Pronađite ravnotežni položaj žice ako je koeficijent elastičnosti sredstva $q = 0$.
b) Odredite ravnotežni oblik homogene kružne membrane radijusa $R = 4$ napete s napetošću $p = 10$ i površinske gustoće $\rho = 100$ ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 10r$ uz rubni uvjet $u|_{r=4} = 1$.
3. Metodom konačnih elemenata odredite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:

$$(x^2 u'(x))' - x = 0 \text{ na } [0, 4], h = 1 \text{ uz rubne uvjete } u(0) = u'(4) = 0.$$

4. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti oscilacija žice za prva četiri vremenska koraka:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ na } [0, 2] \text{ ako je } h = \tau = 0.5 \text{ uz rubne uvjete } u(0, t) = u(2, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.4 \\ 1, & 0.4 < x < 1.6 \\ 0, & 1.6 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{i } u(x, 0) = -\sin \frac{\pi}{2} x.$$