

## MATEMATIKA 2    15.6.2016.

1. (a) (9 bodova) Odredite ravnotežni položaj žice duljine 4, zanemarive mase, horizontalno napete utegom mase 10, koja je pričvršćena na oba kraja, nalazi se u sredstvu bez elastičnosti, te je smještena u polje sile gustoće  $f(x) = 120gx^2\vec{j}$ .
- (b) (5 bodova) Riješite običnu diferencijalnu jednačinu  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

2. (a) (7 bodova) Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \frac{\arccos(xy)}{\arcsin(xy)}.$$

Skicirajte prirodnu domenu funkcije  $f$ .

- (b) (5 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$ .

3. Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \psi(x \cdot y),$$

gdje je  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neka glatka funkcija.

- (a) (5 bodova) Pokažite da je funkcija  $f$  rješenje diferencijalne jednačine

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

- (b) (5 bodova) Ukoliko je  $\psi(t) = t^2 + 1$ , odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije  $f$  u točki  $(1, 2, ?)$ .

4. (12 bodova) Odredite površinu manjeg lika omeđenog kružnicom  $x^2 + y^2 = 2$  i parabolom  $y = x^2$ .

5. (12 bodova) Izračunajte integral

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4},$$

gdje je  $V$  tijelo omeđeno plohama  $x^2 + y^2 = e^2$ ,  $x^2 + y^2 = e^6$ ,  $z = -1$  i  $z = 2$ . Skicirajte tijelo.

6. Zadano je vektorsko polje na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  formulom

$$\vec{v} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

- (a) (7 bodova) Izračunajte  $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{v} d\vec{s}$ , gdje je  $\vec{\Gamma}$  pozitivno orijentirana zatvorena kružnica  $x^2 + y^2 = 1$ .

- (b) (5 bodova) Izračunajte  $\text{rot}(\vec{v})$ .

- (c) (2 bodova) Je li  $\vec{v}$  potencijalno?

7. (14 bodova) Izračunajte površinu dijela sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  koji se nalazi između ravnina  $y = -2$  i  $y = 2$ . Skicirajte plihu.

8. (12 bodova) Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{w} = 4y^3x\vec{i} - y^4\vec{j} + 4z\vec{k}$$

kroz zatvorenu plihu koja se sastoji od dijelova ploha  $x^2 + y^2 + z = 0$  i  $\sqrt{x^2 + y^2} - z = 6$ . Skicirajte plihu.