

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

α

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

- (a) Teška žica mase $m = 5$ duljine $l = 5$ i napetosti $p = 20$ nalazi se u homogenom sredstvu koeficijenta elastičnosti $q = 300$, te se deformira pod utjecajem vlastite težine. Odredite ravnotežni položaj žice ako su joj oba kraja pričvršćena. (9 bod.)

(b) Što je determinanta Wronskoga (Wronskijan) za dvije realne funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$? Dajte primjer dviju nekonstantnih realnih funkcija realne varijable čiji je Wronskijan jednak 0. (7 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x, y) = \frac{\ln(\operatorname{arctg}(x - 4))}{e^{x+y} - 1}$. (3 bod.)
- (b) Izračunajte $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 0)$ ako je $g(x, y) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{x-y}$. (3 bod.)
- (c) Definirajte zatvoren skup. Što znamo o slici (vrijednostima) neprekidne funkcije na zatvorenom i omeđenom skupu? (7 bod.)

3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2y^3 + x^2 - 3xy^2 + x$.

(9 bod.)

4. Izračunajte masu manjeg lika koji je omeđen krivuljama $x^2 + y^2 = 4$ i $x = |y|$, ako mu je plošna gustoća dana s $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte lik. (7 bod.)

5. (a) Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz,$$

gdje je Ω područje omeđenom plohama $z = 3 - (x^2 + y^2)$ i $z = 2x^2 + 2y^2$. Skicirajte područje integracije. (9 bod.)

(b) Što je srednja vrijednost funkcije tri varijable na zatvorenom i omeđenom skupu? Iskažite teorem srednje vrijednosti za funkcije tri varijable. (6 bod.)

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

β

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

1. (a) Riješite diferencijalnu jednačbu $y'' - 4y' = e^{2x} - 4$. (8 bod.)
- (b) Što je linearna diferencijalna jednačba drugog reda s konstantnim koeficijentima?
Kakva je struktura rješenja takve jednačbe? (7 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 2x)$. (3 bod.)
(b) Odredite

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

ako je $f(x, y) = 2x + 3y + \Phi(x^2 + y^3)$, gdje je $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatka funkcija. (5 bod.)

3. (a) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y \ln y$. (7 bod.)
- (b) Što znate o tangencijalnoj ravnini na graf glatke funkcije dviju varijabli u stacionarnoj točki? Ilustrirajte primjerom i skicom. (7 bod.)

4. Skicirajte manji od dva lika omeđena krivuljama $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ i $y = x$, te mu izračunajte površinu. (8 bod.)

5. (a) Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} xy \, dx \, dy \, dz,$$

gdje je Ω područje omeđeno plohama $z = 3 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte područje integracije. (9 bod.)

(b) Iskažite Steinerov teorem za tijelo u prostoru. (6 bod.)

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

γ

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

1. Riješite sljedeće diferencijalne jednačbe:

(a) $xy' = y + 3x^2 - 2x$ uz uvjet $y(1) = 3$, (4 bod.)

(b) $y'' - y' = -2 \sin x$. (5 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x, y) = \arccos(x + 1) - e^{\sqrt{y}}$. (3 bod.)
- (b) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x - y)$ u točki $T(1, 1, ?)$. (3 bod.)
- (c) Dajte po jedan primjer rotacijske i cilindrične plohe. Kako prepoznamo takve plohe iz jednadžbi u Kartezijevom koordinatnom sustavu? (7 bod.)

3. (a) Na krivulji $x^2 + y^2 = 2y$ odredite točku koja ima najmanji kvadrat udaljenosti do točke $(1, 0)$. Skicirajte zadanu krivulju. *(9 bod.)*
- (b) U kakvim točkama glatka funkcija dvije varijable može imati lokalne ekstreme? Dajte jedan primjer funkcije koja u takvoj točki ima lokalni minimum, te jedan primjer funkcije koja u takvoj točki nema lokalni ekstrem. *(7 bod.)*

4. (a) Neka je D trokut s vrhovima $(0, -1)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Izračunajte

$$\iint_D (x^2 + 2y) dx dy.$$

Skicirajte D . (8 bod.)

- (b) Opišite polarni koordinatni sustav, napišite formule prijelaza iz Kartezijevog u polarni te izvedite Jacobijan. (6 bod.)

5. Izračunajte moment inercije u odnosu na z -os tijela gustoće

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-1},$$

omeđenog plohami $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ i $z = 1$. Skicirajte tijelo.

(8 bod.)

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

δ

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

1. Riješite sljedeće diferencijalne jednačbe:

(a) $y' + y = 2e^x$ uz uvjet $y(0) = 3$, (4 bod.)

(b) $y'' - 4y' + 3y = 0$ uz uvjete $y(0) = 6$ i $y'(0) = 10$. (4 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodno područje definicije funkcije

$$f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{y^2 - x}.$$

(3 bod.)

- (b) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y} + 1$ koja je okomita na pravac $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

(5 bod.)

- (c) Definirajte parcijalnu derivaciju funkcije dvije varijabli $f(x, y)$ u točki (x, y) po varijabli x . Koja je geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija funkcije dviju varijabli u jednoj točki?

(7 bod.)

3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(8 bod.)

4. (a) Izračunajte površinu najvećeg lika koji je omeđen krivuljama $x^2 + y^2 = -4y$ i $y = -|x|$.
Skicirajte lik. (8 bod.)
- (b) Što je srednja vrijednost funkcije dviju varijabli na zatvorenom i omeđenom skupu?
Iskažite teorem srednje vrijednosti za funkcije dviju varijabli. (7 bod.)

5. (a) Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} 2y \, dx \, dy \, dz,$$

gdje je Ω područje omeđeno plohama $z = 8$, $z = 2x^2$, $y = 0$ i $y = 2$. Skicirajte područje integracije. (8 bod.)

(b) Koji je odnos momenta inercije homogenog valjka s obzirom na os i s obzirom na izvodnicu? Obrazložite odgovor. (6 bod.)

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

€

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

1. (a) Tijelo se za 30 minuta ohladi sa 115 stupnjeva na 65 stupnjeva. Nakon koliko će se vremena to tijelo ohladiti na 40 stupnjeva, ako je temperatura zraka koji ga okružuje konstantna i jednaka 15 stupnjeva, a brzina kojom tijelo mijenja temperaturu je proporcionalna razlici temperature tijela i temperature okolnog zraka? (9 bod.)
- (b) Napišite općeniti oblik linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Kako izgleda rješenje takve jednadžbe? (7 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodno područje definicije funkcije

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2) + \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

(4 bod.)

- (b) Izračunajte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0)$ ako je $f(x, y) = x\sqrt{y^2 - x}$.

(4 bod.)

3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - 2y + 3$. (7 bod.)

4. (a) Izračunajte površinu lika koji je omeđen krivuljama $x^2 + y^2 = 4$ i $y = |x|$, a nalazi se iznad x -osi. Skicirajte lik. (7 bod.)
- (b) Iskažite Steinerov teorem za lik u ravnini. (7 bod.)

5. (a) Izračunajte masu tijela omeđenog plohama $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$ i $z = 0$, ako mu je gustoća dana s $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. Skicirajte tijelo. (9 bod.)
- (b) Napišite formule prijelaza između cilindričnog i Kartezijevog koordinatnog sustava. Skicirajte koordinatne plohe za cilindrični sustav. (6 bod.)

Kolokvij iz Matematike 2

9. svibnja 2018.

IME I PREZIME:

Grupa na vježbama:

Asistent:

§

Bodovi: *Zadaci:* _____ *Teorija:* _____ *Ukupno:* _____

1. Riješite diferencijalnu jednačinu $y'' - y' - 2y = xe^{2x}$. (8 bod.)

2. (a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \frac{\ln(\operatorname{arctg}(x^2 - y^2))}{\ln(\operatorname{arctg}(2 - y))}.$$

(4 bod.)

- (b) U kojim sve točkama funkcija $g(x, y) = x^2 + y^2 - x - 2y + 3$ ima tangencijalne ravnine okomite na z -os?

(4 bod.)

3. (a) Na krivulji $x^2 + y^2 = 4x$ odredite točku koja ima najveći kvadrat udaljenosti do točke $(1, 0)$. Skicirajte zadanu krivulju. *(8 bod.)*
- (b) Što je stacionarna točka funkcije dvije varijable? U kojim još točkama funkcija može postići ekstremnu vrijednost? Dajte primjer funkcije na $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (ili nekom drugom području) koja postiže maksimum, ali ne u stacionarnoj točki. *(7 bod.)*

4. (a) Neka je D lik omeđen koordinatnim osima i pravcem $y = -x + 1$. Izračunajte

$$\iint_D e^x dx dy.$$

Skicirajte D . (8 bod.)

- (b) Što su koordinatne krivulje za polarni sustav u ravnini? Skicirajte ih. Napišite Jacobijan, te formule prijelaza između Kartezijevog i polarnog sustava. (7 bod.)

5. (a) Izračunajte masu tijela omeđenog plohama $z = 7 - x^2 - y^2$ i $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, ako mu je gustoća dana formulom $g(x, y, z) = 3y^2$. Skicirajte tijelo. (8 bod.)
- (b) Opišite sferni koordinatni sustav, napišite formule prijelaza iz Kartezijevog u sferni sustav te Jacobijan. (6 bod.)