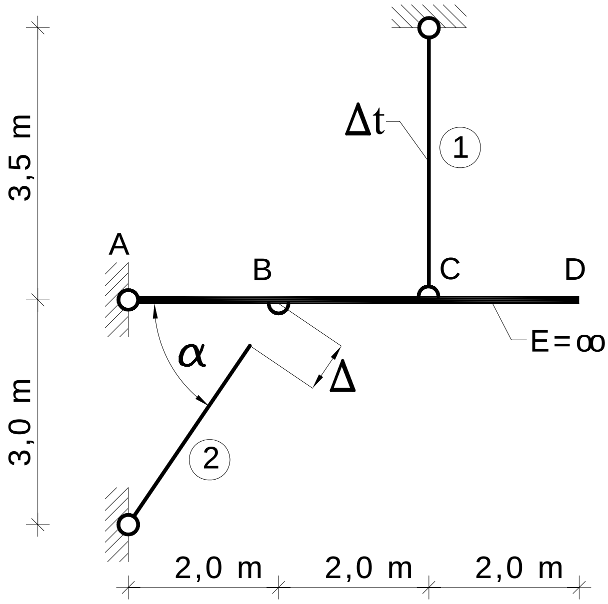
ZADATAK:

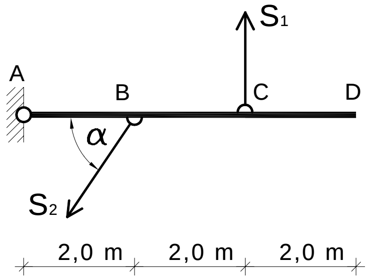
Apsolutno kruta greda AD pričvršćena je zglobno na podlogu u točki A i štapom 1 u točki C. Štap 2 je izveden kraći za *Δ=1,5 mm*. Treba odrediti naprezanja u štapovima 1 i 2 te pomak točke D ako se štap 2 spoji s gredom u točki B a istodobno se promijeni temperatura u štapu 1 za *Δt= - 50 K*. Moduli elastičnosti štapova 1 i 2 su jednaki i iznose: $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5 \ MPa$. Površine poprečnih presjeka štapova 1 i 2 iznose: $A_1 = 320 \ mm^2$, $A_2 = 440 \ mm^2$. Koeficijent linearnog toplinskog širenja jest: $\alpha_t = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \ K^{-1}$.

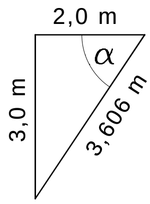


RJEŠENJE:

Da bi odredili naprezanja i pomake potrebno je odrediti sile u štapovima 1 i 2. Nakon spajanja štapa 2 s gredom sustav postaje jedanput statički neodređen, što znači da sile u štapovima ne možemo odrediti samo iz uvjeta ravnoteže, već moramo promatrati i način na koji se sustav deformira - time ćemo dobiti uvjet deformacije.

Uz pretpostavku vlačnih sila u štapovima 1 i 2 dobivamo iz uvjeta ravnoteže:



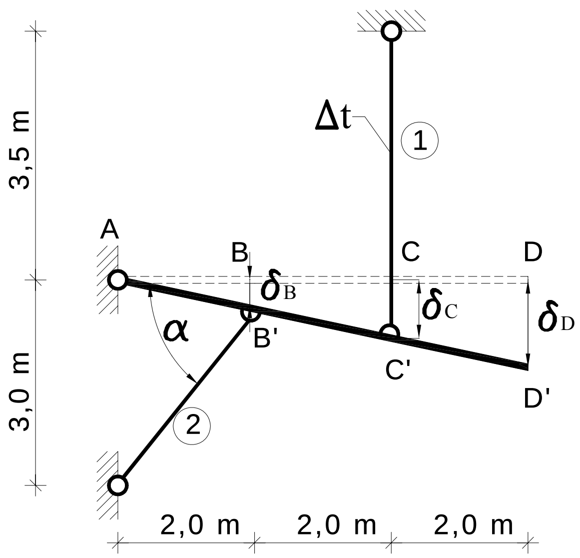


$$\sum M_A = 0$$

$$S_1 \cdot 4{,}0 - S_2 \sin\alpha \cdot 2{,}0 = 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2} S_2 \sin\alpha \qquad (1)$$

Promatrajući deformaciju sustava nakon spajanja štapa 2 s gredom i istodobne promjene temperature u štapu 1 možemo iz plana pomaka postaviti uvjet deformacije.



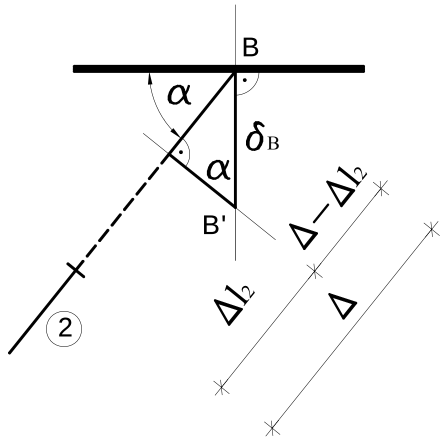
Iz sličnosti trokuta:

$$\frac{\delta_C}{4{,}0} = \frac{\delta_B}{2{,}0} \Rightarrow \delta_B = \frac{1}{2}\delta_C \qquad (2)$$

Pomak točke C jednak je produljenju štapa 1 od sile S_1 i promjene temperature Δt i iznosi:

$$\delta_C = \frac{S_1 l_1}{EA_1} + \alpha_t \Delta t\, l_1 \qquad (3)$$

Pomak točke B možemo prikazati promatrajući deformaciju štapa 2 (u okolici točke B):



$$\delta_B = \frac{\Delta - \Delta l_2}{\sin\alpha} = \frac{\Delta - \dfrac{S_2 l_2}{EA_2}}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

Uzimajući u obzir jednadžbe (2), (3) i (4) dobivamo:

$$\frac{\Delta - \dfrac{S_2 l_2}{EA_2}}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1 l_1}{EA_1} + \alpha_t \Delta t\, l_1\right) \qquad (5)$$

Uvrštavajući jednadžbu (1) u jednadžbu (5) dobivamo jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom iz koje dobijemo S_2:

$$\Delta - \frac{S_2 l_2}{EA_2} = \frac{S_2 \sin^2\alpha\, l_1}{4EA_1} + \frac{\sin\alpha}{2}\alpha_t \Delta t\, l_1 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{\Delta - \dfrac{\sin\alpha}{2}\alpha_t \Delta t\, l_1}{\dfrac{l_2}{EA_2} + \dfrac{\sin^2\alpha\, l_1}{4EA_1}} = 47{,}06\,kN$$

Iz jednadžbe (1) dobivamo:

$$S_1 = \frac{1}{2} S_2 \sin\alpha = 19{,}58\ kN$$

Naprezanja u štapovima 1 i 2 jednaka su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} = \frac{19580\ N}{320\ mm^2} = 61{,}19\ MPa\,; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} = \frac{47060\ N}{440\ mm^2} = 106{,}95\ MPa$$

Pomak točke D možemo dobiti iz pomaka točke C (produljenja štapa 1):

$$\frac{\delta_C}{4{,}0} = \frac{\delta_D}{6{,}0} \Rightarrow \delta_D = \frac{3}{2}\delta_C$$

$$\delta_D = \frac{3}{2}\left(\frac{S_1 l_1}{EA_1} + \alpha_t\, \Delta t\ l_1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{19580 \cdot 3500}{2 \cdot 10^5 \cdot 320} + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (-50) \cdot 3500\right)$$

$$\delta_D = \frac{3}{2}(1{,}071 - 2{,}1) = -1{,}54\,mm$$