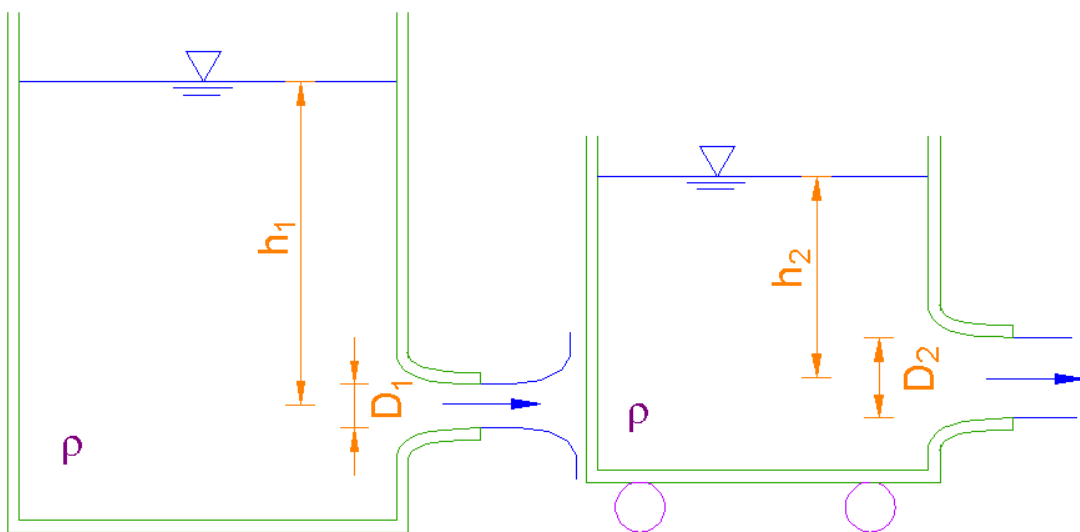


ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

1. Koja je minimalna visina (razina) vode iznad otvora u rezervoaru h_1 potrebna da se onemogući pokretanje kolica u lijevu stranu odnosno osigura mirovanje kolica? Pretpostavlja se da nema djelovanja sile trenja na kolica, da se radi o idealnoj tekućini i da su $h_{1,2} \gg D_{1,2}$.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $h_2 = 1 \text{ m}$; $D_1 = 0,5D_2$



$$\rho Q_2 v_2 = \rho Q_1 v_1$$

$$A_2 v_2 \cdot v_2 = A_1 v_1 \cdot v_1$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

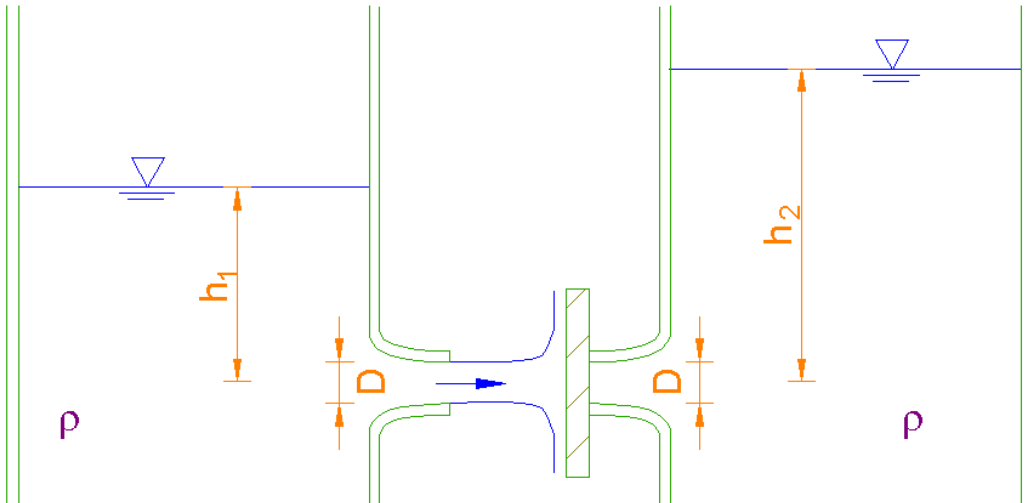
$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$\frac{D_2^2 \pi}{4} \cdot 2gh_2 = \frac{D_1^2 \pi}{4} \cdot 2gh_1$$

$$h_1 = \frac{D_2^2}{D_1^2} h_2 = \frac{D_2^2}{0,5^2 \cdot D_2^2} \cdot 1 = 4 \text{ m}$$

2. Koja je minimalna visina (razina) vode iznad otvora u rezervoaru h_1 potrebna u lijevom rezervoaru kako bi ravna ploča ostala priljubljena uz izlaznu cijev desnog rezervoara? Izlazne cijevi iz lijeve i desne posude jednake su poprečne površine. Pretpostavlja se da se radi o idealnoj tekućini i da su $h_{1,2} \gg D_{1,2}$. Zanimariti težinu ploče i njeno trenje o cijev desnog rezervoara.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $h_2 = 4 \text{ m}$

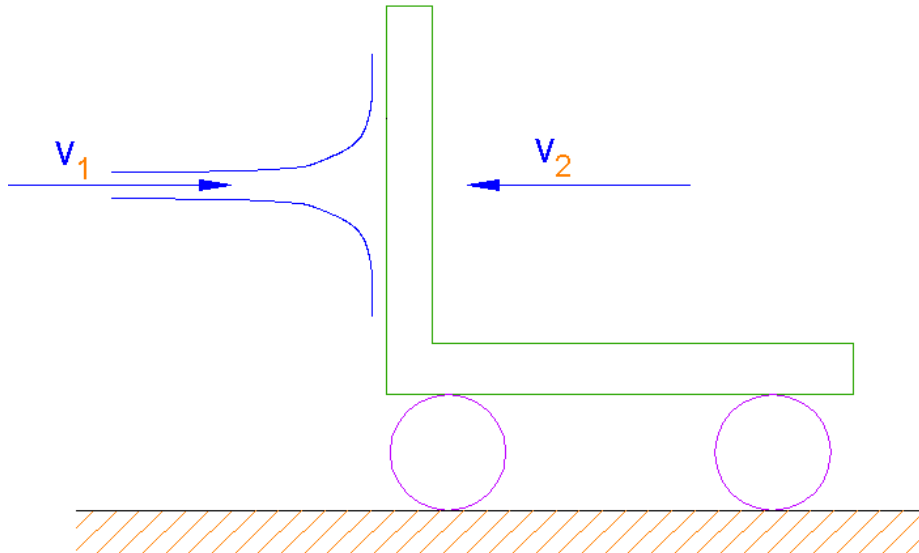


$$\rho Q_1 v_1 = \rho g \frac{D^2 \pi}{4} h_2$$

$$\rho \frac{D^2 \pi}{4} 2gh_1 = \rho g \frac{D^2 \pi}{4} h_2$$

$$h_1 = \frac{h_2}{2} = 2 \text{ m}$$

3. Mlaz protoka $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ izlazi iz cijevi brzinom $v_1 = 3 \text{ m/s}$, te se približava prednjoj plohi kolica. Kolica se kreću jednolikom brzinom $v_2 = 1 \text{ m/s}$, suprotnom od smjera nailaska mlaza. Kolika je potrebna snaga pogona kolica koja omogućuje takvo kretanje, ako se pretpostavi da je tekućina gustoće $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ idealna te se zanemari trenje između kolica i podloge?



$$A_{mlaz} = \frac{Q}{v_1} = \frac{3}{3} = 1 \text{ m}^2$$

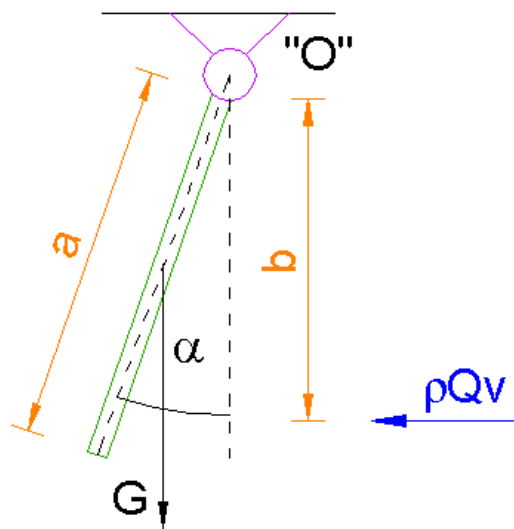
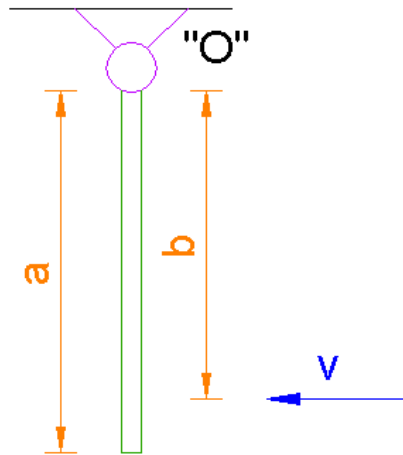
$$F_{kolica} = F_{mlaza}$$

$$\frac{P_{kolica}}{v_2} = \rho A_{mlaz} (v_1 + v_2)^2$$

$$P_{kolica} = \rho A_{mlaz} (v_1 + v_2)^2 \cdot v_2 = 1000 \cdot 1 \cdot 4^2 \cdot 1$$

$$P_{kolica} = 16 \text{ kW}$$

4. Ploča dužine $a = 80$ cm obješena je zglobno u točki "O" i izložena je djelovanju hidrauličkog mlaza na udaljenosti $b = 65$ cm od osi zgloba. Ploča ima masu $m = 40$ kg. Iz sapnice voda istječe brzinom $v = 12$ m/s čime je ostvaren protok $Q = 8,5$ l/s. potrebno je izračunati kut otklona od vertikale uslijed djelovanja mlaza. Pretpostaviti bezviskozno strujanje, odnosno zanemariti trenje između ploče i mlaza.



$$\sum M_{("O")} = 0$$

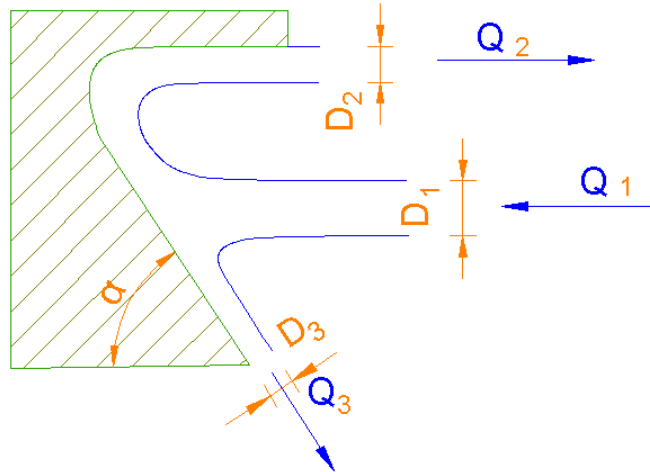
$$\rho Q v \cdot b = m g \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha$$

$$1000 \cdot 0,0085 \cdot 12 \cdot 0,65 = 40 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,8}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 0,42 \quad \rightarrow \quad \alpha = 24,99^\circ$$

5. Kolika je ukupna sila mlaza protoka Q_1 , kružnog protjecajnog presjeka, promjera D_1 na strukturu sa slike u horizontalnoj ravnini? Pretpostavlja se da je tečenje tekućine gustoće ρ bezviskozno.

Zadano je : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D_1 = 0,2 \text{ m}$; $D_2 = 0,15 \text{ m}$; $Q_1 = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$; $\alpha = 60^\circ$



$$v_1 = \frac{Q_1 \cdot 4}{D_1^2 \pi} = 4,77 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (\text{jednadžba kontinuiteta})$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = v \quad (\text{idealno tečenje})$$

$$A_1 \cdot v = A_2 \cdot v + A_3 \cdot v$$

$$A_3 = A_1 - A_2$$

$$A_3 = \frac{D_1^2 \pi}{4} - \frac{D_2^2 \pi}{4} = \frac{0,2^2 \pi}{4} - \frac{0,15^2 \pi}{4} = 0,0314 - 0,0177 = 0,0137 \text{ m}^2$$

$$F_x = -\rho Q_1 v - \rho Q_2 v - \rho Q_3 v \cdot \cos \alpha$$

$$F_x = -\rho A_1 v^2 - \rho A_2 v^2 - \rho A_3 v^2 \cdot \cos \alpha$$

$$F_x = -\rho \cdot v^2 [A_1 + A_2 + A_3 \cdot \cos \alpha] = -1000 \cdot 4,77^2 [0,0314 + 0,0177 + 0,0137 \cdot 0,5]$$

$$F_x = -1273,0 \text{ N}$$

$$F_y = \rho Q_3 v \cdot \sin 60^\circ$$

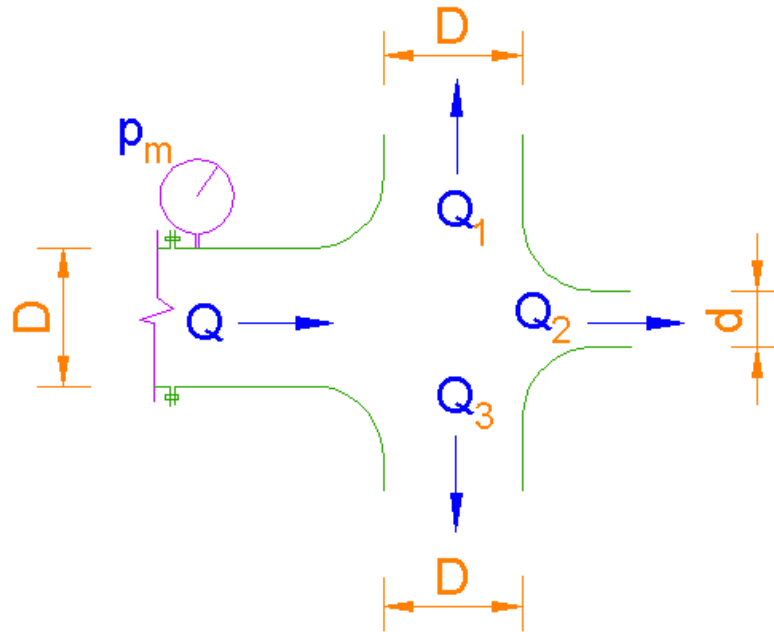
$$F_y = \rho A_3 v^2 \cdot \sin 60^\circ = 1000 \cdot 0,0137 \cdot 4,77^2 \cdot 0,866$$

$$F_y = 269,9 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1301,3 \text{ N}$$

6. Potrebno je odrediti ukupnu silu na spojno sredstvo sa kojim je račva pričvršćena na cjevovod u horizontalnoj ravni. Strujanje je pretpostavljeno kao bezviskozno. Voda nakon račve istječe u atmosferu. U osi dovodne cijevi izmjereno je tlak p_m na tlakomjeru (manometru).

Zadano je: $D = 200 \text{ mm}$; $d = 100 \text{ mm}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $p_m = 19,62 \text{ kPa}$;
 $Q = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$; $Q_2 = 0,5Q$; $Q_1 = Q_3 = 0,25Q$



$$v = \frac{Q}{\frac{D^2 \pi}{4}} = \frac{0,1}{\frac{0,2^2 \pi}{4}} = 3,18 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{0,5 \cdot Q}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{\frac{0,1^2 \pi}{4}} = 6,37 \text{ m/s}$$

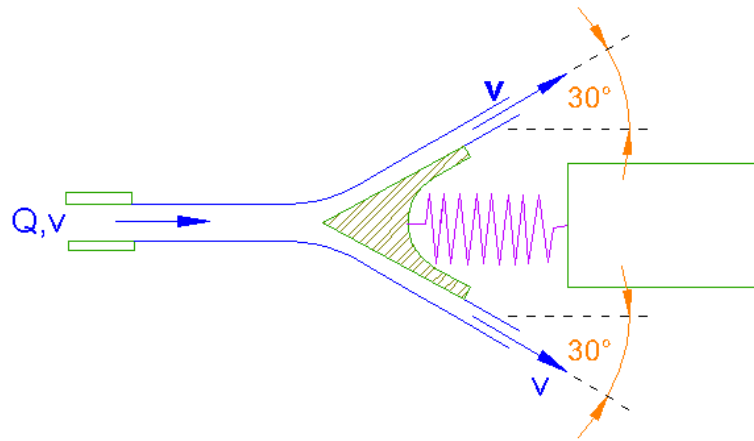
$$F_x = p_m \cdot \frac{D^2 \pi}{4} + \rho \cdot Q \cdot v - \rho \cdot Q_2 \cdot v_2 = 19,62 \cdot \frac{0,2^2 \pi}{4} + 1 \cdot 0,1 \cdot 3,18 - 1 \cdot 0,05 \cdot 6,37$$

$$F_x = 0,616 \text{ kN}$$

$$F_y = 0 \text{ kN}$$

7. Potrebno je odrediti gustoću tekućine izlaznog mlaza koji nailazi na tijelo oblika prizme prikazanog u presjeku na slici koje je spojeno oprugom na nepomičnu podlogu. Mlaz izaziva deformaciju opruge krutosti $k = 1000 \text{ N/m}$ od $\Delta l = 0,5 \text{ m}$.

Zadano je: $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$; $v = 3 \text{ m/s}$; $\alpha = 30^\circ$

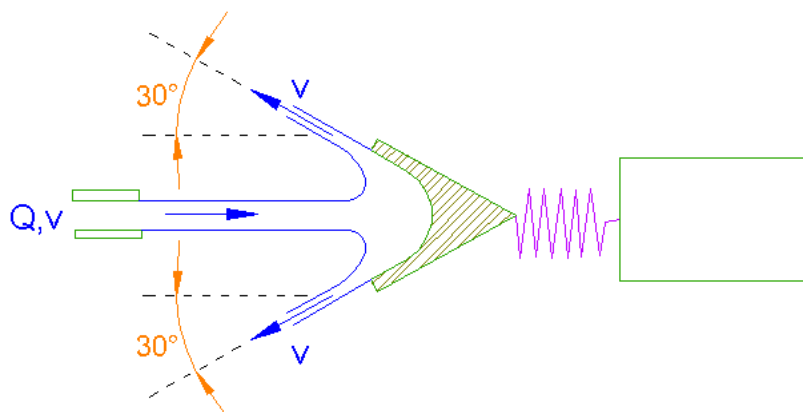


$$R_{opr} = k \cdot \Delta l = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N}$$

$$\rho Qv - 2\rho \frac{Q}{2} v \cos 30^\circ = R \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{R}{Qv - Qv \cos 30^\circ} = 1244,0 \text{ kg/m}^3$$

8. Potrebno je odrediti gustoću tekućine izlaznog mlaza koji nailazi na tijelo oblika prizme prikazanog u presjeku na slici koje je spojeno oprugom na nepomičnu podlogu. Mlaz izaziva deformaciju opruge krutosti $k = 1000 \text{ N/m}$ od $\Delta l = 0,5 \text{ m}$.

Zadano je: $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$; $v = 3 \text{ m/s}$; $\alpha = 30^\circ$

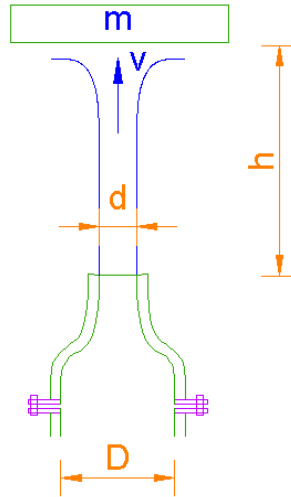


$$R_{opr} = k \cdot \Delta l = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N}$$

$$\rho Qv + 2\rho \frac{Q}{2} v \cos 30^\circ = R \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{R}{Qv + Qv \cos 30^\circ} = 89,32 \text{ kg/m}^3$$

9. Uteg mase $m = 10$ kg uravnotežen (pridržavan) je mlazom kao na slici. Potrebno je odrediti sile u spojnom sredstvu sapnice. Pretpostaviti da vertikalni mlaz zadržava pravilan presjek promjera d sve do udara u uteg i da se radi o idealnoj tekućini.

Zadano je : $\rho = 1000$ kg/m³; $D = 0,1$ m; $d = 0,03$ m; $h = 2$ m;



$\rho Q_h v_h = mg$ (protok Q_h je manji od protoka kroz cijev i sapnicu i, da nema utega, smanjivao bi se sve do najviše točke dosega mlaza, gdje bi iznosio nula)

$$\rho \frac{d^2 \pi}{4} v_h^2 = mg \quad \rightarrow \quad v_h = \sqrt{\frac{4mg}{\rho d^2 \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 9,81}{1000 \cdot 0,03^2 \pi}} = 11,78 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_d^2}{2g} = \frac{v_h^2}{2g} + h = \frac{11,78^2}{2 \cdot 9,81} + h = 7,07 + 2 = 9,07 \text{ m} \quad v_d \text{ (brzina na izlazu iz sapnice)}$$

$$v_d = \sqrt{2 \cdot g \cdot 9,07} = 13,34 \text{ m/s}$$

$$Q = v_d \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 13,34 \cdot \frac{0,03^2 \pi}{4} = 0,0094 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{protok kroz cijev})$$

$$v_D = \frac{Q \cdot 4}{D^2 \pi} = \frac{0,0094 \cdot 4}{0,1^2 \pi} = 1,2 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_D^2}{2g} = \frac{1,2^2}{2 \cdot 9,81} = 0,07 \text{ m}$$

$$\frac{v_d^2}{2g} = \frac{v_D^2}{2g} + \frac{p_D}{\rho g} \quad (\text{zanemaruje se visinska razlika između presjeka D i d})$$

$$\frac{p_D}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_D^2}{2g} = 9,07 - 0,07 = 9,0 \text{ m}$$

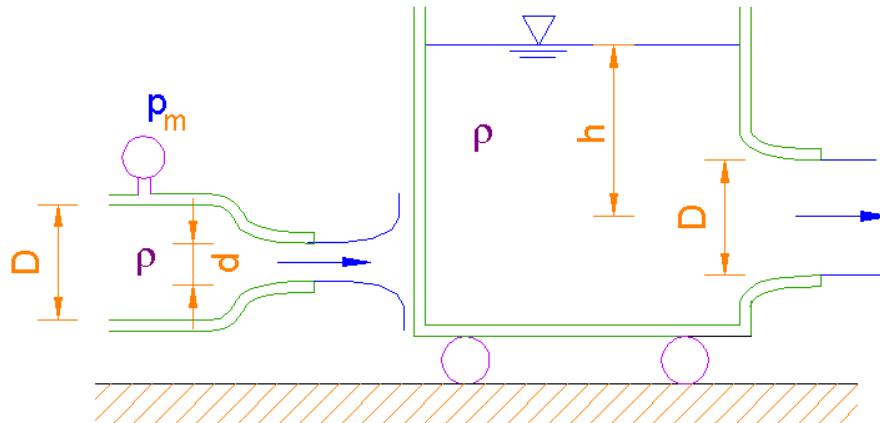
$$p_D = \rho \cdot g \cdot 9,0 = 1 \cdot 9,81 \cdot 9,0 = 88,29 \text{ kPa}$$

$$F_{sp.sr.} = \rho Q v_D + p_D \frac{D^2 \pi}{4} - \rho Q v_d = 1 \cdot 0,0094 \cdot 1,2 + 88,29 \cdot \frac{0,1^2 \pi}{4} - 1 \cdot 0,0094 \cdot 13,34$$

$$F_{sp.sr.} = 0,58 \text{ kN}$$

10. Koliko je očitavanje tlaka na manometru p_m , ako su kolica u mirovanju? Zanimaruje se trenje između podloge i kotača te se pretpostavlja da je strujanje bezviskozno.

Zadano je : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $d = 0,05 \text{ m}$; $D = 0,1 \text{ m}$; $h = 5 \text{ m}$



$$\rho v_d^2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \rho v_{D \text{ kolica}}^2 \frac{D^2 \pi}{4} \quad / \cdot \frac{4}{\rho \pi} \quad (\text{ravnoteža sila koje djeluju na kolica})$$

$$v_d^2 \cdot 0,05^2 = (\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5})^2 \cdot 0,1^2$$

$$v_d = 19,81 \text{ m/s}$$

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot v_{D \text{ cijev}} = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v \quad (\text{jednadžba kontinuiteta})$$

$$\frac{0,1^2 \pi}{4} \cdot v_{D \text{ cijev}} = \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot 19,81$$

$$v_{D \text{ cijev}} = 4,95 \text{ m/s}$$

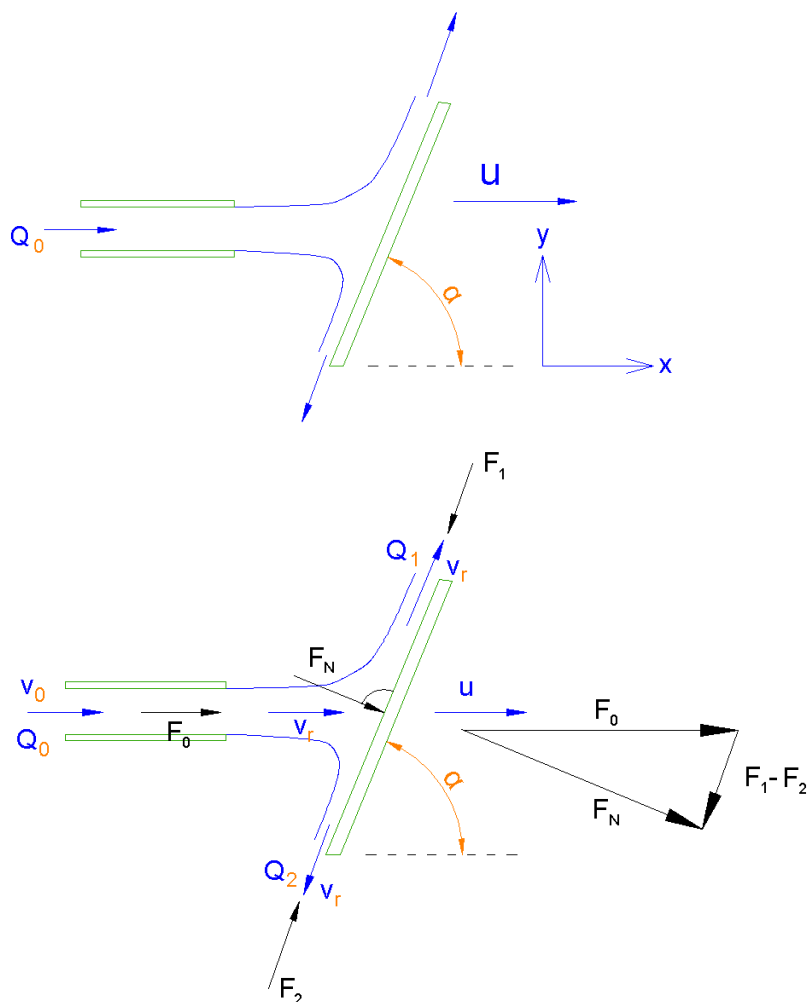
$$\frac{v_{D \text{ cijev}}^2}{2g} + \frac{p_m}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} \quad (\text{zanemaruju se gubitci na suženju})$$

$$\frac{p_m}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_{D \text{ cijevi}}^2}{2g} = 20,00 - 1,25 = 18,75 \text{ m}$$

$$p_m = 18,75 \cdot 1 \cdot 9,81 = 183,94 \text{ kPa}$$

11. Mlaz protoka $Q_0 = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ izlazi iz cijevi brzinom $v_0 = 40 \text{ m/s}$ i udara u ravnu, koso položenu ploču kao na slici. Ploča se kreće jednolikom brzinom $u = 13 \text{ m/s}$ u smjeru mlaza Q_0 . Potrebno je odrediti komponente sile F_x i F_y kojom mlaz djeluje na ploču. Pretpostavlja se bezviskozno strujanje.

Zadano je : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\alpha = 60^\circ$



$$A_0 = \frac{Q_0}{v_0} = \frac{0,05}{40} = 0,00125 \text{ m}^2$$

$v_r = v_0 - u$ (brzina kojom mlaz udara u ploču koja se giba)

$F_0 = \rho A_0 (v_0 - u)^2$ (sila koja nastaje promjenom količine gibanja pri udaru mlaza)

$$F_N = \rho A_0 (v_0 - u)^2 \cdot \sin 60^\circ = 1000 \cdot 0,00125 \cdot 27^2 \cdot \sin 60^\circ = 789,16 \text{ N}$$

$F_1 = \rho Q_1 (v_0 - u)$; $F_2 = \rho Q_2 (v_0 - u)$ (brzina mlazova Q_1 i Q_2 je jednaka udarnoj brzini mlaza v_r zbog pretpostavke o idealnom strujanju)

Sila F_N nastala promjenom količine gibanja mlaza je okomita na ploču jer nema trenja između mlaza i ploče (pretpostavljeno je bezviskozno strujanje).

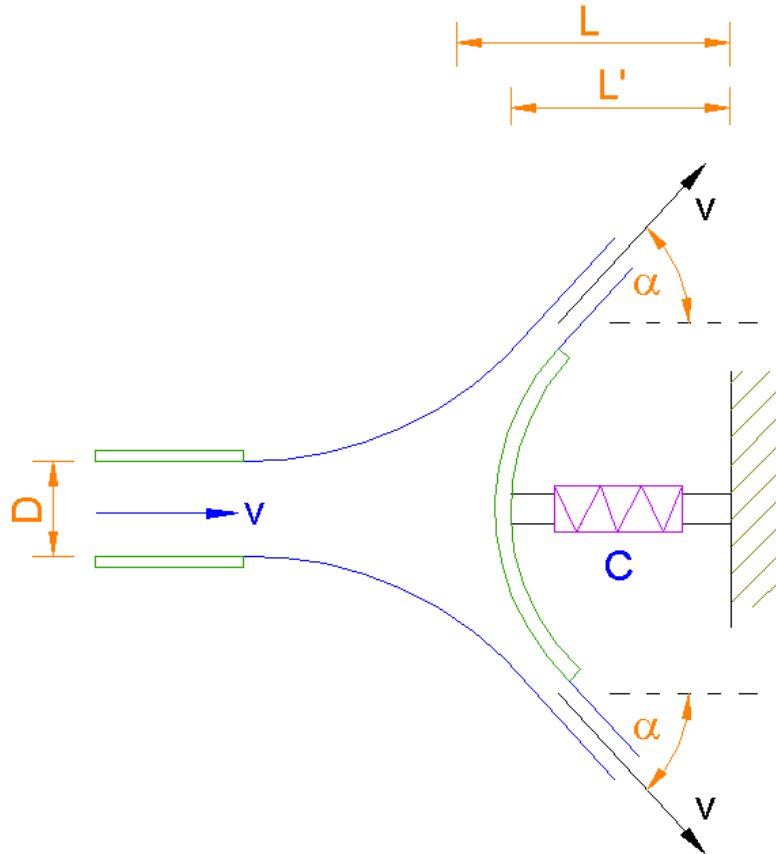
$$F_x = F_N \cdot \sin 60^\circ = 789,16 \cdot \sin 60^\circ = 683,43 \text{ N}$$

$$F_y = F_N \cdot \cos 60^\circ = 789,16 \cdot \cos 60^\circ = 394,58 \text{ N}$$

12. Mlaz idealne tekućine gustoće ρ istječe iz otvora promjera D brzinom v . Uz pretpostavku da je problem dvodimenzionalan i u horizontalnoj ravnini treba odrediti konstantu krutosti opruge C za slučaj sa slike a) i b). L je dužina opruge u neopterećenom stanju, a L' je dužina opruge uslijed djelovanja mlaza vode na zakrivljenu ploču. Sila i deformacija opruge ΔL nalaze se u linearnom odnosu $F_{opr} = \Delta L \cdot C$.

Zadano je : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\alpha = 45^\circ$; $L = 1 \text{ m}$; $L' = 0,8 \text{ m}$; $D = 0,2 \text{ m}$; $v = 1 \text{ m/s}$

a)



$$Q = v \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = 1 \cdot \frac{0,2^2 \pi}{4} = 0,0314 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$F_x = \rho Q v - \rho \frac{Q}{2} v \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 = 1000 \cdot 0,0314 (1 - 1 \cdot \cos 45^\circ) = 9,2 \text{ N}$$

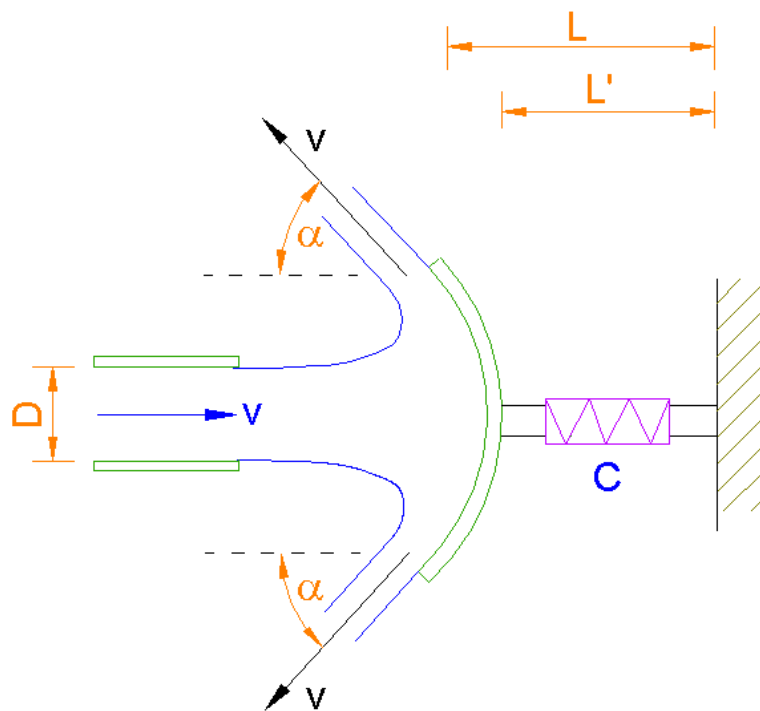
$$F_x = F_{opr}$$

$$F_{opr} = C \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = L - L' = 1 - 0,8 = 0,2 \text{ m}$$

$$C = \frac{F_{opr}}{\Delta L} = \frac{9,2}{0,2} = 45,5 \text{ N/m}$$

b)



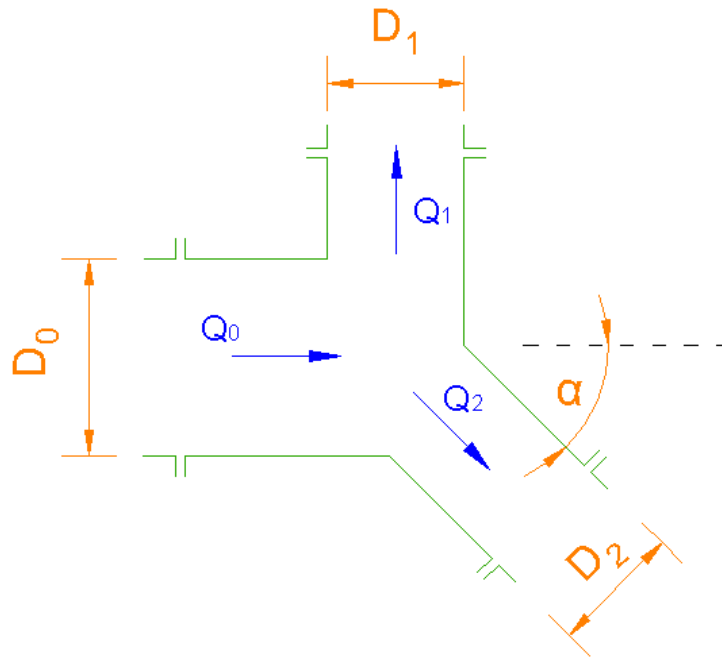
$$F_x = \rho Qv + \rho \frac{Q}{2} v \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 = 1000 \cdot 0,0314 (1 + 1 \cdot \cos 45^\circ) = 53,60 \text{ N}$$

$$F_x = F_{opr}$$

$$C = \frac{F_{opr}}{\Delta L} = \frac{53,60}{0,2} = 268,02 \text{ N/m}$$

13. Račva je postavljena u horizontalnoj ravnini. Poznati su tlak u osi i protok u presjeku A_0 : $p_0 = 200$ kPa i $Q_0 = 5$ m³/s. Ako su protoci unutar račve u međusobnom odnosu $Q_1 = Q_2 = Q_0/2$, potrebno je izračunati silu kojom tekućina gustoće $\rho = 1000$ kg/m³ u svome kretanju djeluje na račvu.

Zadano: $D_0 = 1$ m; $D_1 = D_2 = 0,5$ m; $\alpha = 45^\circ$



$$v_0 = \frac{Q_0}{A_0} = \frac{5 \cdot 4}{1^2 \pi} = 6,37 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{2,5 \cdot 4}{0,5^2 \pi} = 12,73 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_1$$

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{6,37^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{200}{1 \cdot 9,81} - \frac{12,73^2}{2 \cdot 9,81} = 14,36 \text{ m}$$

$$p_1 = \rho g \cdot 14,35 = 140,87 \text{ kPa}$$

$$p_2 = p_1$$

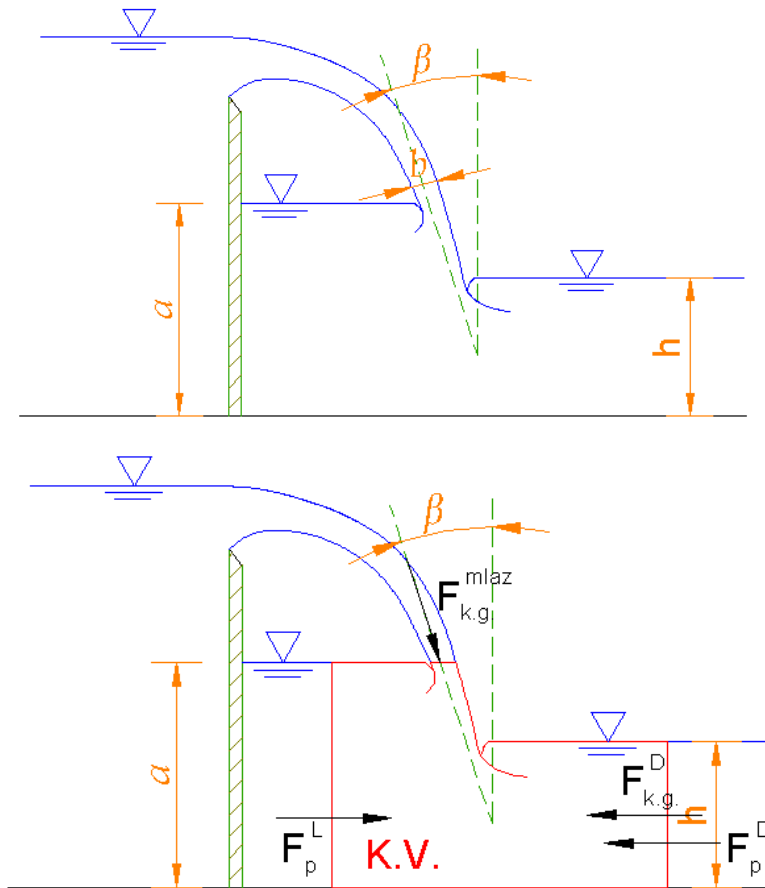
$$F_x = p_0 A_0 + \rho Q_0 v_0 - (p_2 \cdot A_2 + \rho Q_2 v_2) \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_x = \left[200 \cdot \frac{1^2 \pi}{4} + 1 \cdot 5 \cdot 6,37 \right] - \left[\left(140,87 \cdot \frac{0,5^2 \pi}{4} + 1 \cdot 2,5 \cdot 12,73 \right) \cdot \cos 45^\circ \right] = 188,93 - 42,06 = 146,87 \text{ kN}$$

$$F_y = -(p_1 A_1 + \rho Q_1 v_1) + (p_2 A_2 + \rho Q_2 v_2) \cdot \sin 45^\circ$$

$$F_y = \left[- \left(140,87 \cdot \frac{0,5^2 \pi}{4} + 1 \cdot 2,5 \cdot 12,73 \right) \right] + \left[\left(140,87 \cdot \frac{0,5^2 \pi}{4} + 1 \cdot 2,5 \cdot 12,73 \right) \cdot \sin 45^\circ \right] = -17,43 \text{ kN}$$

14. Potrebno je odrediti dubinu vode a između preljevnog mlaza i pregrade ako je nizvodna brzina $v_{niz} = 2$ m/s pri dubini $h = 2$ m, te pri čemu preljevni mlaz ulazi u kontrolni volumen pod kutem $\beta = 20^\circ$. Debljina preljevnog mlaza pri kontaktu s vodom nizvodno od pregrade iznosi $b = 1$ m. Računati po metru širine kontrolnog volumena.



$$Q_{niz} = Q_{mlaz} = v_{niz} \cdot A_{niz} = v \cdot h \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$v_{mlaz} = \frac{Q_{mlaz}}{b \cdot 1} = \frac{4}{1 \cdot 1} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{brzina mlaza debljine } b \text{ pri kontaktu s površinom vode})$$

$$\sum F_x^{K.V.} = 0 \quad (\text{Suma svih sila u kontrolnom volumenu u smjeru } x \text{ jednaka je nuli})$$

$$F_p^L - F_{k.g.}^D - F_p^D + F_{k.g.}^{mlaz} = 0 \quad (F_{k.g.}^L \text{ ne postoji jer voda lijevo od mlaza miruje})$$

$$\rho g a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - \rho Q_{niz} v_{niz} - \rho g h \cdot h \cdot \frac{1}{2} + \rho Q_{mlaz} v_{mlaz} \cdot \sin 20^\circ = 0 \quad / : \rho$$

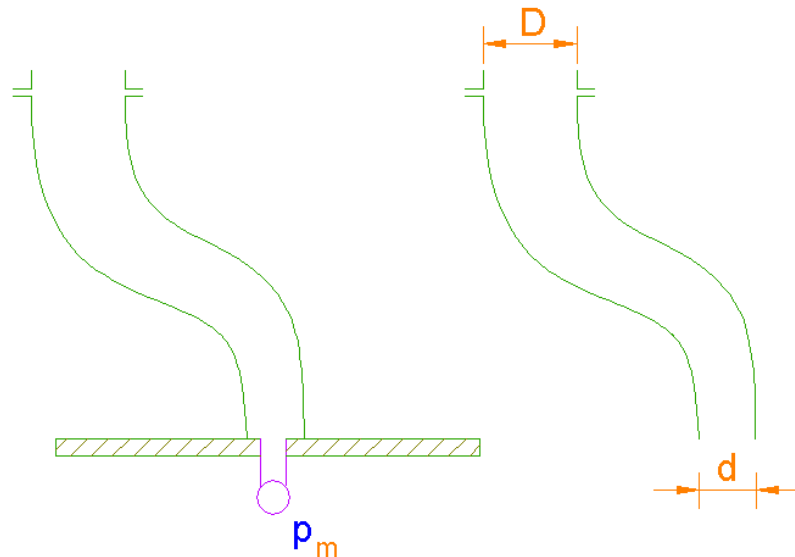
$$4,905a^2 - 8 - 19,62 + 5,47 = 0$$

$$a = 2,125 \text{ m}$$

Također je i suma svih sila u smjeru y jednaka nuli (sve sile u y smjeru preuzima podloga)

15. Dio cjevovoda prema slici nalazi se u horizontalnoj ravnini. Kada je izlazni presjek zatvoren (lijeva slika), na dionici prikazanog cjevovoda tekućina miruje, a manometar pokazuje tlak $p_m = 135$ kPa. Uz pretpostavku bezviskoznog strujanja, odredite silu F tekućine na koljeno u slučaju da je izlazni presjek potpuno otvoren, a tekućina slobodno istječe u atmosferu (desna slika).

Zadano je: $D = 120$ mm; $d = 80$ mm; $\rho = 1000$ kg/m³



$$\frac{v_d^2}{2g} = \frac{p_m}{\rho g} = \frac{135}{1 \cdot 9,81} = 14,83 \text{ m}$$

$$v_d = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 14,83} = 17,06 \text{ m/s}$$

$$Q = v_d \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 17,06 \cdot \frac{0,08^2 \pi}{4} = 0,086 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = v_D \cdot \frac{D^2 \pi}{4}$$

$$v_D = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,086}{0,12^2 \pi} = 7,58 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_D^2}{2g} = \frac{7,58^2}{2 \cdot 9,81} = 2,93 \text{ m}$$

$$\frac{p_D}{\rho g} + \frac{v_D^2}{2g} = \frac{v_d^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \frac{p_D}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_D^2}{2g} = 14,83 - 2,93 = 11,9 \text{ m}$$

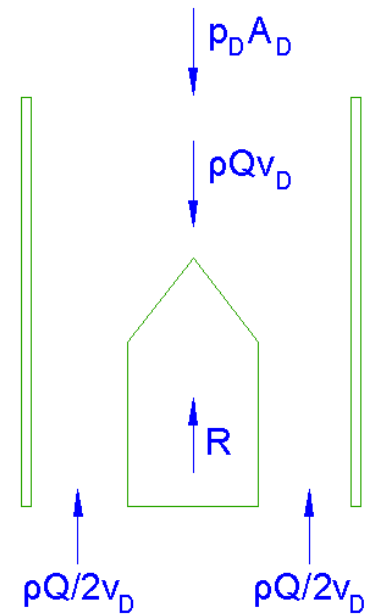
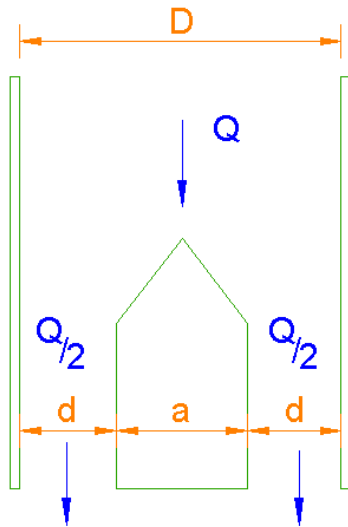
$$p_D = \rho g \cdot 11,9 = 116,74 \text{ kPa}$$

$$F_y = -p_D \cdot A_D - \rho Q v_D + \rho Q v_d = -116,74 \cdot \frac{0,12^2 \pi}{4} - 1 \cdot 0,086 \cdot 7,58 + 1 \cdot 0,086 \cdot 17,06$$

$$F_y = -0,505 \text{ kN}$$

$$F_x = 0$$

16. Kroz cijev kvadratnog poprečnog presjeka visine i širine $D = 1$ m protječe tekućina s protokom $Q = 2,0$ m³/s. Na samom izlazu iz cijevi ugrađen je pregradni profil klinastog oblika po cijeloj visini poprečnog presjeka. Širina klina je $a = 0,6$ m. Tekućina je gustoće $\rho = 1000$ kg/m³. Potrebno je izračunati silu F kojom ta tekućina djeluje na ugrađeni klin.



$$v_D = \frac{Q}{A_D} = \frac{Q}{D^2} = \frac{2}{1^2} = 2 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_D^2}{2g} = 0,20 \text{ m}$$

$$v_d = \frac{Q/2}{A_d} = \frac{Q/2}{(D-d)/2 \cdot D} = 5 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_d^2}{2g} = 1,27 \text{ m}$$

$$\frac{p_D}{\rho g} + \frac{v_D^2}{2g} = \frac{v_d^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \frac{p_D}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_D^2}{2g} = 1,07 \text{ m}$$

$$p_D = 10,5 \text{ kPa}$$

p_D je tlak u osi cijevi u nekom presjeku uzvodno od pregrade. Nisu zadani nikakvi podaci o gubitcima energije pa se prtpostavlja bezviskozno tečenje

$$p_D A_D + \rho Q v_D + R = 2 \cdot \rho \frac{Q}{2} v_d$$

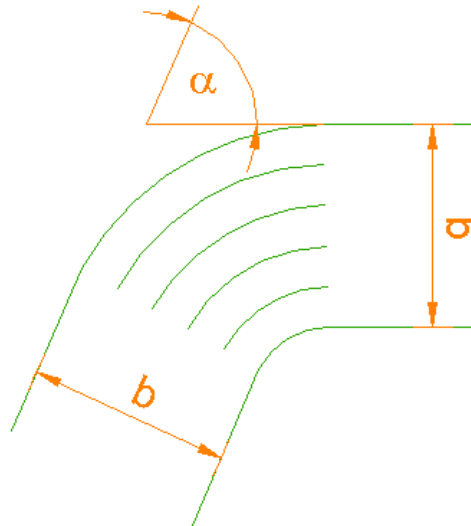
$$10,5 + 4 + R = 10$$

$$R = 4,5 \text{ kN}$$

\rightarrow Sila F vode na klin je 4,5 kN i suprotna je reakciji klina R

17. U kanalu se nalaze četiri vertikalno postavljene zakrivljene tanke stijene (lopaticice) koje su međusobno jednako udaljene. Brzina toka vode prije ulaska u krivinu je $v = 1$ m/s, normalna dubina toka je $h = 2$ m, a širina pravokutnog korita iznosi $b = 10$ m. Potrebno je izračunati iznos i smjer vektora sile kojom tok djeluje na jednu lopaticu. Pretpostavlja se idealna tekućinu.

Zadano je: $\alpha = 60^\circ$



$$Q = v \cdot b \cdot h = 20 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q' = \frac{Q}{5} = 4 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$F_p = \frac{\rho g h}{2} \cdot h \cdot b = 196,2 \text{ kN}$$

$$F'_p = \frac{F_p}{5} = 39,24 \text{ kN}$$

$$F'_{UL} = F'_{IZ} = \rho Q' v + F'_p = 43,24 \text{ kN}$$

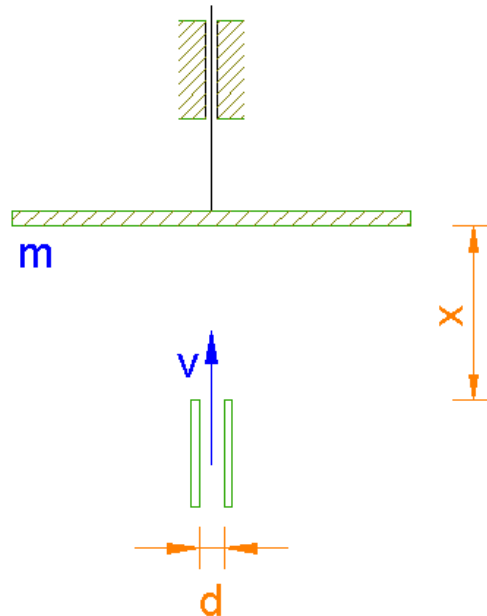
$$F'_x = F'_{UL} \cdot \cos 60 - F'_{IZ} = -21,62 \text{ kN}$$

$$F'_y = F'_{UL} \cdot \sin 60 = 37,45 \text{ kN}$$

x i *y* komponentama određen je i smjer sile: $\text{tg } \alpha = \frac{21,62}{37,45} \rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$F' = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2} = 43,24 \text{ kN}$$

18. Ploča mase $m = 5 \text{ kg}$ izložena je djelovanju vertikalnog mlaza iz sapnice promjera $d = 5 \text{ cm}$, zbog čega na nekoj udaljenosti x zauzima ravnotežni položaj. Izlazna brzina iz sapnice je $v = 6 \text{ m/s}$. Uz pretpostavku idealne tekućine i neporemećenog kružnog presjeka mlaza, potrebno je odrediti udaljenost x .



$$G = mg = 49,05 \text{ N}$$

$$Q = v \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 0,0118 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_x^2}{2g} + x \quad v_x = \sqrt{v^2 - 2gx}$$

$$\rho Q_x v_x = G$$

$$\rho \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v_x^2 = G$$

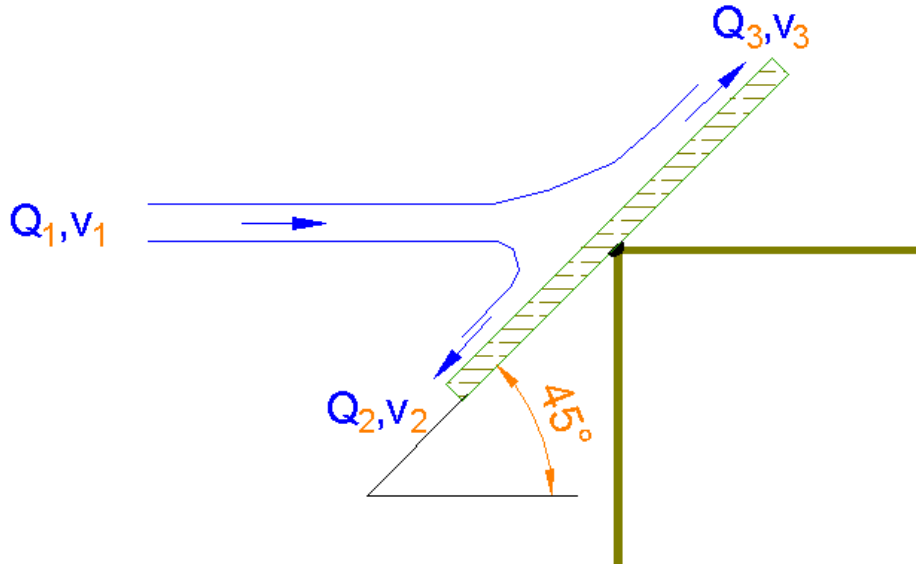
$$\rho \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot (v^2 - 2gx) = G$$

$$1000 \cdot \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot (6^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot x) = 49,05$$

$$70,69 - 38,52x = 49,05$$

$$x = 0,56 \text{ m}$$

19. Potrebno je odrediti protok dolaznog mlaza vode Q_1 koji udara u nepomičnu kosu prepreku u horizontalnoj ravnini pridržanu sa dva štapa. U svakom od štapova pojavljuje se tlačna sila od 10 N. Brzina dolaznog mlaza je $v_1 = 1$ m/s. Pretpostavlja se strujanje idealne tekućine.



Analitički postupak:

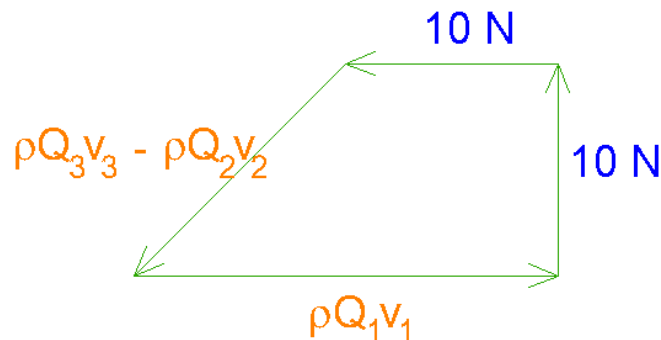
$$1) \quad Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \rightarrow \quad Q_3 = Q_1 - Q_2 \quad v_1 = v_2 = v_3 \text{ (idealna tekućina)}$$

$$2) \quad \sum_{(y)} Fi = 0 \quad \rho Q_2 v_2 \sin 45 - \rho Q_3 v_3 \sin 45 + 10 = 0$$

$$3) \quad \sum_{(x)} Fi = 0 \quad \rho Q_1 v_1 + \rho Q_2 v_2 \cos 45 - \rho Q_3 v_3 \cos 45 - 10 = 0$$

riješiti sustav tri jednačbe s tri nepoznanice

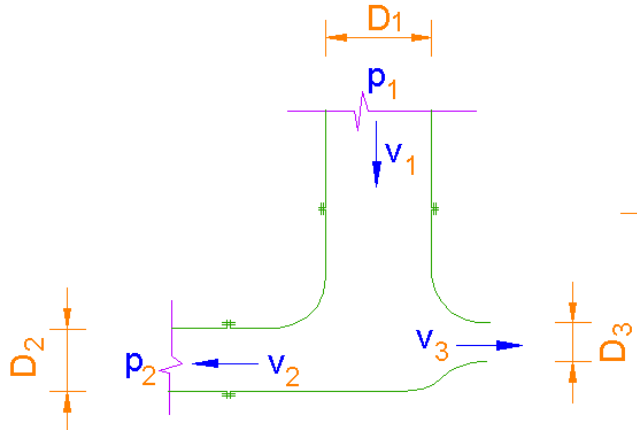
Preporuča se grafoanalitički postupak za rješavanje ovog zadatka!



$$\text{očitano: } \rho Q_1 v_1 = 20 \text{ N} \quad \rightarrow \quad Q_1 = \frac{20}{\rho v_1} = \frac{20}{1000 \cdot 1} = 0,02 \text{ m}^3 / \text{s} = 20 \text{ l / s}$$

20. Potrebno je odrediti resultantno djelovanje na račvu položenu u horizontalnoj ravnini pri strujanju idealnog fluida. Zanemariti težinu vode.

Zadano je : $p_1 = 30 \text{ kPa}$; $D_1 = 0,3 \text{ m}$; $D_2 = 0,2 \text{ m}$; $D_{3(\text{sapnice})} = 0,1 \text{ m}$; $Q_1 = 0,26 \text{ m}^3/\text{s}$



$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1 \cdot 4}{D_1^2 \pi} = 3,68 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad \rightarrow \quad v_3 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) 2g} = 8,58 \text{ m/s}$$

$$Q_3 = v_3 \cdot \frac{D_3^2 \pi}{4} = 0,067 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = Q_1 - Q_3 = 0,193 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q_2 \cdot 4}{D_2^2 \pi} = 6,14 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = 1,82 \text{ m}$$

$$p_2 = 17,85 \text{ kPa}$$

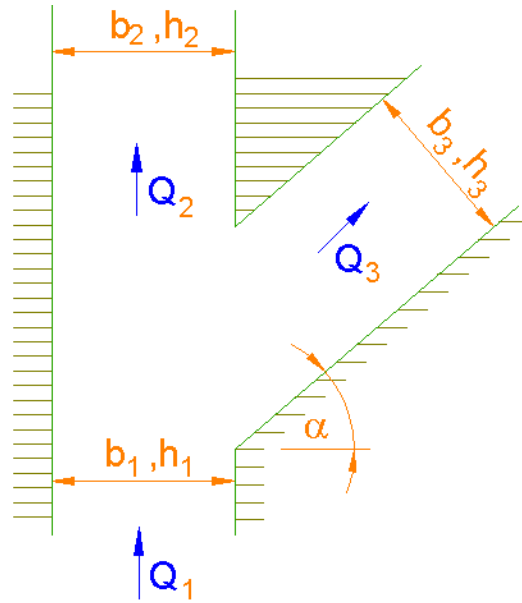
$$F_x = \rho Q_2 v_2 + p_2 \frac{D_2^2 \pi}{4} - \rho Q_3 v_3 = 1,17 \text{ kN}$$

$$F_y = -\rho Q_1 v_1 - p_1 \frac{D_1^2 \pi}{4} = -3,07 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 3,28 \text{ kN}$$

21. Potrebno je odrediti rezultantno djelovanje vode na račvu u otvorenom vodotoku.

Zadano je : $b_1 = b_2 = b_3 = 10 \text{ m}$; $h_1 = 2 \text{ m}$; $h_2 = 1,5 \text{ m}$; $h_3 = 1,3 \text{ m}$;
 $Q_1 = 20 \text{ m}^3/\text{s}$; $Q_2 = 12 \text{ m}^3/\text{s}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\alpha = 45^\circ$



$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 8 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{Q_1}{b \cdot h_1} = \frac{20}{10 \cdot 2} = 1,0 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{b \cdot h_2} = \frac{12}{10 \cdot 1,5} = 0,8 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{Q_3}{b \cdot h_3} = \frac{8}{10 \cdot 1,3} = 0,62 \text{ m/s}$$

$$F_y = \rho g (h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot \frac{b}{2} + \rho (Q_1 v_1 - Q_2 v_2 - Q_3 v_3 \cdot \sin 45^\circ)$$

$$F_y = 1 \cdot 9,81 \cdot (2^2 - 1,5^2 - 1,3^2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot \frac{10}{2} + 1 \cdot (20 \cdot 1,0 - 12 \cdot 0,8 - 8 \cdot 0,62 \cdot \sin 45^\circ)$$

$$F_y = 34,11 \text{ kN}$$

$$F_x = \left(-\frac{\rho g h_3}{2} \cdot h_3 \cdot b - \rho Q_3 \cdot v_3 \right) \cdot \cos 45^\circ$$

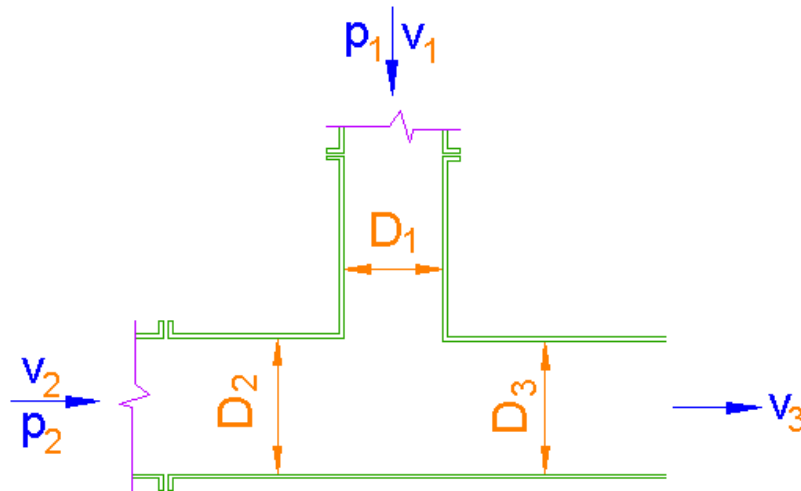
$$F_x = \left(-\frac{1 \cdot 9,81 \cdot 1,3}{2} \cdot 1,3 \cdot 10 - 1 \cdot 8 \cdot 0,62 \right) \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_x = -62,12 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 70,86 \text{ kN}$$

22. Potrebno je odrediti ukupnu silu kojom voda djeluje na račvu. Račva je položena u horizontalnoj ravnini. Težinu vode zanemariti.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D_1 = 0,2 \text{ m}$; $D_2 = D_3 = 0,3 \text{ m}$;
 $p_1 = p_2 = 2 \text{ kPa}$ $v_1 = v_2 = 1 \text{ m/s}$



$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_3 v_3$$

$$v_3 = \frac{D_1^2 v_1 + D_2^2 v_2}{D_3^2} = \frac{0,2^2 \cdot 1 + 0,3^2 \cdot 1}{0,3^2} = 1,44 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = A_1 v_1 = 0,0314 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_2 = A_2 v_2 = 0,0707 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0,1021 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$F_x = p_2 A_2 + \rho Q_2 v_2 - \rho Q_3 v_3$$

$$F_x = 2 \cdot \frac{0,3^2 \pi}{4} + 1 \cdot 0,0707 \cdot 1 - 1 \cdot 0,1021 \cdot 1,44$$

$$F_x = 0,065 \text{ kN}$$

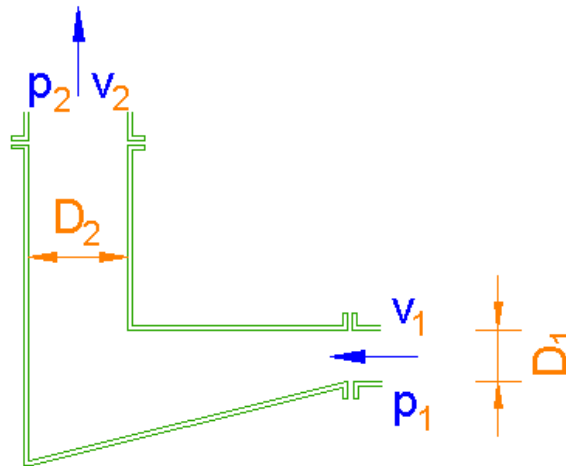
$$F_y = -p_1 A_1 - \rho Q_1 v_1$$

$$F_y = -2 \cdot \frac{0,2^2 \pi}{4} - 1 \cdot 0,0314 \cdot 1 = 0,094 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0,114 \text{ kN}$$

23. Potrebno je odrediti ukupnu silu kojom voda djeluje na račvu. Račva je položena u horizontalnoj ravnini. Težinu vode zanemariti.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D_1 = 0,1 \text{ m}$; $D_2 = 0,3 \text{ m}$;
 $p_1 = 9 \text{ kPa}$; $p_2 = 11 \text{ kPa}$; $v_1 = 3 \text{ m/s}$



$$A_1 = \frac{D_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,1^2 \cdot \pi}{4} = 0,0079 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{D_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,3^2 \cdot \pi}{4} = 0,0707 \text{ m}^2$$

$$Q_1 = A_1 \cdot v_1 = 0,0237 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_2 = Q_1$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 0,335 \text{ m/s}$$

$$F_x = -p_1 A_1 - \rho Q_1 v_1$$

$$F_x = -9 \cdot 0,0079 - 1 \cdot 0,0237 \cdot 3 = -0,142 \text{ kN}$$

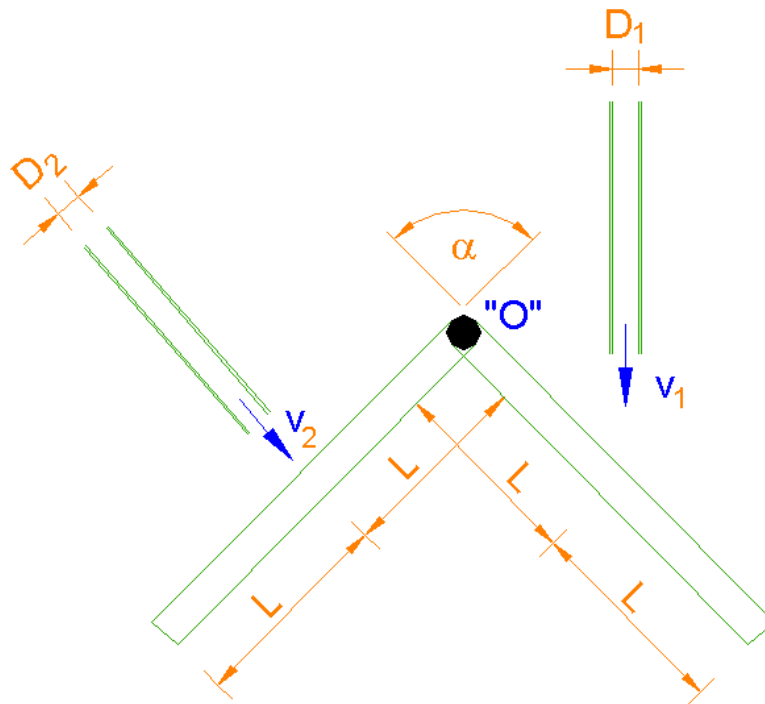
$$F_y = -p_2 A_2 - \rho Q_2 v_2$$

$$F_y = -11 \cdot 0,0707 - 1 \cdot 0,0237 \cdot 0,335 = -0,786 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0,799 \text{ kN}$$

24. Vertikalne ploče, međusobno kruto povezane, položene kao na slici i pričvršćene na vertikalnu zglobovnu os označenu točkom "O". Uz pretpostavljeno bezviskozno strujanje potrebno je odrediti izlaznu brzinu mlaza v_2 tako da se onemogući rotacija ploča oko vertikalne osi "O".

Zadano je: $L = 0,5 \text{ m};$ $D_1 = 0,065 \text{ m};$ $D_2 = 0,05 \text{ m};$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3;$ $Q_1 = 0,01 \text{ m}^3/\text{s};$ $\alpha = 90^\circ$



$$v_1 = \frac{4Q_1}{D_1^2 \pi} = \frac{4 \cdot 0,01}{0,065^2 \pi} = 3,01 \text{ m/s}$$

$$\sum M_{(O)} = 0$$

$$\rho Q_1 v_1 \cdot L \cdot \cos 45^\circ = \rho Q_2 v_2 \cdot L$$

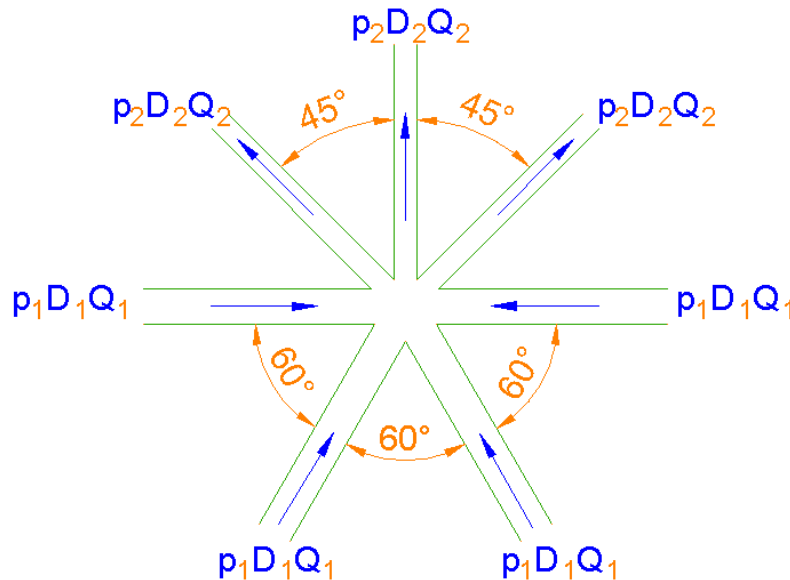
$$0,01 \cdot 3,01 \cdot \cos 45^\circ = \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot v_2^2$$

$$0,01 \cdot 3,01 \cdot \cos 45^\circ = \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot v_2^2$$

$$v_2 = 3,29 \text{ m/s}$$

25. Potrebno je odrediti silu djelovanja vode na račvu u horizontalnoj ravnini za slučaj zadane distribucije protoka i tlakova u cijevima kao na slici. Pretpostavlja se bezviskozno strujanje.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D_1 = 1,38 \text{ m}$; $D_2 = 0,8 \text{ m}$;
 $p_1 = 49,05 \text{ kPa}$; $Q_1 = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$; $Q_2 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$



$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{1,5 \cdot 4}{1,38^2 \pi} = 1,0 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{2 \cdot 4}{0,8^2 \pi} = 3,98 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{49,05}{1} + \frac{1^2}{2} = \frac{p_2}{1} + \frac{3,98^2}{2}$$

$$p_2 = 49,05 + 0,5 - 7,92 = 41,63 \text{ kPa}$$

$$F_x = 0 \quad (\text{simetrija})$$

$$F_y = 2 \cdot (p_1 A_1 + \rho Q_1 v_1) \cdot \cos 30^\circ - 2(p_2 A_2 + \rho Q_2 v_2) \cdot \cos 45^\circ - (p_2 A_2 + \rho Q_2 v_2)$$

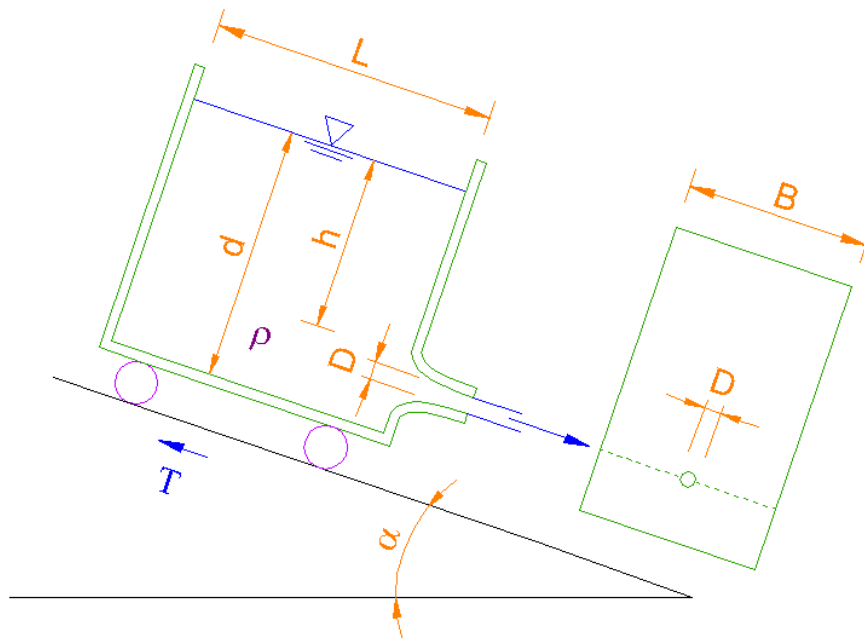
$$F_y = 2 \cdot \left(49,05 \cdot \frac{1,38^2 \pi}{4} + 1 \cdot 1,5 \cdot 1 \right) \cdot \cos 30^\circ - \left(41,63 \cdot \frac{0,8^2 \pi}{4} + 1 \cdot 2 \cdot 3,98 \right) (2 \cdot \cos 45^\circ + 1)$$

$$F_y = 129,67 - 69,74$$

$$F_y = 59,93 \text{ kN}$$

26. Potrebno je odrediti promjer otvora D , iz kojeg će istjecati mlaz bezviskozne tekućine bez kontrakcije i koji će omogućiti jednoliko gibanje niz kosinu. Za vrijeme jednolikog kretanja djeluje i sila trenja na vozilo T . Širina kolica je $B = 1$ m.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $T = 1000 \text{ N}$; $\alpha = 5^\circ$; $L = d = 3 \text{ m}$; $h = 2,5 \text{ m}$



Dinamička ravnoteža

$$m\vec{a} = m \cdot \vec{g} \cdot \sin \alpha - \vec{T} - \rho Q \vec{v}$$

Jednoliko gibanje po pravcu ($\vec{a} = 0$)

$$0 = \rho(L \cdot d \cdot B) \cdot g \cdot \sin \alpha - T - \rho \cdot \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v^2$$

$$0 = \rho(L \cdot d \cdot B) \cdot g \cdot \sin \alpha - T - \rho \cdot \frac{D^2 \pi}{4} \cdot (2gh)$$

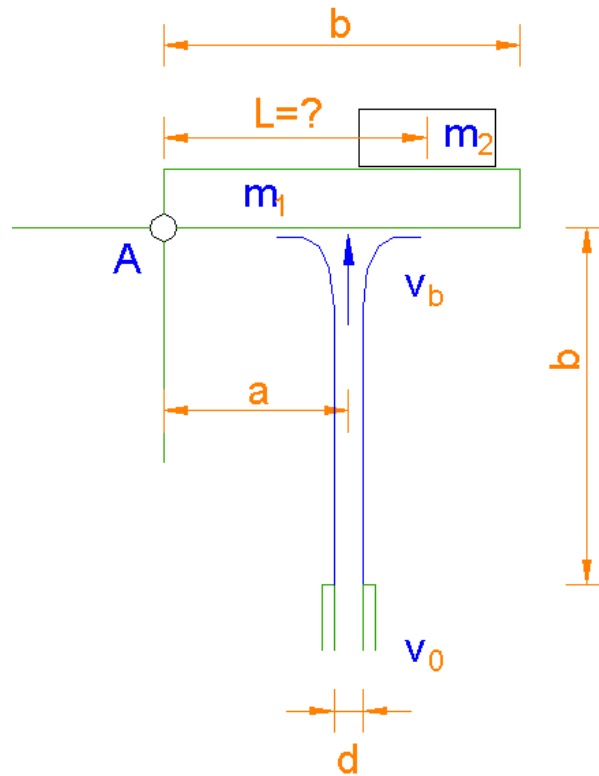
$$0 = 1000 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 1) \cdot 9,81 \cdot \sin 5^\circ - 1000 - 1000 \cdot \frac{D^2 \pi}{4} \cdot (2 \cdot 9,81 \cdot 2,5)$$

$$0 = 7695 - 1000 - 38523,8 D^2$$

$$D^2 = \frac{6695}{38523,8} \quad \rightarrow \quad D = 0,417 \text{ m}$$

27. Potrebno je odrediti udaljenost L na koju se postavlja uteg mase m_2 kako bi se ostvario uvjet ravnoteže momenata oko točke A.

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $m_1 = 120 \text{ kg}$; $m_2 = 150 \text{ kg}$;
 $a = 1 \text{ m}$; $b = 2 \text{ m}$; $d = 0,25 \text{ m}$; $v_0 = 10 \text{ m/s}$



$$Q = v_0 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 10 \cdot \frac{0,25^2 \pi}{4} = 0,491 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_b^2}{2g} + b \quad \rightarrow \quad v_b = \sqrt{v_0^2 - 2gb} = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 7,79 \text{ m/s}$$

$$\sum M_{(A)} = 0$$

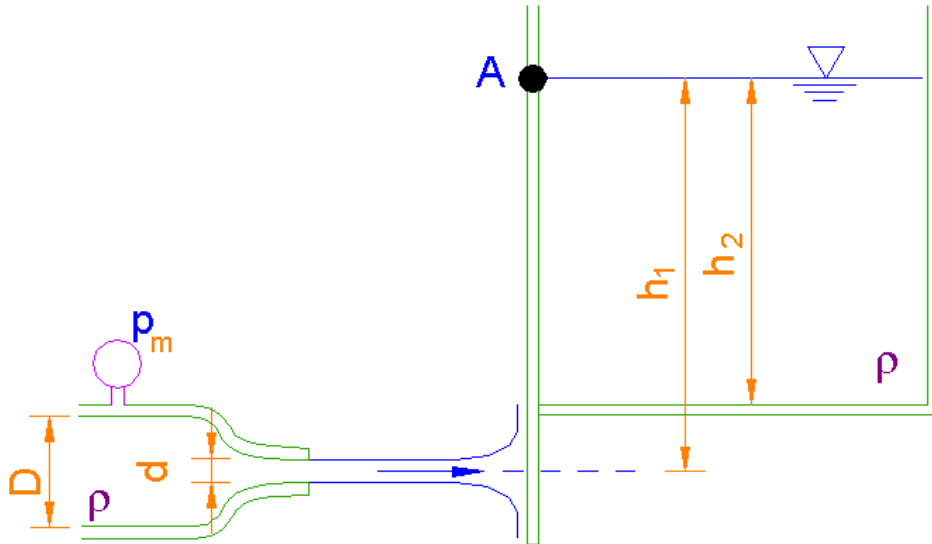
$$m_1 \cdot g \cdot \frac{b}{2} + m_2 \cdot g \cdot L = \rho Q v_b \cdot a$$

$$120 \cdot 9,81 \cdot 1 + 150 \cdot 9,81 \cdot L = 1000 \cdot 0,491 \cdot 7,79 \cdot 1$$

$$L = 1,8 \text{ m}$$

28. Koliki mora biti tlak na manometru p_m da ne dođe do zakretanja pravokutnog poklopca oko točke A, odnosno do istjecanja vode iz rezervoara kao na slici. Pretpostavlja se da je strujanje vode bezviskozno. Poklopac ima širinu b , a mlaz djeluje na polovici širine b .

Zadano je: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $d = 0,05 \text{ m}$; $D = 0,1 \text{ m}$; $h_1 = 1,2 \text{ m}$; $h_2 = 1 \text{ m}$; $b = 0,4 \text{ m}$



$$M_A^L = M_A^D$$

$$\left(\rho \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v_d^2 \right) \cdot h_1 = \left(\rho g h_2 b \frac{h_2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} h_2$$

$$\frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot v_d^2 \cdot 1,2 = 9,81 \cdot 1 \cdot 0,4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$v_d = 23,56 \text{ m/s}$$

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot v_D = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v_d \quad \rightarrow$$

$$v_D = \frac{d^2 \cdot v_d}{D^2} = \frac{0,05^2 \cdot 23,56}{0,1^2} = 5,89 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_D^2}{2g} + \frac{p_m}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g}$$

$$\frac{p_m}{\rho g} = \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_D^2}{2g} = 28,29 - 1,77 = 26,52 \text{ m}$$

$$p_m = \rho \cdot g \cdot 26,52 = 260,16 \text{ kPa}$$