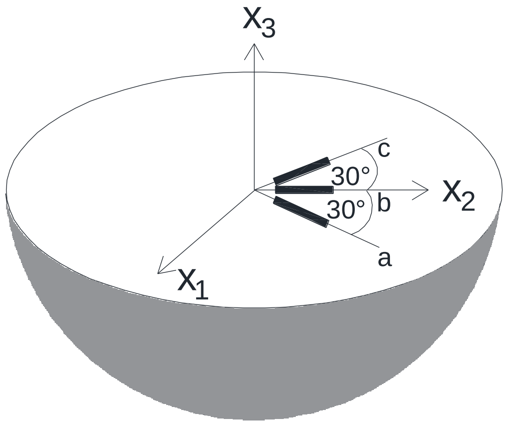
# JEDNADŽBE KONSTITUCIJE

## 1. ZADATAK

Pomoću mjerne rozete postavljene kao na slici, izmjerene su sljedeće deformacije u točki: $\varepsilon_a = 300 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 400 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 100 \cdot 10^{-6}$.

Definirajte tenzor naprezanja ako se radi o čeliku i zadane su konstante $\nu = 0.29$, $E = 2.1 \cdot 10^5\ MPa$.



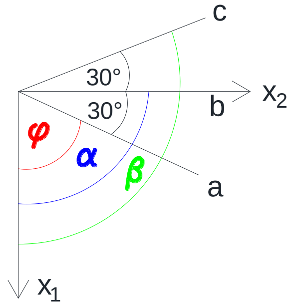

Slika 1. Mjerna rozeta

Sa skice je vidljivo da je mjerna rozeta postavljena u ravnini $x_1x_2$ . Deformaciju u smjeru osi *a* možemo izraziti pomoću izraza (1):

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{11} cos^2\varphi + \varepsilon_{22} sin^2\varphi + \varepsilon_{12} sin2\varphi \tag{1}$$

pri čemu je $\varphi$ kut koji pravac *a* zatvara s osi $x_1$, dakle $\varphi = 60°$, slika 2. Nepoznate su nam komponente deformacija $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$ i $\varepsilon_{12}$. Kad uvrstimo poznate vrijednosti izmjerene deformacije $\varepsilon_a$ i kuta $\varphi$ slijedi:

$$300 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_{11} \cdot 0.25 + \varepsilon_{22} \cdot 0.75 + \varepsilon_{12} \cdot 0.866 \tag{2}$$




Slika 2. Smjerovi deformacija u ravnini $x_1x_2$

Analogno, deformaciju u smjeru osi *b* možemo izraziti pomoću izraza (3):

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{11} cos^2\alpha + \varepsilon_{22} sin^2\alpha + \varepsilon_{12} sin2\alpha \tag{3}$$

pri čemu je $\alpha$ kut koji pravac *b* zatvara s osi $x_1$, dakle $\alpha = 90°$. Kad uvrstimo poznate vrijednosti slijedi:

$$400 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_{11} \cdot 0 + \varepsilon_{22} \cdot 1 + \varepsilon_{12} \cdot 0 \tag{4}$$

tj. vrijedi

$$\varepsilon_{22} = 400 \cdot 10^{-6} \tag{5}$$

Preostaje izraz za deformaciju u smjeru osi *c:*

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{11} cos^2\beta + \varepsilon_{22} sin^2\beta + \varepsilon_{12} sin2\beta \tag{6}$$

pri čemu je $\beta$ kut koji pravac *c* zatvara s osi $x_1$, dakle $\beta = 120°$. Kad uvrstimo poznate vrijednosti slijedi:

$$100 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_{11} \cdot 0.25 + \varepsilon_{22} \cdot 0.75 - \varepsilon_{12} \cdot 0.866 \tag{7}$$

Sustav se svodi na tri jednadžbe s tri nepoznanice. Zbrajanjem izraza (2) i (7), te uz poznatu vrijednost iz jednadžbe (5) slijedi:

$$\varepsilon_{11} = -400 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{12} = 115.5 \cdot 10^{-6}$$

Tenzor deformacija ima oblik:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -400 & 115.5 & 0 \\ 115.5 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Računamo Lame-ove konstante $\lambda$ i $\mu$ na temelju poznatih vrijednosti $\nu$ i $E$:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 112.4\ GPa$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 81.4\ GPa$$

Temeljem Hooke-ovog zakona za elastičan izotropan materijal koji glasi:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

možemo izračunati naprezanja za zadani slučaj:

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -65.12\ MPa$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 65.12\ MPa$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = 18.8\ MPa$$

Tenzor naprezanja izgleda

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -65.12 & 18.8 & 0 \\ 18.8 & 65.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

2. ZADATAK

Zadan je tenzor deformacija u točki:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & -0.002 \\ 0 & -0.003 & 0.0005 \\ -0.002 & 0.0005 & 0 \end{bmatrix}$$

Nađite tenzor naprezanja ako je zadano $= 0.28$, $E = 2.1 \cdot 10^5\ MPa$.

Računamo Lame-ove konstante $\lambda$ i $\mu$ na temelju poznatih vrijednosti $\nu$ i $E$:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 104.4\ GPa$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 82.03\ GPa$$

Temeljem Hooke-ovog zakona za elastičan izotropan materijal koji glasi:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

možemo izračunati naprezanja

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -44.7\ MPa$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -701\ MPa$$

$$\sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -208.8\ MPa$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = 0\ MPa$$

$$\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} = 82\ MPa$$

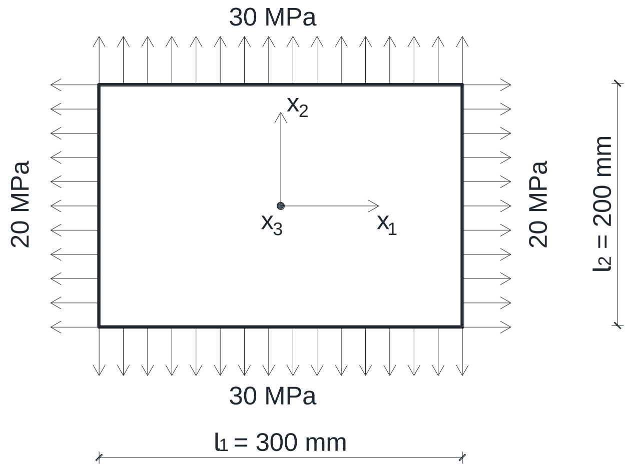
$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} = -328.1\ MPa$$

Tenzor naprezanja izgleda

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -44.8 & 0 & -328.1 \\ 0 & -701 & 82 \\ -328.1 & 82 & -208.8 \end{bmatrix} MPa$$

3. ZADATAK

Pravokutna čelična ploča debljine 4 mm izložena je dvoosnom naprezanju, kao na slici 1. Odredite promjenu dimenzija ploče ako je zadano $\nu = 0.29$, $E = 207\ GPa$.




Slika 1. Opterećena ploča

Prema Hooke-ovom zakonu općenito vrijedi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}) \tag{1}$$

gdje je $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ prva invarijanta tenzora naprezanja, a $\mu$ i $\lambda$ su Lame-ove konstante definirane kao:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ako raspišemo izraz (1) s Lame-ovim konstantama slijedi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{\frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}{\frac{3 \cdot \nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2 \cdot E}{2(1+\nu)}}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{\frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}{\frac{3 \cdot \nu \cdot E + E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

tj. vrijedi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{ij} + \nu\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2}$$

Za pojedine smjerove izraz (2) izgleda:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{E}(1 + \nu)\sigma_{12} \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{E}(1 + \nu)\sigma_{13} \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{E}(1 + \nu)\sigma_{23}
\end{aligned} \tag{3}$$

U slučaju kao na slici 1, postoje samo normalna naprezanja u smjeru osi $x_1$ i $x_2$ , nema posmičnih naprezanja pa tenzor naprezanja ima oblik

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Normalne deformacije u smjerovima osi $x_1$, $x_2$ i $x_3$ možemo izračunati kao:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{207 \cdot 10^3}(20 - 0.29 \cdot 30) = 5.46 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1}{207 \cdot 10^3}(30 - 0.29 \cdot 20) = 11.69 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = \frac{1}{207 \cdot 10^3}(-0.29 \cdot (20 + 30)) = -7 \cdot 10^{-5}$$

Tenzor deformacija ima oblik

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 5.46 & 0 & 0 \\ 0 & 11.69 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

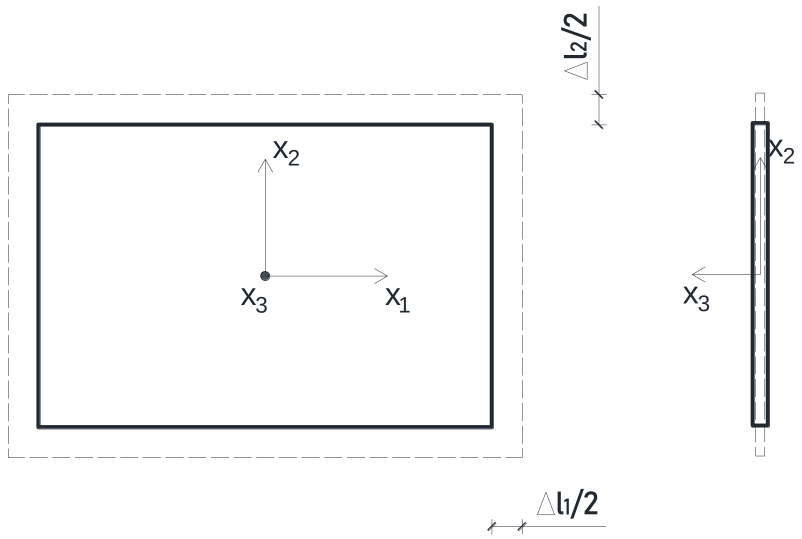
Promjena duljine ploče u tri smjera iznosi

$$\Delta l_1 = \varepsilon_{11} \cdot l_1 = 5.46 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0.0164\, mm$$

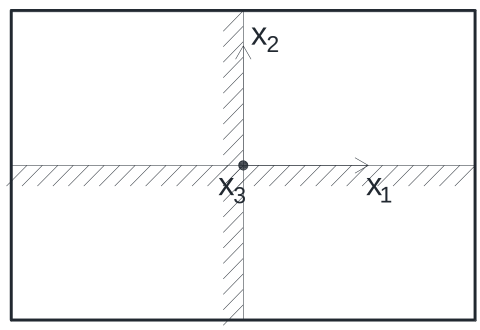
$$\Delta l_2 = \varepsilon_{22} \cdot l_2 = 11.69 \cdot 10^{-5} \cdot 200 = 0.0234\, mm$$

$$\Delta l_3 = \varepsilon_{33} \cdot l_3 = -7 \cdot 10^{-5} \cdot 4 = -0.00028\, mm$$

Promjene dimenzija ploče prikazane su na slici 2 crtkanom linijom. Primijetimo da su deformacije simetrične u odnosu na osi koordinatnog sustava, u skladu sa simetričnim opterećenjem. U ovakvim slučajevima simetrije moguće je promatrati sustav kao polovinu elementa s rubnim uvjetom upetosti u osima simetrije, slika 3.




Slika 2. Promjena dimenzija ploče

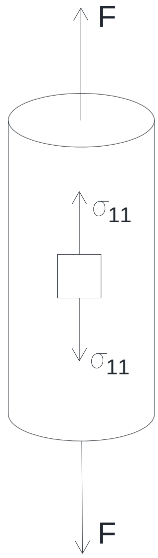



Slika 3. Uvjeti simetrije

4. ZADATAK

Izračunajte deformacije za tri specifična slučaja deformacija: čisti vlak, čisti posmik i hidrostatički pritisak, ako su poznate konstante za čelik $\nu = 0.29$, $E = 207\ GPa$.

a) Čisti vlak, $\sigma_{11} = 300\ MPa$




Tenzor naprezanja ima oblik

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Računamo konstantu $\mu$ na temelju poznatih vrijednosti $\nu$ i $E$:

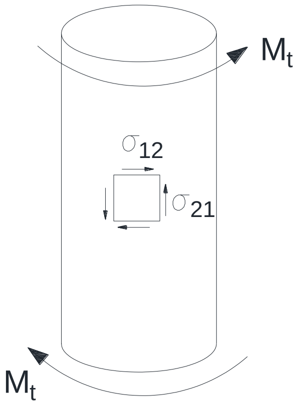
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80.2\ GPa$$

Možemo izraziti tenzor deformacija (vidi zadatak 3, izraz (3)) u obliku:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.42 & 0 \\ 0 & 0 & -0.42 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Fizikalno možemo opisati modul elastičnosti $E$ kao omjer $\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$ pri jednoosnom vlaku.

b) Čisti posmik, $\sigma_{12} = 150\ MPa$




Tenzor naprezanja ima oblik

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Možemo izraziti tenzor deformacija u obliku:

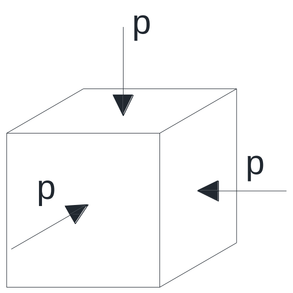
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma_{12}}{2\mu} & 0 \\ \frac{\sigma_{21}}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9.35 & 0 \\ 9.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Fizikalno možemo opisati modul posmika kao $\mu = G = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}}$.

Karakteristične vrijednosti elastičnih modula za neke materijale prikazane su u tablici.

| | E (GPa) | ν | μ (GPa) | λ (GPa) | α ($10^{-6}$/°C) |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluminij | 68,9 | 0,34 | 25,7 | 54,6 | 25,5 |
| Beton | 27,6 | 0,20 | 11,5 | 7,7 | 11 |
| Bakar | 89,6 | 0,34 | 33,4 | 71 | 18 |
| Staklo | 68,9 | 0,25 | 27,6 | 27,6 | 8,8 |
| Guma | 0,0019 | 0,499 | 0,654x$10^{-3}$ | 0,326 | 200 |
| Čelik | 207 | 0,29 | 80,2 | 111 | 13,5 |

c) Hidrostatički pritisak, $p = 500\ MPa$




Hidrostatički pritisak djeluje jednako u svim smjerovima pa tenzor naprezanja ima oblik

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Deformacije možemo izračunati kao

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E}[-p - \nu(-p - p)] = -\frac{1 - 2\nu}{E}p$$

i analogno tome u ostalim smjerovima pa tenzor deformacija ima oblik

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{p}{3k} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3k} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3k} \end{bmatrix}$$

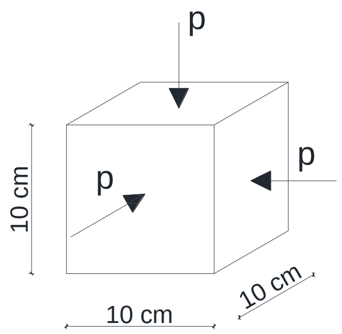
gdje je $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ modul kompresije.

Vrijednosti deformacija za hidrostatički pritisak $p = 500\ MPa$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.02 & 0 & 0 \\ 0 & -1.02 & 0 \\ 0 & 0 & -1.02 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

5. ZADATAK

Na betonsku kocku stranica 10 cm djeluje hidrostatički pritisak $p = 5\ MPa$. Za koliko se promijenio volumen kocke ako je $\nu = 0.2$, $E = 28\ GPa$.




Kod hidrostatičkog pritiska (vidi zadatak 4) tenzor deformacija ima oblik

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p \end{bmatrix}$$

Relativna promjena volumena (prva invarijanta deformacija) je

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

tj.u ovom slučaju

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p = -3.21 \cdot 10^{-4}$$

Promjenu volumena kocke računamo kao

$$\Delta V = \varepsilon_V \cdot V = -3.21 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = -0.32\ cm^3$$

Volumen betonske kocke se smanjio za 0.32 $cm^3$.

(Op.a. hidrostatički pritisak od 5 MPa javlja se na morskoj dubini od 500 m.)