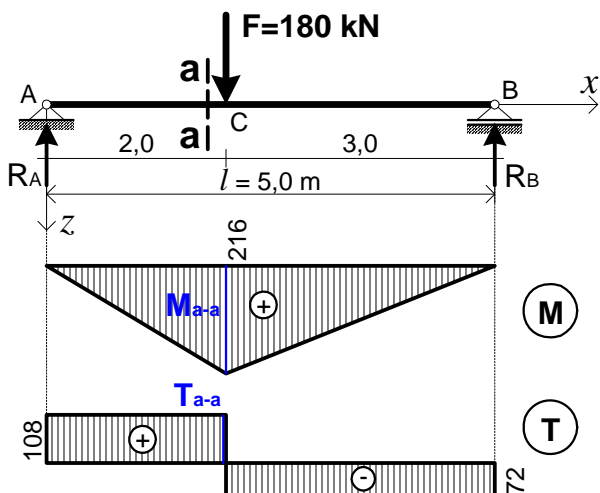


TEORIJE ČVRSTOĆE

ZADATAK 5.

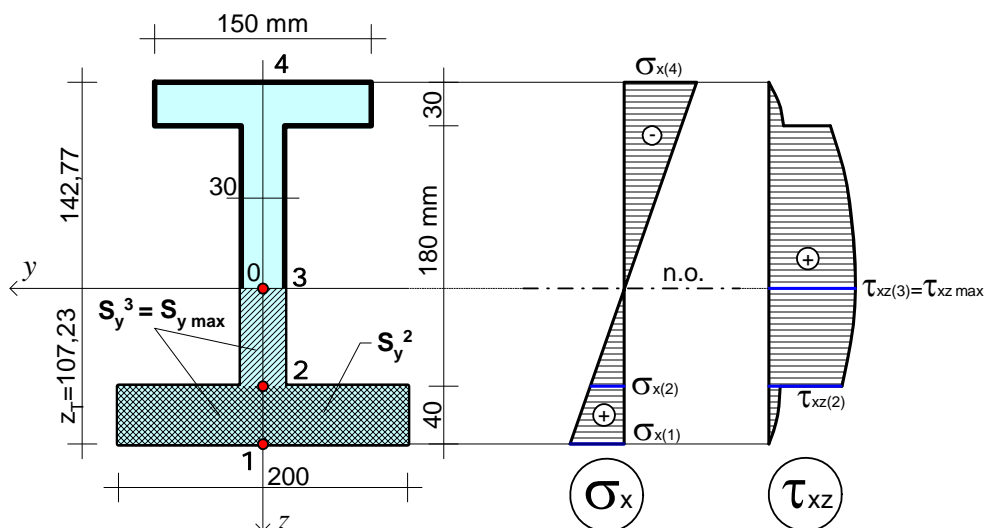
Prema svim teorijama čvrstoće treba odrediti koeficijente sigurnosti u točkama **1**, **2** i **3** presjeka **a-a** nosača prikazanog na slici (presjek **a-a** je neposredno lijevo od sile **F**).

Granica tečenja materijala pri jednoosnom pritisku i jednoosnom rastezanju je $\sigma_T = 210 \text{ MPa}$.
Poissonov koeficijent za materijal: $\nu = 0,30$.



$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ F \cdot 2,0 - R_B \cdot 5,0 &= 0 \Rightarrow R_B = 72,0 \text{ kN} \\ \sum M_B &= 0 \\ R_A \cdot 5,0 - F \cdot 3,0 &= 0 \Rightarrow R_A = 108,0 \text{ kN} \\ M_C &= R_A \cdot 2,0 = +216,0 \text{ kNm} \\ M_{a-a} &= +216,0 \text{ kNm} \\ T_{a-a} &= +108,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

PRESJEK a-a



Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka:

Površina: $A = 200 \cdot 40 + 30 \cdot 180 + 150 \cdot 30 = 17900 \text{ mm}^2$

Težište: $z_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{1}{17900} \cdot (200 \cdot 40 \cdot 20 + 30 \cdot 180 \cdot 130 + 150 \cdot 30 \cdot 235) = 107,23 \text{ mm}$

Momenti tromosti:

$$I_y = \frac{200 \cdot 40^3}{12} + 200 \cdot 40 \cdot 87,23^2 + \frac{30 \cdot 180^3}{12} + 30 \cdot 180 \cdot 22,77^2 + \frac{150 \cdot 30^3}{12} + 150 \cdot 30 \cdot 127,77^2 =$$

$$= \underline{153,12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$I_{zy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Osi } z \text{ i } y \text{ su glavne osi momenata tromosti !}$$

Statički momenti površina:

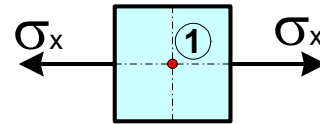
$$\text{Za točku 2: } S_y^2 = 200 \cdot 40 \cdot (107,23 - 20) = 697,840 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\text{Za točku 3: } S_y^3 = S_{y_{\max}} = 200 \cdot 40 \cdot (107,23 - 20) + 30 \cdot \frac{(107,23 - 40)^2}{2} = 765,638 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

TOČKA 1

$$\sigma_x = \frac{M_{a-a}}{I_y} \cdot z_1 = \frac{216 \cdot 10^6}{153,12 \cdot 10^6} \cdot 107,23 = +151,265 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_{a-a} \cdot S_y^1}{I_y \cdot b} = 0$$



Točka **1** je na rubu poprečnog presjeka ($\tau_{xz} = 0$), pa je u njoj jednoosno stanje naprezanja!

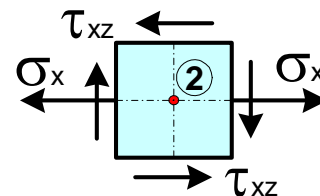
Po svim teorijama čvrstoće: $\sigma_{ek} = \sigma_x = +151,265 \text{ MPa}$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{151,265} = \underline{1,39}$$

TOČKA 2

$$\sigma_x = \frac{M_{a-a}}{I_y} \cdot z_2 = \frac{216 \cdot 10^6}{153,12 \cdot 10^6} \cdot (107,23 - 40) = +94,839 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_{a-a} \cdot S_y^2}{I_y \cdot b} = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 697,840 \cdot 10^3}{153,12 \cdot 10^6 \cdot 30} = +16,407 \text{ MPa}$$



Veličina glavnih naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2} = 47,4195 \pm 50,1777 \text{ (MPa)} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\sigma_1 = +97,597 \text{ MPa}}$$

$$\underline{\sigma_2 = -2,758 \text{ MPa}}$$

Ekvivalentno naprezanje je:

a) Po **I. teoriji** najvećih normalnih naprezanja:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 = +97,597 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{97,597} = \underline{2,15}$$

b) Po **II. teoriji** najvećih normalnih deformacija:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 = 97,597 - 0,30 \cdot (-2,758) = 98,424 \text{ MPa}$$

Koeficijent sigurnosti je: $k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{98,424} = \underline{2,13}$

c) Po **III. teoriji** najvećih posmičnih naprezanja:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_2 = 97,597 - (-2,758) = 100,355 \text{ MPa}$$

Koeficijent sigurnosti je: $k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{100,355} = \underline{2,09}$

d) Po **IV. teoriji** potencijalne energije deformacija:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{97,597^2 + (-2,758)^2 - 2 \cdot 0,30 \cdot 97,597 \cdot (-2,758)} = 98,460 \text{ MPa}$$

Koeficijent sigurnosti je: $k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{98,460} = \underline{2,13}$

e) Po **V. teoriji** potencijalne energije promjene oblika:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{97,597^2 + (-2,758)^2 - 97,597 \cdot (-2,758)} = 99,00 \text{ MPa}$$

Koeficijent sigurnosti je: $k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{99,00} = \underline{2,12}$

f) Po **Mohrovoj teoriji** čvrstoće:

Ako je granica tečenja pri jednoosnom rastezanju jednaka granici tečenja pri jednoosnom pritisku ($\sigma_{vl dop} = \sigma_{tl dop} = \sigma_{dop}$) onda se uvjeti čvrstoće prema Mohrovoj teoriji podudaraju s uvjetima prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja.

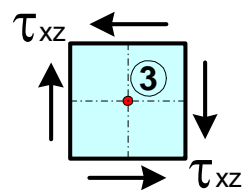
$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2 = 97,597 - 1 \cdot (-2,758) = 100,355 \text{ MPa} \quad \mu = \frac{\sigma_{vl dop}}{\sigma_{tl dop}} = 1$$

Koeficijent sigurnosti je: $k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{100,355} = \underline{2,09}$

TOČKA 3

Točka **3** nalazi se u težištu, na neutralnoj osi ($\sigma_x = 0$), pa je u njoj stanje čistog posmika !

$$\tau_{xz} = \tau_{xz \max} = \frac{T_{a-a} \cdot S_y^3}{I_y \cdot b} = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 765,638 \cdot 10^3}{153,12 \cdot 10^6 \cdot 30} = +18,00 \text{ MPa}$$



Ako je granica tečenja za elastoplastične materijale pri čistom posmiku:

$$\tau_T = 0,50 \text{ do } 0,65 \quad \sigma_T = 105,0 \text{ do } 136,7 \text{ MPa}$$

Koeficijent sigurnosti kreće se od $k_3 = \frac{\tau_T}{\tau_{xz}} = \frac{105,0}{18,0} = \underline{5,83}$ do $k_3 = \frac{136,5}{18,0} = \underline{7,58}$

Veličina glavnih naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2} = \pm \tau = \pm 18,00 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma_1 = +18,00 \text{ MPa}}$$

$$\underline{\sigma_2 = -18,00 \text{ MPa}}$$

Ekvivalentno naprezanje je:

a) Po **I. teoriji** najvećih normalnih naprezanja:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 = +18,0 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{18,0} = \underline{11,67}$$

b) Po **II. teoriji** najvećih normalnih deformacija:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 = 18,0 - 0,30 \cdot (-18,0) = 23,40 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{23,40} = \underline{8,97}$$

c) Po **III. teoriji** najvećih posmičnih naprezanja:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_2 = 18,0 - (-18,0) = 36,0 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{36,0} = \underline{5,83}$$

d) Po **IV. teoriji** potencijalne energije deformacija:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{18,0^2 + (-18,0)^2 - 2 \cdot 0,30 \cdot 18,0 \cdot (-18,0)} = 29,02 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_2 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{29,02} = \underline{7,24}$$

e) Po **V. teoriji** potencijalne energije promjene oblika:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{18,0^2 + (-18,0)^2 - 18,0 \cdot (-18,0)} = 31,18 \text{ MPa}$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{31,18} = \underline{6,74}$$

f) Po **Mohrovoj teoriji** čvrstoće:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2 = 18,0 - 1 \cdot (-18,0) = 36,0 \text{ MPa} \quad \mu = 1$$

$$\text{Koeficijent sigurnosti je: } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}} = \frac{210}{36,0} = \underline{5,83}$$

Rezultati izračunatih koeficijenata sigurnosti za sve tri točke prikazani su u sljedećoj tablici:

Točka	Koeficijent sigurnosti $k = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ek}}$					
	I. teorija čvrstoće	II. teorija čvrstoće	III. teorija čvrstoće	IV. teorija čvrstoće	V. teorija čvrstoće	Mohrova teorija
1	1,39					
2**	2,15	2,13	2,09	2,13	2,12	2,09
3*	11,67	8,97	5,83	7,24	6,74	5,83

* Usporedbom rezultata izračunatih koeficijenata za točku **3**, sa koeficijentom sigurnosti dobijenim preko granice tečenja pri čistom posmiku ($k_3 = 5,83$ do $k_3 = 7,58$), vidi se da za elastoplastične (duktilne) materijale najviše odgovara teorija potencijalne energije promjene oblika, pa teorija najvećih posmičnih naprezanja.

** Male razlike u koeficijentima sigurnosti za točku **2** su zbog toga što je glavno naprezanje σ_2 malo u odnosu na drugo glavno naprezanje σ_1 (stanje naprezanja je približno jednako jednoosnom).