

11. travnja 2013.

Prof.dr.sc. Joško Krolo

IZVIJANJE, GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI

Sadržaj

7 Izvijanje, gubitak elastične stabilnosti	1
7.1 Vrste ravnoteže	1
7.2 Izvijanje štapa u elastičnom području	6
7.2.1 Štap zglobno pričvršćen na oba kraja	6
7.2.2 Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan (konzola) . . .	10
7.2.3 Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen . . .	11
7.2.4 Štap upet na oba kraja	13
7.2.5 Duljina izvijanja štapa	16
7.2.6 Štap na jednom kraju upet, a na drugom elastično oslonjen	17
7.2.7 Utjecaj lokalnih oslabljenja štapa na veličinu kritične sile	20
7.2.8 Kritično naprezanje	21
7.3 Izvijanje štapa u plastičnom području	23
7.4 Empirijski izrazi za kritično naprezanje	31
7.5 Dimenzioniranje štapova opterećenih na izvijanje	33
7.6 Utjecaj početne zakrivljenosti štapa na veličinu kritične sile	36
7.7 Ekscentrično opterećenje vitkih štapova	39
7.8 Utjecaj aksijalnog opterećenja na savijanje štapa	41
7.9 Energijska metoda određivanja kritične sile izvijanja	44
7.10 Primjeri	48
7.10.1 <i>Primjer 7.1</i>	48
7.10.2 <i>Primjer 7.2</i>	50

7 Izvijanje, gubitak elastične stabilnosti

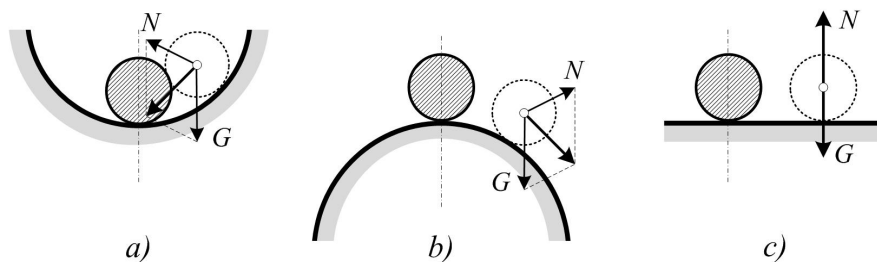
7.1 Vrste ravnoteže

Znanost o otpornosti materijala proučava probleme *čvrstoće*, *krutosti* i *stabilnosti* pojedinih dijelova tehničkih konstrukcija. Do sada smo proučavali probleme naprezanja i deformacija štapova pri različitim oblicima opterećenja, te definirali uvjete čvrstoće i krutosti koji moraju biti ispunjeni pri dimenzioniranju sastavnih dijelova konstrukcija i samih konstrukcija.

Međutim, da bi se postigla potpuna sigurnost konstrukcije, uz te uvjete moraju biti ispunjeni i **uvjeti stabilnosti**.

Ovdje ćemo se upoznati s problemima *elastične stabilnosti* i definirati *uvjete stabilnosti*.

Iz mehanike krutog tijela poznato je da ravnoteža tijela može biti **stabilna**, **labilna** i **indiferentna**. Navedene vrste ravnoteže mogu se pogodno ilustrirati na primjeru kugle položene na konkavnu, konveksnu i horizontalnu podlogu (slika 7.1).



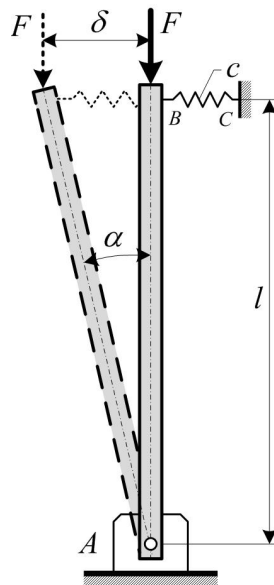
Slika 7.1: Shematski prikaz vrsta ravnoteže

Kugla na konkavnoj podlozi (slika 7.1a) nalazi se u *stabilnoj ravnoteži*. Ako kuglu pomaknemo iz tog ravnotežnog položaja ona će se vratiti u prvobitni ravnotežni položaj. Pri bilo kakvom pomaku kugle iz ravnotežnog položaja njezina energija raste. Iz toga izlazi da stabilnom položaju kugle na konkavnoj podlozi odgovara *minimum potencijalne energije*.

Kugla na konveksnoj podlozi (slika 7.1b) nalazi se u *labilnoj (nestabilnoj) ravnoteži*. Ako kuglu neznatno pomaknemo iz ravnotežnog položaja, ona se neće vratiti u prvobitni položaj, već će se sve više udaljavati od početnog. Svako udaljavanje kugle od početnog položaja popraćeno je smanjenjem potencijalne energije. Prema tome, labilnoj ravnoteži kugle odgovara *maksimum potencijalne energije*.

Kugla na horizontalnoj podlozi (slika 7.1c) nalazi se u *indiferentnoj ravnoteži*. Ako kuglu pomaknemo iz ravnotežnog položaja, ona se neće vratiti u prvobitni, nego će ostati u ravnoteži u nekom novom položaju koji je blizak prvobitnom. Pritom *potencijalna energija kugle ostaje nepromijenjena*.

Uočavamo da stabilnost kugle prikazana na slici 7.1 *ovisi samo o obliku podloge, a ne o težini kugle G*.



Slika 7.2: Analiza ravnoteže ravnog štapa

Razmotrimo dalje primjer ravnoteže ravnog, apsolutno krutog štapa AB prikazanog na slici 7.2. Štap je na donjem kraju zglibno oslonjen, a na gornjem pridrzan elastičnom oprugom krutosti c^1 i aksijalno opterećen silom F .

Ako štap AB nije pridrzan oprugom BC , vertikalni je položaj štapa *labilan*, jer i najmanji bočni pomak δ u točki B uzrokuje rotaciju štapa oko točke A i on se više ne može sam vratiti u prvobitni položaj.

Stabilnost vertikalnog štapa AB pridrzanog elastičnom oprugom AB ovisi o veličini sile F . Ako neko kratkotrajno bočno opterećenje uzrokuje mali bočni pomak δ , na štap će djelovati moment od sile $M_F = F \cdot \delta$ koji teži udaljiti štap od vertikalnog ravnotežnog položaja i moment elastične sile opruge $M_\delta = c \cdot \delta \cdot l$ (gdje je c krutost opruge) koji nastoji štap vratiti u početni vertikalni položaj. Za dovoljno male vrijednosti sile F je $F \cdot \delta < c \cdot \delta \cdot l$ te se štap pod djelovanjem opruge vraća u vertikalni položaj koji u ovom slučaju označuje položaj *stabilne ravnoteže*.

Povećamo li silu F do određene vrijednosti za koju je ispunjen uvjet:

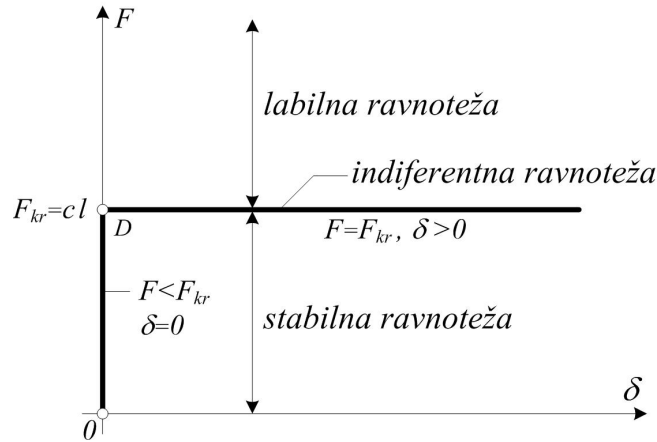
$$F \cdot \delta = c \cdot \delta \cdot l \quad (7.1)$$

štap će, nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja koje je uzrokovalo mali bočni pomak opruge δ , zadržati novi položaj određen tim bočnim pomakom. To je položaj *indiferentne ravnoteže*. Iz gornjeg izraza izlazi definicija kritičnog opterećenja (sile):

$$F_{kr} = c \cdot l \quad (7.2)$$

Za $F > F_{kr}$, odnosno $F \cdot \delta > c \cdot \delta \cdot l$ sistem je u *labilnoj (nestabilnoj) ravnoteži*, jer zbog djelovanja momenta bočni pomak δ stalno raste i štap se ponaša kao da nije pridrzan oprugom BC .

¹Krutost opruge c je sila koja produžava oprugu za 1.



Slika 7.3: Vrste ravnoteže ravnog štapa prikazane grafički

Vrste ravnoteže prikazane su na slici 7.3. Točka D , koja se zove **točkom razgranjenja (bifurkacije)**, određuje dvije grane rješenja ravnoteže: jedna je vertikalna grana ($F \leq F_{kr}, \delta = 0$), druga horizontalna ($F = F_{kr}, \delta > 0$).

Stabilnost sistema može se dobiti i promatrajući potencijalnu energiju sistema prikazanog na slici 7.2. Pretpostavimo neki mali bočni pomak δ u točki B , tako da štapa bude nagnut prema vertikali za mali kut α . Pri tome je vertikalni pomak hvatišta sile F :

$$\delta_V^F = l(1 - \cos \alpha). \quad (7.3)$$

Ako funkciju $\cos \alpha$ razvijemo u Taylor-ov red:

$$\cos \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots, \quad (7.4)$$

uvrstimo u izraz (7.3) i zadržimo prva dva člana reda dobijemo:

$$\delta_V^F = l(1 - \cos \alpha) \approx \frac{l \cdot \alpha^2}{2}. \quad (7.5)$$

Rad sile F na odgovarajućem vertikalnom pomaku δ_V^F je:

$$\Delta W = \frac{F \cdot \delta_V^F}{2} = \frac{F \cdot l \cdot \alpha^2}{2}. \quad (7.6)$$

S druge strane, za mali kut ($\sin \alpha \approx \alpha$) produljenje opruge je $l \cdot \alpha$, pa potencijalna energija elastične opruge iznosi:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (l \cdot \alpha)^2. \quad (7.7)$$

Ako je $\Delta U > \Delta W$, sistem je *stabilan*, a ako je $\Delta W > \Delta U$ sistem je *labilan*. Za *indiferentno stanje ravnoteže* je $\Delta W = \Delta U$, odnosno:

$$\frac{F \cdot l \cdot \alpha^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (l \cdot \alpha)^2, \quad (7.8)$$

odakle dobivamo *kritičnu vrijednost sile* F :

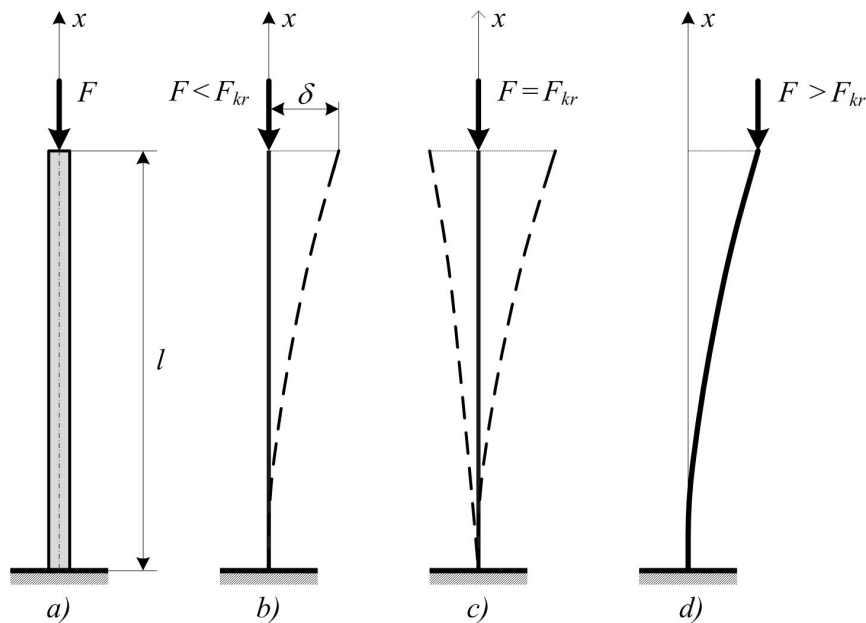
$$F_{kr} = c \cdot l, \quad (7.9)$$

što je jednako izrazu (7.2).

Vidimo da kritično opterećenje (silu) možemo odrediti **statičkom** ili **energijskom metodom**.

Sličan problem stabilnosti ravnoteže postoji i kod *elastičnog* odnosno *deformabilnog tijela*. Pod opterećenjem se elastično tijelo deformira dok se ne uspostavi ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila. Ravnotežni deformirani oblik tijela može biti *stabilan*, *labilan* ili *indiferentan*, ovisno o veličini opterećenja koje djeluje na tijelo.

Razmotrimo elastičnu ravnotežu ravnoga štapa aksijalno opterećenog na tlak (slika 7.4a). Pretpostavit ćemo da je štap *idealno ravan*, *idealno centrično opterećen* i da je izrađen od *homogenog materijala*. Pod djelovanjem tlačne sile F štap će se skratiti, ali će zadržati ravan oblik (slika 7.4a).



Slika 7.4: Problem stabilnosti elastičnog tijela

Pri relativno malim vrijednostima sile F ($F < F_{kr}$) ravan oblik ravnoteže štapa je stabilan (slika 7.4b). Izvedemo li štap iz ravnotežnog položaja kratkotrajnim djelovanjem maloga bočnog opterećenja, štap se nakon prestanka djelovanja tog opterećenja vraća u prvobitni ravan oblik koji predstavlja njegov *stabilni oblik ravnoteže*.

Pri nekoj vrijednosti sile F nazvane kritičnom $F = F_{kr}$ štap se nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja ne vraća u prvobitni ravan oblik, već zadržava novi oblik izazvan kratkotrajnim djelovanjem maloga bočnog opterećenja (slika 7.4c). U tom slučaju govorimo o *indiferentnoj elastičnoj ravnoteži*, odnosno o *kritičnome stanju štapa*.

Kad sila F prijeđe kritičnu vrijednost ($F > F_{kr}$), ravan oblik ravnoteže štapa postaje *labilan* (slika 7.4d). Vrlo malo bočno opterećenje uzrokuje velike progibe koji i nakon prestanka djelovanja bočnog opterećenja i dalje rastu pod djelovanjem aksijalnog opterećenja. Zbog povećanja momenta savijanja od aksijalnog opterećenja može nastati lom štapa. Opisana pojava gubitka stabilnosti ravnoga štapa opterećenog centričnom tlačnom silom naziva se **izvijanje**, a granična vrijednost centrične tlačne sile, do koje je prvobitni ravan oblik ravnoteže štapa još stabilan, naziva se **kritičnom silom** i označava se s F_{kr} .

U stvarnosti izvijanje štapa počinje čim tlačna sila F dostigne kritičnu vrijednost, a često i kad je manja od nje. To se događa zbog toga što najčešće nisu ostvarene početne pretpostavke, odnosno zbog:

- nehomogenosti realnog materijala,
- početne zakrivljenosti osi stvarnog štapa koji nije idealno ravan i
- ekscentriciteta tlačne sile F (štap nije opterećen idealno centrično).

Pojava gubitka stabilnosti sastavnih dijelova tehničkih konstrukcija posebno je opasna jer se zbiva iznenada i pri relativno malim naprezanjima koja zadovoljavaju uvjete čvrstoće. Isto tako proces porasta deformacija pri gubitku stabilnosti zbiva se vrlo brzo.

Da bismo bili sigurni da neće doći do izvijanja (gubitka stabilnosti) ravnog štapa, opterećenog centričnom tlačnom silom F , mora biti ispunjen *uvjet stabilnosti* koji glasi:

$$F \leq F_{i \text{ dop}}, \quad (7.10)$$

gdje je:

$$F_{i \text{ dop}} = \frac{F_{kr}}{k_i}, \quad (7.11)$$

a k_i je *koeficijent sigurnosti protiv izvijanja*.

Pri tome je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i nešto veći od koeficijenta sigurnosti čvrstoće, zato što postoje dodatni faktori koji utječu na izbor koeficijenta sigurnosti protiv izvijanja, kao što su: *nehomogenost materijala, početna zakrivljenost osi štapa, ekscentričnost tlačne sile, način učvršćivanja štapa* i drugi.

Prema tome, proračun stabilnosti tlačnih štapova svodi se na određivanje kritične sile F_{kr} za različite oblike i dimenzije štapova izrađenih od raznih materijala.

Pri određivanju kritične sile služimo se *teorijom drugog reda*, tj. jednadžbe ravnoteže postavljamo na deformiranome štapu, a u izrazu za deformacije zadržavamo samo linearne članove.

7.2 Izvijanje štapa u elastičnom području

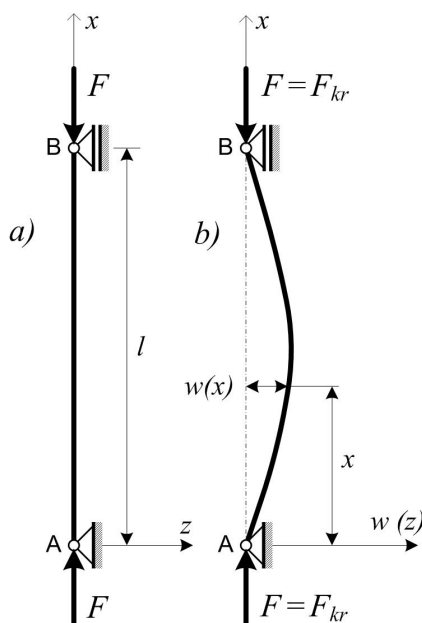
Stabilnost štapova aksijalno opterećenih na tlak prvi je istražio *Leonhard Euler*² godine 1774. On je izveo izraz za kritičnu silu i pokazao da vrijednost kritične sile ovisi o načinu učvršćenja krajeva štapa. Ideja *Eulerove* metode sastoji se u određivanju one sile pod kojom su podjednako mogući ravan i krivocrtan oblik štapa.

Prema načinu učvršćivanja krajeva štapa razlikujemo četiri osnovna slučaja izvijanja:

- štap zglobno pričvršćen na oba kraja,
- štap na jednom kraju upet, a na drugo slobodan (konzola),
- štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen,
- štap upet na oba kraja.

7.2.1 Štap zglobno pričvršćen na oba kraja

Štap zglobno pričvršćen na oba kraja prikazan je na slici 7.5. Dok je centrična tlačna sila F manja od kritične F_{kr} , štap ostaje ravan (slika 7.5a). Kad sila F dostigne kritičnu vrijednost F_{kr} , osim ravnog oblika, podjednako je moguć i krivocrtani oblik štapa (slika 7.5b).



Slika 7.5: Štap zglobno pričvršćen na oba kraja

U presjeku x izvijenog štapa pojavljuje se moment savijanja:

$$M = F \cdot w. \quad (7.12)$$

²*Leonhard Euler* (1707-1783), švicarski matematičar, fizičar i astronom

Diferencijalna jednačba elastične linije glasi:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{E \cdot I_y} = -\frac{F \cdot w}{E \cdot I_y}. \quad (7.13)$$

Predznak minus ($-$) na desnoj strani diferencijalne jednačbe (7.13) uzet je zbog toga što $\frac{d^2w}{dx^2}$ i w imaju suprotne predznake neovisno o izboru pozitivnog smjera koordinatne osi z .

Uz pretpostavku malih progiba u jednačbi (7.13) možemo zanemariti nazivnik na lijevoj strani, odnosno jednačbu (7.13) zamijenjujemo približnom linearnom diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F \cdot w}{E \cdot I_y}, \quad (7.14)$$

gdje je I_y minimalni moment inercije (tromosti) poprečnog presjeka štapa ($I_y = I_{min}$), jer do izvijanja dolazi u ravnini *najmanje krutosti na savijanje* štapa.

Uvedemo li oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_{min}}, \quad (7.15)$$

dobivamo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0., \quad (7.16)$$

Jednačba (7.16) je homogena diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima, a opće rješenje te jednačbe glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad (7.17)$$

gdje su A i B konstante integracije koje određujemo iz rubnih uvjeta, koji su isto homogeni i glase:

$$w(0) = 0 \quad (7.18)$$

i

$$w(l) = 0. \quad (7.19)$$

Iz prvog rubnog uvjeta (7.18) dobivamo da je $B = 0$, pa izraz (7.17) prima oblik:

$$w = A \sin \alpha x. \quad (7.20)$$

Iz drugog rubnog uvjeta (7.19) dobivamo:

$$A \sin \alpha l = 0, \quad (7.21)$$

odakle mora biti $A = 0$ ili $\sin \alpha l = 0$.

Ako je $A = 0$ dobivamo trivijalno rješenje $w = 0$, koje pokazuje da je ravan oblik štapa jedan od mogućih ravnotežnih oblika.

Kako je za izvijeni oblik štapa $A \neq 0$, mora biti $\sin \alpha l = 0$, odakle dobivamo uvjet za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = n\pi \quad (7.22)$$

ili

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (7.23)$$

Sada jednačba elastične linije (7.20) glasi:

$$w = A \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (7.24)$$

a na temelju izraza (7.15) i (7.23) dobivamo vrijednost sile pri kojoj nastupa izvijanje štapa:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (7.25)$$

Za $n = 0$ izraz (7.25) nije upotrebljiv jer je $F = 0$, odnosno to je slučaj neopterećenog štapa.

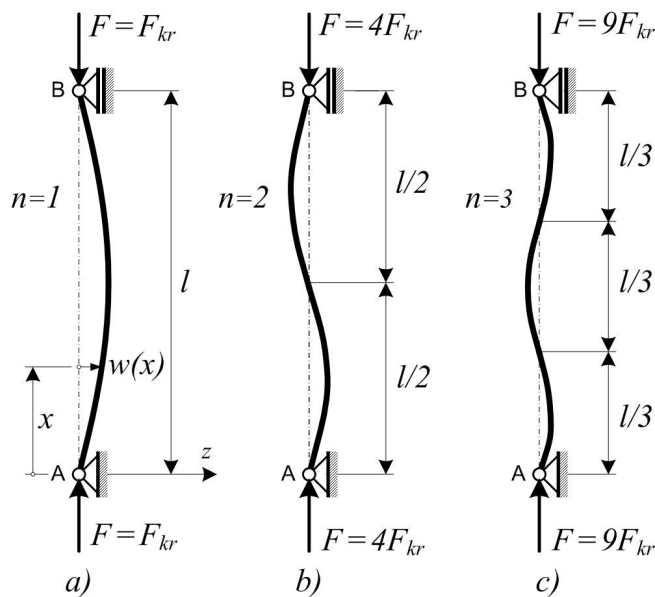
Za $n = 1, 2$ i 3 dobijemo sljedeće izraze za jednačbu elastične linije i za vrijednosti kritične sile:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad w = A \sin \frac{\pi x}{l} \quad F = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}; \quad (7.26)$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad w = A \sin \frac{2\pi x}{l} \quad F = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}; \quad (7.27)$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad w = A \sin \frac{3\pi x}{l} \quad F = \frac{9\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (7.28)$$

Na slici 7.6 prikazani su odgovarajući oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3 .



Slika 7.6: Oblici elastične linije štapa za $n = 1, 2$ i 3

Iz izraza (7.26) do (7.28) i slike (7.6) se vidi da n označava broj poluvalova sinusoide na duljini izvijenog štapa.

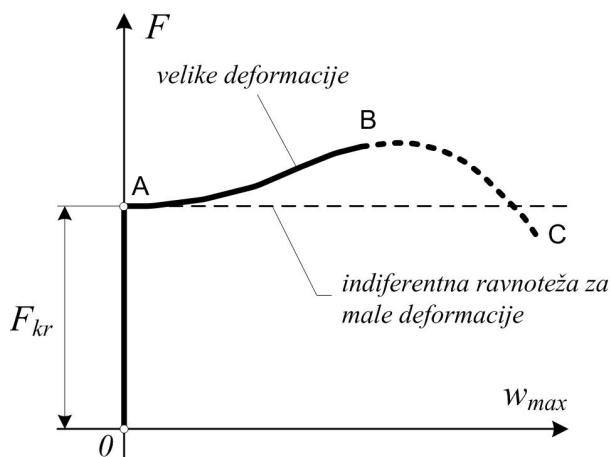
Ako nije spriječeno bočno pomijeranje, do izvijanja će doći pri najmanjoj vrijednosti sile F , odnosno za $n = 1$, a u praksi nas i zanima najmanja vrijednost kod koje postoji mogućnost izvijanja štapa. Tako iz (7.25) za $n = 1$ dobivamo vrijednost **kritične sile izvijanja**:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (7.29)$$

To je **Eulerova kritična sila izvijanja** za štap zgloбно oslonjen na oba kraja, koji će se izviti prema slici 7.6a i izrazu (7.24).

Jednadžba (7.24) daje nam *samo oblik elastične linije* izvijena štapa, *dok veličina progiba ostaje neodređena*. Razlog je u tome što smo zakrivljenost elastične linije izrazili približnim izrazom (7.14) i riješavali linearnu diferencijalnu jednadžbu koja vrijedi samo za male pomake (*teorija drugog reda*).

Da bismo dobili i veličinu progiba, potrebno je za zakrivljenost uzeti točan izraz (7.13) i riješiti nelinearnu diferencijalnu jednadžbu (*teorija trećeg reda*) bez zanemarivanja veličine $(\frac{dw}{dx})^2$ u tom izrazu. Rješenje jednadžbe (7.13) prikazano je na slici 7.7 krivuljom AB . Crtkanom krivuljom BC prikazano je rješenje za izvijanje u plastičnom području.



Slika 7.7: Rješenje nelinearne diferencijalne jednadžbe (7.13)

Krivulja AB u točki A ima horizontalnu tangentu koja označava rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (7.14). Pri malim pomacima točno se rješenje podudara s približnim rješenjem.

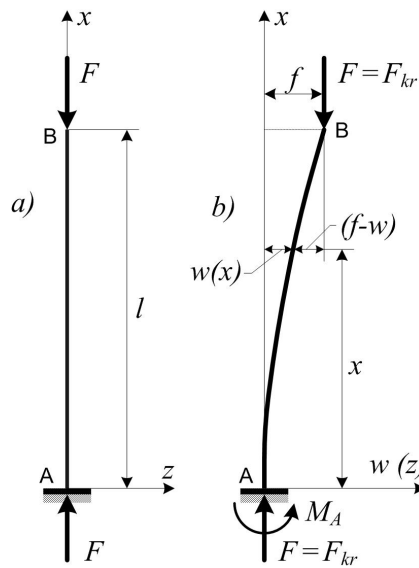
Iz ovih razmatranja izlazi da se rješenje problema izvijanja svodi na integriranje homogene diferencijalne jednadžbe (7.14) čije rješenje ovisi o nekom parametru (α) pri homogenim rubnim uvjetima.

Takav matematički problem naziva se **problem vlastitih vrijednosti** homogene diferencijalne jednadžbe. Može se pokazati da u određenim uvjetima ovakvi problemi, osim trivijalnog, imaju i druga rješenja samo za određene vrijednosti parametra. Svako

vlastitoj vrijednosti odgovara određeno rješenje diferencijalne jednačbe, tzv. **vlastita funkcija**. Problem izvijanja ima beskonačno mnogo vlastitih vrijednosti koje formuliraju diskretan niz. Međutim, za praktične nas potrebe zanima *najmanja vlastita vrijednost*.

7.2.2 Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan (konzola)

Određimo sada kritičnu silu konzolnog štapa koji je na jednom kraju upet, a na drugom slobodan (slika 7.8a).



Slika 7.8: Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan

Označimo li nepoznati progib na slobodnom kraju štapa s f , tada se u presjeku x izvijenog štapa (slika 7.8b) pojavljuje moment savijanja:

$$M = -F(f - w). \quad (7.30)$$

Diferencijalna jednačba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_{min}} = \frac{F}{EI_{min}}(f - w), \quad (7.31)$$

ili

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \alpha^2 f, \quad (7.32)$$

gdje je:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}. \quad (7.33)$$

Jednačba (7.32) je nehomogena diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Opće rješenje te jednačbe je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f. \quad (7.34)$$

Integracijske konstante određujemo iz rubnih uvjeta koji za upeti kraj štapa na slici 7.8b glase:

$$w(0) = 0 \quad ; \quad w'(0) = 0, \quad (7.35)$$

a za slobodni kraj štapa B :

$$w(l) = f. \quad (7.36)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (7.35) u opće rješenje jednadžbe (7.34) dobivamo $B = -f$ i $A = 0$, tako da se opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (7.34) svodi na:

$$w = f(1 - \cos \alpha x). \quad (7.37)$$

Iz rubnog uvjeta (7.36) slijedi:

$$\cos \alpha x = 0. \quad (7.38)$$

Iz (7.38) dobivamo uvjet za kritično stanje štapa:

$$\alpha l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.39)$$

Najniža vrijednost za α , a time i najmanja vrijednost kritične sile bit će za $n = 1$, odnosno za:

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2l}. \quad (7.40)$$

Tako iz (7.33) dobivamo da je kritična sila izvijanja:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}. \quad (7.41)$$

Uvrštavanjem (7.40) u (7.37) dobivamo odgovarajuću jednadžbu elastične linije štapa:

$$w = f(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}), \quad (7.42)$$

pri čemu f za male pomake (teoriju drugog reda) ostaje neodređeno.

7.2.3 Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen

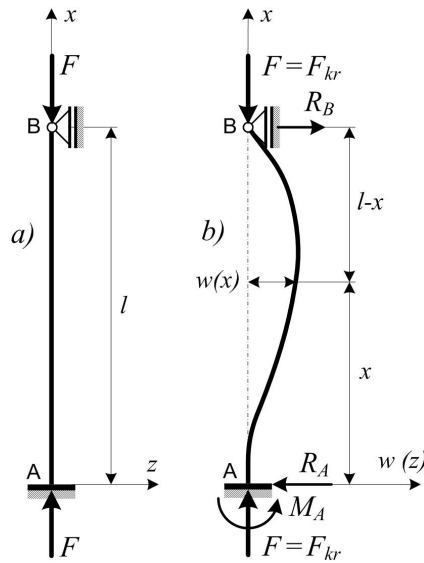
Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen prikazan je na slici 7.9a. Kad sila F dostigne kritičnu vrijednost osim ravnog štapa podjednako je moguć i izvijeni oblik (slika 7.9b).

Pri izvijanju štapa pojavljuju se ležajne reakcije $R_A = R_B$ i reaktivni moment M_A . U presjeku x izvijenoga štapa pojavljuje se moment savijanja:

$$M = F \cdot w - R_B(l - x), \quad (7.43)$$

a diferencijalna jednadžba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{EI_{min}} = \frac{R_B}{EI_{min}}(l - x). \quad (7.44)$$



Slika 7.9: Štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodno oslonjen

Ako, kao i u prethodnim slučajevima, uvedemo oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}, \quad (7.45)$$

dobit ćemo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{R_B}{F} \alpha^2 (l - x). \quad (7.46)$$

Opće rješenje te jednadžbe je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R_B}{F} (l - x). \quad (7.47)$$

Kako je sistem jedanput statički neodređen, uz konstante integracije A i B , nepoznata je i reakcija R_B .

U ovom slučaju rubni uvjeta su:

$$w(0) = 0 \quad ; \quad w'(0) = 0 \quad ; \quad w(l) = 0. \quad (7.48)$$

Deriviranjem izraza (7.47) dobivamo:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x - \frac{R_B}{F}. \quad (7.49)$$

Iz prvog rubnog uvjeta $w(0) = 0$ slijedi:

$$B + \frac{R_B l}{F} = 0, \quad (7.50)$$

odakle je:

$$B = -\frac{R_B l}{F}. \quad (7.51)$$

Drugi rubni uvjet $w'(0) = 0$ daje:

$$\alpha A - \frac{R_B}{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha A = \frac{R_B}{F}. \quad (7.52)$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti za integracijske konstante (izraze (7.51) i (7.52)) u izraz (7.49) dobit ćemo jednadžbu elastične linije u obliku:

$$w = \frac{R_B}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x + (l - x) \right]. \quad (7.53)$$

Iz trećeg rubnog uvjeta $w'(l) = 0$ dobivamo:

$$\frac{R_B}{F} \left(\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x \right) = 0. \quad (7.54)$$

Kako je $\frac{R_B}{F} \neq 0$ mora biti:

$$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha l = \alpha l. \quad (7.55)$$

Dobili smo transcendentnu jednadžbu³ čije rješenje možemo dobiti grafičkim putem prema slici 7.10.

Korjenima jednadžbe (7.55) odgovaraju apscise sjecišta pravca $y = \alpha l$ i funkcije $y = \operatorname{tg} \alpha l$. Najmanji korijen te jednadžbe ima vrijednost $\alpha l = 4,493$ (točka E na slici 7.10).

Na kraju iz izraza (7.45) dobivamo kritičnu silu izvijanja za štap na jednom kraju upet, a na drugom zglobno oslonjen:

$$F_{kr} = \alpha^2 EI_{min} = \frac{4,493^2 EI_{min}}{l^2}, \quad (7.56)$$

ili

$$F_{kr} = \frac{20,187 EI_{min}}{l^2} \approx \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (7.57)$$

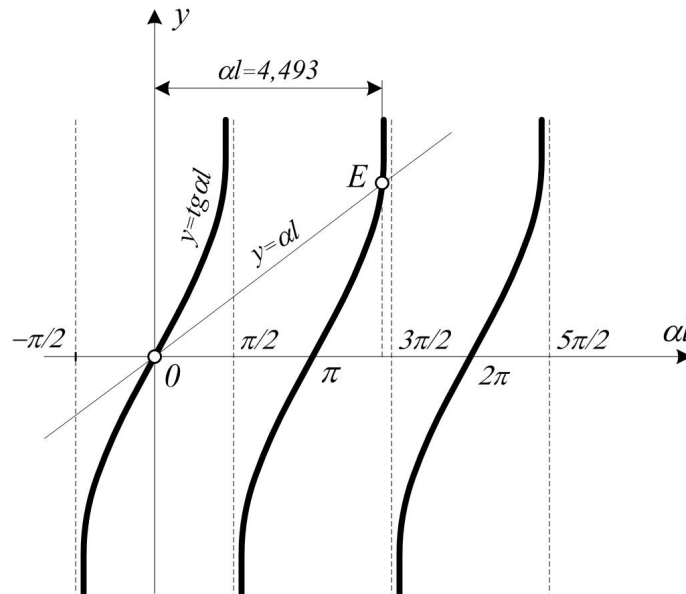
7.2.4 Štap upet na oba kraja

Za štap upet na oba kraja (slika 7.11a) pretpostavljamo simetričan oblik izvijanja štapa (slika 7.11b). Na mjestima upetosti pojavljuje se reaktivni moment M_0 .

U presjeku x izvijenog štapa (slika 7.8b) pojavljuje se moment savijanja:

$$M = Fw - M_0. \quad (7.58)$$

³To je transcendentna (ne algebarska) jednadžba. Takve se jednadžbe u pravilu ne mogu elementarno rješavati, i gotovo uvijek se moramo zadovoljiti s približnim rješenjem.



Slika 7.10: Rješenje jednadžbe (7.55) grafičkim putem

Diferencijalna jednadžba elastične linije glasi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}} w = \frac{M_0}{EI_{min}}. \quad (7.59)$$

Uvedemo li oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}. \quad (7.60)$$

dobit ćemo:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = \frac{M_0}{F} \alpha^2. \quad (7.61)$$

Opće rješenje te jednadžbe je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{M_0}{F}. \quad (7.62)$$

Rubni uvjeti za ovaj slučaj štapa koji je upet na oba kraja glase:

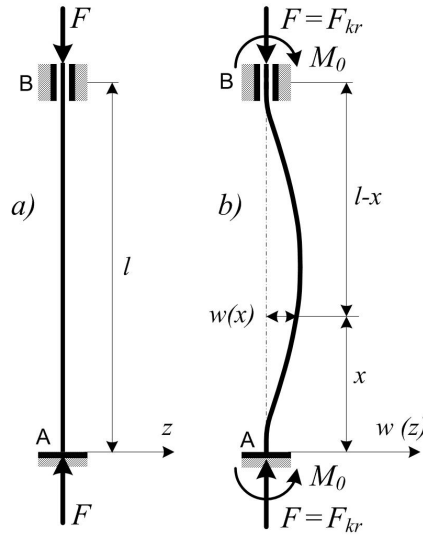
$$w(0) = 0 \quad (a) \quad w'(0) = 0 \quad (b) \quad w(l) = 0 \quad (c) \quad w'(l) = 0 \quad (d) \quad (7.63)$$

Deriviranjem izraza (7.62) dobivamo:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x. \quad (7.64)$$

Rubni uvjet (7.63a) daje:

$$B + \frac{M_0}{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{M_0}{F}, \quad (7.65)$$



Slika 7.11: Štap upet na oba kraja

a iz uvjeta (7.63b) dobivamo da je $A = 0$.

Tako jednadžbu (7.62) možemo prikazati u sljedećem obliku:

$$w = \frac{M_0}{F}(1 - \cos \alpha x), \quad (7.66)$$

koju kad deriviramo dobijemo:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{F}\alpha \sin \alpha x. \quad (7.67)$$

Iz uvjeta (7.63c) dobivamo:

$$w(l) = \frac{M_0}{F}(1 - \cos \alpha l) = 0. \quad (7.68)$$

Kako je $\frac{M_0}{F} \neq 0$, mora biti:

$$\cos \alpha l = 1. \quad (7.69)$$

Rubni uvjet (7.63d) nam daje:

$$w'(l) = \frac{M_0}{F}\alpha \sin \alpha l = 0, \quad (7.70)$$

odnosno:

$$\sin \alpha l = 0. \quad (7.71)$$

Jednadžbe (7.69) i (7.71) su zadovoljene za:

$$\alpha l = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.72)$$

Konačno iz (7.60) dobivamo da najmanju vrijednost kritične sila izvijanja za $n = 1$, tj.

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \quad (7.73)$$

Iz (7.65), (7.66) i (7.72) slijedi jednadžba elastične linije štapa:

$$w = -B\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right), \quad (7.74)$$

pri čemu konstanta B po teoriji drugog reda ostaje neodređena.

7.2.5 Duljina izvijanja štapa

Usporedimo li izraze (7.29), (7.41), (7.57) i (7.73) za prethodna četiri slučaja pridržanja štapa na krajevima, te izraze za kritičnu silu možemo prikazati u općem obliku:

$$F_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (7.75)$$

$$\mu = \frac{1}{n}, \quad (7.76)$$

gdje su:

μ - koeficijent duljine izvijanja štapa,

n - broj poluvalova sinusoide elastične linije izvijenog štapa.

Označimo li:

$$l_i = \mu l, \quad (7.77)$$

izraz (7.75) možemo napisati u obliku:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2}, \quad (7.78)$$

gdje je: l_i - **duljina izvijanja**.

Duljinu izvijanja predstavlja duljina jednog poluvala sinusoide, tj. duljina između dviju susjednih točaka infleksije A i B elastične linije štapa (slika 7.12).

Tako prema slici 7.12 za četiri osnovna načina pričvršćenja štapa dobivamo sljedeće koeficijente duljine izvijanja i kritične sile:

$$n = 1 \quad ; \quad \mu = 1 \quad ; \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}, \quad (7.79)$$

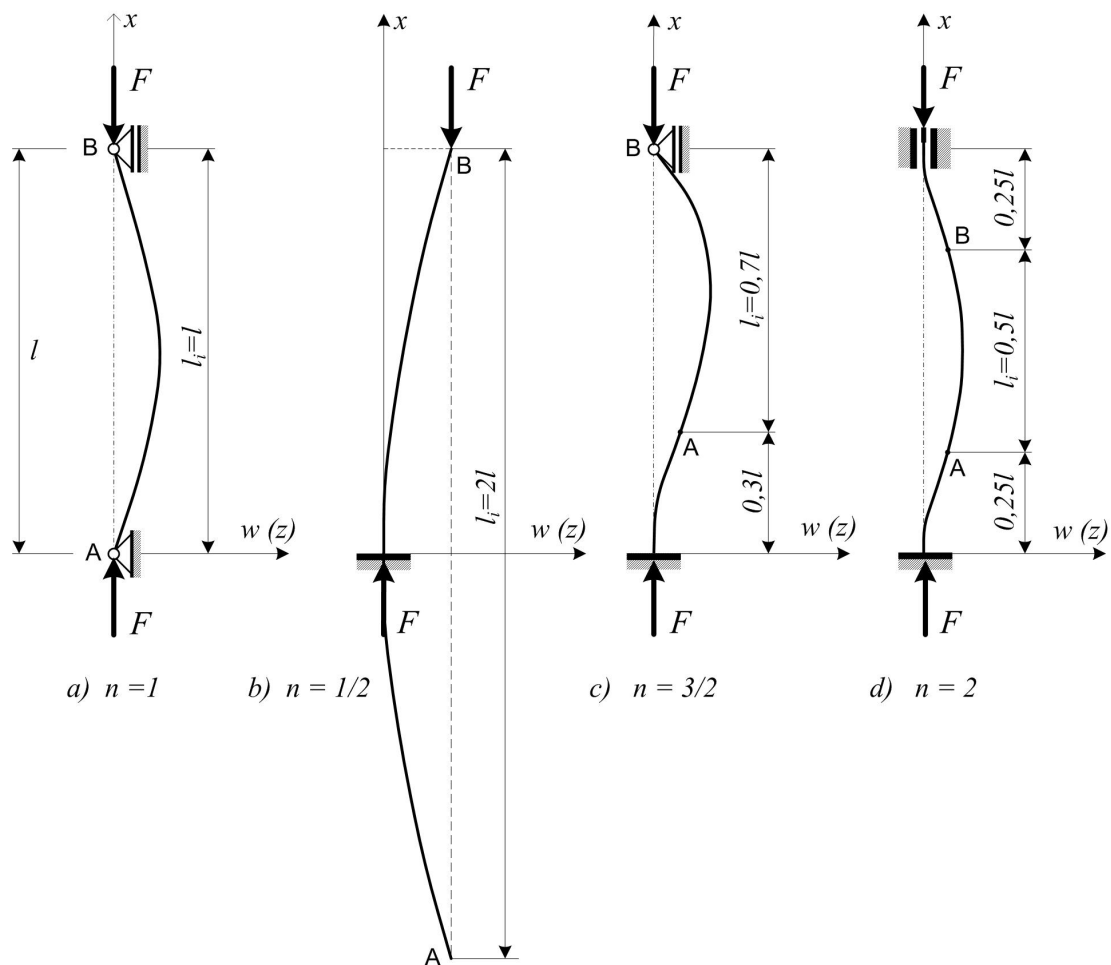
$$n = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mu = 2 \quad ; \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2}, \quad (7.80)$$

$$n = \frac{3}{2} \quad ; \quad \mu \approx 0,7 \quad ; \quad F_{kr} \approx \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,7l)^2}, \quad (7.81)$$

$$n = 2 \quad ; \quad \mu = 0,5 \quad ; \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,5l)^2}. \quad (7.82)$$

Iz izraza (7.78) proizlazi da kritična sila izvijanja ovisi o:

- materijalu štapa (modulu elastičnosti E),
- poprečnom presjeku štapa (minimalnom momentu inercije I_{min}),
- duljini štapa (l) i
- načinu pričvršćenja njegovih krajeva (koeficijentu duljine izvijanja).

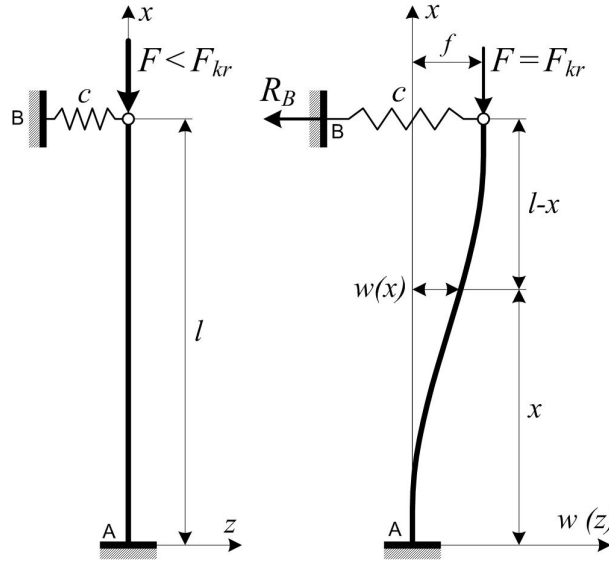


Slika 7.12: Četiri osnovna načina pričvršćenja štapa s odgovarajućim duljinama izvijanja

7.2.6 Štap na jednom kraju upet, a na drugom elastično oslonjen

Na slici 7.12 su prikazana četiri osnovna načina pričvršćenja štapa na krajevima. Međutim, u konstrukciji su rijetko ostvareni ti idealni načini učvršćenja, već je štap u većini slučajeva na jednom kraju elastično upet ili elastično oslonjen.

Razmotrit ćemo jedan od tih tipičnih slučajeva kada je štap na jednom kraju potpuno upet, a na drugom elastično oslonjen (slika 7.13).



Slika 7.13: Štap na jednom kraju upet, a na drugom elastično oslonjen

Nakon gubitka stabilnosti elastično oslonjeni kraj štapa se pomakne u horizontalnome smjeru za pomak f . Pri tom se pojavljuje ležajna reakcija:

$$R_B = c \cdot f, \quad (7.83)$$

gdje je c krutost elastične opruge na ležaju B .

Moment je savijanja u presjeku x :

$$M = -F(f - w) + cf(l - x). \quad (7.84)$$

Diferencijalna jednadžba elastične linije izvijenog štapa glasi:

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{M}{EI_{min}} [F(f - w) - cf(l - x)]. \quad (7.85)$$

Uvedemo li oznaku:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}, \quad (7.86)$$

dobit ćemo:

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \alpha^2(f - w) - \frac{cf}{EI_{min}}(l - x) \quad (7.87)$$

ili

$$\frac{d^2x}{dx^2} + \alpha^2w = \alpha^2f \left(l - \frac{cl}{F} \right) + \alpha^2 \frac{cf}{F}x. \quad (7.88)$$

Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe je:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \alpha^2 f \left(l - \frac{cl}{F} \right) + \alpha^2 \frac{cf}{F}x. \quad (7.89)$$

Za štap prikazan na slici 7.13) rubni uvjeti glase:

$$w(0) = 0 \quad (a) \quad w'(0) = 0 \quad (b) \quad w(l) = f \quad (c) \quad (7.90)$$

Iz rubnog uvjeta (7.90a) slijedi:

$$B = -f \left(l - \frac{c}{F} \cdot l \right). \quad (7.91)$$

Prije primjene drugog rubnog uvjeta (7.90b) moramo derivirati izraz (7.89):

$$\frac{dw}{dx} = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x + \frac{c}{F} \cdot f, \quad (7.92)$$

odakle za $x = 0$ dobivamo:

$$\alpha A + \frac{c}{F} \cdot f = 0. \quad (7.93)$$

ili:

$$A = -\frac{c}{\alpha F} \cdot f. \quad (7.94)$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti za konstante integracije A (7.94) i B (7.91) u izraz (7.89), dobit ćemo jednadžbu elastične linije izvijenog štapa:

$$w = -\frac{c}{\alpha F} f \sin \alpha x - f \left(1 - \frac{c}{F} l \right) \cos \alpha x + f \left(1 - \frac{c}{F} l \right) + \frac{c}{F} f x. \quad (7.95)$$

Iz trećeg rubnog uvjeta (7.90c) dobivamo:

$$w(l) = -\frac{c}{\alpha F} f \sin \alpha l - l \left(1 - \frac{c}{F} l \right) \cos \alpha l + f \left(1 - \frac{c}{F} l \right) + \frac{c}{F} f l = f \quad (7.96)$$

ili

$$-\frac{c}{\alpha F} \sin \alpha l - \left(1 - \frac{c}{F} l \right) \cos \alpha l = 0, \quad (7.97)$$

odakle je:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l \left(1 - \frac{F}{c l} \right). \quad (7.98)$$

Uzimajući u obzir da je iz (7.86) $F = \alpha^2 EI_{min}$, jednadžbu (7.98) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{EI_{min}}{l^3 c} (\alpha l)^3. \quad (7.99)$$

Ovu transcendentnu jednadžbu možemo riješiti grafički. Korijenima jednadžbe (7.99) odgovaraju apscise sjecišta funkcije $y = \operatorname{tg} \alpha l$ i funkcije:

$$y = \alpha l - \frac{EI_{min}}{l^3 c} (\alpha l)^3. \quad (7.100)$$

Najmanji korijen te jednadžbe ima vrijednost koja leži u intervalu:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha l < \frac{3}{2}\pi. \quad (7.101)$$

Razmotrimo dva granična slučaja:

a) Za $c = 0$ (kao da nema opruge) iz jednadžbe (7.99) dobivamo:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \infty ; \quad \alpha l = \frac{\pi}{2}, \quad (7.102)$$

pa iz izraza (7.86) dobivamo veličinu kritične sile:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2}. \quad (7.103)$$

Dobili smo poznato rješenje (7.41) za štap na jednom kraju upet, a na drugom slobodan.

b) Za $c = \infty$ (potpuno kruti ležaj) iz jednadžbe (7.99) dobivamo:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l ; \quad \alpha l = 4,493, \quad (7.104)$$

kritična sila iznosi:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,7l)^2}, \quad (7.105)$$

što odgovara rješenju (7.57) za štap na jednome kraju upet, a na drugome slobodno oslonjen.

Iz ovih rezultata se vidi: ako se krutost opruge c mijenja od nule do beskonačnosti pripadajući koeficijent duljine izvijanja μ se mijenja od 2 do 0,7.

Prethodne metode određivanja kritične sile se nazivaju **statičkim metodama (metode ravnoteže)**, a kao što smo vidjeli, temelje se na integriranju diferencijalne jednadžbe elastične linije izvijenog štapa. Osim ove metode postoji i **energijska metoda** određivanja kritične sile izvijanja (slično kako je određena kritična sila na primjeru sa slike 7.2). Na tu metodu određivanja kritične sile vratit ćemo se još na kraju u *poglavlju 7.9*.

7.2.7 Utjecaj lokalnih oslabljenja štapa na veličinu kritične sile

U dosadašnjim smo razmatranjima promatrali izvijanje štapa konstantnog poprečnog presjeka, te utvrdili da u izraz za kritičnu silu dolazi I_{min} , jer će do izvijanja doći oko osi poprečnog presjeka s minimalnim momentom tromosti.

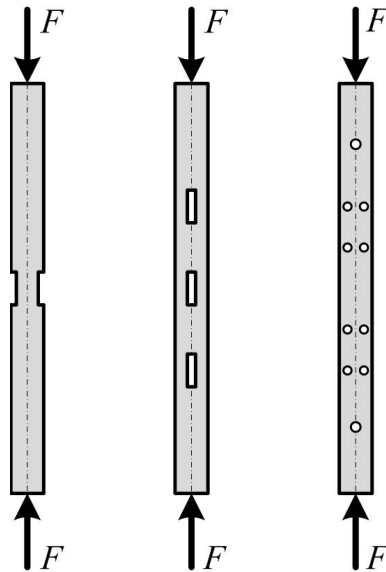
U konstrukcijama se često pojavljuju tlačni štapovi koji imaju lokalna oslabljenja kao što su zasjeci kod drvenih konstrukcija, rupe za zakovice kod čeličnih konstrukcija i slično (slika 7.14).

Kod štapova s lokalnim oslabljenjem presjeka, promjena parametra α u diferencijalnim jednadžbama (7.14), (7.32), (7.46) i (7.61) ima mali utjecaj na deformaciju štapa.

Istraživanja *A. N. Dinnika*⁴ i *S. P. Timošenska*⁵ su pokazala da čak i znatnije lokalno oslabljenje presjeka (do 20 %) neznatno smanjuje veličinu kritične sile.

⁴Aleksandr Nikolaevich Dinnik (1876-1950)

⁵Stjepan Prokofojevič Timošenko (1878-1972), prozvan "ocem tehničke mehanike", osnivač i prvi predstojnik Zavoda za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. U Zagreb je prof. Timošenko došao nakon emigracije iz Rusije 1920. Već prije toga u svijetu je bio poznati znanstvenik, profesor na Politehničkom institutu u Petrogradu i na Politehnici u Kijevu, te član Ukrajinske akademije znanosti u Kijevu. U Zagrebu se zadržao do 1922. kada je otišao u SAD.



Slika 7.14: Primjeri štapa s lokalnim oslabljenjima

Zato se pri proračunu stabilnosti štapa opterećenih na pritisak ne uzima u obzir lokalno oslabljenje presjeka. Kritičnu silu računamo s minimalnim momentom tromosti bruto-presjeka štapa, tj. I_{min} bruto.

7.2.8 Kritično naprezanje

Štap aksijalno opterećen na pritisak u kritičnome stanju zadržava ravan oblik ravnoteže, pa je kritično naprezanje u štapu u trenutku izvijanja:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 A}. \quad (7.106)$$

Uzimajući u obzir da je minimalni polumjer tromosti presjeka:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \Rightarrow i_{min}^2 = \frac{I_{min}}{A}, \quad (7.107)$$

izraz (7.106) možemo napisati:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} \quad (7.108)$$

ili:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.109)$$

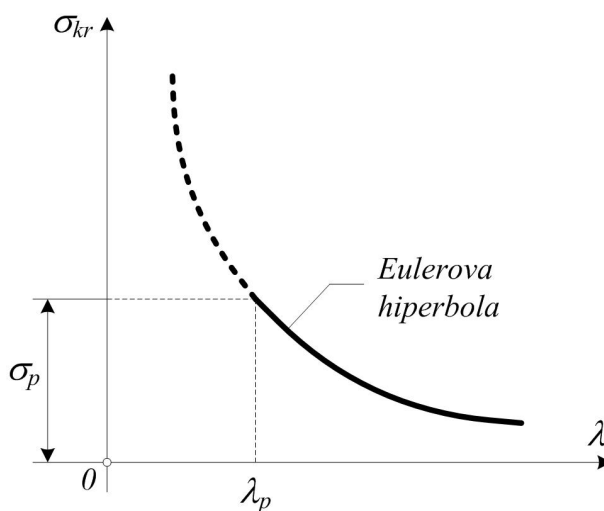
gdje je:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} \quad (7.110)$$

bezdimenzionalna karakteristika štapa i naziva se **vitkost štapa**.

Izraz (7.109) pokazuje da kritično naprežanje σ_{kr} ovisi o svojstvima materijala (E) i o vitkosti štapa (λ).

Funkcionalna ovisnost (7.109) između σ_{kr} i λ prikazana je *Eulerovom hiperbolom* u koordinatnome sustavu $\lambda - \sigma_{kr}$ (slika 7.15).



Slika 7.15: Funkcionalna ovisnost $\sigma_{kr} - \lambda$

Pri velikoj vitkosti štapa kritično naprežanje teži nuli, a za male vitkosti kritično naprežanje naglo raste, tako da ispod određene vitkosti prelazi granicu proporcionalnosti materijala.

Eulerovi izrazi za kritičnu silu i kritično naprežanje zasnovani su na linearnoj diferencijalnoj jednadžbi elastične linije pa, prema tome, i na valjanosti Hookeova zakona. To znači da izraz (7.109) vrijedi samo za kritično naprežanje koje ne prelazi granicu proporcionalnosti materijala pri jednoosnom pritisku, tj. kada je:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p, \quad (7.111)$$

ili:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p, \quad (7.112)$$

gdje je λ_p **granična vitkost** ispod koje *Eulerovi* izrazi za kritičnu silu i kritično naprežanje ne vrijede. Prema tome, štapovi **velike vitkosti** $\lambda \geq \lambda_p$ izvijaju se u elastičnom području, dok se štapovi **male i srednje vitkosti** gdje je $\lambda < \lambda_p$ i $\sigma_{kr} > \sigma_p$ izvijaju u plastičnom području.

Pokusi pokazuju da je stvarno kritično naprežanje za štapove male i srednje vitkosti ($\lambda < \lambda_p$) uvijek manje od *Eulerova* kritičnog naprežanja (7.109). Prema tome, primjena *Eulerovih* izraza za kritičnu silu i kritično naprežanje na štapove koji se izvijaju u plastičnom području ne samo što je načelno pogrešno već je i *krajnje opasno za sigurnost konstrukcije*.

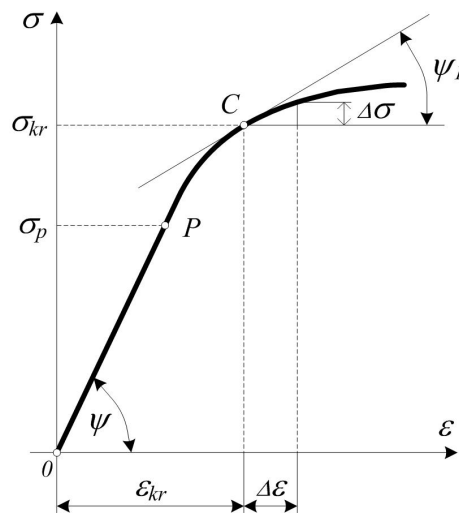
7.3 Izvijanje štapa u plastičnom području

Problem izvijanja štapa u plastičnom području prvi je istraživao *F. Engesser*⁶ 1889. godine polazeći od sljedećih pretpostavki:

- štap je idealno ravan i izrađen od homogenog materijala,
- štap je zglobno učvršćen na krajevima i idealno centrično opterećen na tlak,
- progibi su zbog savijanja štapa mali,
- *Bernoullijeva* hipoteza ravnih presjeka pri savijanju vrijedi i za plastično područje,
- modul elastičnosti u nekoj točki dijagrama $\sigma - \varepsilon$ izražava se **tangentnim modu- lom**.

Tangentni modul u nekoj točki C dijagrama na slici 7.16 definiran je izrazom:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \psi_1. \quad (7.113)$$

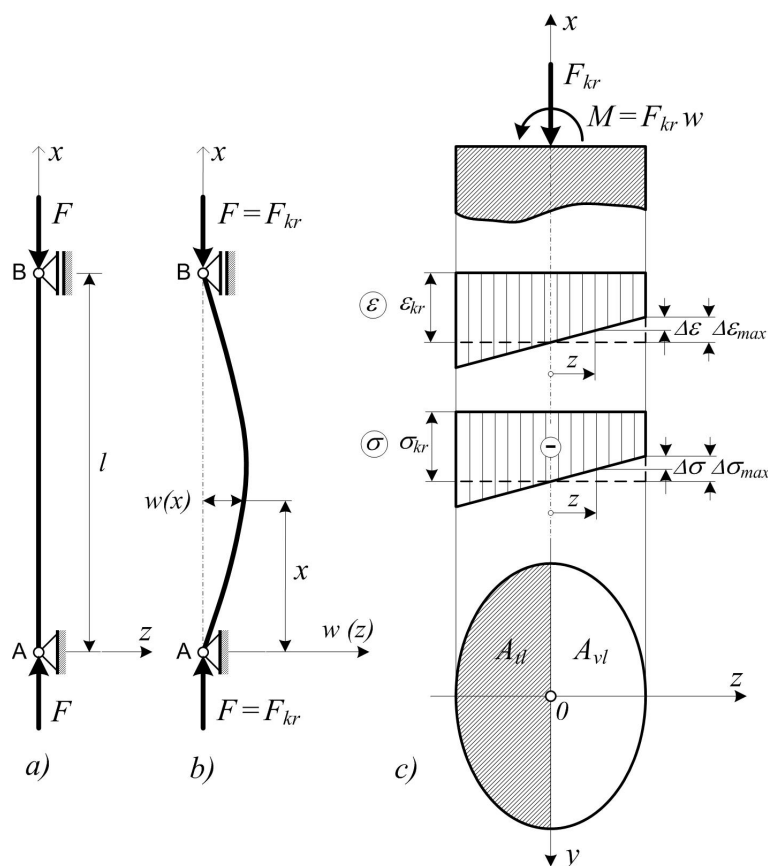


Slika 7.16: Dijagram $\sigma - \varepsilon$

Pri tome se pretpostavlja da je tangentni modul u okolišu točke C konstantan, što odgovara pretpostavci da se u okolišu točke C linija opterećenja poklapa s linijom rasterećenja.

Pri ovoj analizi izvijanja štapa u plastičnom području zadržat ćemo se samo na slučaju štapa koji je *zglobno učvršćen na oba kraja* (slika 7.17a). Oblik izvijenog štapa opterećenog centričnom kritičnom silom F_{kr} prikazan je na slici 7.17b.

⁶Friedrich Engesser (1848-1931), njemački znanstvenik koji je modificirao *Eulerove* jednadžbe za slučaj izvijanja u plastičnom području.



Slika 7.17: Štap zglobno učvršćen na oba kraja i dijagrami deformacija i naprezanja

U nekom presjeku x štapa pojavljuje se uzdužna sila F_{kr} i moment savijanja $M = F_{kr} \cdot w$. Dijagrami deformacija i naprezanja u promatranome presjeku prikazani su na 7.17c. U tim su dijagramima naprezanja σ_{kr} i deformacije ϵ_{kr} uzrokovane centričnom silom F_{kr} i odgovaraju točki C u dijagramu $\sigma - \epsilon$ na slici 7.16.

Dopunska deformacija zbog savijanja jest:

$$\Delta\epsilon = \frac{z}{\rho}, \quad (7.114)$$

gdje je ρ - zakrivljenost izvijenog oblika štapa.

Dopunska naprezanja zbog savijanja u vlačnoj i tlačnoj zoni poprečnoga presjeka možemo izraziti slično *Hookeovu zakonu*:

$$\Delta\sigma = E_t \cdot \Delta\epsilon = E_t \frac{z}{\rho}. \quad (7.115)$$

Ukupno naprezanje u nekoj točki promatranog presjeka je:

$$\sigma = \sigma_{kr} + \Delta\sigma = \sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho}. \quad (7.116)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatranog dijela štapa $\Sigma F_x = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_A \sigma \cdot dA &= \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) \cdot dA = \int_A \left(\sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \right) \cdot dA = \\
&= \int_A \sigma_{kr} \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_A z \cdot dA = F_{kr} + \frac{E_t}{\rho} \int_A z \cdot dA = F_{kr}.
\end{aligned} \tag{7.117}$$

Odatle izlazi da je:

$$\int_A z \cdot dA = 0, \tag{7.118}$$

što znači da neutralna os zbog djelovanja momenta savijanja prolazi težištem poprečnog presjeka.

Iz uvjeta ravnoteže $\Sigma M_y = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
M &= \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = \int_A (\sigma_{kr} + \Delta\sigma) \cdot z \cdot dA = \int_A \left(\sigma_{kr} + E_t \frac{z}{\rho} \right) \cdot z \cdot dA = \\
&= \sigma_{kr} \int_A z \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA = F \cdot w.
\end{aligned} \tag{7.119}$$

Uzimajući u obzir izraz (7.118) i činjenicu da integral:

$$\int_A z^2 \cdot dA = I_y = I_{min} \tag{7.120}$$

predstavlja moment tromosti poprečnoga presjeka s obzirom na os najmanje krutosti, dobit ćemo:

$$\frac{1}{\rho} \cdot E_t \cdot I_{min} = F \cdot w \tag{7.121}$$

ili:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}}. \tag{7.122}$$

Uz pretpostavku da su progibi mali, zakrivljenost možemo izraziti približnim izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{7.123}$$

Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu elastične linije štapa izvijena u plastičnom području

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F \cdot w}{E_t \cdot I_{min}} = 0. \tag{7.124}$$

Razlika između ove diferencijalne jednadžbe (7.124) i jednadžbe (7.14) samo je u tome, što umjesto E u jednadžbi (7.14) u jednadžbu (7.124) uvrštavamo tangenti modul E_t .

To znači da se prije dobiveni izrazi za kritičnu silu i kritično naprežanje u elastičnom području formalno mogu zadržati i u plastičnom području ako se modul elastičnosti E zamijeni tangentskim modulom E_t .

Tako dobivamo:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_t I_{min}}{l_i^2} \quad (7.125)$$

i:

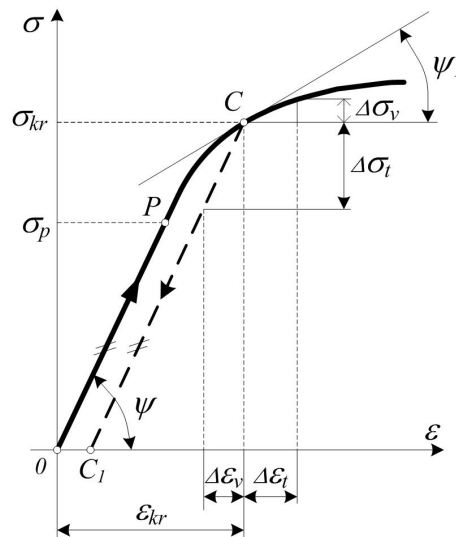
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (7.126)$$

Izraz (7.125) za kritičnu silu u plastičnom području možemo prikazati i u sljedećem obliku:

$$F_{kr} = \frac{E_t}{E} \cdot \frac{\pi^2 E_t I_{min}}{l_i^2} = \frac{E_t}{E} F_e, \quad (7.127)$$

gdje je F_e Eulerova kritična sila.

*F.S.Jasinski*⁷ je 1893. godine upozorio na činjenicu da je u dijagramu $\sigma - \varepsilon$ linija rasterećenja CC_1 paralelna s pravcem OP (slika 7.18).

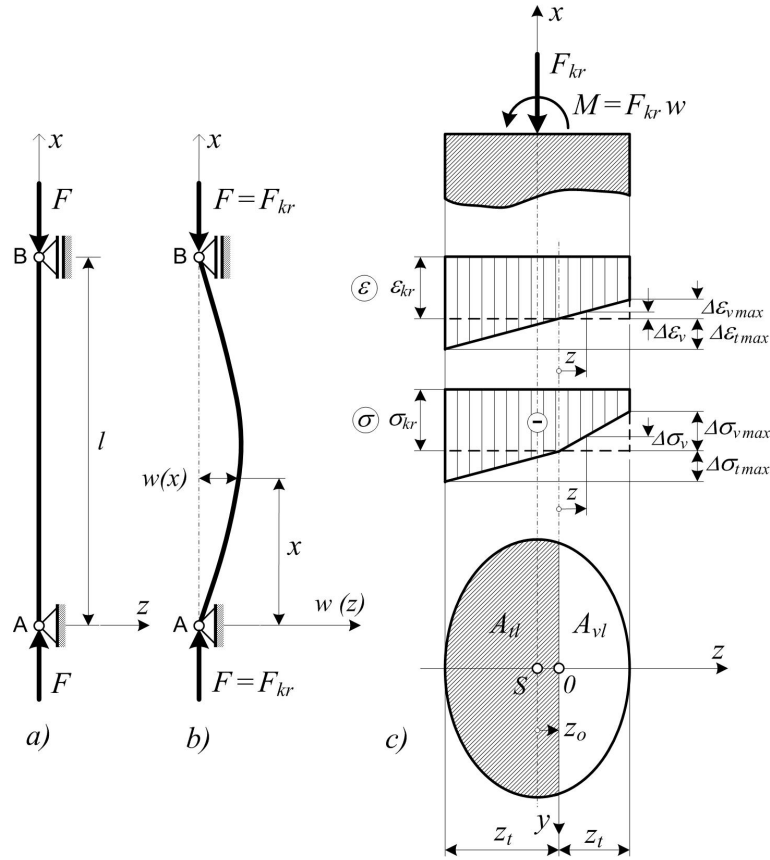


Slika 7.18: Dijagram $\sigma - \varepsilon$ s ucrtanom linijom rasterećenja

Prihvatajući tu primjedbu, *Engesser* je 1895. godine dopunio svoja istraživanja uzimajući u obzir da će pri savijanju dio presjeka štapa biti rasterećen naprežanjima zbog savijanja i da će za taj dio presjeka vrijediti modul elastičnosti E , dok će u drugom dijelu presjeka vrijediti tangentski modul E_t .

Raspodjela naprežanja i deformacija u nekom presjeku x štapa na slici 7.19a prikazana je na slici 7.19c.

⁷F. S. Jasinski (1856-1899)

Slika 7.19: Dijagrami deformacija i naprezanja korigirani prema prijedlogu *Jasinskog*

Dopunska beskonačna mala naprezanja zbog savijanja u tlačnoj i vlačnoj zoni presjeka štapa u kritičnom stanju su:

$$\Delta\sigma_t = E_t \cdot \Delta\varepsilon = E_t \frac{z}{\rho} ; \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \psi_1, \quad (7.128)$$

$$\Delta\sigma_v = E \cdot \Delta\varepsilon = E \frac{z}{\rho} ; \quad E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \psi. \quad (7.129)$$

Pri beskonačno malim progibima štapa uzdužna je sila u poprečnom presjeku konstantna. Zato je:

$$\int_A \Delta\sigma \cdot dA = 0 \quad (7.130)$$

ili:

$$\int_A \Delta\sigma_{kr} \cdot dA = \int_{A_v} \Delta\sigma_v \cdot dA - \int_{A_t} \Delta\sigma_t \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z \cdot dA - \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} z \cdot dA = 0.. \quad (7.131)$$

Iz uvjeta ravnoteže promatanog dijela štapa $\Sigma M_y = 0$ dobivamo:

$$\int_A \Delta\sigma_{kr} \cdot z \cdot dA = \int_{A_v} \Delta\sigma_v \cdot z \cdot dA + \int_{A_t} \Delta\sigma_t \cdot z \cdot dA =$$

$$= \frac{E}{\rho} \int_{A_v} z^2 \cdot dA + \frac{E_t}{\rho} \int_{A_t} z^2 \cdot dA = M = F \cdot w. \quad (7.132)$$

Moment aksijalne sile F odnosi se na težišnu os, dok je moment unutarnjih sila uzet s obzirom na neutralnu os y .

Jednadžbu ravnoteže (7.131) možemo napisati u obliku:

$$E S_v - E_t S_t = 0, \quad (7.133)$$

gdje su S_t i S_v statički momenti površina A_t i A_v tlačne i vlačne zone presjeka (slika 7.19c) s obzirom na neutralnu os y .

Jednadžbom (7.133) možemo odrediti položaj neutralne osi, tj. pomak z_0 neutralne osi od težišta presjeka prema rastegnutim vlaknima, a time i koordinate krajnjih vlaknaca z_t i z_v .

Iz druge jednadžbe ravnoteže (7.132) dobivamo:

$$\frac{1}{\rho} (EI_v + E_t I_t) = F \cdot w, \quad (7.134)$$

gdje su I_t i I_v statički momenti površina A_t i A_v s obzirom na neutralnu os y .

Označimo li s I_{min} minimalni moment tromosti čitavog presjeka s obzirom na težišnu os presjeka, tada jednadžbu (7.134) možemo prikazati u obliku:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F w}{E_r I_{min}}, \quad (7.135)$$

gdje je:

$$E_r = \frac{1}{I_{min}} (EI_v + E_t I_t), \quad (7.136)$$

reducirani modul ili **Engesser-Kàrmànov modul** koji ovisi o veličini kritičnog naprezanja σ_{kr} i o obliku poprečnog presjeka.

Tako je za pravokutni presjek:

$$E_r = \frac{4 E E_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2}. \quad (7.137)$$

Uz pretpostavku malih progiba, jednadžbu (7.35) možemo napisati u obliku:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{F w}{E_r I_{min}} = 0. \quad (7.138)$$

Usporedbom ove diferencijalne jednadžbe (7.138) i jednadžbe (7.14) proizlazi da se one razlikuju samo u tome što umjesto E u jednadžbi (7.14) u jednadžbu (7.124) uvrštavamo reducirani modul E_r .

Isto vrijedi i za rješenja tih jednadžbi, tako da izrazi za kritičnu silu i kritično naprezanje pri izvijanju u plastičnom području glase:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E_r I_{min}}{l_i^2}. \quad (7.139)$$

i:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2}. \quad (7.140)$$

Budući da je *Kàrmàn*⁸ 1909. godine neovisno o *Engesseru* došao do istih rezultata i pokusima ih potvrdio, ova je teorija plastičnog izvijanja dobila naziv **Engesser-Jasinski-Kàrmànova teorija**.

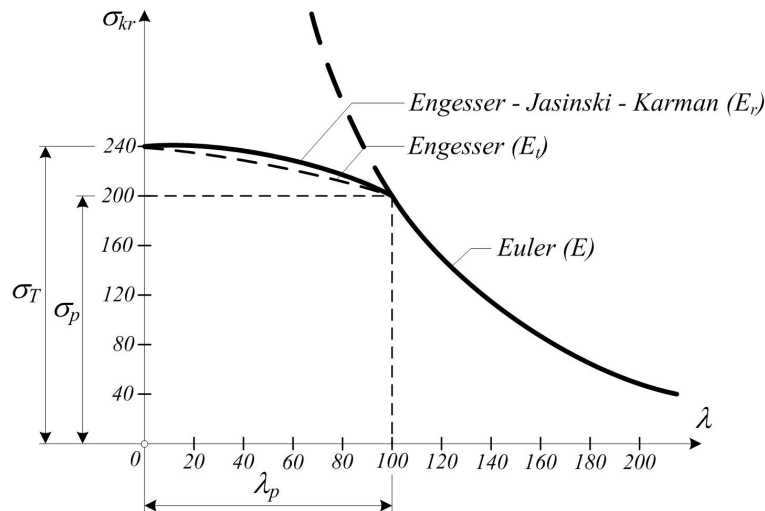
Za konstrukciju krivulje kritičnih naprezanja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ formule (7.126) i (7.140) svodimo na sljedeći oblik:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{\sigma_{kr}}} \quad (7.141)$$

i:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_r}{\sigma_{kr}}}. \quad (7.142)$$

gdje je $0 \leq \lambda \leq \lambda_p$. Nakon toga, u dijagramu pritiska $\sigma - \varepsilon$ (slika 7.18) na mjestu oda-



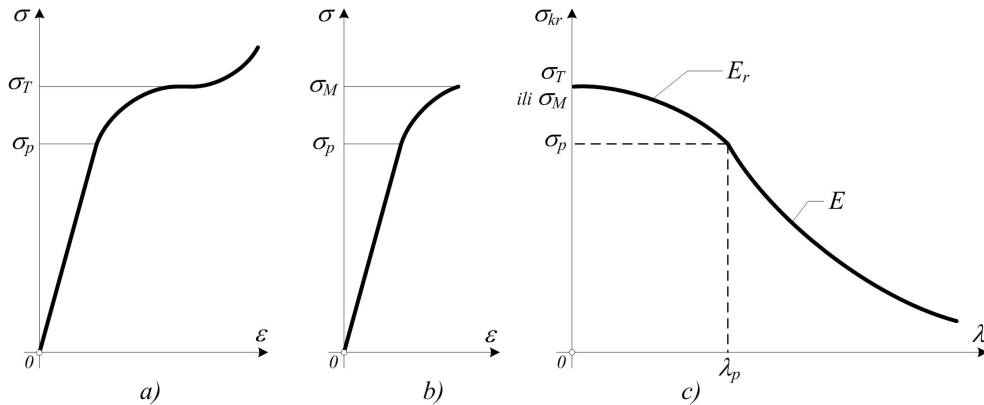
Slika 7.20: Dijagram $\sigma_{kr} - \lambda$ u plastičnom i elastičnom području

branog kritičnog naprezanja σ_{kr} povlačimo tangentu na krivulju te odredimo tangenti E_t i reducirani E_r modul, a iz izraza (7.141) i (7.142) odredimo pripadajuće vrijednosti λ .

⁸Theodore von Kàrmàn (1881-1963), rođen u Budimpešti (Austro-Ugarska), mađarsko-američki matematičar i fizičar čije je osnovno područje istraživanja bilo aeronautika i astronautika.

Dijagram kritičnih napreznja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ za čelik mehaničkih svojstava: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ i $\sigma_T = 240 \text{ MPa}$ prikazan je na slici 7.20.

Analogno tome, na osnovi dijagrama pritiska možemo konstruirati dijagrame kritičnih napreznja za bilo koji materijal. Na slici (7.21) prikazan je dijagram $\sigma_{kr} - \lambda$ za elasto-plastični i krhki materijal.



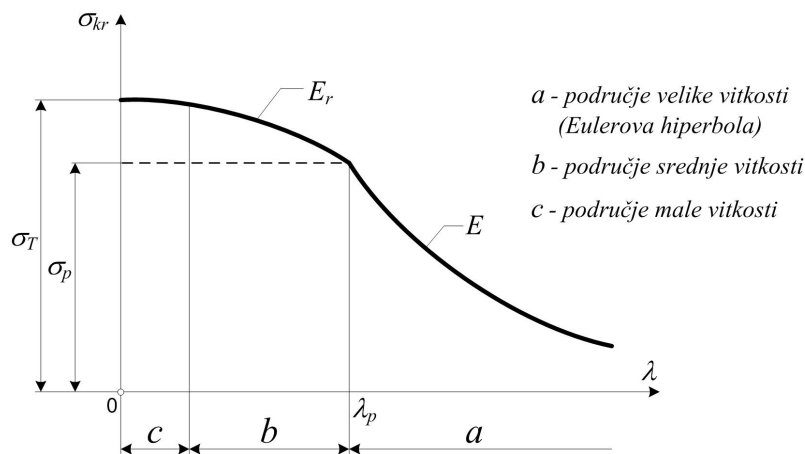
Slika 7.21: Dijagrami $\sigma - \epsilon$ za: a) elasto-plastični, b) krhki materijal i c) dijagram $\sigma_{kr} - \lambda$

Na slici (7.22) uočavamo tri područja vitkosti štapa:

a) kritično napreznje σ_{kr} u području **velike vitkosti** za $\lambda > \lambda_p$ prikazano je Eulerovom hiperbolom, izraz (7.109);

b) u području **srednje vitkosti** pripadajuća krivulja je određena izrazom (7.142);

c) u području **male vitkosti** kritično napreznje za elasto-plastični materijal je $\sigma_{kr} \approx \sigma_T$, a za krhki materijal $\sigma_{kr} \approx \sigma_M$.



Slika 7.22: Podjela područja vitkosti u dijagramu $\sigma_{kr} - \lambda$

7.4 Empirijski izrazi za kritično naprezanje

Usporedno s teorijskim istraživanjima problema stabilnosti tlačnih štapova provedena su i eksperimentalna istraživanja, a najznačajnija su *Tetmayerova*, *Jasinskog*, *Rankinova*, *Engesserova*, *Osterifeldova*, *Hohnsonova*, *Kàrmànova*, *Gordanova* i dr.

Sva ta eksperimentalna istraživanja potvrdila su valjanost *Eulerova* izraza za kritično naprezanje pri izvijanju u elastičnom području.

Međutim, ako je $\lambda < \lambda_p$ *Eulerova* hiperbola više ne vrijedi, jer je kritično naprezanje veće od granice proporcionalnosti. Tada dolazi do plastičnih deformacija i izvijanje se događa u plastičnom području.

Zbog složenosti analitičkog proračuna pri izvijanju u plastičnom području navedeni su autori za kritično naprezanje predložili empirijske izraze koji su određeni na temelju rezultata mnogobrojnih eksperimentalnih istraživanja.

Tako su *Tetmayer*⁹, a zatim i *Jasinski*, predložili linearnu ovisnost između kritičnog naprezanja i vitkosti štapa u plastičnom području:

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - a \cdot \lambda. \quad (7.143)$$

gdje su σ_0 i a koeficijenti koji ovise o svojstvima materijala, a određuju se eksperimentalnim putem.

Funkcionalna ovisnost je (7.143) prikazana na slici 7.23 **Tetmayerovim pravcem**. Pri vitkosti štapa λ_p kritično naprezanje odgovara granici proporcionalnosti σ_p , a pri vitkosti λ_K dostiže granicu tečenja σ_T kod elastoplastičnih materijala, odnosno granicu čvrstoće σ_M kod krhkih materijala.

Dijagram na slici 7.23 se sastoji iz tri dijela:

- horizontalnog pravca (*AB*) kod kojeg je $0 < \lambda < \lambda_K$;
- *Tetmayerova pravca* (*BC*) za $\lambda_K < \lambda < \lambda_p$ i
- *Eulerove* hiperbole (*CD*) za $\lambda > \lambda_p$.

Ako je vitkost štapa vrlo mala ($0 < \lambda < \lambda_K$), tj. ako se radi o kratkom štapu, do izvijanja uopće neće doći, nego će doći do loma zbog prekoračenja čvrstoće materijala. Tada je kritično naprezanje jednako:

$$\sigma_{kr} = \sigma_K \quad (7.144)$$

gdje je $\sigma_K = \sigma_T$ za elastoplastične materijale, a $\sigma_K = \sigma_M$ za krhke materijale. Za takve kratke štapove kritično naprezanje na slici 7.23 je predstavljeno horizontalnom linijom *AB*.

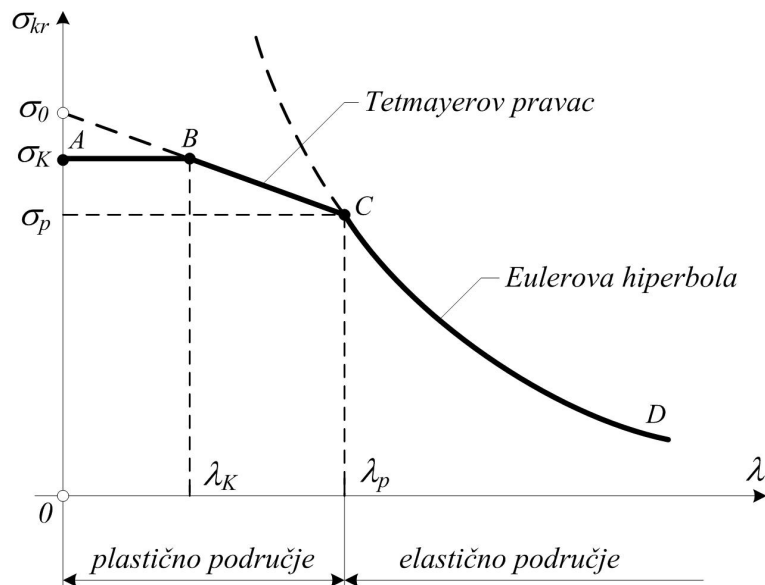
Iz izraza (7.143) i (7.144) dobivamo vitkost λ_K koja odgovara točki *B* na slici 7.23:

$$\lambda_K = \frac{\sigma_0 - \sigma_K}{a}. \quad (7.145)$$

⁹Ludwig von Tetmayer (1850-1905), profesor teorije konstrukcija i tehnologije građevinskog materijala na ETH-u u Zurichu.

Prema tome, u zavisnosti od vitkosti pritisnutog štapa razlikujemo:

- Štapove male vitkosti** ($\lambda < \lambda_K$), kod kojih dolazi do prekoračenja čvrstoće materijala prije nego do izvijanja.
- Štapove srednje vitkosti** ($\lambda_K < \lambda < \lambda_p$), koji se proračunavaju na izvijanje prema empirijskom izrazu (7.143) ili prema (7.140) i
- Štapove velike vitkosti** ($\lambda > \lambda_p$), koji se proračunavaju na izvijanje pomoću Eulerovog izraza (7.111).



Slika 7.23: Dijagram $\sigma_{kr} - \lambda$ za elastoplastični i krhki materijal

Koeficijenti σ_0 i a u *Tetmayerovom* izrazu (7.143) dobiveni eksperimentalnim putem za neke materijale dani su u tablici 7.1.

Tablica 7.1: Koeficijenti σ_0 , a i *Tetmayerovi* izrazi za neke materijale

Materijal	σ_0 (MPa)	a (MPa)	<i>Tetmayerov</i> izraz za σ_{kr} (MPa)
čelik (Č.0360)	310	1,14	$310 - 1,14\lambda$
čelik (Č.0560)	470	2,30	$4700 - 2,30\lambda$
duraluminij	380	2,185	$380 - 2,185\lambda$
drvo	40	0,203	$40 - 0,203\lambda$

Tako npr. za elastoplastični građevinski čelik (Č.0360) mehaničkih svojstava:

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \sigma_p = 210 \text{ MPa} \quad \text{i} \quad \sigma_K = \sigma_T = 240 \text{ MPa}$$

za koji su eksperimentalnim putem utvrđene vrijednosti koeficijenata:

$$\sigma_0 = 310 \text{ MPa} \quad \text{i} \quad a = 1,14 \text{ MPa}$$

preko izraza (7.112) i (7.145) dobivamo granične veličine vitkosti u dijagramu na slici 7.23:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{210}} = 99,35$$

i

$$\lambda_K = \lambda_T = \frac{\sigma_0 - \sigma_T}{a} = \frac{310 - 240}{1,14} = 61,40,$$

a preko izraza (7.143) za određenu vitkost štapa λ računamo kritično naprezanje.

7.5 Dimenzioniranje štapova opterećenih na izvijanje

Za štap aksijalno opterećen na tlak moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. Uvjet čvrstoće

$$\sigma = \frac{F}{A_{neto}} \leq \sigma_{dop} \quad (7.146)$$

ili:

$$F \leq \sigma_{dop} \cdot A_{neto}, \quad (7.147)$$

gdje je:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_K}{k}. \quad (7.148)$$

σ_K je naprezanje kod kojeg materijal dolazi u opasno stanje. Kod elastoplastičnih materijala to je granica tečenja ($\sigma_K = \sigma_T$), a kod krhkih je materijala tlačna čvrstoća ($\sigma_K = \sigma_M$).

σ_{dop} je dopušteno tlačno naprezanje, a k je *koeficijent sigurnosti čvrstoće*.

2. Uvjet stabilnosti

$$\sigma_i = \frac{F}{A_{bruto}} \leq \sigma_{i \text{ dop}} \quad (7.149)$$

ili:

$$F \leq \sigma_{i \text{ dop}} \cdot A_{bruto} = F_{i \text{ dop}}, \quad (7.150)$$

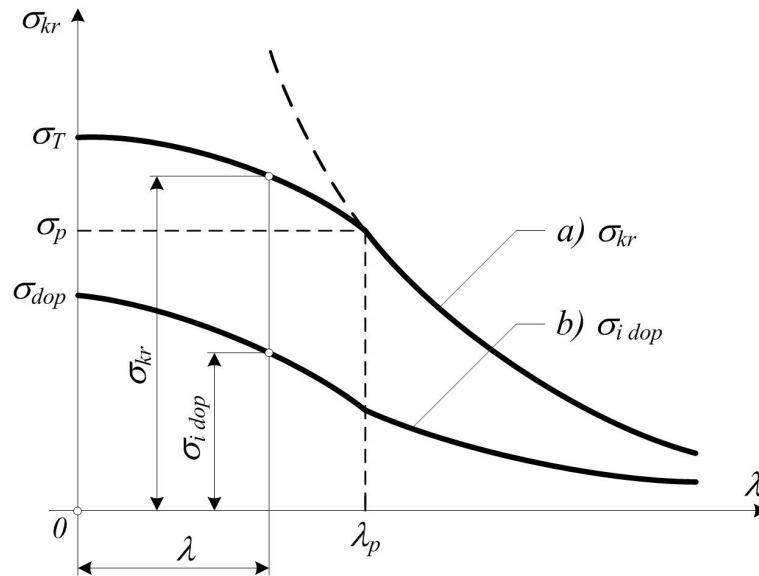
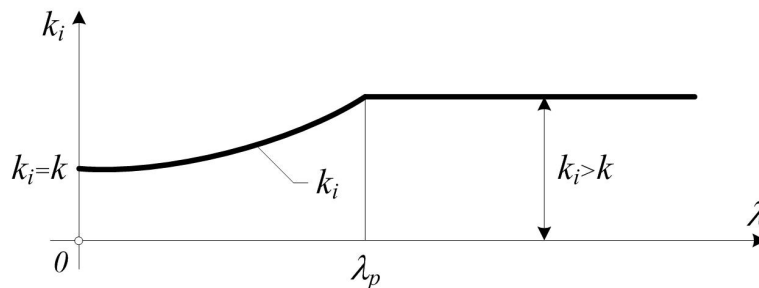
gdje je:

$$\sigma_{i \text{ dop}} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i}. \quad (7.151)$$

$\sigma_{i \text{ dop}}$ je dopušteno naprezanje pri izvijanju, $F_{i \text{ dop}}$ je dopušteno opterećenje pri izvijanju, a k_i je **koeficijent sigurnosti protiv izvijanja**.

Ako su nam zadani krivulja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ (dijagram *a*) na slici 7.24) i koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i (slika 7.25), može se konstruirati krivulja dopuštenih naprezanja pri izvijanju $\sigma_{i \text{ dop}} = f(\lambda)$ (dijagram *b*) na slici 7.24), gdje je $\sigma_{i \text{ dop}} = \sigma_{kr}/k_i$.

Kao što je već istaknuto, koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i je nešto veći od koeficijentata sigurnosti čvrstoće k ($k_i > k$) i u elastičnom području $\lambda > \lambda_p$ ostaje konstantan.

Slika 7.24: Dijagrami $\sigma_{kr} - \lambda$ i $\sigma_{i\ dop} - \lambda$ za elastoplastični materijalSlika 7.25: Dijagram $k_i - \lambda$

Pri maloj vitkosti štapa mjerodavan je proračun čvrstoće, pa je za $\lambda = 0$, $k_i = k$. Koeficijent sigurnosti protiv izvijanja u plastičnom području od $\lambda = 0$ do $\lambda = \lambda_p$ mijenja se po paraboličnom zakonu (slika 7.25).

Pri pračunu štapova na izvijanje mogu se pojaviti dvije zadaće:

- određivanje dopuštenog opterećenja i
- izbor poprečnoga presjeka štapa.

Ako je **zadan poprečni presjek**, odredimo aksijalne (I_y i I_z) i centrifugalni (I_{yz}) moment tromosti iz kojih izračunamo minimalni moment tromosti poprečnog presjeka:

$$I_{min} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot \tau_{yz}^2}, \quad (7.152)$$

odgovarajući polumjer elipse tromosti:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (7.153)$$

i vitkost štapa:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}}. \quad (7.154)$$

Ako je dobivena vitkost $\lambda > \lambda_p$, kritično opterećenje izračunamo iz *Eulerovog* izraza za kritičnu silu:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_i^2} \quad (7.155)$$

iz koje se izračuna kritično i dopušteno naprezanje pri izvijanju:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad ; \quad \sigma_{i \text{ dop}} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i}. \quad (7.156)$$

Na kraju pomoću izraza (7.150) dobivamo dopušteno opterećenje:

$$F_{i \text{ dop}} = \sigma_{i \text{ dop}} \cdot A_{bruto} \quad (7.157)$$

ili još jednostavnije:

$$F_{i \text{ dop}} = \frac{F_{kr}}{k_i}. \quad (7.158)$$

Ako je $\lambda < \lambda_p$, *Eulerov* se izraz ne može primijeniti. U tom slučaju za proračun kritičnog naprezanja primjenjujemo izraze (7.126), (7.140) ili (7.143). Iz dijagrama dopuštenih naprezanja $\sigma_{i \text{ dop}} = f(\lambda)$ (slika 7.24) očitamo $\sigma_{i \text{ dop}}$, a dopušteno opterećenje štapa odredimo izrazom (7.150).

Ako je **zadano opterećenje štapa**, onda se izbor poprečnog presjeka obavlja metodom postupnog približavanja.

Pri izboru oblika poprečnog presjeka nastojimo da je po mogućnosti razlika između glavnih središnjih momenata tromosti što manja, tj. da je $I_1 \approx I_2$.

Iz *Eulerovog* izraza odredimo minimalni moment tromosti presjeka:

$$I_{min} = \frac{F \cdot k_i \cdot l_i^2}{\pi^2 E} \quad (7.159)$$

i odaberemo dimenzije presjeka, koje odgovaraju izračunatom momentu tromosti I_{min} . Zatim izračunamo odgovarajuće vrijednosti i_{min} i λ i provjeravamo je li *Eulerov* izraz primjenjiv.

Ako je $\lambda > \lambda_p$, ispravno je primijenjen *Eulerov* izraz i time je zadatak riješen.

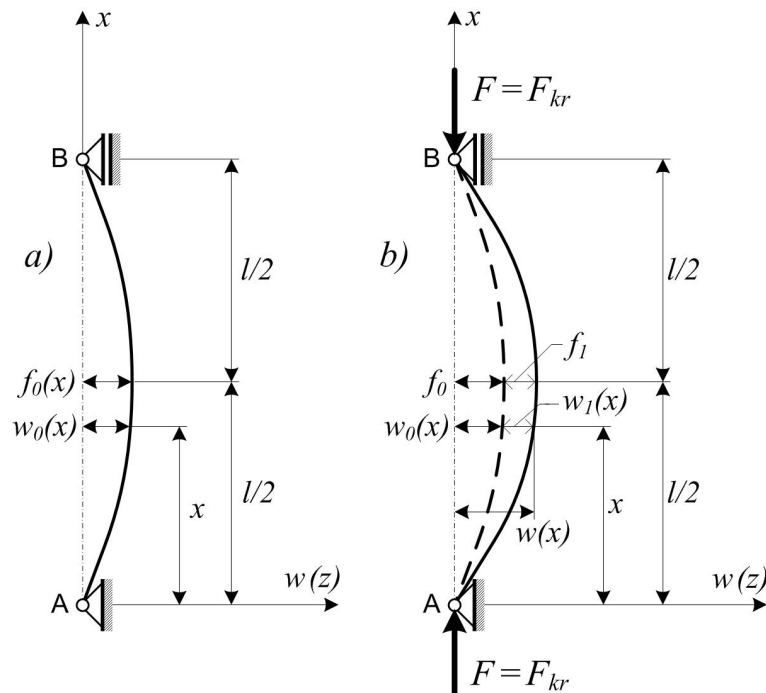
Ako je $\lambda < \lambda_p$, *Eulerov* izraz je pogrešno primijenjen i određene dimenzije presjeka su manje od potrebnih. U tom slučaju pretpostave se dimenzije presjeka veće od prethodnih, ponovno izračunaju odgovarajuće vrijednosti i_{min} i λ , pa se iz dijagrama $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ ili izraza (7.126), (7.140) ili (7.143) odredi dopušteno naprezanje $\sigma_{i \text{ dop}}$.

Množenjem površine izabranog presjeka s tim naprezanjem prema izrazu (7.150) dobit će se dopušteno opterećenje štapa $F_{i \text{ dop}}$. Ako je razlika između $F_{i \text{ dop}}$ i zadanog opterećenja F manja od 5 %, izabrani presjek zadovoljava, a u protivnom postupak se mora ponoviti.

7.6 Utjecaj početne zakrivljenosti štapa na veličinu kritične sile

Pri izvodu *Eulerova* izraza za kritičnu silu pretpostavili smo da je štap idealno ravan, što u stvarnosti gotovo nikada nije ispunjeno.

Da bismo istražili utjecaj početne zakrivljenosti štapa na pojavu gubitka stabilnosti, promatrat ćemo štap zglobno učvršćen na oba kraja, koji u neopterećenom stanju ima malu početnu zakrivljenost (slika 7.26a).



Slika 7.26: Štap s početnom zakrivljenošću f_0

Početni progib u proizvoljnom presjeku x je $w_0(x)$, a u sredini raspona je f_0 .

Budući da promatramo štap s vrlo malim progibima, os štapa ima oblik blage krivulje, koja se s dovoljnom točnošću može prikazati poluvalom sinusoide

$$w_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.160)$$

Nakon opterećenja štapa tlačnom silom F u proizvoljnom presjeku x javlja se dodatni progib $w_1(x)$ (slika 7.26b). Ukupni progib štapa u presjeku x je:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x). \quad (7.161)$$

Moment savijanja u presjeku x je $M = F \cdot w = F(w_0 + w_1)$, pa diferencijalna jednadžba elastične linije štapa glasi:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M}{EI_y} \quad (7.162)$$

ili

$$EI_y \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -F (w_0 + w_1). \quad (7.163)$$

Ako se uvede oznaka:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_y} \quad (7.164)$$

dobivamo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha^2 w_1 = -\alpha^2 w_0. \quad (7.165)$$

Ako izraz (7.160) uvrstimo u (7.165), dobit ćemo:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha^2 w_1 = -\alpha^2 f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.166)$$

Kad partikularno rješenje:

$$w_{1p} = C \sin \frac{\pi x}{l} \quad (7.167)$$

uvrstimo u jednadžbu (7.166), dobit ćemo:

$$C = \frac{f_0}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} = \frac{f_0}{\frac{\pi^2 EI_y}{F l^2} - 1} = \frac{f_0}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \quad (7.168)$$

Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (7.166) glasi:

$$w_1 = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{f_0}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (7.169)$$

Iz rubnih uvjeta $w_1(0) = w_1(l) = 0$ dobivamo da je $A = B = 0$, pa možemo napisati:

$$w_1 = \frac{f_0}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.170)$$

Ako zbrojimo izraze (7.160) i (7.170), dobit ćemo ukupni progib:

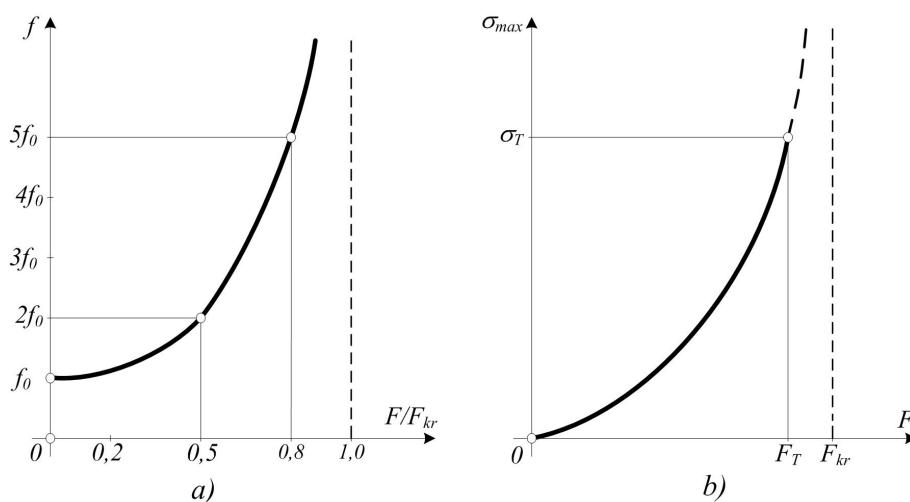
$$w = w_0 + w_1 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_0}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7.171)$$

odnosno:

$$w = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.172)$$

Progib ima najveću vrijednost u sredini raspona ($x = l/2$):

$$w_{max} = f = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.173)$$

Slika 7.27: Dijagrami $\frac{F}{F_{kr}} - f$ i $F - \sigma_{max}$

Izraz (7.173) prikazan je u koordinatnom sustavu $\frac{F}{F_{kr}} - f$ na slici (7.27a). Pri $F = 0$, progib je jednak početnom progibu f_0 . Pri porastu sile F progib f naglo raste, a za $F = F_{kr}$ teži u beskonačnost.

To znači da gubitak stabilnosti štapa s početnom zakrivljenošću nastupa već prilikom približavanja sile F kritičnoj vrijednosti F_{kr} , a ne nakon dostizanja te vrijednosti, kao što je u slučaju idealno ravnog štapa.

To je jedan od razloga zbog kojeg je koeficijent sigurnosti protiv izvijanja k_i veći u odnosu na koeficijent sigurnosti čvrstoće k .

Maksimalno naprezanje u štapu dobit ćemo tako da naprezanjima od aksijalnog opterećenja dodamo naprezanja od savijanja:

Uzimajući u obzir da je maksimalni moment savijanja u sredini raspona:

$$M_{max} = F \cdot w_{max} = F \cdot f = \frac{F f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.174)$$

i moment otpora poprečnog presjeka:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \quad (7.175)$$

dobivamo:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{f_0 A}{W_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{kr}}} \right]. \quad (7.176)$$

Na slici (7.27b) prikazana je ovisnost maksimalnog naprezanja σ_{max} o opterećenju F . Uočavamo da naprezanje pri povećanju opterećenja raste znatno brže od opterećenja. Uz pretpostavku da se granica proporcionalnosti i granica tečenja materijala poklapaju, veličina naprezanja σ_{max} u izrazu (7.176) je ograničena granicom tečenja materijala σ_T .

Stavimo li $\sigma_{max} = \sigma_T$ i $F = F_T$ izraz (7.176) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \left[1 + \frac{f_0 A}{W_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F_T}{F_{kr}}} \right], \quad (7.177)$$

gdje je F_T **granično opterećenje** koje odgovara granici tečenja materijala σ_T .

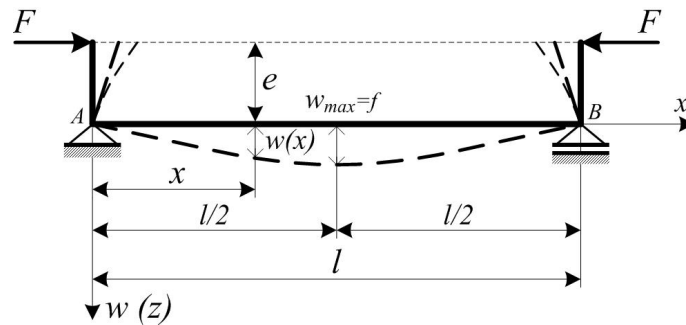
Prema tome, zadamo li σ_T , f_0 , E i dimenzije štapu, možemo odrediti granično opterećenje F_T , a dopušteno opterećenje F_{dop} dobit ćemo dijeljenjem F_T s koeficijentom sigurnosti k :

$$F_{dop} = \frac{F_T}{k}. \quad (7.178)$$

7.7 Ekscentrično opterećenje vitkih štapova

Analizirat će se štap na slici (7.28) ekscentrično opterećen dvjema tlačnim silama F . Pretpostavit ćemo da sile F uzrokuju savijanje štapu u jednoj od glavnih ravnina tromosti. U proizvoljnom presjeku x štapu javlja se moment savijanja:

$$M = F \cdot (e + w). \quad (7.179)$$



Slika 7.28: Štap ekscentrično opterećen silama F

Diferencijalna jednadžba elastične linije štapu ima oblik:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -F(e + w) \quad (7.180)$$

ili

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI_y} w = -\frac{F}{EI_y} e. \quad (7.181)$$

Ako se uvede oznaka:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_y} \quad (7.182)$$

dobivamo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2w = -\alpha^2e. \quad (7.183)$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - e. \quad (7.184)$$

Iz rubnih uvjeta $w(0) = w(l) = 0$ dobivamo:

$$B = e \quad ; \quad A = e \cdot \tan \frac{\alpha l}{2} \quad (7.185)$$

pa je :

$$w = e \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \cdot \sin \alpha x + \cos \alpha x - 1 \right). \quad (7.186)$$

Maksimalni progib u sredini raspona ($x = l/2$) iznosi:

$$f = w_{max} = w_{\frac{l}{2}} = e \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \cdot \sin \alpha \frac{\alpha l}{2} + \cos \frac{\alpha l}{2} - 1 \right). \quad (7.187)$$

ili:

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right). \quad (7.188)$$

Uzimajući u obzir izraz (7.182), možemo napisati

$$f = e \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} \right)} - 1 \right], \quad (7.189)$$

gdje je:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \quad (7.190)$$

Eulerova kritična sila.

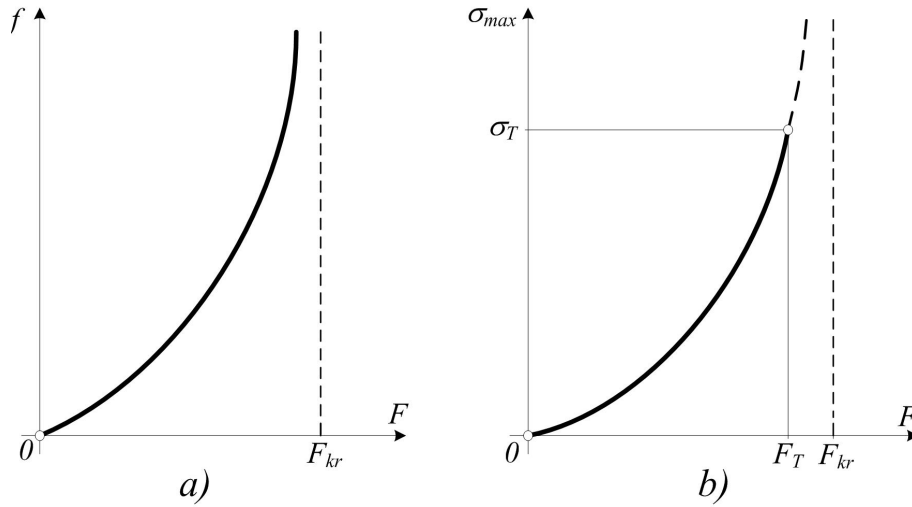
Ovisnost maksimalnoga progiba o sili F prikazana je grafički na slici 7.29a iz koje se vidi da je za $F = 0$ progib $f = 0$, a za $F = F_{kr}$ progib je $f = \infty$, odnosno kako se veličina tlačne sile približava vrijednosti *Eulerove* kritične sile F_{kr} , progib f raste vrlo brzo.

Maksimalno naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_y}. \quad (7.191)$$

Uzimajući u obzir da je:

$$M_{max} = F(f + e) = F \cdot \frac{e}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}} \right)}, \quad (7.192)$$

Slika 7.29: Dijagrami $F - f$ i $F - \sigma_{max}$ za ekscentrično opterećeni štap

dobit ćemo:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{A}{W_y} \cdot \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{kr}}}\right)} \right]. \quad (7.193)$$

Ovisnost maksimalnog naprezanja o sili F prikazana je grafički na slici 7.29b.

Kao i u slučaju štapa s početnom zakrivljenosti, ako $\sigma_{max} = \sigma_T$ i granično opterećenje $F = F_T$ stavimo u izraz (7.193), dobit ćemo:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A} \left[1 + \frac{A}{W_y} \cdot \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F_T}{F_{kr}}}\right)} \right]. \quad (7.194)$$

Zadamo li σ_T , e , E i dimenzije štapa, gornju jednadžbu možemo riješiti po F_T metodom postupnog približavanja.

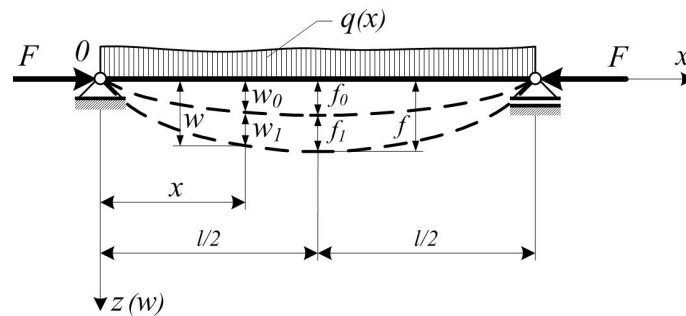
Na kraju dobijemo dopušteno opterećenje:

$$F_{dop} = \frac{F_T}{k}. \quad (7.195)$$

7.8 Utjecaj aksijalnog opterećenja na savijanje štapa

U 2. poglavlju *Otpornosti materijala 2*, koje se odnosilo na *složeno opterećenje štapova*, razmatrali smo kratke štapove, odnosno štapove male vitkosti pod djelovanjem uzdužnih sila i momenata savijanja. Njih smo rješavali uz pretpostavku da vrijedi princip superpozicije, te smo uvjete ravnoteže postavili na nedeformiranom štapu (*teorija prvog reda*).

Taj proračun se ne može primijeniti na štapove velike vitkosti. To ćemo pokazati na primjeru vitkoga štapa (nosača) na slici 7.30 koji je zglobno učvršćenog na oba kraja,



Slika 7.30: Štap opterećen poprečnim i aksijalnim opterećenjem

opterećen centričnom tlačnom silom F i proizvoljnim poprečnim opterećenjem $q(x)$ koje djeluje u jednoj od glavnih ravnina tromosti.

Pretpostavimo da na nosač najprije djeluje samo poprečno opterećenje $q(x)$ koje uzrokuje savijanje nosača. U presjeku x štapa javlja se moment savijanja $M_0(x)$ i progib $w_0(x)$.

Nakon toga na savijeni štap nanosimo centričnu tlačnu silu F pod kojom se nosač još više savija i u presjeku x se pojavljuje dopunski progib $w_1(x)$.

Ukupni progib u presjeku x iznosi:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x). \quad (7.196)$$

U presjeku x nosača se, uz moment savijanja $M_0(x)$ od poprečnog opterećenja, javlja i dopunski moment savijanja od tlačne sile F s krakom $w(x)$. Tako se u deformiranom stanju nosača u presjeku x pojavljuje ukupni moment savijanja:

$$M_y = M_0 + F \cdot w. \quad (7.197)$$

Uočavamo da pri određivanju ukupnog momenta savijanja M ne možemo primijeniti princip superpozicije. Očito je da je ukupni progib $w(x)$ veći od zbroja progiba izazvanih pojedinačnim djelovanjem poprečnog opterećenja i tlačane sile F , jer je pri djelovanju samo sile F progib $w_1 = 0$.

Iz ovog proizlazi da *ne vrijedi princip superpozicije*, a uvjete ravnoteže postavljamo na deformiranom nosaču (*teorija drugog reda*).

Uz pretpostavku da su progibi dovoljno mali, diferencijalna jednadžba elastične linije nosača glasi:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = -M_0 - F \cdot w. \quad (7.198)$$

ili

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI_y} w = -\frac{M_0}{EI_y}. \quad (7.199)$$

Ako se uvede oznaka:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_y} \quad (7.200)$$

dobivamo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = -\frac{M_0}{EI_y}. \quad (7.201)$$

Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe glasi:

$$w = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + w_p \quad (7.202)$$

gdje je w_p partikularno rješenje ovisno o funkciji M_0 , odnosno o obliku poprečnog opterećenja.

U općem slučaju opterećenja nosača poprečnim opterećenjem, funkcija M_0 nije glatka i neprekinuta, već se različito izražava po pojedinim dijelovima nosača. U tom slučaju može se primijeniti sljedeći približan postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe (7.201).

Ako je poprečno opterećenje koje djeluje na nosač usmjereno na jednu stranu i simetrično s obzirom na sredinu raspona, tada se s dovoljnom točnošću elastična linija nosača (slika 7.30) može prikazati u obliku sinusoide

$$w(x) = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7.203)$$

gdje je $f = x \left(\frac{l}{2}\right)$ progib u sredini raspona.

Elastičnu liniju od djelovanja samo poprečnog opterećenja ($F = 0$) možemo također približno prikazati u obliku sinusoide

$$w_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7.204)$$

gdje je $f_0 = x_0 \left(\frac{l}{2}\right)$ progib u sredini raspona samo od poprečnog opterećenja.

Deriviranjem izraza (7.203) i (7.204), dobivamo:

$$\frac{d^2 w}{dw^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (7.205)$$

$$\frac{d^2 w_0}{dw^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f_0 \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{M_0}{EI_y}. \quad (7.206)$$

Ako u izraz (7.201) uvrstimo odgovarajuće derivacije, dobit ćemo:

$$-\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha^2 f \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.207)$$

Odatle je:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}} = \frac{f_0}{1 - \frac{Fl^2}{\pi^2 EI_y}}. \quad (7.208)$$

ili :

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.209)$$

gdje je :

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}. \quad (7.210)$$

U izrazu (7.210) za *Eulerovu* kritičnu silu figurira moment tromosti presjeka I_y s obzirom na glavnu os tromosti y koja je okomita na ravninu poprečnog opterećenja.

Može se pokazati da izraz (7.209) vrijedi i za druge slučajeve učvršćenja krajeva štapa, uz uvjet da za *Eulerovu* kritičnu silu treba uzeti odgovarajuću vrijednost

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu l)^2}. \quad (7.211)$$

Na osnovi izraza (7.203), (7.204) i (7.209) dobivamo:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{-EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}}{-EI_y \frac{d^2 w_0}{dx^2}} = \frac{f}{f_0} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.212)$$

Odatle je:

$$M = \frac{M_0}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.213)$$

Maksimalno naprezanje u nosaču iznosi:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{F}{A} + \frac{M_0 \max}{1 - \frac{F}{F_{kr}}}. \quad (7.214)$$

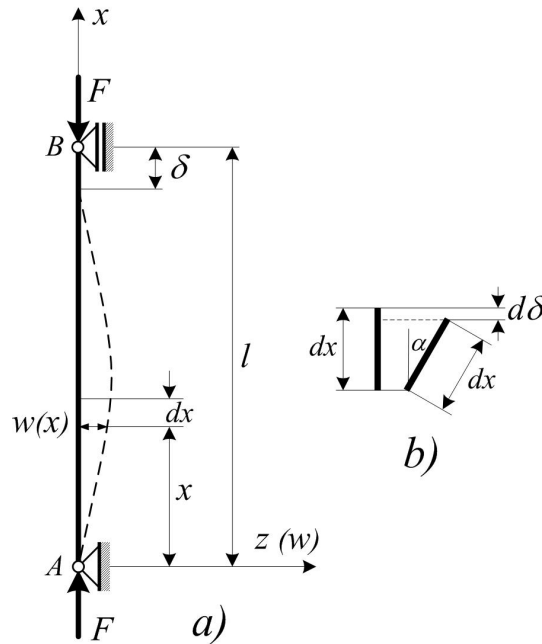
Iz izraza (7.209) i (7.214) izlazi da između progiba i uzdužne sile, odnosno naprezanja i uzdužne sile, postoji nelinearna ovisnost. Ako se vrijednost uzdužne sile približava *Eulerovoj* kritičnoj sili, naprezanja i deformacije štapa počinju naglo rasti, tj. nastupa gubitak stabilnosti ravnoteže štapa.

Ako se nosač savija u ravnini najveće krutosti, onda u izrazu (7.210) figurira $I_y = I_{max}$. U tom slučaju postoji mogućnost izvijanja u ravnini najmanje krutosti. Zato je potrebno provjeriti sigurnost nosača na izvijanje u ravnini najmanje krutosti zbog djelovanja samo uzdužne sile.

7.9 Energijska metoda određivanja kritične sile izvijanja

Do sada smo kritičnu silu izvijanja određivali *statičkom metodom* koja se sastoji u rješavanju diferencijalne jednadžbe elastične linije štapa. Tom se metodom u mnogim praktičnim slučajevima problem svodi na numeričko rješavanje glomaznih transcendentnih jednadžbi.

Zato se pri rješavanju mnogih zadataka daje prednost približnim metodama određivanja kritične sile, koje su manje točne, ali su jednostavnije u realizaciji. Tim približnim metodama pripada i **energijska metoda** koja nam omogućava izravno određivanje kritične sile izvijanja bez postavljanja i rješavanja diferencijalnih jednadžbi.



Slika 7.31: Analiza izvijanja štapa energijskom metodom

Ako malom bočnom silom izvedemo štap iz prvobitnog ravnog oblika ravnoteže u novi beskonačno bliski oblik određen jednačbom $w(x)$ (slika 7.31) i zatim bočnu silu uklonimo, potencijalna energija štapa će se promijeniti za:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W, \quad (7.215)$$

gdje je δU prirast potencijalne energije deformacija, a δW prirast rada vanjskih sila.

Prema ranijim zaključcima, promatrani ravni oblik štapa je **stabilan** ako je:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W > 0 \quad (7.216)$$

odnosno

$$\delta U > \delta W, \quad (7.217)$$

a postaje **labilan** kad je:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W < 0 \quad (7.218)$$

odnosno:

$$\delta U < \delta W. \quad (7.219)$$

Za:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad (7.220)$$

ili:

$$\delta U = \delta W \quad (7.221)$$

imamo prijelazno stanje odnosno stanje **indiferentne ravnoteže**.

Jednadžba (7.221) izražava jednakost rada vanjskih sila i dopunske potencijalne energije deformacija prilikom prijelaza sistema iz prvobitnog u novi beskonačno bliski položaj, te određuje kritičnu vrijednost sile pri kojoj prvobitni ravan oblik ravnoteže prelazi iz stabilne u labilnu ravnotežu.

Prirast potencijalne energije deformacija zbog savijanja je:

$$\delta U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (7.222)$$

Gornji izraz smo dobili tako da smo u izraz za potencijalnu energiju deformacije izraženu preko momenta savijanja uvrstili: $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$.

Sila F je konstantna, pa njen rad na pomaku δ iznosi:

$$\delta W = F \cdot \delta. \quad (7.223)$$

Pomak δ hvatišta sile F na gornjem kraju štapa (slika 7.31a) možemo odrediti kao razliku između duljine l i projekcije savijene elastične linije na pravac koji spaja oslonce štapa.

Na slici 7.31b prikazan je izdvojeni element štapa duljine dx . Pri savijanju štapa duljina elementa se ne mijenja, već se element zaokreće i s osi x zatvara kut α .

Pomak $d\delta$ gornjeg kraja osi elementa prema slici 7.31b iznosi:

$$d\delta = dx - dx \cdot \cos \alpha = dx \cdot (1 - \cos \alpha) = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} dx. \quad (7.224)$$

Ako se radi o malim progibima možemo uzeti da je:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{dw}{dx}, \quad (7.225)$$

pa dobivamo:

$$d\delta \approx \frac{\alpha^2}{2} dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (7.226)$$

odnosno:

$$\delta \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (7.227)$$

Uvrstimo li izraz (7.227) u izraz (7.223), dobit ćemo:

$$\delta W = \frac{1}{2} F \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (7.228)$$

Ako u izraz (7.221) uvrstimo izraze (7.222) i (7.228), dobivamo:

$$\frac{1}{2} F \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (7.229)$$

Prema tome iz stanja indiferentne ravnoteže štapa ($\delta U = \delta W$) dobivamo kritičnu silu izvijanja:

$$F_{kr} = \frac{\int_0^l EI (w'')^2 dx}{\int_0^l (w')^2 dx}. \quad (7.230)$$

Pretpostavimo li za štap na slici 7.31a elastičnu liniju u obliku jednog poluvala sinusoide (što proizlazi iz proračuna po statičkoj metodi):

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (7.231)$$

i deriviramo dva puta dobit ćemo:

$$w' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad ; \quad w'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.232)$$

Nakon integriranja:

$$\int_0^l (w')^2 dx = \int_0^l f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{2} \quad (7.233)$$

$$\int_0^l (w'')^2 dx = \int_0^l f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{1}{2} \quad (7.234)$$

i iz izraza (7.230) dobivamo kritičnu silu izvijanja:

$$F_{kr} = \frac{EI f^2 \pi^2 2 l}{2 l^3 f^2 \pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.235)$$

Dobiveni rezultat se podudara s rješenjem (7.29) po statičkoj metodi.

Da bismo izrazom (7.230) odredili kritičnu silu, potrebno je unaprijed znati jednadžbu elastične linije štapa $w(x)$. Ako funkcija $w(x)$ nije poznata može se pretpostaviti u obliku neke funkcije koja što bolje aproksimira stvarni oblik izvijenog štapa i koja zadovoljava rubne uvjete.

Na taj način dobijemo *približnu vrijednost kritične sile*, koja je uvijek nešto veća od točne vrijednosti ako se pretpostavljena elastična linija razlikuje od stvarne.

To proizlazi iz činjenice da se štap izvija po krivulji najmanje otpornosti, koja se u pravilu razlikuje od približno izabrane krivulje, za čiju realizaciju se zahtijeva veći potrošak energije U . Zato izraz (7.230) daje *vrijednost F_{kr} veću od stvarne*.

Pretpostavljeni približni oblik elastične linije prikazujemo u obliku trigonometrijskog polinoma:

$$w(x) = a_0 + a_1 \sin x + \dots + a_n \sin nx + b_1 \cos x + \dots + b_m \cos mx \quad (7.236)$$

ili algebarskog polinoma:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (7.237)$$

čije koeficijente biramo tako da za promatrani štap budu zadovoljeni svi rubni uvjeti.

7.10 Primjeri

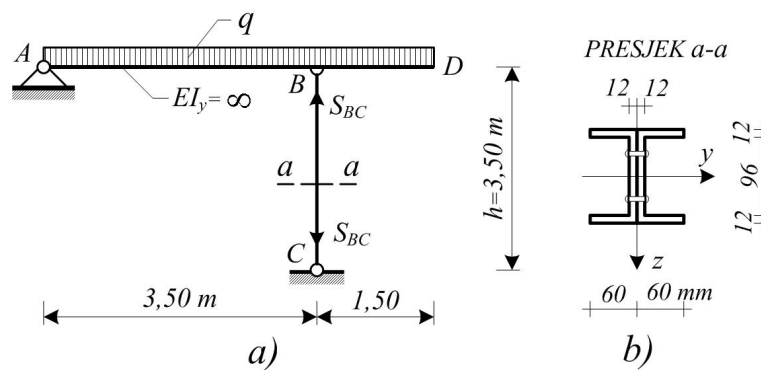
7.10.1 Primjer 7.1

Za sistem prikazan na slici treba iz uvjeta stabilnosti čeličnog štapa BC odrediti dopušteno kontinuirano opterećenje q . Štap je izveden od čelika Č.060, a horizontalna greda ABD je apsolutno kruta ($EI = \infty$).

Zadatak riješiti za dva slučaja: a) štap BC je zglobno pridržan u točki C i b) štap BC je upet u točki C .

Zadano je: $E = 210 \text{ GPa}$, $\sigma_p = 210 \text{ MPa}$, $k_i = 1,80$, $\sigma_0 = 310 \text{ MPa}$

i $a = 1,14 \text{ MPa}$.



Slika 7.32: Crtež uz primjer 7.1

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka (površina A i aksijalni momenti tromosti I_y i I_z) iznose:

$$A = 120 \cdot 120 - 2 \cdot 96 \cdot 48 = 5184 \text{ mm}^2$$

$$I_{y \text{ bruto}} = \frac{120 \cdot 120^3}{12} - 2 \cdot \frac{48 \cdot 96^3}{12} = 10,202 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z \text{ bruto}} = \frac{120 \cdot 120^3}{12} - 2 \cdot \left[\frac{96 \cdot 48^3}{12} + 96 \cdot 48 \cdot \left(\frac{48}{2} + 12 \right)^2 \right] = 3,57 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Do izvijanja dolazi u ravnini najmanje krutosti štapa na savijanje:

$$I_{\min \text{ bruto}} = I_{z \text{ bruto}} = 3,57 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Minimalni polumjer elipse tromosti je:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{3,57 \cdot 10^6}{5184}} = 26,26 \text{ mm}.$$

Vitkost štapa koja odgovara granici proporcionalnosti:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{210}} = 99,3.$$

a) Štap BC je zglobno pridržan u točki C

Duljina izvijanja jednaka je stvarnoj duljini štapa:

$$l_i = h = 3,0 \text{ m.}$$

Vitkost štapa je:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{3000}{26,26} = 114,3 > \lambda_p = 99,3.$$

Zaključujemo da je $\lambda > \lambda_p$ i možemo koristiti *Eulerov* izraz za kritičnu silu:

$$S_{kr}^{BC} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 3,57 \cdot 10^6}{3000^2} = 822140 \text{ N} = 822,14 \text{ kN}.$$

Dopuštena sila u štapu BC iznosi:

$$S_{i \text{ dop}}^{BC} = \frac{S_{kr}^{BC}}{k_i} = \frac{822,14}{1,80} = 456,74 \text{ kN}$$

Iz uvjeta ravnoteže $\Sigma M_A = 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned} q(3,50 + 1,50) \cdot 2,50 &= S_{BC} \cdot 3,5 \\ S_{BC} &= 3,571 \cdot q \leq S_{i \text{ dop}}^{BC} \\ q_{dop} &\leq \frac{S_{i \text{ dop}}}{3,571} = \frac{456,74}{3,571} = \mathbf{127,90 \text{ kN/m}^2}. \end{aligned}$$

a) Štap BC je upet u točki C

Duljina izvijanja štapa je:

$$l_i = 0,7 \cdot h = 0,7 \cdot 3,0 = 2,1 \text{ m.}$$

Vitkost štapa:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{2100}{26,26} = 80,0 < \lambda_p = 99,3.$$

Zaključujemo da je $\lambda < \lambda_p$ izvijanje se događa u plastičnom području i nemožemo koristiti *Eulerov* izraz za kritičnu silu:

Pomoću *Tetmayerovog* izraza dobivamo kritično naprezanje:

$$\sigma_{kr}^{BC} = \sigma_0 - a \cdot \lambda = 310,0 - 1,14 \cdot 80,0 = 218,80 \text{ MPa},$$

iz kojeg dobivamo kritičnu silu izvijanja:

$$S_{kr}^{BC} = \sigma_{kr}^{BC} \cdot A = 218,80 \cdot 5184 = 1134260 \text{ N} = 1134,26 \text{ kN}.$$

Dopuštena sila u štapu BC iznosi:

$$S_{i \text{ dop}}^{BC} = \frac{S_{kr}^{BC}}{k_i} = \frac{1134,26}{1,80} = 630,14 \text{ kN},$$

a dopušteno kontinuirano opterećenje je:

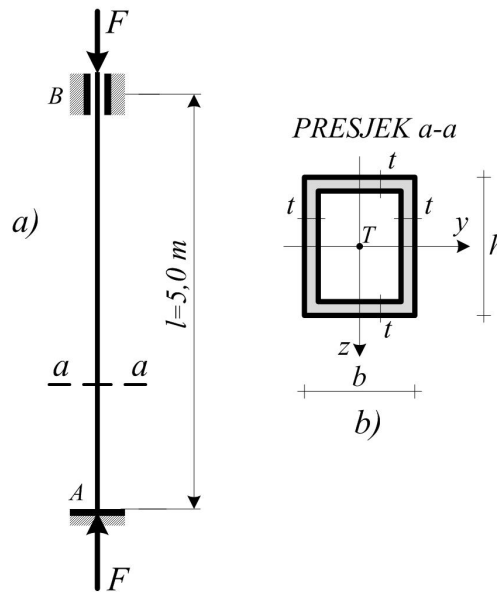
$$q_{dop} \leq \frac{S_{i \text{ dop}}}{3,571} = \frac{630,14}{3,571} = \mathbf{176,46 \text{ kN/m}^2}.$$

7.10.2 *Primjer 7.2*

Čelični štap duljine $l = 5,0 \text{ m}$ upet je na oba kraja i opterećen silom $F = 145 \text{ kN}$ (slika 7.33a).

Treba dimenzionirati štap sandučastog poprečnog presjeka prikazanog na slici 7.33b, odnosno odrediti dimenzije h , b i t .

Zadano je: $E = 210 \text{ GPa}$, $\sigma_p = 210 \text{ MPa}$, $k_i = 2,2$, $b = 0,8 \cdot h$ i $t = 0,1 \cdot h$.



Slika 7.33: Crtež uz *primjer 7.2*

Do izvijanja dolazi u ravnini najmanje krutosti štapa na savijanje. U ovom slučaju minimalni aksijalni moment inercije je I_z :

$$I_{min} = I_z = \frac{h(0,8h)^3}{12} - \frac{(0,8h)(0,6h)^3}{12} = \frac{0,3392}{12}h^4.$$

Duljina izvijanja je:

$$l_i = 0,5 \cdot h = 0,5 \cdot 5,0 = 2,5 \text{ m}.$$

Granična vitkost između elastičnog i plastičnog područja iznosi:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{210}} = 99,3.$$

Kako nam još nisu poznate dimenzije poprečnog presjeka pretpostavit ćemo da se izvijanje događa u elastičnom području. Iz uvjeta:

$$F \leq F_{i \text{ dop}} = \frac{F_{kr}}{k_i} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_i^2 k_i}$$

dobijemo:

$$I_{min} \geq \frac{F k_i l_i^2}{\pi^2 E} = \frac{145 \cdot 10^3 \cdot 2,2 \cdot 2500^2}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 96,195 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

odnosno:

$$I_{min} = \frac{0,3392}{12} h^4 \geq 96,195 \cdot 10^4$$

odakle je:

$$h \geq 76,38 \text{ mm}.$$

Odabiremo štap sljedećih dimenzija:

$$\mathbf{h=80 \text{ mm}, b=0,8 \cdot 80 = 64 \text{ mm}, t=0,1 \cdot 80 = 8 \text{ mm}.$$

Za te odabrane dimenzije računamo geometrijske karakteristike poprečnog presjeka:

$$A = 80 \cdot 64 - 64 \cdot 48 = 2048 \text{ mm}^2$$

$$I_{min} = I_z = \frac{80 \cdot 64^3}{12} - \frac{64 \cdot 48^3}{12} = 1157,80 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

i minimalni polumjer elipse tromosti:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1157,80 \cdot 10^3}{2048}} = 23,78 \text{ mm}.$$

Vitkost štapa iznosi:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{2500}{23,78} = 105,1 > \lambda_p = 99,3.$$

Zaključujemo da je $\lambda > \lambda_p$. Izvijanje se događa u elastičnom području i ispravno smo koristiti *Eulerov* izraz za kritičnu silu.

Nadalje, prema *Euleru* računamo:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{105,1^2} = 187,64 \text{ MPa}$$

i

$$\sigma_{i \text{ dop}} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i} = \frac{187,64}{2,2} = 85,29 \text{ MPa}.$$

Stvarno naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{145 \cdot 10^3}{2048} = 70,80 \text{ MPa} < \sigma_{i \text{ dop}} = 85,29 \text{ MPa}.$$

Uvjet stabilnosti je zadovoljen, a ako nije, postupak odabira dimenzija poprečnog presjeka se ponavlja.

Literatura

- [1] V. Šimić: *Otpornost materijala II*, Sveučilite u Zagrebu, Školska knjiga Zagreb, 2002.
- [2] D. Bazjanac: *Nauka o čvrstoći*, Sveučilite u Zagrebu, Tehnička knjiga Zagreb, 1968.
- [3] J. Brnić, G. Turkalj: *Nauka o čvrstoći I*, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2004.