NUMERIČKE METODE

07. svibnja 2024.

Sadržaj

- Jaka formulacija rubne zadaće
- Slaba formulacija rubne zadaće
- Metoda težinskih reziduala
- Ritzova metoda
- Metoda konačnih razlika
- Metoda konačnih elemenata

- **Jaka formulacija rubne zadaće (diferencijalna)**
- Djelovanje diferencijalnog operatora na vektor pomaka u Navierovim jednadžbama ravnoteže odgovara zadanom vanjskom opterećenju:
  $L(\mathbf{u})=\mathbf{q}$ $\quad L=\left((\lambda+\mu)\mathbf{grad}\ div+\mu\Delta\right)$ L - diferencijalni operator, $\mathbf{u}$ - vektor pomaka, $\mathbf{q}$ - vektor vanj. opt.
- Pristup ovakvom matematičkom modelu rješavanja diferencijalnih jednadžbi čini ***jaku formulaciju rubne zadaće***.
- Rješenje zadaće se može iskazati preko pomaka ili preko naprezanja.
- Jakom formulacijom je riješen mali broj rubnih zadaća, a kao rezultat se dobiva točno rješenje u svim točkama tijela.
- Paralelno su se razvile ***integralne metode*** na bazi principa o minimumu potencijalne energije deformacije.
- **Integralne i diferencijalne formulacije su ekvivalentne**, ekvivalentnost se može dokazati prijelazom iz jedne formulacije u drugu.
- Kao posljedica vrlo složene analitičke formulacije razvijaju se numerički postupci pomoću kojih je moguće riješiti i najsloženije rubne zadaće.

- Do približnog rješenja rubne zadaće možemo doći uvođenjem pojma ***reziduala*** ili ***ostatka*** u obliku neuravnoteženog vanjskog opterećenja kao:

$$\boldsymbol{r} = L(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$$

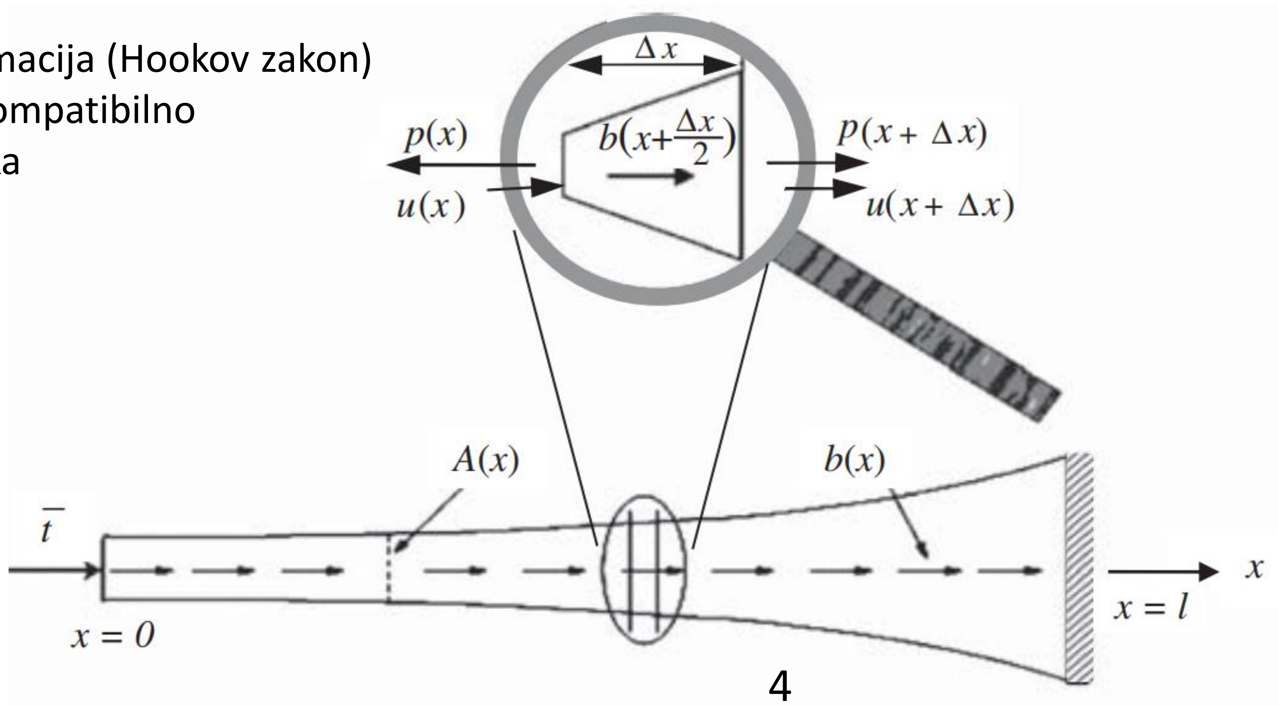
- U slučaju točnog rješenja rezidual je jednak nuli, a u slučaju približnog rješenja on je različit od nule. Zbog toga nisu zadovoljeni uvjeti ravnoteže. Prirodno se nameće problem traženja približnog rješenja uz uvjet najmanjeg odstupanja od stvarnog rješenja: $L(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{q} \approx 0$

- Uvodimo približno rješenje za pomake kao i integralnu ocjenu odstupanja od stvarnog rješenja pomoću skalarnog produkta ***vektora odstupanja-r*** i tzv. ***težinskih funkcija-***ψ_i u obliku:

$$\int_V \boldsymbol{r}\psi_i dV = \int_V \{L[(\boldsymbol{u}_N(x)] - \boldsymbol{q}\}\psi_i dV = 0 \;; \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots \infty)$$

- gdje su $\boldsymbol{r}$ i ψ_i neprekinute funkcije, a $\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x})$ približno rješenje rubne zadaće u pomacima.
- Ako gornji izraz vrijedi za bilo koju neprekidnu težinsku funkciju ψ_i tada je ***r=0,*** pa je i jaka formulacija zadovoljena.

- Primjer jake formulacije na 1D problemu
  - Rješavanje elastičnog aksijalno opterećenog štapa
  - Cilj je pronaći stanje naprezanja po dužini štapa
  - Naprezanje je rezultat deformacije tijela, te je praćeno pomacima točki u tijelu u(x)
  - Kao opterećenje dano je aksijalno djelovanje t
  - A unutar tijela javljaju se sile b(x), koja mogu biti posljedica vlastite težine ili slično
  - Problem treba zadovoljiti sljedeće:
    - Uvjete ravnoteže
    - Vezna naprezanja i deformacija (Hookov zakon)
    - Polje pomaka mora biti kompatibilno
    - Veza deformacija i pomaka

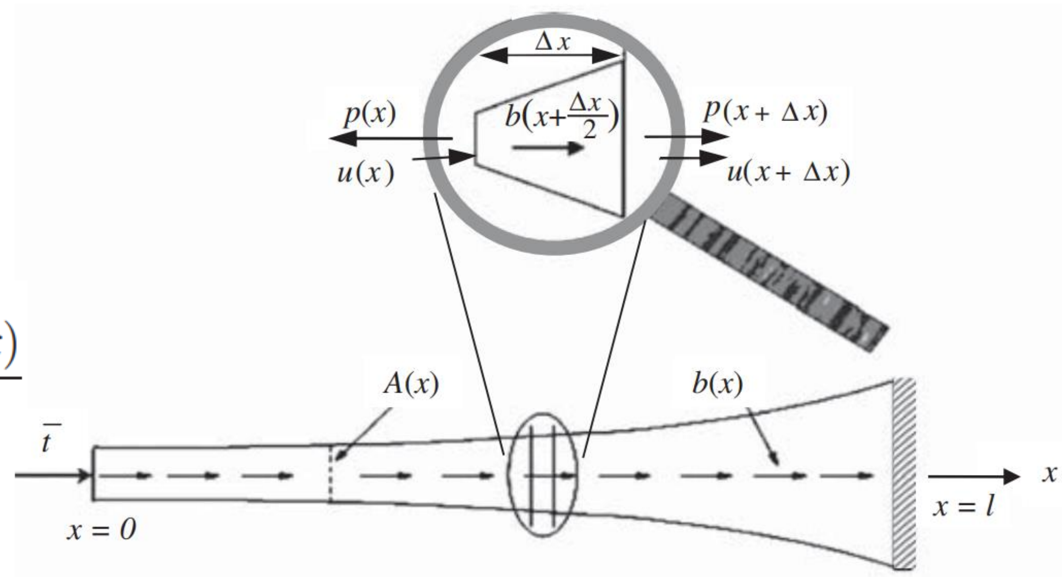


Uvjet ravnoteže unutarnjih sila p(x) i vanjskog djelovanja b(x)

$$-p(x) + b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x + p(x + \Delta x) = 0. \longrightarrow \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} + b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

Ako uzmemo da Δx→0 prvi dio izraza predstavlja derivaciju, a drugi b(x). Tako je uvjet ravnoteže iskazan preko unutarnjeg pritiska *p*

$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} + b(x) = 0.$$



Nadalje, naprezanje je definirano kao:

$$\sigma(x) = \frac{p(x)}{A(x)}, \quad p(x) = A(x)\sigma(x)$$

Deformacija kao: $$\varepsilon(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Hookov zakon: $$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x)$$

Dakle: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + b = 0, \qquad 0 < x < l.$$

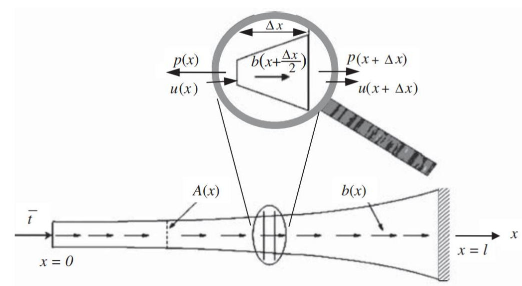
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+b=0, \qquad 0<x<l.$$

Ovo je diferencijalna jednadžba drugog reda. Gdje je u(x) zavisna varijabla koja je nepoznata funkcija, a x je nezavisna varijabla. Ova diferencijalna jednadžba je poseban oblik uvjeta ravnoteže koja može opisati oboje linearno i nelinearno ponašanje materijala, ali uzima u obzir linearnost u vezi naprezanja i deformacija .

Da bi riješili jednadžbu trebamo pridružiti rubne uvjete na oba kraja:

$$\sigma(0)=\left(E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=\frac{p(0)}{A(0)}\equiv-\bar{t},$$

$$u(l)=\bar{u}.$$



Prikazani problem i rješenje diferencijalne jednadžbe s zadovoljenjem rubnih uvjeta predstavlja jaku formulaciju. Potrebno je napomenuti da je $\bar{t}$, $\bar{u}$ i b zadano, a nepoznanica u(x).

Slaba formulacija rubne zadaće (integralna)

- Slaba formulacija sadrži restrikciju na funkciju reziduala i na tež. funkcije.
- Restrikcija se sastoji u tome da funkcija reziduala može biti prekidna, a izbor težinskih funkcija sužen je na određeni konačni skup S sa n elemenata.
- Kao posljedica ove restrikcije osnovnu lemu možemo zadovoljiti samo približno pa govorimo o ***slaboj formulaciji***

$$\int_V \boldsymbol{r}\psi_i dV = \int_V \{L[(\boldsymbol{u}_N(x)] - \boldsymbol{q}\}\psi_i dV = 0 \;\; ; \quad \psi_i \in S \;\; ; \;\; (i=1,2........n)$$

- Ako je gornja jednakost zadovoljena za svaku težinsku funkciju iz skupa S onda je slaba formulacija zadovoljena.
- Treba reći da svako rješenje jake formulacije zadovoljava slabu formulaciju, a obrat ne važi.
- Ipak rješenje slabe formulacije dovoljno dobro opisuje fizikalno stanje pomaka realnog čvrstog tijela i zadovoljava inženjersku praksu.

- Najveći broj približnih metoda izvedenih na bazi slabe formulacije može se svesti na dvije osnovne grupe: ***varijacijske*** i ***metode reziduuma***.
- Pretpostavlja se približno rješenje u obliku: $$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(\mathbf{x})$$

gdje je $u_N(\mathbf{x})$ *funkcija pomaka sastavljena od superpozicije dozvoljenih funkcija* $\varphi_j(\mathbf{x})$ *i konstanti* c_j *koje se određuju iz uvjeta minimuma. Funkcije* $\varphi_j(\mathbf{x})$ *su neprekidne i do potrebnog reda diferencijabilne te zadovoljavaju rubne uvjete.*

- U varijacijskim metodama približno rješenje daje ekstremnu vrijednost funkcionalu energije. Nakon deriviranja funkcionala energije po nepoznatim parametrima c_j postupak vodi na sustav linearnih algebarskih jednadžbi po nepoznatim c_j.
- S druge strane metode reziduuma se zasnivaju na minimizaciji razlike između približnog i točnog rješenja diferencijalnih jednadžbi koje opisuju određenu rubnu zadaću u integralnoj formi. Postupak također vodi na sustav linearnih algebarskih jednadžbi .

- Primjer slabe formulacije na 1D problemu
  - Slabu formulaciju opisati ćemo preko diferencijalne jednadžbe jake formulacije koja zadovoljava rubne uvjete

Počinjemo s množenjem diferencijalne jednadžbe s proizvoljno odabranom funkcijom w(x) i integriranjem po cijelom području:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+b=0,\qquad 0<x<l.$$

$$\longrightarrow \int_0 w\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+b\right]\mathrm{d}x=0$$

Na samom rubu u točki nema integracije pa za rubni uvjet vrijedi:

$$\longrightarrow \left(wA\left(E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\bar{t}\right)\right)_{x=0}=0$$

Funkcija w(x) zove se težinska funkcija ili matematičkom smislu testna funkcija. Kojoj je cilj da zadovoljni rubne uvjete i kao rezultat daje nulu.

$$\int_0^l w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_0^l wb\,\mathrm{d}x=0$$

Podsjetnik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(wf)=w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Rightarrow w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(wf)-f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}.$$

$$\longrightarrow \int_0^l w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(wf)\mathrm{d}x-\int_0^l f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

$$\longrightarrow \int_0^l w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=(wf)\big|_0^l-\int_0^l f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\equiv(wf)_{x=l}-(wf)_{x=0}-\int_0^l f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Ako uzmemo da je funkcija f → $f = AE(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$

$$\int_0^l w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (wf)|_0^l - \int_0^l f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \equiv (wf)_{x=l} - (wf)_{x=0} - \int_0^l f\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^l w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \int_0^l wb\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\rightarrow \left(wA\underbrace{E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}_{\sigma}\right)\Bigg|_0^l - \int_0^l \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_0^l wb\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\rightarrow (wA\sigma)_{x=l} - (wA\sigma)_{x=0} - \int_0^l \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_0^l wb\,\mathrm{d}x = 0$$

Odabrati ćemo takvu težinsku funkciju da w(x=l)=0

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (wA\bar{t})_{x=0} + \int_0^l wb\,\mathrm{d}x$$

Dakle probna funkcija zadovoljava rješenje ako je glatka na cijelom području. Takvo rješenje naziva se slaba formulacija. Naziv potječe iz činjenice da rješenja slabog oblika ne moraju biti glatka kao rješenja jakog oblika, tj. imaju slabije zahtjeve za kontinuitetom.

Metoda težinskih reziduala

$$\boldsymbol{r}(\mathbf{x},c_j) = L\left[\boldsymbol{u}_N(\mathbf{x})\right] - \boldsymbol{q}(\mathbf{x}) \neq 0$$

- $\boldsymbol{r}(\mathbf{x},c_j)$ je rezidual aproksimacije u diferencijalnim jednadžbama kao funkcija pozicije i parametara c_j. U ovoj metodi se koriste ***težinske funkcije*** $\psi_i(x)$, koje općenito nisu iste kao i koordinatne ***dozvoljene funkcije*** $\varphi_j(x)$. One se biraju iz skupa ***linearno nezavisnih ortogonalnih funkcija*** pa za 2D područje dobivamo slijedeći sustav

$$\iint_S \psi_i(\mathbf{x}) r(\mathbf{x},c_j) d\mathbf{x} = 0 \quad , \quad (i,j=1,2,........n)$$

- Gornji integral sadrži zadovoljenje diferencijalne jednadžbe u integralnom (prosječnom) obliku. Postoji 5 varijanti metode težinskih reziduala koje se razlikuju po izboru oblika težinskih funkcija:

- ***Metoda Galerkin-Petrov*** koja se bazira na izboru težinskih funkcija različitih od koordinatnih funkcija pa imamo:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\int_V \psi_i L(\varphi_j)dV\right]c_j = \int_S \psi_i \mathbf{q} dS \qquad ili \qquad (L\mathbf{c}=\mathbf{Q})$$

$$L_{ij} = \int_V \psi_i L(\varphi_j)dV$$

$$Q_i = \int_S \psi_i \mathbf{q} dS$$

- ***Metoda Galerkin-Bubnov*** sastoji se u tome da se težinske funkcije biraju tako da budu jednake koordinatnim funkcijama tako da imamo:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\int_V \varphi_i L(\varphi_j)dV\right]c_j = \int_S \varphi_i \mathbf{q} dS$$

- ***Metoda kolokacija*** u kojoj se zadovoljenje diferencijalne jednadžbe traži samo u diskretnim točkama područja na primjer:

$$r(\mathbf{x},c_j)=0 \qquad za \qquad \mathbf{x}=x_i \quad (i=1,2,....n)$$

- ***Metoda kolokacija u podpodručjima*** u kojoj se traži zadovoljenje diferencijalne jednadžbe u određenim podpodručjima

$$r(\mathbf{x},c_j)=0 \qquad za \qquad \mathbf{x}\subset V_i \quad , \quad (i=1,2,....n)$$

- ***Metoda najmanjih kvadrata*** kod koje se u integralnoj formi zahtijeva minimizacija kvadrata reziduala u odnosu na nepoznate parametre c_j

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\int_V r^2(\mathbf{x},c_j)dV = 0$$

Ritzova metoda

- Ova metoda se bazira na principu teorema o minimumu ukupne pot. energije deformacije. Pri tome se za pomake pretpostavlja superpozicija linearno-nezavisnih funkcija koje zadovoljavaju odgovarajuće rubne uvjete.
- To su najčešće polinomi u obliku: $u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x)$
- Ovo približno rješenje se uvrsti u funkcional o minimumu ukupne potencijalne energije deformacije odnosno funkcionala Π koji deriviramo po nepoznatim parametrima c_j

$$\Pi = U - \int_V K_i u_i dV - \int_{S_q} q_i u_i dS \qquad \frac{\partial \Pi(c_j)}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 1,2,\ldots n)$$

- Ovaj postupak vodi na sustav linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznatim koeficijentima c_j. U slučaju Galerkinove metode funkcije moraju zadovoljiti i statičke i kinematičke uvjete, dok kod Ritzove metode samo kinematičke pa je izbor funkcije lakši.
- **PROUČITI PRIMJER IZ KNJIGE 10.1.**

Metoda konačnih razlika

- Metodom konačnih razlika određuju se približne vrijednosti funkcije koja u zadanom području zadovoljava diferencijalnu jednadžbu određenog tipa polazeći od poznatih vrijednosti funkcije na konturi.

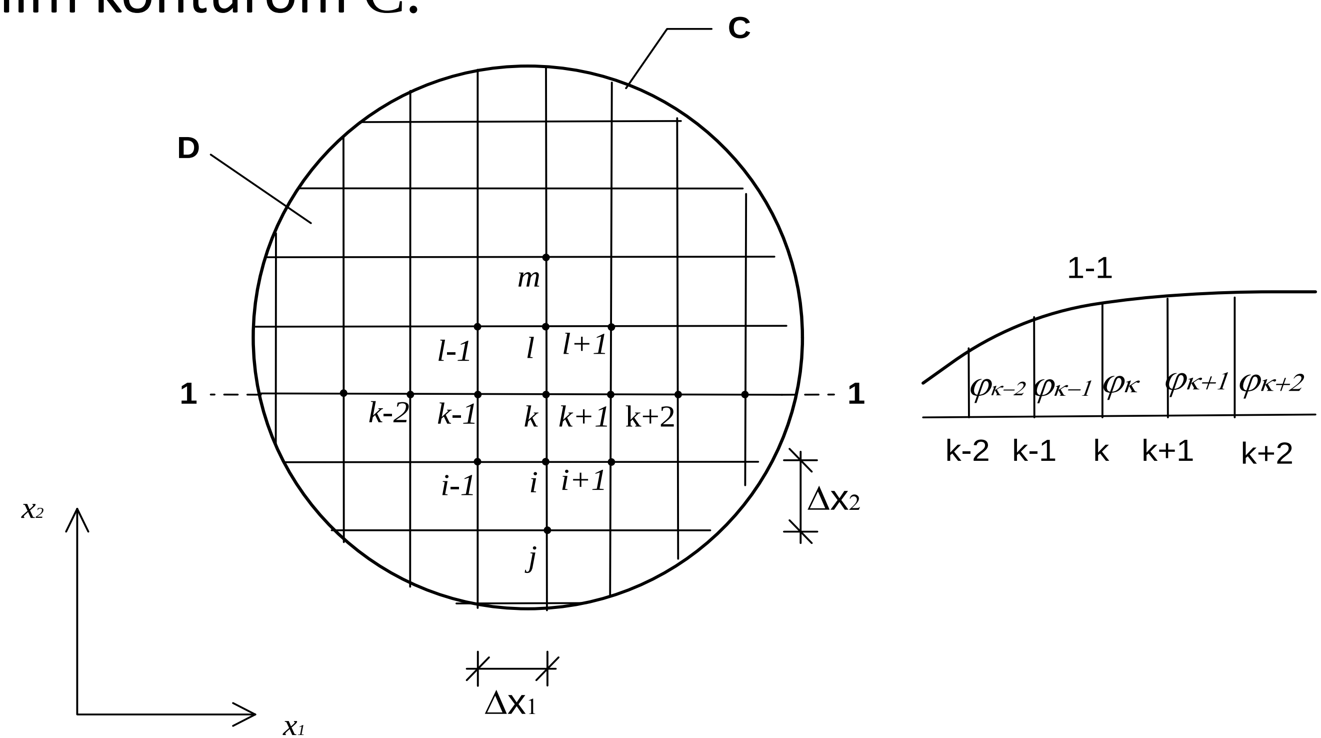
- ***Nepoznate vrijednosti funkcije*** se određuju u diskretnim točkama područja koje predstavljaju ***čvorove mreže*** razapete nad područjem ograničenim zadanom konturom.

- ***Mreža*** može biti pravokutna, trokutna, šesterokutna, itd., ali najčešće se koristi pravokutna ili kvadratna. Ova metoda se koristi ***u diferencijalnoj formulaciji rubne zadaće*** kada se ***diferencijalna jednadžba*** određene zadaće zamjenjuje s odgovarajućom ***diferencijskom jednadžbom***.

- U mehanici čvrstog deformabilnog tijela najčešći oblici diferencijalnih jednadžbi su Laplaceova, Poissonova i biharmonijska homogena i nehomogena dif. jednadžba.

$$\nabla^2\varphi = 0\,,\quad \nabla^2\varphi = q \quad ili \quad \nabla^4\varphi = 0\,,\quad \nabla^4\varphi = q$$

- Promatramo pravokutnu mrežu nad dvodimenzionalnim područjem D omeđenim konturom C.



- Označimo vrijednosti funkcije φ u pojedinim točkama φ_k, φ_{k+1}, φ_{k-1}, itd. Po pravilu srednje vrijednosti gradijent funkcije φ u točki k može se izraziti kvocijentom razlika u obliku: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{1(k)}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_{1(k)}} = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}}{2\Delta x_1}$$
- Gornji izraz ima smisao prve derivacije po smjeru x_1. Isto tako druga derivacija po x_1 približno se može izraziti kvocijentom:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{1(k)}^2} = \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x_{1(k)}^2} = \frac{1}{\Delta x_1}\left(\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Delta x_1} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta x_1} \right) = \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k}{\Delta x_1^2}$$

- Analogno se dobivaju izrazi za drugi smjer x_2 u obliku:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2(k)}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_{2(k)}} = \frac{\varphi_l - \varphi_i}{2\Delta x_2} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{2(k)}^2} = \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x_{2(k)}^2} = \frac{\varphi_l + \varphi_i - 2\varphi_k}{\Delta x_2^2}$$

- U točki k možemo u diferencijalnom obliku prikazati djelovanje diferencijalnog operatora kao:

$$\Delta \varphi_{(k)} = \nabla^2 \varphi_{(k)} = \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k}{\Delta x_1^2} + \frac{\varphi_l + \varphi_i - 2\varphi_k}{\Delta x_2^2}$$

- Što predstavlja ***Laplaceov diferencijalni operator u diferencijskom obliku***

- ***Poissonova dif. jednadžba*** ima oblik $\nabla^2\varphi = q$. Tada je

$$\left(\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1}\right)\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^2+\left(\varphi_l+\varphi_i\right)-2\varphi_k\left[1+\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^2\right]=q_k\Delta x_2^2$$

- U slučaju kvadratne mreže $\Delta x_1=\Delta x_2=\lambda$ gornja jed. postaje

$$\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1}+\varphi_l+\varphi_i-4\varphi_k=q_k\lambda^2$$

- Za svaku točku područja D može se postaviti po jedna takva jednadžba i na kraju se dobiva sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojem se kao nepoznanice pojavljuju vrijednosti funkcije φ, a kao poznate vrijednosti q.
- Analognim postupkom se pomoću konačnih diferencija može izraziti i ***biharmonijska parcijalna diferencijalna jednadžba*** kao:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_{1(k)}^4}=\frac{\Delta^4\varphi}{\Delta x_{1(k)}^4}=\frac{6\varphi_k-4\left(\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1}\right)+\left(\varphi_{k+2}+\varphi_{k-2}\right)}{\Delta x_1^4} \qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x_{2(k)}^4}=\frac{\Delta^4\varphi}{\Delta x_{2(k)}^4}=\frac{6\varphi_k-4\left(\varphi_l+\varphi_i\right)+\left(\varphi_m+\varphi_j\right)}{\Delta x_2^4}$$

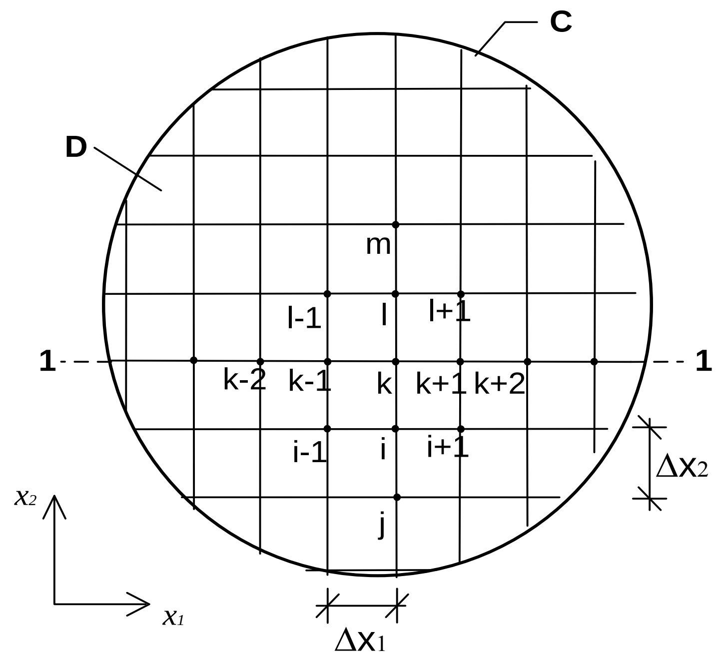
$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^2\partial x_{2(k)}^2}=\frac{4\varphi_k-2\left(\varphi_l+\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1}+\varphi_l\right)+\left(\varphi_{i+1}+\varphi_{l+1}+\varphi_{i-1}+\varphi_{l-1}\right)}{\Delta x_1^2\Delta x_2^2}$$

- U slučaju $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$ za $\nabla^4 \varphi = 0$ dobivamo:

$$\varphi_k \left[6\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^2 + 6\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2 + 8 \right] - 4\left[1 + \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^2\right]\left(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1}\right) -$$

$$-4\left[1 + \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2\right]\left(\varphi_l + \varphi_i\right) + 2\left(\varphi_{l+1} + \varphi_{l-1} + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}\right) +$$

$$+\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^2\left(\varphi_{k+2} + \varphi_{k-2}\right) + \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2\left(\varphi_j + \varphi_m\right) = 0$$



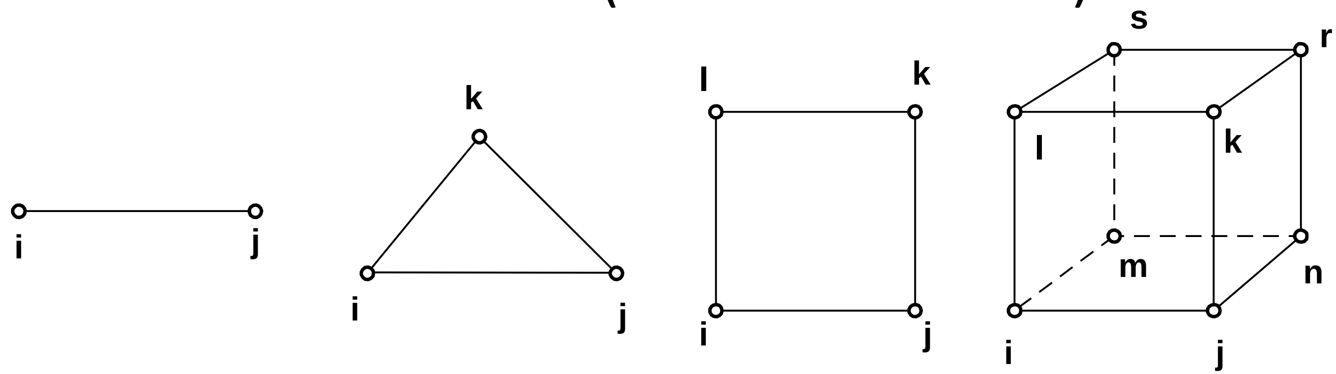
- U slučaju $\Delta x_1 = \Delta x_2$ u gornjoj jednadžbi $\nabla^4 \varphi = 0$ dobivamo:

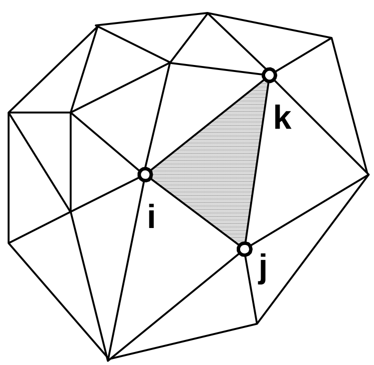
$$20\varphi_k - 8(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} + \varphi_l + \varphi_i) + 2\left(\varphi_{l+1} + \varphi_{l-1} + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}\right) + \varphi_{k+2} + \varphi_{k-2} + \varphi_j + \varphi_m = 0$$

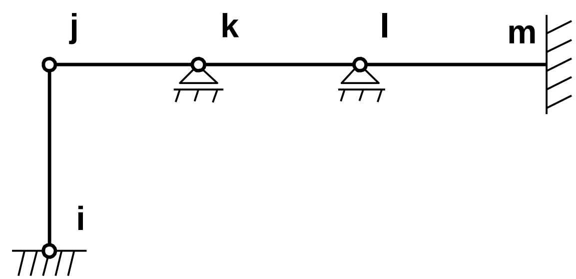
za svaki čvor mreže zadanog područja.

Metoda konačnih elemenata

- Predstavlja jednu od najčešće korištenih približnih metoda u rješavanju rubnih zadaća mehanike kontinuuma.
- Spada u ***metode diskretizacije kontinuuma***. Tijelo se podijeli na određeni broj elemenata konačne veličine (***konačni elementi***)







- ***Konačni elementi*** unutar tijela ili konstrukcije međusobno su ***spojeni u čvorovima***.
- Nepoznanice su ***pomaci čvorova*** koji predstavljaju stupnjeve slobode pojedinih čvorova.
- Uspostavljaju se relacije između pomaka unutar elementa i njegovih čvorova.
- Osnovne jednadžbe konačnih elemenata se sjedinjuju u ***jednadžbu tijela ili konstrukcije***, a uzimajući u obzir vanjsko opterećenje i rubne uvjete dobivamo ***sustav linearnih algebarskih jednadžbi***.
- Nakon što se odrede pomaci mogu se iz poznatih veza odrediti deformacije i naprezanja.
- ***Metoda konačnih elemenata*** se najčešće izvodi iz principa o minimumu ukupne potencijalne energije i principa virtualnih pomaka.
- Pri tome se umjesto tenzorskog formulizma koristi uobičajeni ***matrični formulizam***.

- ***Uvjeti ravnoteže*** pojedinih konačnih elemenata zadovoljeni su preko principa virtualnih pomaka.
- Uvjeti kompatibilnosti u čvorovima konačnih elemenata zadovoljeni su jednakošću komponenta pomaka u istim čvorovima.
- ***Uvjeti kompatibilnosti*** za sve točke u polju konačnih elemenata zadovoljavaju se izborom kontinuiranih oblikovnih funkcija ili ***interpolacijskih funkcija*** koje povezuju pomake čvorova pojedinog konačnog elementa s pomacima unutar konačnog elementa.
- Uvjeti kompatibilnosti duž stranica konačnih elemenata obično nisu ispunjeni i oni ovise o izboru interpolacijskih funkcija ili ***funkcija oblika***.
- Kada uvjeti kontinuiteta nisu svugdje na elementu zadovoljeni govorimo o ***nekonformnim elementima***. To međutim ne znači da i nekonformni elementi ne daju dobre rezultate pri primjeni metode konačnih elemenata.

Interpolacijske funkcije (2D)

- Interpolacijske funkcije se još zovu ***funkcije oblika*** ili ***aproksimacijske funkcije***. O izboru ovih funkcija ovisi ispunjenost uvjeta kompatibilnosti između elemenata.
- Interpolacijske funkcije imaju najčešće oblik polinoma. U slučaju 2D rubnih zadaća imamo primjerice oblik polinoma

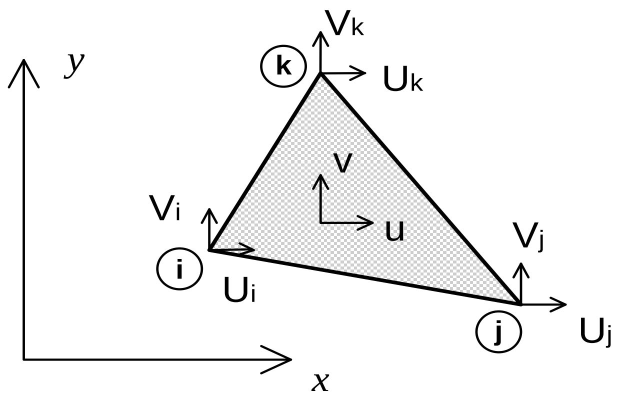
$$P_n(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(x,y)$$

- gdje je: n – red polinoma, m – broj članova polinoma, a α_i – su konstante koje se biraju tako da se zadovolje rubni uvjeti, odnosno da vektor pomaka $\{u\}$ u čvorovima elementa poprima zadane vrijednosti. Polinom je potpun kad sadrži sve koeficijente od 1 do m, primjerice za dvodimenzionalne zadaće imamo:

$$n=1,\quad m=3\qquad P_1(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y$$

$$n=2,\quad m=6\qquad P_2(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4xy+\alpha_5x^2+\alpha_6y^2$$

- Primjer izvođenja ***interpolacijskih funkcija*** i drugih veza pokazat ćemo na ravninskim ***trokutnim kon. elementima***



$U_i, U_j, U_k, V_i, V_j, V_k$ - pomaci čvorova elementa,
u, v – pomaci točaka u polju konačnog elementa.

- Za zadani slučaj imamo polinom oblika: $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

- Matrični oblik gornje veze je: $\{u\} = [a]\{\alpha\}$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

- U odabranom primjeru matrica polja $[a]$ i vektor koeficijenata dati su u obliku:

$$[a]=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha\}=\{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6\}$$

- Budući da gornji izraz vrijedi i za polje i za čvorove konačnog elementa možemo pisati:

- za točku “i” $\quad x=x_i, \quad y=y_i, \quad u_i=U_{1i}, \quad v_i=V_i=U_{2i}$

- za točku “j” $\quad x=x_j, \quad y=y_j, \quad u_j=U_{1j}, \quad v_j=V_j=U_{2j}$

- za točku “k” $\quad x=x_k, \quad y=y_k, \quad u_k=U_{1k}, \quad v_k=V_k=U_{2k}$

- Pa za vezu između pomaka čvorova i unutarnjih pomaka elementa imamo:

$\{U\}=[a']\cdot\{\alpha\}$ gdje je: $[a']=\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$ ***regularna matrica*** $[a']^{-1}$

- Matrica $[a']$ je regularna i ima inverznu matricu $[a']^{-1}$. Na taj način se može odrediti vektor konstanti $\{\alpha\}$ kao $\{\alpha\}=[a']^{-1}\cdot\{U\}_e$
  ako uvrstimo u izraz $\{u\}=[a]\{\alpha\}$ dobivamo $\{u\}=[a]\cdot[a']^{-1}\cdot\{U\}_e=[b]\cdot\{U\}_e$
  gdje je: $[b]=[a]\cdot[a']^{-1}$ - ***interpolacijska matrica konačnog elementa***
- Matrica $[b]$ ima izuzetnu važnost i ona je različita za različite elemente. Kada se ona pogodno odabere daljnje računske operacije kod metode konačnih elemenata idu približno jedinstvenim postupkom. Za konkretan slučaj trokutnog elementa imamo:

$$[b]=\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \end{bmatrix}$$

$$b_i=\frac{1}{2A_e}\left[\left(x_j y_k-x_k y_j\right)+\left(y_j-y_k\right)x+\left(x_k-x_j\right)y\right]$$

$$b_j=\frac{1}{2A_e}\left[\left(x_k y_i-x_i y_k\right)+\left(y_k-y_i\right)x+\left(x_i-x_k\right)y\right]$$

$$b_k=\frac{1}{2A_e}\left[\left(x_i y_j-x_j y_i\right)+\left(y_i-y_j\right)x+\left(x_j-x_i\right)y\right]$$

A_e – površina konačnog elementa

$$2A_e=\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

Osnovna jednadžba konačnog elementa (2D)

- Koristeći poznate veze između deformacija, naprezanja i pomaka za stanje naprezanja u ravnini imamo:

$$\{\sigma\}=\{\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\}^T,\quad \{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{xy}\}^T,\quad \{u\}=\{u,v\}^T,\quad \{\varepsilon\}=[d]\{u\},\quad \{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$$

- Izrazi se mogu proširiti na vezu između deformacija i naprezanja te čvornih pomaka u obliku:

$$\{\varepsilon\}=[d][b]\{U\}_e=[p]\{U\}_e$$

$$\{\sigma\}=[E][d][b]\{U\}_e=[E][p]\{U\}_e$$

$$[p]=[d][b]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0\\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k\end{bmatrix}$$

$$[d]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \quad i \quad [E]=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}$$

matrica derivacija *matrica elastičnosti*

$$p=\begin{bmatrix}\frac{\partial b_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial b_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial b_k}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial b_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial b_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial b_k}{\partial y}\\ \frac{\partial b_i}{\partial y} & \frac{\partial b_i}{\partial x} & \frac{\partial b_j}{\partial y} & \frac{\partial b_j}{\partial x} & \frac{\partial b_k}{\partial y} & \frac{\partial b_k}{\partial x}\end{bmatrix}$$

matrica deformacija *- povezuje komponente deformacija sa pomacima čvorova elementa*

Jednadžba ravnoteže konačnog elementa

- Da bismo izveli jednadžbu ravnoteže konačnog elementa upotrijebit ćemo princip virtualnog rada.

$$\{\delta U\}_e^T \{F\}_e = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

čvorne sile $\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ F_{1j} \\ F_{2j} \\ F_{1k} \\ F_{2k} \end{Bmatrix}$

- Promotrimo desnu stranu gornje jednakosti

$$\int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_e} \left([p]\{\delta U\}_e\right)^T \left([p]\{U\}_e [E]\right) dV_e =$$

$$= \{\delta U\}_e^T \int_{V_e} [p]^T [E][p] dV_e \{U\}_e$$

- Vratimo u jednadžbu rada i pokratimo sa $\{\delta U\}_e$ te dobivamo

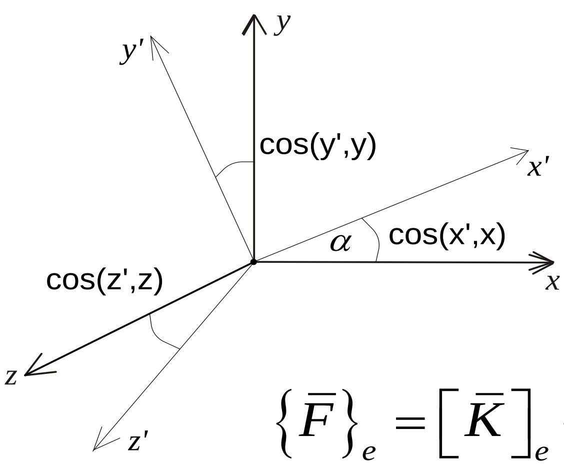
$\{F\}_e = \int_{V_e} [p]^T [E][p] dV_e \{U\}_e$ uvedemo $[K]_e = \int_{V_e} [p]^T [E][p] dV_e$ (***matrica krutosti KE***)

i imamo $\{F\}_e = [K]_e \{U\}_e$ - ***Jednadžbu ravnoteže konačnog elementa***

- Združivanjem jednadžbi pojedinih konačnih elemenata tijela po određenom redu dobivamo jednadžbu za cijelo tijelo.

Matrica transformacije (3D)

- Prije nego što se jednadžbe pojedinih elemenata koji su u prostoru razmješteni proizvoljno sjedini u konstrukciju treba pojedine elemente jednadžbe konačnog elementa, a to su vektor sila, vektor pomaka i matrica krutosti, ***transformirati iz njihovog lokalnog u globalni koordinatni sustav***.
- Ovu transformaciju obavlja ***matrica transformacije*** čiji elementi predstavljaju ***kosinuse kutova*** između pojedinog lokalnog i zajedničkog globalnog koordinatnog sustava



$$T = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix}$$

- *ortogonalna matrica*

$$T_{xy} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\bar{U}]_e = [T]^T \cdot [U]_e \qquad [\bar{F}]_e = [T]^T \cdot [F]_e \qquad [U]_e = [T] \cdot [\bar{U}]_e$$

$$\{\bar{F}\}_e = [\bar{K}]_e \{\bar{U}\}_e$$ **- *jedn. kon. elem u glob. sustavu***

$$[\bar{K}]_e = [T]^T \cdot [K]_e \cdot [T]$$ **- *matrica krutosti u glob. sustavu***

Jednadžba tijela ili konstrukcije

- Ako je konstrukcija podijeljena u konačne elemente i ima e elemenata i n čvorova, tada jednadžbu konstrukcije dobivamo spajanjem jednadžbi pojedinih konačnih elemenata u zajedničku jednadžbu koju simbolički pišemo kao:

$$\{F\}=[K]\cdot\{U\}$$

$$\{\mathrm{F}\}=\begin{Bmatrix}\{\bar{\mathrm{F}}_1\}\\ \{\bar{\mathrm{F}}_2\}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \{\bar{\mathrm{F}}_n\}\end{Bmatrix};\quad [K]=\begin{bmatrix}[\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \cdot & \cdot & \cdot & \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & \cdot & \cdot & [\bar{K}_{nn-1}] & [\bar{K}_{nn}]\end{bmatrix}\quad \{\mathrm{U}\}=\begin{Bmatrix}\{\bar{\mathrm{U}}_1\}\\ \{\bar{\mathrm{U}}_2\}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \{\bar{\mathrm{U}}_n\}\end{Bmatrix}$$

- Spajanje se izvodi tako da pridružujemo sve elemente pojedinih matrica koje pripadaju zajedničkom čvoru.
- Matrica krutosti cijele konstrukcije nije puna nego trakasta, a širina trake ovisi o načinu numeriranja čvorova elemenata.
- Na kraju se dobiva sustav linearnih algebarskih jednadžbi koji se rješava nekom od poznatih matematičkih metoda.

Rubni uvjeti

- Rubne uvjete čine poznate komponente čvornih pomaka i čvornih sila. Tamo gdje su poznati pomaci obično su nepoznate reakcije (oslonci), a gdje su poznate čvorne sile nepoznati su pomaci, pa imamo:

$\{U_r\}, \{U_m\}$ -poznate i nepoznate komponente pomaka

$\{F_r\}, \{F_m\}$ -nepoznate i poznate komponente sila

- Sada se jednadžba tijela ili konstrukcije može napisati kao

$$\begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{mr}] \\ [K_{rm}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{U_r\} \end{Bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} \{F_m\} &= [K_{mm}]\{U_m\} + [K_{mr}]\{U_r\} \\ \{F_r\} &= [K_{rm}]\{U_m\} + [K_{rr}]\{U_r\} \end{aligned}$$

Iz prve jed. Imamo $\{U_m\} = [K_{mm}]^{-1}(\{F_m\} - [K_{mr}]\{U_r\})$, $\{U_r\} = 0$ - poznate komponente

pa imamo nepoznate pomake kao: $\{U_m\} = [K_{mm}]^{-1}\{F_m\}$

i nepoznate reakcije iz jednadžbe: $\{F_r\} = [K_{rm}]\{U_m\}$

- Možemo odrediti i komp. deformacija i naprezanja u lokalnom sustavu:

$$\{\varepsilon\}_e = [p][T]^T\{\overline{U}\}_e \qquad \{\sigma\}_e = [E][p][T]^T\{\overline{U}\}_e$$

Pitanja:

1. Metoda težinskih reziduala.
2. Ritzova metoda.
3. Metoda konačnih razlika. Diferencijalne jednadžbe u diferencijskom obliku.
4. Metoda konačnih elemenata.
   - Veza između pomaka čvorova KE s pomacima unutar KE – interpolacijska matrica,
   - veza između deformacija i naprezanja te čvornih pomaka – matrice derivacija, deformacija, elastičnosti,
   - jednadžba ravnoteže KE i izvod matrice krutosti KE,
   - matrica transformacije,
   - Jednadžba konstrukcije i rubni uvjeti.