

MATEMATIKA 2, 16.9.2013.

1. Neka je dana funkcija $f(x, y) = \ln \sin(x^2 + y^2)$.
 - (a) (8 bodova) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije f .
 - (b) (4 boda) Odredite $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
2. Neka je dana funkcija $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$.
 - (a) (6 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
 - (b) (6 bodova) Odredite tangencijalnu ravninu na graf dane funkcije u točki $(1, 2, ?)$.
3. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:
 - (a) (7 bodova) $2yy'' - 3(y')^2 = 0$,
 - (b) (5 bodova) $y'' + y = 2$.
4. (12 bodova) Izračunajte površnu manjeg lika omeđenog krivuljama $y = \frac{x^2}{3}$ i $x^2 + y^2 = 4$. Skicirajte lik.
5. Izračunajte masu tijela omeđenog dijelovima ploha $z = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3$ i $z = 2 - 2x^2 - 2y^2$, ako mu je gustoća dana s $g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Skicirajte zadano tijelo.
6.
 - (a) (4 bodova) Pronađite vektorsko polje kojemu je potencijal jednak $u(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(yz) + 1$.
 - (b) (12 bodova) Dokažite da je vektorsko polje

$$\vec{a} = y^2 \vec{i} + 2xy \vec{j} + e^z \vec{k}$$

potencijalno, te mu odredite potencijal. Zatim izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} d\vec{r},$$

gdje je $\vec{\Gamma}$ spojnica točaka $(-1, 0, 0)$ i $(1, 2, 0)$.

7. (12 bodova) Izračunajte krivuljni integral prve vrste skalarnog polja $a(x, y, z) = x$, po presječnici ploha $y = 4 - x^2$ i $z = y$ u prvom oktantu. Skicirajte krivulju.
8. (12 bodova) Izračunajte

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS,$$

ako je Σ ploha zadana jednadžbama $z^2 = 16 - x^2 - y^2$ i $z \leq 0$. Skicirajte plohu.