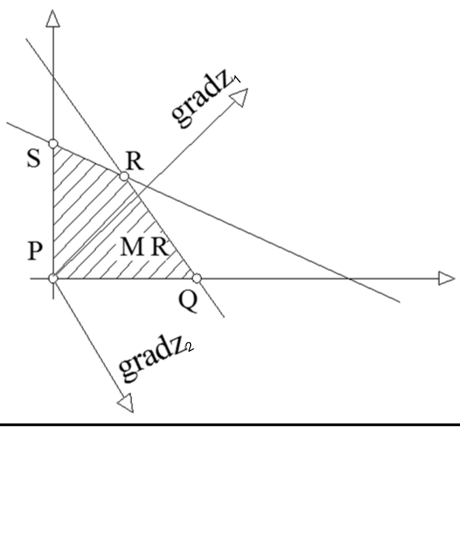
METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

VIŠEKRITERIJALNO PROGRAMIRANJE

VIŠEKRITERIJALNO PROGRAMIRANJE

Višekriterijalno programiranje primjenjuje se u problemima kod kojih se pojavljuje više funcija cilja odnosno ciljeva istovremeno, uz isti skup uvjeta – ograničenja. U ovakvim slučajevima jedna točka uglavnom ne može biti optimalna za dvije ili više funkcije cilja:



Ukoliko rješavamo problem maksimuma, tada funkcija cilja Z_1 postiže maksimum u točki R, a funkcija Z_2 u točci Q. Ako pak rješavamo problem minimuma rješenja su za funkciju Z_1 točke P, a za funkciju Z_2 točke S.

Navedeno upućuje da ako želimo optimizirati više funkcije cilja i jedan skup uvjeta, nećemo moći dobiti točku koja je istovremeni optimum za sve funkcije cilja, nego ćemo se morati zadovoljiti kompromisnim rješenjem.

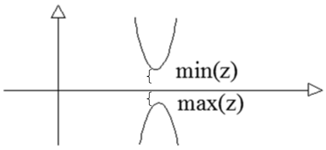
Zaključujemo da optimalno rješenje neće optimizirati svaku pojedinu funkciju cilja, nego ćemo morati prihvatiti rješenje optimalizacije jedne nove funkcije cilja, koja na neki način uključuje sve zadane funkcije cilja:

Matematička formulacija:

$$\begin{aligned} &\max Z_1 \\ &\max Z_2 \\ &\quad\vdots \\ &\max Z_k \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Isti zadatak se može formulirati i za problem minimuma, te problem ne mora biti zadan kanonskom obliku.

Ukoliko se u problemu pojavljuje maksimaliziranje nekih funcija cilja i minimaliziranje ostalih, tada je zahtjev za minimumom potrebno preformulirati u zahtjev za maksimum ili suprotno, tako da svi zahtjevi budu za minimumom ili maksimumom. Transformacije provodimo zahvaljujući činjenici da je max (Z) = min (-Z), odnosno da je min (Z) = max (-Z)



Problem se rješava njegovom preformulacijom na problem s jednom funkcijom cilja. Jednu funkciju cilja ćemo dobiti tako da važnije funkcije Zi pomnožimo s većim pozitivnim brojem, a manje značenje manjim brojem, te tako dobivene umnoške zbrojimo:

$$\max Z = \omega_1 Z_1 + \omega_2 Z_2 + \ldots + \omega k Z_k$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Na isti način postupamo i s problemom minimuma. Tako dobiveni problem je zadatak LP koji se riješava na uobičajeni način.

Za izbor brojeva $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ ne postoje nikakva objektivna pravila, nego je izbor "subjektivan", ovisno o procjeni istraživača o objektivnoj težini pojedinog kriterija.

PRIMJER:

Tvornica proizvodi dva proizvoda, i njihov planirani broj prikazan je varijablama X_1 i X_2. Prihod je prikazan sa $Z_1 = 7X_1 + 5X_2$, a troškovi proizvodnje sa $Z_2 = 3X_1 + 2X_2$.

Uvjeti proizvodnje zadani su sa:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 18$$
$$4X_1 + 4X_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Treba odrediti plan proizvodnje unutar kojeg se maksimalizira prihod i minimalizira trošak.

Matematička formulacija modela:

$$\max Z_1 = 7x_1 + 5x_2$$
$$\min Z_2 = 3x_1 + 2x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Preformulacijom minimuma u maksimum dobiva se:

$$\max Z_1 = 7x_1 + 5x_2$$
$$\max (-Z_2) = -3x_1 - 2x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Svođenje na jednu funkciju cilja daje:

$$\max Z = \omega_1 (7x_1 + 5x_2) + \omega_2 (-3x_1 - 2x_2)$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Razmotrimo mogućnosti izbora ω_1 i ω_2

1. slučaj:

Zahtjeva se organizirati proizvodnju tako da je maksimaliziranje prihoda i minimaliziranje troškova jednako značajno. Tada stavljamo $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 1$ (mogu biti i bilo koja druga dva jednaka broja), pa dobivamo funkciju cilja

$$Z = 1(7x_1 + 5x_2) + 1(-3x_1 - 2x_2)$$

što daje problem:

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problem rješavamo na uobičajeni način i dobivamo optimalne vrijednosti:

$$\hat{X}_1 = 4{,}5 \quad ; \quad \hat{X}_2 = 0$$

Što znači, da ćemo postići prihod od 31.5 i troškove od 13.5 novčanih jedinica.

2. slučaj:

Zahtjeva se organizirati proizvodnju na način da je minimaliziranje troškova dvostruko značajnije od maksimaliziranja prihoda. Stoga stavljamo da je ω_2 dvostruko veći od ω_1. Npr. stavimo da je $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 2$ pa funkcija cilja glasi:

$$Z = 1\,(7x_1 + 5x_2) + 2\,(-3x_1 - 2x_2)$$

pa dobivamo problem:

$$\max Z = X_1 + X_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

problem rješavamo na uobičajeni način i dobijemo:

$$\widehat{X}_1 = 2{,}25 \;;\; \widehat{X}_2 = 3$$

pripadne vrijednosti funkcije cilja su:

$$\widehat{Z}_1 = 30{,}75 \;;\; \widehat{Z}_2 = 12{,}75$$

Dobiveni rezultat znači da ćemo postići prihod od 30,75 i troškove od 12,75 novčanih jedinica.

U usporedbi s prethodnim slučajem vidljivo je da je zbog povećanja značaja troškova iznos troškova pao, no pao je i iznos prihoda.

3. slučaj:

Zahtjeva se organizacija proizvodnje pri čemu su troškovi 50% značajniji od prihoda. Usvajamo ω_2 za 50% veći od ω_1. Npr. stavimo $\omega_1 = 1$, a $\omega_2 = 1.5$ pa dobivamo funkciju cilja:

$$Z = 1\,(7x_1 + 5x_2) + 1.5\,(-3x_1 - 2x_2)$$

Dobiva se problem:

$$\max Z = 2.5x_1 + 2x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problem se rješava na uobičajeni način pa se dobiva:

$$\widehat{X}_1 = 2{,}25 \;;\; \widehat{X}_2 = 3$$

a pripadne vrijednosti funkcije cilja su:

$$\widehat{Z}_1 = 30{,}75 \quad ; \quad \widehat{Z}_2 = 12{,}75$$

Zaključujemo da ćemo postići prihod od 30.75 i troškove od 12,75 novčanih jedinica. Optimalne vrijednosti varijabli su ostale iste kao i u slučaju 2, premda je utjecaj funkcije cilja promijenjen.