METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

PROGRAMIRANJE NA MREŽAMA

1

PROGRAMIRANJE NA MREŽAMA

Pojam mreže:

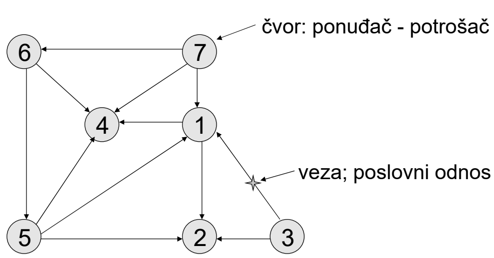
Mreža je zadana ako je zadano:

- Skup čvorova N, koji sadrži m članova
- Skup lukova A koji povezuje čvorove. Ako luk povezuje čvor i ∈ N sa čvorom j ∈ N, tada ćemo ga označiti sa (i,j). Lukovi su usmjereni ili orijentirani. Odnosno, ako postoje lukovi (i,j) i (j,i) oni nisu jednaki.

NAPOMENA: Svi čvorovi ne moraju biti povezani lukom

2

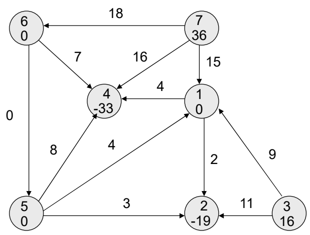
Prikaz primjera mreže (sa sedam čvorova); smjer luka označen je strelicom:



3

1.1. Problem minimalne cijene toka kroz mrežu

Primjer:



4

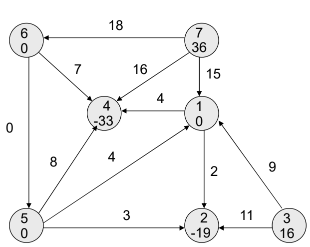
Postavlja se pitanje da li ovakav problem uopće ima bar jedno moguće rješenje? Može se pokazati da je postojanje mogućeg rješenja osigurano ako vrijedi da je suma svih ponuda i potražnji jednaka nuli, tj:

$$\sum_{i \in N} b_i = 0$$

U nastavku ćemo u pravilu smatrati da vrijedi gornja jednakost, a eventualne iznimke ćemo posebno naglasiti.

5

Primjer zadataka dan je na slici. Ispod oznake čvora su zapisane ponude (potražnje), a uz lukove cijene:



6

1.2. Formulacija matematičkog modela

Označimo s X_{ij} količinu robe koju prevozimo lukom (i,j).

Funkcija cilja glasi:

$$\min Z = \sum_{\underbrace{(i,j)\in A}_{\text{skup lukova}}} \overbrace{c_{ij}}^{\text{jedinična cijena transporta}} \overbrace{x_{ij}}^{\text{količina robe}}$$

7

Uz uvjete (koji se temelje na zakonu o sačuvanju mase ili balansu točke):

1) ulaz u čvor (k) + ponuda čvora (k) = izlaz iz čvora (k), $k\in N$

   (k je element skupa svih čvorova N) ili, drugim riječima, količina robe koja uđe u čvor, plus količina robe koja se nalazi u čvoru jednaka je količini koja napusti čvor.

   Gornja relacija može se napisati i u obliku:

2) ulaz u čvor (k) – izlaz iz čvora (k) = - ponuda čvora (k), $k\in N$

   (broj uvjeta jednak je broju čvorova)

8

odnosno:

$$\underbrace{\sum_{i\ \ za(i,k)\in A} x_{i,k}}_{\text{suma svih ulaza u čvor k iz smjera svih čvorova i}} - \underbrace{\sum_{j\ \ za(k,j)\in A} x_{k,j}}_{\text{suma svih izlaza iz čvora k u smjeru svih čvorova j}} = \underbrace{-b_k}_{\text{ponuda čvorova}}, k\in N$$

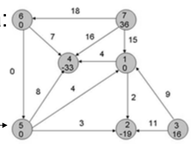
9

Daljnji uvjet je nenegativnost varijabli:

$$x_{ij} \geq 0, \ (i,j) \in A$$

Vidljivo je da je zadatak formuliran kao problem linerarnog programiranja, pa ga je moguće riješiti simpleks metodom:

Prvo formuliramo funkciju cilja:



indeksi su u rastućem redoslijedu

min Z = $2x_{12} + 4x_{14} + 9x_{31} + 11x_{32} + 4x_{51} + 3x_{52} + 8x_{54} + 7x_{64} + 0x_{65} + 15x_{71} + 16x_{74} + 18x_{76}$

10

Zbroj svih ulaza i izlaza iz čvora može biti jednak - ponudi izvora

Uvjet:

- za čvor 1. $x_{31} + x_{51} + x_{71} - x_{12} - x_{14} = 0$
- za čvor 2. $x_{12} + x_{32} + x_{52} = 19$
- za čvor 3. $-x_{31} - x_{32} = -16$
- za čvor 4. …….

Prema formuli (2)

11

1.3. Matrični zapis

Matrični zapis gornjeg primjera glasi:

min $C^t x$

$Ax = -b$

$x \geq 0$, gdje su:

$$x^t = [x_{12} \quad x_{14} \quad x_{31} \quad x_{32} \quad x_{51} \quad x_{52} \quad x_{54} \quad x_{64} \quad x_{65} \quad x_{71} \quad x_{74} \quad x_{76}]$$

$$c^t = [\,2 \quad 4 \quad 9 \quad 11 \quad 4 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 0 \quad 15 \quad 16 \quad 18\,]$$

Iz čvora 1 resursi idu u smjeru čvora 4

Iz čvora 1 resursi idu u smjeru čvora 2

Iz čvora 3 resursi idu u smjeru čvora 1

$$\begin{array}{l} \text{Čvor 1} \\ \text{Čvor2} \\ \text{Čvor3} \\ \text{Čvor4} \\ \text{Čvor5} \\ \text{Čvor6} \\ \text{Čvor7} \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

12

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -19 \\ 16 \\ -33 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Ponuda čvora 1} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 2} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 3} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 4} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 5} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 6} \\ \leftarrow \text{Ponuda čvora 7} \end{matrix}$$

Navedeni problem riješava se kao i svaki drugi problem linerarnog programiranja.

13

Rješenje prikazanog problema linerarnog programiranja glasi:

X^t = [x_{12} x_{14} x_{31} x_{32} x_{51} x_{52} x_{54} x_{64} x_{65} x_{71} x_{74} x_{76}]
X^t = [19 0 16 0 0 0 0 0 0 3 33 0]

Minimalni trošak iznosi:

Z min = 755

14

Svojstvo cjelobrojnosti

Ako je mrežni problem zadan sa cjelobrojnim podacima, tada je svako moguće rješenje, a stoga i optimalno rješenje cjelobrojno.

Svojstvo je važno obzirom na uobičajenu formulaciju problema toka kroz mrežu s cjelobrojnim podacima.

Općenito smo vidjeli da problem LP sa cijelim polaznim podacima ne osigurava cjelobrojnost optimalnog rješenja, nego je potrebno primijeniti metodu cjelobrojnog programiranja.

15

Problem najkraćeg puta

Formulacija

Neka je zadano:

- mreža (N,A)
- za svaki luk (i,j) ∈ A zadano je vrijeme prijevoza C_{ij} duž toga luka (dakle u ovom slučaju c_{ij} nije trošak nego vrijeme).
- dva posebna čvora U – ulaz u mrežu i I – izlaz iz mreže

Zadatak: Treba odrediti put od U do I tako da vrijeme putovanja duž tog puta bude minimalno.

16

Postupak rješavanja:

- definiraju se ponude čvorova na slijedeći način:

$$b_i = \begin{cases} 1 & i = u \qquad -za \;\; ulaz \\ -1 & i = I \qquad -za \;\; izlaz \\ 0 & za \;\; ostale \;\; i \end{cases}$$

- varijable x sa vrijednostima 1 definiraju traženi put, a Z_{min} daje traženu minimalnu duljinu puta (analogan problemu minimalnog troška).

Primjer:

17

Matematički model:

min $C^t x$

$Ax = -b$

$x \geq 0$, gdje je

$$x^t = [x_{12} \;\; x_{14} \;\; x_{31} \;\; x_{32} \;\; x_{51} \;\; x_{52} \;\; x_{54} \;\; x_{64} \;\; x_{65} \;\; x_{71} \;\; x_{74} \;\; x_{76}]$$

$$c^t = [\, 2 \;\; 4 \;\; 9 \;\; 11 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 0 \;\; 15 \;\; 16 \;\; 18]$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

18

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow izlaz \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow ulaz \end{array}$$

Rješavajući gornji problem linerarnog programiranja dobiva se rješenje:

$X^t = [x_{12}\ x_{11}\ x_{21}\ x_{32}\ x_{51}\ x_{52}\ x_{54}\ x_{69}\ x_{65}\ x_{71}\ x_{74}\ x_{76}]$

$X^t = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ]$

što znači da je traženi minimalni put:

$7 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

a minimalno vrijeme iznosi:

$Z_{min} = 17$