METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

TEORIJA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

1

Teorija linearnog programiranja
Standardni problem linearnog programiranja - nastavak

Standardni problem minimuma postavlja se:

(1) $$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz uvjete:

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

(3) $$X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

prof. dr. sc. Ivica Završki --- Metode optimalizacije u građevinarstvu, 3. predavanje 2

2

Matrični zapis problema:

(4) $\min Z = C' \cdot X$

(5) $AX \geq B$

(6) $X \geq 0$

odnosno:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

prof. dr. sc. Ivica Završki --- Metode optimalizacije u građevinarstvu, 3. predavanje 3

3

Primjer:

Poduzeće planira kroz više godina graditi stambene zgrade. Na raspolaganju su dva tipa zgrada, Z_1 i Z_2, svaka sa po tri vrste stanova S_1, S_2 i S_3. U tablici je dan prikaz pripadnog broja pojedine vrste stanova u svakom tipu zgrade, troškovi po jednoj zgradi i minimalni broj stanova čija se izgradnja zahtijeva.

	S_1	S_2	S_3	Troškovi
Z_1	9	1	4	4
Z_2	4	1	9	6
Minimalni broj stanova	36	7	36	

Odredite matematički model problema linearnog programiranja čije rješenje će minimalizirati sve ukupne troškove uz uvjet da se izgradi najmanje zahtijevani broj stanova.

4

4

RJEŠENJE:

VARIJABLE:

x_1 = BROJ ZGRADA TIPA Z1
x_2 = BROJ ~~ZGRADA~~ TIPA Z2

F-JA CILJA:

$$\min Z = 4x_1 + 6x_2$$

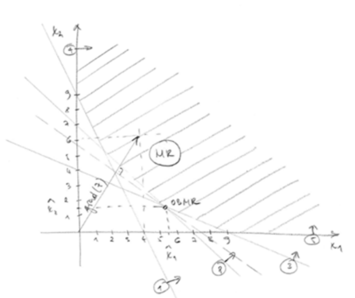
OGRANIČENJA:

$$9x_1 + 4x_2 \geq 36 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \geq 7 \quad (2)$$
$$4x_1 + 9x_2 \geq 36 \quad (3)$$
$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$
$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$

5

5

OPTIMUM:



$\hat{x}_1 = 5{,}4$
$\hat{x}_2 = 1{,}6$

$\min Z = 4 \cdot 5{,}4 + 6 \cdot 1{,}6 = 31{,}2$

6

6

KANONSKI PROBLEM LINERNOG PROGRAMIRANJA

Kanonski problem maksimuma linearnog programiranja sastoji se u ovome:

(7) Max C'X ili Max Z = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

uz uvjete:

(8) AX = B ili $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$ i=1,2,...,m

(9) X ≥ 0 ili $x_j \geq 0$ j=1,2,...,n

Kanonski problem minimuma definira se na potpuno isti način, zamjenjujući max sa min.

7

Standardni i kanonski problem su ekvivalentni, odnosno se jedan uvijek može transformirati u drugi. Ako se uvjet zamijeni sa:

(10) AX ≤ B, odnosno

(10') $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ i = 1,2,...,m

jasno je da je kanonski problem preformuliran u standardni problem.

Da bi se pak standardni problem promjenio u kanonski, treba zamijeniti nejednadžbu (10) jednadžbom:

(11) $\underbrace{\text{AX + IU}}_{\text{NEISKORIŠTENE ILI OSLABLJENE VARIJABLE}}$ = B $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + \underset{\text{rezerve do b}}{u_i} = b_i (i = 1,2,\ldots,m)$

8

U → varijabla – <u>broj varijabli jednak je broju uvjeta</u>
I → jedinična matrica

i daljim zahtjevom
(12) U ≥ 0

Evidentno je da je standardni problem (7), (9), i (10) striktno ekvivalentan kanonskom problemu (7), (11), (12), (9) u smislu da je svako rješenje jednog problema ujedno i rješenje drugog problema.

Dodatne varijable, komponente m-dimenzijalnog vektora U, zovu se neiskorištene ili oslabljene varijable ili dopunske ili izravnavajuće ili varijable manjka.

9

Dodatne varijable ne pojavljaju se u (funkciji cilja) linearnoj formi, odnosno je koeficijent svake dodatne varijable jednak nuli. Stoga, te varijable ne mogu donijeti vrijednosti programa nikakvu vrijednost.

Dakle, vrijede potpuno svi isti parametri kao i kod standardnog oblika, samo što su svi uvjeti oblika jednakosti, te su sve varijable i nadalje restringirane.

10

Primjer:

Standardni problem maksimuma preformulirajte na kanonski oblik:

Maks $Z = 5x_1 + 4x_2$ $\longrightarrow$ maks $Z = 5x_1 + 4x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\
x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_2 &\le 2 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 + u_1 &= 24 \\
x_1 + 2x_2 + u_2 &= 6 \\
-x_1 + x_2 + u_3 &= 1 \\
x_2 + u_4 &= 2
\end{aligned}
$$

NEISKORIŠTENE ILI OSLOBOĐENE VARIJABLE

$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \ge 0$

11

Primjer:

Standardni problem minimuma preformulirajte na kanonski oblik:

Min $Z = 4x_1 + 6x_2$ $\longrightarrow$ min $Z = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 4x_2 &\ge 36 \\
x_1 + x_2 &\ge 7 \\
4x_1 + 9x_2 &\ge 36 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 4x_2 - x_3 &= 36 \\
x_1 + x_2 - x_4 &= 7 \\
4x_1 + 9x_2 - x_5 &= 36
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

12