METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

SIMPLEKS METODA

1

Simpleks metoda

- algebarska metoda
- broj varijabli nije ograničen
- iterativna metoda
- metoda ima konačan broj koraka
- ako postoji OBMR simpleks metoda ga utvrđuje
- ako postoje alternativni optimumi, simpleksna metoda ukazuje na njihovo postojanje i oni se mogu odrediti
- ako postoji optimalno rješenje u beskonačnosti simpleks metoda ga može utvrditi
- ako problem nema OBMR, metoda to evidentira
- metoda se primjenjuje na sve oblike problema

2

U grafičkom rješenju problema uočili smo da je optimalno rješenje uvijek povezano s nekim od uglova područja rješenja. Simpleks metoda se u osnovi temelji na toj ideji.

Makar se to u simpleks metodi ne vidi, ona se temelji na iterativnom procesu koji počinje s jednim mogućim rješenjem (obično s ishodištem) i sistematički se pomiče od jedne do druge točke ekstrema, sve dok se eventualno ne dosegne optimalno rješenje.

Osnovna ideja metode biti će prikazana na Primjeru 1. s početka kolegija:

3

$\max Z=3x_E+2x_I$

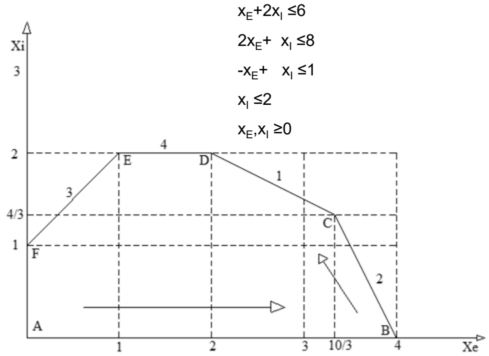
$x_E+2x_I \leq 6$

$2x_E+\ x_I \leq 8$

$-x_E+\ x_I \leq 1$

$x_I \leq 2$

$x_E, x_I \geq 0$



4

odnosno: $\max Z = 3X_E + 2X_I + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 0S_4$

$$
\begin{aligned}
X_E + 2X_I + S_1 \quad & = 6 \\
2X_E + X_I \quad + S_2 \quad & = 8 \\
-X_E + X_I \quad + S_3 \quad & = 1 \\
X_I \quad + S_4 \quad & = 2 \\
X_E, X_I, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Simpleks algoritam započinje u ishodištu (točka A na slici) koja se obično naziva početno rješenje. Zatim se pomiče u susjedni ugao koji može biti B ili F.

Treba donijeti odluku o smjeru kretanja, no obzirom da X_E ima veći koeficijent nego X_I, i obzirom na to da se traži maksimum, rješenje će se kretati u smjeru u kojem raste X_E sve dok se ne dosegne točka B.

U točki B provjerava se optimalnost rješenja te se, ako optimalnost nije postignuta, proces nastavlja i provjerava se da li druga točka ekstrema može povećati vrijednost funkcije cilja. Optimalno rješenje naći će se (to znamo od prije) u točki C.

5

Dva su pravila koja određuju izbor sljedeće ekstremne točke u simpleks metodi:

1. Sljedeći ugao mora biti susjedan aktualnom uglu. U primjeru 1., rješenje ne može skočiti sa točke A na točku C izravno, nego mora pratiti rub područja rješenja A→B, B→C.
2. Rješenje se ne može nikada vratiti na prethodnu ekstremnu točku. U primjeru 1. rješenje se ne može vratiti sa točke B natrag na A.

Model Primjera 1. sastoji se od 4 jednadžbi sa 6 nepoznanica koje potpuno definiraju sve točke područja rješenja. Općenito, (standardni model – kanonski problem) uključuje m jednadžbi i n nepoznanica, gdje je (m<n).

6

Za određivanje kuta, odnosno ekstremne točke direktno iz formulacije problema, primjećujemo da je svaki kut poligona jedinstveno geometrijski određen kao presjecište graničnih ploha područja rješenja. Kako u formulaciji problema ima više nepoznanica (n) nego nejednadžbi (m), kutove poligona dobit ćemo tako da (n-m) varijabli odredimo kao nule, te potom riješimo ostalih m nepoznanica. Kada (n-m) varijabli stavimo na nulu, tada ostalih m varijabli ima jedinstveno nenegativno rješenje (u protivnom ne bi predstavljali kutnu točku).

7

Za ilustraciju rečenog, na Primjeru 1. kutna točka A ima $X_E=X_I=0$ što daje $S_1=6$, $S_2=8$, $S_3=1$ i $S_4=2$. Slično za točku B, $S_2=0$, $X_I=0$, $X_E=4$, $S_1=2$, $S_3=5$ i $S_4=2$.

Algebarski, jedinstveno rješenje koje koje nastaje izjednačavanjem (n-m) varijabli s nulom naziva se baričnim rješenjem. Ako bazično rješenje zadovoljava uvjet nenegativnosti, naziva se mogućim bazičnim rješenjem. Varijable izjednačene s nulom nazivaju se nebazične varijable, a preostale se nazivaju bazičnim varijablama.

8

Simpleks metoda bavi se samo bazičnim rješenjima na način da se pomiče s jednog na drugo bazično rješenje (kao na slici u slučaju Primjera 1.). Svako bazično rješenje povezano je s jednom iteracijom. Kao rezultat, maksimalni broj iteracija u simpleks metodi ne može prijeći broj bazičnih rješenja. Odnosno možemo zaključiti da maksimalan broj iteracija ne može biti veći od

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

9

Prije tumačenja same procedure simpleks metode pokazat ćemo kako se možemo kretati s jednog baznog rješenja na drugo (odnosno s jedne kutne točke na drugu). I dalje koristimo Primjer 1.

točka ekstrema	nebazične (nula) varijable		bazične varijable			
A	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4
B	S_2	X_I	S_1	X_E	S_3	S_4

S_2 postaje nebazičan jer je u točki B X_I=0, pa iz druge jednadžbe uvjeta slijedi S_2=0, odnosno je S_2 nebazičan, a umjesto njega X_E ulazi u bazu.

10

Vidimo da se točka B generira iz točke A zamjenom dviju varijabli. Nebazična X_E iz A uzima mjesto bazične S_2, a S_2 postaje nebazična.

Iz rečenog se definiraju dva pojma:

- ulazna varijabla – trenutno nebazična varijabla koja postaje bazična
- izlazna varijabla – trenutno bazična varijabla koja će u slijedećoj iteraciji napustiti bazično rješenje.

Dakle, kretanje od točke A do B odigralo se je ulaskom varijable X_E u bazu i izlaskom S_2 iz baze.

11

Računski detalji simpleks metode

1. Svaki problem koji nije u kanonskom obliku treba preformulirati u kanonski oblik:

$$\max Z = 3X_E + 2X_I \underbrace{+0S_1+0S_2+0S_3 0S_4}_{\text{dopunske ili oslabljene varijable}}$$

$$\begin{aligned}
X_E + 2X_I + S_1 \quad &= 6\\
2X_E + X_I + S_2 \quad &= 8\\
-X_E + X_I + S_3 \quad &= 1\\
X_I + S_4 \quad &= 2
\end{aligned}$$

$X_E, X_I, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$

12

2. Funkciju cilja transformiramo tako da prebacimo sve na lijevu stranu jednakosti i dodajemo je popisu uvjeta:
   f-cija cilja → $Z-3X_E-2X_I-0S_1-0S_2-0S_3-0S_4=0$

3. Formuliramo tablicu:

bazične varijable

nebazične varijable

bazične varijble

bazično moguće rješenje

vrijednost f-cije cilja za polazno rješenje

BAZA	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	BMR
Z	-3	-2	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	0	6
S_2	2	1	0	1	0	0	8
S_3	-1	1	0	0	1	0	1
S_4	0	1	0	0	0	1	2

vrijednosti bazičih varijabli

za ovu tablicu Z=3x0+2x0+0x6+0x8+0x1+0x2=0

4. Kako ćemo znati da je aktualno rješenje optimalno? Tako da provjerimo funkciju cilja. Konstatiramo da aktualne nebazične varijable X_E i X_I imaju obje negativne koeficijente. Što znači da imaju pozitivne koeficijente u orginalnoj funkciji. Obzirom da želimo maksimalizirati f-ciju Z, nastojimo podići ili X_E ili X_I iznad nule. Pritom uvijek izabiremo varijablu s najnegativnijem rješenjem, jer iskustvo pokazuje da takav izbor vjerojatno brže vodi do optimalnog rješenja.

   Ova teza nas dovodi do uvjeta optimalnosti simpleks metode, koja kaže da u slučaju maksimalizacije, ako sve nebazične varijable imaju nenegativne koeficijente u f-ciji cilja u aktualnoj tablici, aktualna vrijednost f-cije cilja je optimalna.

   Odnosno, nebazične varijable s najnegativnijem koeficijentom se odabire kao ulazna varijabla.

5. Izlazna varibla biti će u ovom slučaju jedna od varijabli S_1, S_2, S_3, S_4, odnosno upravo ona aktualna bazična varijabla koja će doseći vrijednost nule onda, kada ulazne varijabla X_E dosegne maksimalnu vrijednost u susjednoj točki ekstrema.

   Odnosno, ulazna varijabla imati će maksimalnu vrijednost u susjednoj točki ekstrema onda kada je odnos vrijednosti izlazne varijable i koeficijenta ulazne varijable najmanji.

   Stoga tablica izgleda ovako:

ULAZNA VARIJABLA
(ULAZNI STUPAC)

MINIMALNI KVOCJENT

BAZA	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	BMR	Θ
Z	-3	-2	0	0	0	0	0	
S_1	1	2	1	0	0	0	6	6/1=6
S_2	2	1	0	1	0	0	8	8/2=4
S_3	~~-1~~	1	0	0	1	0	1	-
S_4	~~0~~	1	0	0	0	1	2	-

STOŽERNA JEDNADŽBA;
STOŽERNI REDAK

NE DOLAZE U OBZIR KAO NEPOZITIVNI

VRIJEDNOST BAZIČNIH VARIJABLI

STOŽERNI ELEMENT

VARIJABLA KOJA NAPUŠTA BAZU

16

6. Nakon određivanja ulazne i izlazne varijable slijedeća iteracija (novo bazično rješenje) određuje se primjenom Gauss-Jordanove metode eliminacije. Metoda unosi promjene u bazu koristeći dva tipa izračuna:

Tip 1/ za stožerni redak:
novi stožerni redak = stari stožerni redak / stari stožerni element

Tip 2/ za sve druge redke (jednadžbe):
koef. nove jednadžbe = koef. stare jednadžbe – (koef. ulaznog stupca x koef. nove stožerne jednadžbe)

nova stožerna jednadžba

Što daje slijedeće promjene u polaznoj tabeli:

BAZA	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	BMR
Z	koeficijenti stare stožerne jednadžbe						
S_1	2:2=1	1:2=1/2	0:2=0	1:2=1/2	0:2=0	0:2=0	8:2=4
X_E	1	1/2	0	1/2	0	0	8/2=4
S_3		stožerni element					
S_4							

Za dovršetak tabele primjenjuje se izračun tip 2/.

17

ulazni stupac

-3
1
2
-1
0

f-ja cilja Z:
koeficijent ulaznog stupca
stara jednadžba f-cije cilja - (-3)x(nova stožerna jednadžba) = nova f-cija cilja Z

$\rightarrow(-3\ \ -2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) + \underbrace{(3\ \ ^3/_2\ \ 0\ \ ^3/_2\ \ 0\ \ 0\ \ 12)}_{-(-3)(1\ \ ½\ \ 0\ \ ½\ \ 0\ \ 0\ \ 4)} = (0\ \ -½\ \ 0\ \ ^3/_2\ \ 0\ \ 0\ \ 12)$

2. jednadžba S_1:
koeficijent ulaznog stupca
stara jednadžba S_1 – (1)x(nova stožerna jednadžba) = nova jednadžba S_1

$\rightarrow(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 6) + (-1\ \ -½\ \ 0\ \ -½\ \ 0\ \ 0\ \ -4) = (0\ \ ^3/_2\ \ 1\ \ -½\ \ 0\ \ 0\ \ 2)$

3. jednadžba S_3:
koeficijent ulaznog stupca
stara jednadžba S_3 - (-1)x(nova stožerna jednadžba) = nova jednadžba S_3

$\rightarrow(-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1) + (1\ \ ½\ \ 0\ \ ½\ \ 0\ \ 0\ \ 4) = (0\ \ ^3/_2\ \ 0\ \ ½\ \ 1\ \ 0\ \ 5)$

4. jednadžba S_4:
Nova jednadžba S_4 je ista kao i stara jednadžba S_4 jer je koeficijent ulaznog stupca jednak nuli.

18

Nova tablica izgleda ovako:

Novo rješenje daje $X_E = 4$ i $X_I = 0$ (točka B u grafičkom rješenju). Vrijednost Z je narasla od 0 na 12.

izlazi iz baze ulazi u bazu

BAZA	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	BMR	Θ
Z	0	$-^1/_2$	0	$^3/_2$	0	0	12	
S_1	0	$^3/_2$	1	$-^1/_2$	0	0	2	$\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$
X_E	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$	0	0	4	$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$
S_3	0	$^3/_2$	0	$^1/_2$	1	0	5	$\frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$
S_4	0	1	0	0	0	1	2	$^2/_1=2$

19

Daljnji postupak predstavlja ponavljanje načela iz prethodnog:

- uvijet optimalnosti određuje da X_I (kao jedini s negativnim koeficijentom) treba ući u bazu
- uvijet za izlazak iz baze određuje S_1 kao varijablu koja izlazi iz baze

Sljedeće Gauss-Jordanove transformacije će proizvesti novu tabelu:

i. Nova stožerna jednadžba S_1 = stara stožerna jednadžba / ($^3/_2$)
ii. Nova jednadžba f-cije cilja = stara jednadžba f-cije cilja – ($-^1/_2$) x nova stožerna jednadžba
iii. Nova jednadžba X_E = stara jednadžba X_E – ($^1/_2$) x nova stožerna jednadžba
iv. Nova jednadžba S_3 = stara jednadžba S_3 – ($^3/_2$) x nova stožerna jednadžba
v. Nova jednadžba S_4 = stara jednadžba S_4 –(1) x nova stožerna jednadžba

20

Navedeni izračun vodi do slijedeće tabele:

BAZA	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	BMR
Z	0	0	$^1/_3$	$^4/_3$	0	0	$12^2/_3$
X_I	0	1	$^2/_3$	$-^1/_3$	0	0	$^4/_3$
X_E	1	0	$-^1/_3$	$^2/_3$	0	0	$^{10}/_3$
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	$-^2/_3$	$^1/_3$	0	1	$^2/_3$

Rješenje je za $X_E = 3^1/_3$, a za $X_I = 1^1/_3$ (točka C na grafičkom rješenju). Vrijednost f-cije cilja je povećana s 12 na $12^2/_3$. Porast vrijednosti za $^2/_3$ je rezultat poraste X_I sa 0 na $1^1/_3$.

Zadnja tablica je optimalna jer niti jedna od nebazičnih varijabli nema negativni koeficijent u jednadžbi f-cije cilja Z.

21

Ako se promatra problem minimuma tada je uvijet optimalnosti ulazak u bazu varijable s najvećim pozitivnim koeficijentima u jednadžbi f-cije cilja. Svi ostali uvijeti su isti.