METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

ARTIFICIJELNO POLAZNO RJEŠENJE I M PROCEDURA

1

Artificijelno polazno rješenje

U primjeru simpleks metode koristili smo oslabljene varijable kao bazično polazno riješenje. Ali, ako su jednadžbe ograničenja nestandardnog tipa, tada više nemamo gotovo polazno bazično moguće rješenje.

<u>Primjer:</u> Zadano je: min $z = 4x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{llll}
3x_1 & + & x_2 & = 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & \geq 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\
x_1, x_2 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Kanonski oblik se postiže oduzimanjem varijable x_3 i dodavanjem varijable x_4 na lijevu stranu nejednadžbi 2. i 3.

2

Tako da dobivamo:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{min } z = & 4x_1 + x_2 & & & \\
 & 3x_1 + x_2 & & & = 3 \\
 & 4x_1 + 3x_2 & - x_3 & & = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 & & + x_4 & = 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Dobili smo tri jednadžbe sa četiri nepoznanice, za razliku od primjera u kojem smo imali oslabljenu varijablu u svakoj jednadžbi. Mogli bismo naravno primjeniti konzekventno pravilo da za $\underbrace{4}_{\text{broj varijabli}} - \underbrace{3}_{\text{broj jednadžbi}} = 1$ jednu varijablu stavimo vrijednost 0 međutim na taj način izračun dugo traje, a i nije prikladan za kompjutorsku obradu. Stoga moramo naći pogodniju metodu.

3

Ideja artificijelnih varijabli je dodati nenegativnu varijablu na lijevu stranu svake jednadžbe koja nema očito početno bazično riješenje.

Dodatne varijable imat će istu ulogu kao i oslabljena varijabla u osiguranju početnog bazičnog rješenja.

Obzirom da artificijelne varijable nemaju nikakvo fizikalno značenje (zato se i zovu artificijelne) procedura će biti važeća jedino ako te varijable dotjeramo na vrijednost nula u slučaju optimuma. To je osim svega dokaz da postoji moguće riješenje. Logičan način da se to učini je da se navedenim artificijelnim varijablama da "kazna" u funkciji cilja. Metoda koja koristi takav sustav zove se M-procedura ili procedura dviju faza.

M-procedura

Krenimo od zadanog problema:

$$\min z = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 3x_1 + x_2 &&= 3\\
&(2)\quad 4x_1 + 3x_2 - x_3 &&= 6\\
&(3)\quad x_1 + 2x_2 + x_4 &&= 4\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 &&\geq 0
\end{aligned}$$

Prva i druga jednadžba nemaju varijable koje igraju ulogu oslabljene varijable u smislu kao u prvom primjeru (Reddy Mikks) simpleks metode. Jednadžba (1) nema oslabljenu varijablu, a u jednadžbi (2) dodana varijabla nije nenegativna. Naime, negativni jedinični vektori ne mogu dati nenegativno bazično početno riješenje, koje je neophodno.

Stoga jednadžbama (1) i (2) dodajemo dvije artificijalne varijable x_5 i x_6.

U tom slučaju jednadžbe (1) i (2) postaju:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 3x_1 + x_2 + x_5 &&= 3\\
&(2)\quad 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 &&= 6
\end{aligned}$$

Sada provodimo "kažnjavanje" varijabli x_5 i x_6 dodavanjem vrlo velikog, odnosno dovoljno velikog pozitivnog koeficijenta u funkciji cilja. Tada je problem formuliran na slijedeći način:

$$\min z = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_5 &= 3\\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 &= 6\\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Uočimo da sada imamo 6 nepoznanica i 3 jednadžbe. Polazno bazično riješenje treba uključivati 6 – 3 = 3 varijabli stavljenih na vrijednost 0. Ako stavimo x_1, x_2 i x_3 na vrijednost 0, tada automatski dobivamo rješenja $x_5 = 3$, $x_6 = 6$ i $x_4 = 4$, što je traženo polazno moguće riješenje.

Obzirom da tražimo minimum, vidimo da će x_5 i x_6 u optimalnom rješenju doći na vrijednost 0, jer im je kao koeficijent pridružen vrlo veliki broj M.

U slučaju problema maksimuma, slijedimo istu logiku, samo što artificijelnim varijablama u f-ciji cilja dodjeljujemo koeficijent – M (M > 0), što čini artificijelne varijable neatraktivnima u optimalnom rješenju.