METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

POSEBNI SLUČAJEVI U PRIMJENI SIMPLEKS METODE

POSEBNI SLUČAJEVI U PRIMJENI SIMPLEKS METODE

Promotrit ćemo 4 posebna slučaja u primjeni simpleks metode:

1. Degeneracija i kruženje
2. Alternativni optimum
3. Rješenje u beskonačnosti
4. Nepostojanje rješenja

2

DEGENERACIJA I KRUŽENJE

U provedbi simpleks procedure moguće je da se dogodi situacija da pri određivanju varijable koja izlazi iz baze veličina Θ bude jednaka za dvije ili više jednadžbi. Ako se to dogodi jedna ili više bazičnih varijabli će u slijedećoj iteraciji poprimiti vrijednosti 0. U tom slučaju govorimo da je rješenje degenerirano (u svim dosadašnjim primjerima bazična varijabla je uvijek imala striktno pozitivno riješenje). U praktičnom smislu ovakva situacija ukazuje da modul ima najmanje jedno suvišno ograničenje.

Tumačenje na primjerima.

3

Primjer 1: $\max z = 3x_1 + 9x_2$

$x_1 + 4x_2 \le 8$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

uvodimo oslabljene varijable i formiramo simpleks tabelu:

ulazi

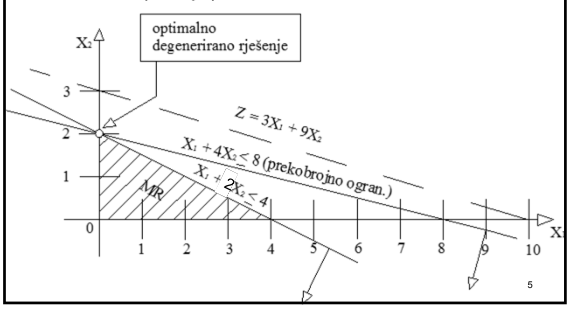
iteracije	baza	X_1	X_2	X_3	X_4	Rješenje	Θ
0.početna iteracija	Z	-3	-9	0	0	0	
X_2 ulazi	X_3	1	4	1	0	8	2
X_3 izlazi	X_4	1	2	0	1	4	2
1.iteracija	Z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18	
X_1 ulazi	X_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2	
X_4 izlazi	X_4	½	0	-½	1	0	izlazi
2.iteracija (optimum)	Z	0	0	$3/2$	$3/2$	18	
	X_2	0	1	½	-½	2	
	X_1	1	0	-1	2	0	

vidi se da imamo degenerirano bazično rješenje

4

U početnoj iteraciji biramo između varijabli x_3 i x_4, te implicite stoga bazična varijabla x_4 poprima vrijednost 0 u prvoj iteraciji, što rezultira degeneriranim bazičnim rješenjem. Optimum se postiže u slijedećoj iteraciji.

Praktične implikacije prikazane su na slici:



5

Vidi se da tri pravca prolaze kroz točku optimuma ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$). Obzirom da u pravilu trebamo samo dva pravca da određuju točku u ravnini, a u ovom slučaju su prisutna tri, zaključujemo da je jedno ograničenje suvišno. Nažalost ne postoji pouzdana metoda za određivanje suvišnog (prekobrojnog) ograničenja direktno iz tablice.

S teoretskog gledišta dvije su posljedice degeneracije. Prvo je u vezi s fenomenom kruženja. U 1. i 2. iteraciji u tabeli primjera 1, vidimo da se vrijednost funkcije cilja z nije povećala, nego je u obje iteracije ostala z=18. Stoga je generalno moguće da simpleks procedura ponavlja neke sekvence iteracije, a da ne unaprijeđuje vrijednost funkcije cilja i nikada ne završava proces iteriranja. Iako postoje metode koje pomažu u rješavanju ovakvih situacija, obzirom da se one ne pojavljuju često, nećemo se u njih upuštati.

6

Druga teoretska implikacija pojavljuje se u iteracijama 1 i 2. Uočimo da se ne mijenja ne samo vrijednost funkcije cilja , nego i vrijednost varijabli:

$x_1 = x_4 = 0;\ x_2 = 2;\ z = 18$

Nameće se pitanje da li prekinuti daljnji postupak već nakon 1. iteracije. Odgovor je ne, jer problem može biti privremeno (prolazno) degeneriran.

<u>Domaća zadaća</u>: Primjer privremeno (prolazno) degeneriranog problema:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7

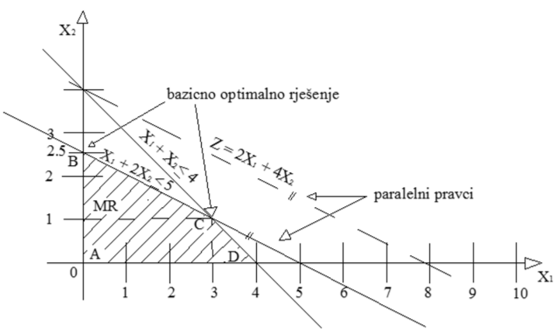
ALTERNATIVNI OPTIMUM

Kada je pravac funkcije cilja paralelan s pravcem koji predstavlja ograničenje u optimalnom rješenju, funkcija cilja će podrazumijevati isti optimalan vrijednost u više nego u jednoj točki riješenja. Takve točke rješenja zovu se alternativni optimum. Uobičajeno je da je takvih točaka neizmjerno mnogo.

<u>Primjer 2</u>:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

8



9

Na crtežu se vidi kako se pojavljuje alternativni optimum kada je pravac funkcije cilja paralelan sa pravcem ograničenja koji povezuje dvije točke optimuma. Svaka točka na odsječku pravca između točaka B i C predstavlja alternativni optimum s istom vrijednošću funkcije cilja z = 10.

Izradimo simpleks tabelu:

10

ulazi

iteracije	baza	X_1	X_2	X_3	X_4	Rješenje	
0.početna iteracija	Z	-2	$\boxed{-4}$	0	0	0	
X_2 ulazi, X_3 izlazi	X_3	1	2	1	0	5	izlazi
	X_4	1	1	0	1	4	
1.iteracija (optimum)	Z	0	0	2	0	10	
X_1 ulazi, X_4 izlazi	X_2	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0	$^5/_2$	
	X_4	½	0	-½	1	$^3/_2$	izlazi
2.iteracija (alternativni optimum)	Z	0	0	2	0	10	
	X_2	0	1	1	-1	1	
	X_1	1	0	-1	2	3	

varijabla X_1 može ući u funkciju cilja, ali neće mijenjati njenu vrijednost, nego samo vrijednost ostalih varijabli

11

Algebarski, znamo da simpleks metoda traži riješenja po kutnim točkama poligona. U prvoj iteraciji vidimo da dobivamo riješenje, x1 = 0, $x_2 = {}^5/_2$ i z = 10, u točki B. Kako očitati iz simpleks tabele da postoji optimalno riješenje?

Promotrimo koeficijente nebazičnih varijabli u jednadžbi funkcije cilja 1. iteracije. Koeficijent nebazične varijable x_1 je 0, što indicira da x_1 može ući u bazično rješenje bez da mijenja vrijednost funkcije cilja z, ali ostvaruje promjene u vrijednostima varijabli.

2. iteracija samo uvodi x_1 u bazično rješenje, ispušta x_4 iz rješenja, što rezultira novom točkom optimuma C ($x_1 = 3$, $x_2 = 1$, z = 10).

Uočavamo da simpleks metoda određuje samo dvije kutne točke B i C. Matematički možemo odrediti sve druge točke na dužini BC:

$(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$

B: $x_1 = 0$, $x_2 = {}^5/_2$
C: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

12

Tada su sve točke segmenta BC određene sa:

$$\hat{X}_1 = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)3 = 3 - 3\alpha$$
$$\hat{X}_2 = \alpha \cdot \frac{5}{2} + (1-\alpha)1 = 1 + \frac{3\alpha}{2}$$
$$gdje \quad je \quad 0 \le \alpha \le 1$$

za vrijednost α = 0, $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$= (3, 1) što čini točku C. Kada je α=1, $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ = (0, $^5/_2$) što čini točku B. Za vrijednost α između 0 i 1 točka leži na spojnici između B i C.

U ekonomskom smislu poznavanje mogućnosti za određivanje optimuma može imati vrijednost u donošenju odluka.

13

RJEŠENJA U BESKONAČNOST

U nekim modelima linearnog programiranja vrijednosti mogu narasti neograničeno unatoč jednadžbi ograničenja, što znači da je područje rješenja neograničeno bar u jednom smjeru. Kao rezultat, vrijednost funkcije cilja može narasti (u problemima maksimuma) ili padati (u problemima minimuma) neograničeno. U takvom slučaju kažemo da su područja rješenja neograničena i da je optimalno riješenje u beskonačnosti.

Do ovakve situacije dolazi jedino kad je modul pogrešno formuliran i to:

- jedna ili više jednadžbi ograničenja nije uočena i definirana
- parametri nekih od jednadžbi ograničenja nisu korektno određeni

14

Primjer 3:

Nacrtati sliku. Uočimo da su svi koeficijeti ispred X_2 negativni ili 0, što znači da X_2 može biti uvećavan bez ograničenja. Obzirom da se za svaku jedinicu povećanja vrijednosti X_2 povećava i vrijednost funkcije cilja također za 1, neograničeni rast X_2 rezultirat će neograničenim rastom vrijednosti funkcije cilja z.

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$(1) \quad x_1 - x_2 \le 10$$
$$(2) \quad 2x_1 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

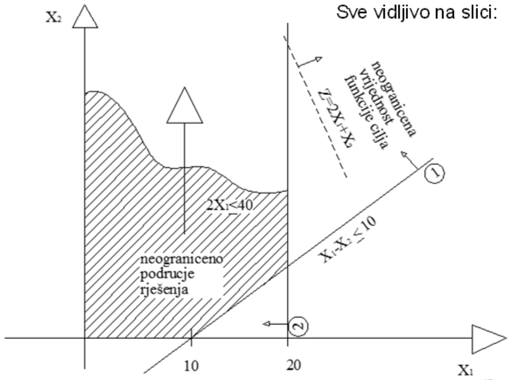
15

BAZA	X_1	X_2	X_3	X_4	RJEŠENJE
Z	-2	-1	0	0	0
X_3	1	-1	1	0	10
X_4	2	0	0	1	40

Pravilo za prepoznavanje riješenja u beskonačnosti:

Ako su u bilo kojoj iteraciji koeficijenti ograničenja u nebazičnoj varijabli nepozitivni, područje rješenja je neograničeno u tom smjeru. Ako je dodatno, koeficijent u funkciji cilja negativan u slučaju problema maksimuma, odnosno pozitivan u slučaju minimuma, i vrijednost optimuma funkcije cilja je također u beskonačnosti.

Sve vidljivo na slici:



NAPOMENA: pojam neograničenog rješenja nije uvijek moguće vidjeti u prvoj simpleks tabeli, nego se može pojaviti tek nakon nekoliko iteracija.

NEPOSTOJEĆE RIJEŠENJE
(nemoguće riješenje)

Ako sva ograničenja ne mogu biti zadovoljena istovremeno, kaže se da model nema mogućih riješenja. To se nikada ne može dogoditi ako su ograničenja tipa ≤ (pod pretpostavkom nenegativnih konstanta s desne strane jednadžbe), jer oslabljene varijable uvijek omogućavaju moguće rješenje.

No, kada koristimo ostale tipove ograničenja, tada uvodimo artificijelne varijable. Kroz postupak nastojimo dovesti artificijelne varijable na nulu u optimumu, ali je to moguće jedino ako problem ima moguće riješenje. Ako ne, tada će najmanje jedna artificijelna varijabla biti pozitivna u zadnjoj (optimalnoj) iteraciji. To je indikacija da problem nema mogućih riješenja.

19

Ovakva situacija ukazuje na dvije mogućnosti:
- model nije korektno formuliran
- nije bilo niti pretpostavljeno da sva ograničenja trebaju biti zadovoljena istovremeno. U tom slučaju potrebno je vjerojatno načiniti potpuno novu strukturu modela.

Primjer 4:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

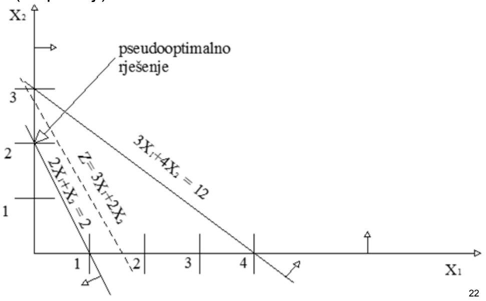
20

iteracija	baza	X_1	X_2	X_4	X_3	R	rješenje
0. polazna	Z	-3 -3M	-2 -4M	M	0	0	-12M
X_2 ulazna	X_3	2	1	0	1	0	2
X_3 izlazna	R	3	4	-1	0	1	12
1. pseudooptimum	Z	1+5M	0	M	2+4M	0	4 - 4M
	X_2	2	1	0	1	0	2
	R	-5	0	-1	-4	1	4

artificijelna varijbla pozitivna u zadnjoj optimalnoj iteraciji

21

Uočavamo da prva iteracija simpleks metode daje artificijelnu varijablu R pozitivnu (= 4) u optimalnom rješenju. To je indikator da je prostor rješenja nemoguć (ne postoji).



22