Dualni problemi

Dual općeg problema maksimuma definira se kao:

(1) $\min Y'B$ $\quad$ $\text{maksimum}\, C'X$

uz uvjete:

(2) $y_i \geq 0, i \in S$ $\quad$ $x_j \geq 0, j \in T$

$Y'A_j \geq c_j, j \in T$ $\quad$ $A^i X \leq b_i, i \in S$

$Y'A_j = c_j, j \in C(T)$ $\quad$ $A^i X = b_i, i \in C(S)$

C(T) - komplement od T-a
(znači da X_j nije restringiran)

gdje je A_j j-ti stupac – vektor matrice A.

1

U specijalnom slučaju, kada je S = M i T = N, imamo dual standardnog problema. U slučaju pak kada je S prazan skup i T = N, imamo traženi dual kanonskog problema:

(3) $\min Y'B$

(4) $Y'A_j \geq c_j, \quad j \in N$

(5) $Y'A_j \geq C$

Prema tome, dual kanonskog problema maksimuma nije ni kanonski problem minimuma ni standardni problem minimuma. Dual kanonskog problema naime, nema restrikcija na predznak komponenata vektora Y.

2

Pravila

1) Dual maksimuma je minimum, a dual minimuma je maksimum
2) Broj varijabli duala jednak je broju uvjeta primala i svakom uvjetu primala odgovara jedna varijabla duala
3) Koeficijenti funkcije cilja duala jednaki su desnim stranama uvjeta primala
4) Broj uvjeta duala jednak je broju varijabli primala i svakoj varijabli primala odgovara jedan uvjet duala
5) Koeficijenti uz varijable u redcima uvjeta duala jednaki su koeficijentima u stupcima uvjeta primala. Matrica uvjeta duala jednaka je transponiranoj matrici uvjeta primala
6) Desne strane uvjeta duala jednake su koeficijentima funkcije cilja primala

3

7) Oblik uvjeta duala određen je oblikom restrikcija varijabli primala

7.1) Ako je restrikcija varijabli primala standardna, onda je i pripadni oblik uvjeta duala standardan (za problem kojem pripada)

7.2) Ako je restrikcija varijabli primala nestandardna, onda je i pripadni oblik uvjeta duala nestandardan (za problem kojem pripada)

7.3) Ako varijabla primala nije restringirana, onda je oblik odgovarajućeg uvjeta duala jednakost

8) Oblik restrikcija varijabli duala određen je oblikom uvjeta primala

8.1) Ako je uvjet primala standardan (za problem kojem pripada), onda je i pripadna restrikcija duala standardna

8.2) Ako je uvjet primala nestandardan (za problem kojem pripada), onda je i odgovarajuća restrikcija duala nestandardna

8.3) Ako je oblik uvjeta primala jednakost, onda odgovarajuća varijabla duala nije restringirana

4

→ veza između optimalnih rješenja para dualnih problema:

1) Za svaki par dualnih problema vrijedi:

(vrijednost funkcije cilja problema MAX na bilo kojem mogućem rješenju) ≤ (vrijednost funkcije cilja problema MIN na bilo kojem mogućem rješenju)

2) Jednakost u prvoj tvrdnji postiže se "onda i samo onda" ako su pripadna moguća rješenja optimalna, a posljedica je da su optimalne vrijednosti funkcije cilja primala i duala jednake

5

Primjer:

Zadanom primalu odredite dual: →

DUAL!

Maks $(2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4)$

$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \le 7$

$3x_1 + 4x_2 - 2x_4 \ge 5$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 < 0,\ x_4$ nije restringiran

min $(7y_1 + 5y_2 + 6y_3)$

$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2$

$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq -1$

$y_1 - y_3 \leq 3$

$-y_1 + 2y_2 = 2$

$y_1 \geq 0,\ y_2 < 0$

y_3 NIJE RESTRINGIRAN

6

Primjer:

Zadanom primalu odredite dual:

Min $(2x_1 - x_2 + 2x_3)$

$$
\begin{aligned}
x_1 - \phantom{2x_2 + {}} x_3 &\le 5 \\
2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &\ge 4 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 8
\end{aligned}
$$

$x_1 < 0$, $x_3 \ge 0$, x_2 nije restringiran

$\underline{\underline{\text{DUAL}}}$:

Maks $(5y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 8y_4)$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 &\geq 2 \\
2y_2 - y_3 + 2y_4 &= -1 \\
-y_1 \phantom{{}+ 2y_2} + 3y_3 + 2y_4 &\le 2
\end{aligned}
$$

$y_1 < \emptyset$, $y_2 \geq \emptyset$, $y_4 < \emptyset$

y_3 NIJE RESTRINGIRAN

7