METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

INTERPRETACIJA SIMPLEKS TABELE – ANALIZA OSJETLJIVOSTI

1

INTERPRETACIJA SIMPLEKS TABELE – ANALIZA OSJETLJIVOSTI

Uvod: - važnost formulacije modela
- uobičajeno kompjuterski izračun rezultata
- važnost tumačenja rezultata

Iz svake simpleks tabele direktno ili uz pomoć manjih dodatnih izračuna moramo biti u mogućnosti pročitati:

2

1. optimalno rješenje
2. status resursa
3. jediničnu vrijednost svakog resursa
4. provesti analizu osjetljivosti optimalnog rješenja u odnosu na promjene i dostupnost resursa, koeficijenata u funkciji cilja i korištenja resursa od strane pojedinih aktivnosti

   Prva tri elementa se očitavaju iz simpleks tabele optimuma. Četvrti element zahtjeva dodatne izračune.

Promotrimo sve na primjeru Reddy Mikks:

3

Primjer 5:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 3x_E + 2x_I && \text{(profit)} \\
x_E + 2x_I + S_1 &= 6 && \text{(sirovina A)} \\
2x_E + x_I + S_2 &= 8 && \text{(sirovina B)} \\
-x_E + x_I + S_3 &= 1 && \text{(potrebe)} \\
x_I + S_4 &= 2 && \text{(potrebe)} \\
x_E, x_I, S_1, S_2, S_3, S_4, &\geq 0
\end{aligned}
$$

4

Tablica optimuma:

baza	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	rješenje
Z	0	0	$^1/_3$	$^4/_3$	0	0	$12^2/_3$
X_I	0	1	$^2/_3$	$-^1/_3$	0	0	$1^1/_3$
X_E	1	0	$-^1/_3$	$^2/_3$	0	0	$3^1/_3$
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	$-^2/_3$	$^1/_3$	0	1	$^2/_3$

5

OPTIMALNO RJEŠENJE

Sa aspekta implementacije rješenja linearnog programiranja, matematička klasifikacija varijabli na bazične i nebazične treba biti potpuno ignorirana kod čitanja optimalnog rješenja. Varijable koje nisu ušle u kolonu “baza” nedvojbeno imaju vrijednost nule. Ostale imaju vrijednosti u koloni “rješenje”.

6

Na primjeru Reddy Mikks iz tabele optimuma iščitavamo slijedeće vrijednosti:

varijable	optimalna vrijednost	odluka
X_E	$3^1/_3$	proizvoditi $3^1/_3$ tone vanjske boje na dan
X_I	$1^1/_3$	proizvoditi $1^1/_3$ tone unutrašnje boje na dan
Z	$12^2/_3$	ostvareni profit $12^2/_3$ tisuća dolara

7

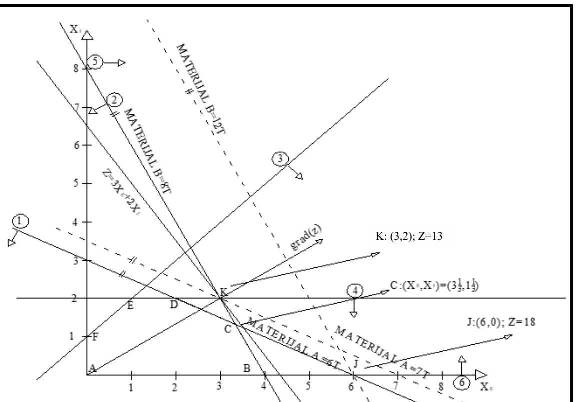
STATUS RESURSA

Prethodno smo pokazivali na grafičkim primjerima da u nekim slučajevima određeni uvjeti - ograničenja doista nedostatno ograničavajući za određeno optimalno rješenje, ili zapravo nije nego je obilno ovisno o tome da li optimalno riješenje "konzumira" pojedinu vezanu količinu resursa.Pitanje kako pročitati navedene odnose iz simpleks tabele optimalnog rješenja.

Max $z = 3x_E + 2x_I$

1) $x_E + 2x_I \le 6$
2) $2x_E + x_I \le 8$
3) $-x_E + x_I \le 1$
4) $x_I \le 2$
5) $x_E \ge 0$
6) $x_I \ge 0$

8



9

za 4:

$X_I \le$ kada se ovaj pravac povuče kroz C: ($X_E=3^1/_3$, $X_I=1^1/_3$), vidimo da maksimalna potražnja za unutrašnjom bojom može biti smanjena na $X_I=1^1/_3$ tone bez promjene vrijednosti optimalnog rješenja

za 3:

$- X_E + X_I \le 1$ kada se pravac provuče kroz točku C desna strana jednadžbe postaje:

$X_E + X_I = (-3^1/_3)+(1^1/_3)= -2$

odnosno: $- X_E + X_I \le -2$ što je ekvivalentno $X_E - X_I \ge 2$

10

NAPOMENA:

Maksimalna količina dostupnih resursa iskazana je uvjetom (jednadžbom) ograničenja koja je tip ≤.

Ograničenje tipa ≥ ne može stvarno reprezentirati ograničenje resursa, nego da rješenje treba zadovoljavati određene zahtjeve, kao npr. zadovoljavanje minimuma potreba ili minimalnih zahtjeva.

Status resursa (da li je on obilan, dostatan ili nedostatan) u svakom problemu LP može biti očitan direktno iz tabele optimalnog rješenja promatrajući vrijednosti oslabljenih varijabli.

11

Na primjeru Reddy Mikks imamo sljedeću situaciju:

resursi	oslabljene varijable	status resursa
sirovina A	$S_1=0$	nedostatan resurs
sirovina B	$S_2=0$	nedostatan resurs
ograničenje na količine unutrašnje povrh vanjske boje	$S_3=3$	obilan resurs
ograničenje na potrebe za unutrašnjim bojama	$S_4={}^2/_3$	obilan resurs

12

Pozitivna vrijednost oslabljene varijable znači da resurs nije potpuno iskorišten, dok obilan resurs, indiciran vrijednošću oslabljene varijable od 0, znači da je taj resurs u potpunosti iskorišten u modelu.

U tabeli vidimo da su ograničenja u potrebama – potrošnji (resursi 3 i 4) obilna. Povećanje vrijednosti njihovog ograničenja učinit će ih samo još obilnijim bez utjecaja na optimalno riješenje.

Resurs koji može biti uvećan u cilju povećavanja vrijednosti funkcije cilja (povećanje profita) su sirovine A i B, te tabela optimalnog rješenja pokazuje da su navedeni resursi nedostatni.

Postavlja se logično pitanje – kojem od nedostatnih resursa treba biti dana prednost u dodjeli dodatnih sredstava da bi se najučinkovitije uvećao profit.

Odgovor će biti dan kada sagledamo jediničnu vrijednost pojedinih resursa.

13

JEDINIČNA VRIJEDNOST RESURSA

Jedinična vrijednost resursa je stupanj unapređenja optimalne vrijednosti funkcije cilja Z kao rezultat povećanja dostupne količine tog resursa. Isti aspekt može biti analiziran i na grafičkom primjeru Reddy Mikks, te su jedinične vrijednosti resursa 1, 2, 3 i 4:

$Y_1 = {}^1/_3$ tisuća dolara / dodatnoj toni materijala A
$Y_2 = {}^4/_3$ tisuća dolara / dodatnoj toni materijala B
$Y_3 = 0$
$Y_4 = 0$

Isti rezultat je vidljiv i iz simpleks tablice za slučaj optimuma:

baza	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	rješenje
Z	0	0	$^1/_3$	$^4/_3$	0	0	$12\ ^2/_3$

14

Ti koeficijenti $^1/_3$, $^4/_3$, 0, 0, potpuno su jednaki Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Teorija linerarnog programiranja govori da je uvjek moguće utvrditi jediničnu vrijednost resursa iz koeficijenta početnih bazičnih varijabli u jednadžbi optimalne funkcije cilja. Nema zabune u identifikaciji veze između varijabli i resursa. S_i je jedinstveno povezan sa resursom i.

Promotrimo nadalje jednadžbu optimuma funkcije cilja problema Reddy Mikks:

$$Z = 12\ {}^2/_3 - ({}^1/_3 S_1 + {}^4/_3 S_2 + 0S_3 + 0S_4)$$

Ako podignemo S_1 s trenutne vrijednosti 0 u optimalnom rješenju, na neku pozitivnu vrijednost, vrijednost funkcije cilja Z će pasti za iznos 1/3 tisuće n.j. po toni. Stoga, je rast S_1 ekvivalentan smanjenju resursa 1 (sirovina A), kao što se može vidjeti iz prve jednadžbe ograničenja:

$$X_E + 2X_I + S_1 = 6$$

Stoga zaključujemo, da smanjenje prvog resursa smanjuje funkciju cilja za iznos od 1/3 tisuća n.j. po toni. Kako se bavimo linerarnim funkcijama, možemo argument izreći i recipročno, te zaključiti da porast prvog resursa povećava funkciju cilja Z za 1/3 tisuća n.j. / toni. Slični zaključak vrijedi i za resurs 2 (sirovina B).

15

Ako promotrimo resurse 3 i 4, uočiti ćemo da je njihova jedinična vrijednost jednaka 0 ($Y_3 = Y_4 = 0$). To je za očekivati, obzirom da su ta dva resursa već obilna. To će biti uvijek slučaj kada su oslabljene varijable pozitivne. (u tablici optimalnog riješenja).

Iako smo povezali novčanu vrijednost s jediničnom vrijednošću varijable Y_i, ne smijemo smatrati navedenu novčanu vrijednost kao vrijednost nabavke nekih od resursa, nego su to ekonomska mjerila koja kvantificiraju jediničnu vrijednost resursa s aspekta optimalne vrijednosti funkcije cilja. Stoga jediničnu vrijednost resursa ekonomisti nazivaju i cijenom u sjeni, unesena cijena ili dualna cijena.

16

Jedinična vrijednost resursa govori o vrijednosti povećanja optimuma Z. Ona ne specificira količinu za koju resurs uopće može biti uvećan, a da bi bio zadržan isti prirast vrijednosti funkcije cilja Z. Logično je očekivati da uvijek postoji gornja granica, preko koje je ograničenje zapravo suvišno, s posljedicom da je tada potrebno tražiti novo bazično rješenje, s novim jediničnim vrijednostima. Daljnje poglavlje govori upravo o tome kako odrediti maksimalnu promjenu u dostupnosti resursa, a da ograničenje ne postane prekobrojno.

17

MAKSIMALNA PROMJENA DOSTUPNOSTI RESURSA

Pretpostavimo da mijenjamo ograničenje prvog resursa u modelu Reddy Mikks za veličinu Δ_1, što znači da je dostupnost sirovine A $6 + \Delta_1$ tona. Ako je Δ_1 pozitivan resursi rastu, a ako je negativan, tada padaju. Prirodno, zainteresirani smo za slučaj kada resursi rastu ($\Delta_1 > 0$).

Kako se mijenja simpleks tabela promjenom resursa Δ_1 ?

18

Najjednostavniji odgovor je da se doda Δ_1 na desnu stranu jednadžbe prvog ograničenja u polaznoj tabeli, te se nadalje provode uobičajene iteracije.

Obzirom da se desna strana jednadžbe ne koristi kao stožerni element, očito će promjena za Δ_1 imati utjecaja samo na desnu stranu jednadžbi, na slijedeći način:

	desna strana jednadžbi u iteracijama		
jednadžba	0 polazna	1	2 optimalno
Z	0	12	$12\,{}^2/_3 + {}^1/_3\,\Delta_1$
1	$6+\Delta_1$	$2+\Delta_1$	${}^4/_3 + {}^2/_3\,\Delta_1$
2	8	4	${}^{10}/_3 - {}^1/_3\,\Delta_1$
3	1	5	$3 - 1\,\Delta_1$
4	2	2	${}^2/_3 - {}^2/_3\,\Delta_1$

19

Uočavamo da se u svakoj iteraciji elementi koji se nalaze na desnoj strani jednakosti sastoje od konstante i promjene Δ_1, s time da su konstante upravo iste kao i kod osnovne simpleks tabele. Koeficijenti uz Δ_1 su upravo oni koji se nalaze ispod S_1 u istoj iteraciji (vidi tabelu optimuma istog problema). Upravo sa S_1 jer je on jedinstveno povezan s prvim ograničenjem.

Odnosno za promjenu na desnim stranama 2., 3., i 4. jednadžbe ograničenja, koristit ćemo koeficijente koji se nalaze ispod koeficijenata S_2,S_3 i S_4.

Obzirom da smo zaključili da promjena Δ_1 ima utjecaja na desnu stranu tabele, to znači da takva promjena ima utjecaja samo na mogućnost rješenja. Stoga Δ_1 ne smije biti mijenjan na način da bilo koju od baznih varijabli čini negativnom.

20

To implicira da je:

mora biti nenegativan

$$X_I = \boxed{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0$$

$$X_E = \boxed{\frac{10}{3}} - \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0$$

$$S_3 = \boxed{3} - \Delta_1 \geq 0$$

$$S_4 = \boxed{\frac{2}{3}} - \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{iz prethodne tablice}}\Delta_1 \geq 0$$

vrijednosti varijable u točki optimuma

Dva slučaja	
$\Delta_1 > 0$	$\Delta_1 < 0$
uvijek zadovoljava	$\Delta_1 \geq -2$
$\Delta_1 \leq 10$	uvijek zadovoljava
$\Delta_1 \leq 3$	uvijek zadovoljava
$\Delta_1 \leq 1$	uvijek zadovoljava
Δ_1 zadovoljava uvijet ako je $\Delta_1 \leq 1$	uvijek zadovoljava za $\Delta_1 \geq -2$
obje uvijek zadovoljavaju ako je: $-2 \leq \Delta_1 \leq 1$	

21

Za $-2 \le \Delta_1 \le 1$ model će uvijek rezultirati mogućim rješenjima. Svaka promjena izvan tog intervala (smanjenje količine sirovina A za više od 2 tone ili povećanje za više od 1 tone), će proizvesti nemoguće rješenje, odnosno će zahtijevati novu grupu baznih varijabli.

22

Maksimalna promjena u profitu/troškovima

Kao što smo bili zainteresirani za poznavanje promjena resursa, također smo zainteresirani poznavati interval moguće promjene profita ili troškova. U grafičkom primjeru možemo vidjeti da se koeficijenti u funkciji cilja mogu mijenjati bez promjene optimalne vrijednosti varijabli. U ovom poglavlju ćemo vidjeti kako se ova informacija može sagledati iz simpleks tabele optimuma.

Kao i kod promjene resursa, jednadžba funkcije cilja nikada se ne pojavljuje kao stožerna jednadžba. Stoga, bilo kakve promjene u koeficijentima funkcije cilja će imati utjecaja samo na funkciju cilja u tabeli optimalnosti. To znači da takve promjene mogu imati utjecaj na optimalnost rješenja.

Naš je cilj odrediti interval varijacije koeficijentima u funkciji cilja za kojeg postojeći optimum ostaje nepromijenjen.

23

Za ilustraciju, pretpostavimo da se profit po varijabli X_E u modelu Reddy Mikks mijenja sa 3 na $3+\delta_1$, gdje je δ_1 prezentira pozitivnu ili negativnu promjenu, pa funkcija cilja glasi:

$$Z = (3+\delta_1)X_E + 2X_I$$

Ako s ovakvom jednadžbom uđemo u polaznu tablicu simpleks tabele i provedemo aritmetičke operacije kao što je uobičajeno za dosezanje tablice optimalnog rješenja, jednadžbe funkcije cilja u tabeli optimalnosti će se pojaviti kao:

baza	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	rješenje
Z	0	0	$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\delta_1$	$\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\delta_1$	0	0	$12\frac{2}{3}+\frac{10}{3}\delta_1$

24

Rezultantna jednadžba je jednaka jednadžbi funkcije cilja prije korekcije promjene funkcije cilja uz modifikaciju za δ_1. Koeficijenti uz δ_1 su zapravo svi iz jednadžbe uz X_E u tabeli optimuma:

Baza	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	rješenje
X_E	1	0	$-^1/_3$	$^2/_3$	0	0	$^{10}/_3$

Jednadžba uz X_E je odabrana stoga, što je upravo uz tu varijablu unesena modifikacija koeficijenta za δ1.

Promjena za δ_1 koeficijenta uz varijablu X_E funkcije cilja neće imati utjecaja na optimalnost modela sve dok koeficijenti nebazičnih varijabli u jednadžbi funkcije cilja ostaju nenegativni (za problem maksimuma).

25

U ovom slučaju to je:

(1) $^1/_3 - ^1/_3\,\delta_1 \geq 0$ .... za S_1

(2) $^4/_3 + ^2/_3\,\delta_1 \geq 0$ .... za S_2

Iz relacije (1) vidi se da je $\delta_1 \leq 1$, a relacija (2) da je $\delta_1 \geq -2$. Obje jednadžbe zadovoljava $-2 \leq \delta_1 \leq 1$. To znači da koeficijent X_E može biti najmanje 3+(-2)=1, i najveći: 3+1=4, bez utjecaja na promjenu optimalne vrijednosti varijabli. Optimalna vrijednost funkcije cilja će se međutim promijeniti i to prema izrazu:

$$12^2/_3 + ^{10}/_3\,\delta_1 ,$$

gdje je $-2 \leq \delta_1 \leq 1$.

26

Prethodna diskusija pretpostavlja da varijabla čiji je koeficijent bio mijenjan ima jednadžbu u uvjetima. To je međutim jedino točno ako je varijabla bazična (kao npr. X_E i X_I). Ako je pak nebazično, ona se ne pojavljuje u stupcu “baza”.

Tretman nebazične varijable je izravan. Promjene u koeficijentu nebazične varijable će utjecati jedino na koeficijent u tabeli optimalnosti.

Za ilustraciju rečenog pretpostavimo da se mijenja koeficijent varijable S_1 (prva oslabljena varijabla) od 0 na $0+\delta_3$. Ako se provedu aritmetičke operacije te se dobije optimalna tabela, jednadžba funkcije cilja postaje:

27

baza	X_E	X_I	S_1	S_2	S_3	S_4	rješenje
Z	0	0	$^1/_3$-δ_3	$^4/_3$	0	0	12 $^2/_3$

Primjećuje se da jedina promjena nastaje u koeficijentu uz S1, koji je umanjen za δ3. Kao opće pravilo, sve što trebamo učiniti u slučaju nebazične varijable, je umanjiti koeficijent uz nebazičnu varijablu u funkciji cilja za iznos za koji je originalni indeks varijable uvećan.