METODE OPTIMALIZACIJE U GRAĐEVINARSTVU

CJELOBROJNO PROGRAMIRANJE

Cjelobrojno programiranje

Promotrimo problem:

$$\max Z = C^T X$$
$$(\min Z = C^T X)$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Uz dodatni uvijet da sve komponente vektora X budu cjelobrojne.

Postoji nekoliko metoda za rješavanje ovako postavljenog zadatka, a ovdje će biti izložena metoda grananja i ograđivanja (Branch and Bound Algoritham).

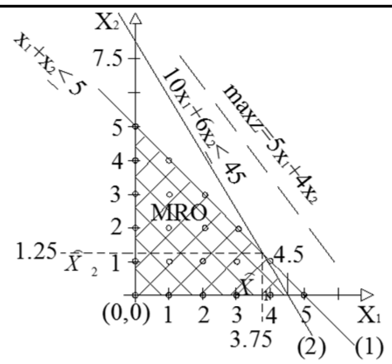
Primjer:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$10X_1 + 6X_2 \leq 45$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

X_1 i X_2 su cijeli brojevi

Označimo sa LPØ polazni problem linearnog programiranja bez zahtjevne cjelobrojnosti, a sa MRØ pripadni skup mogućih rješenja.

Promotrimo grafički prikaz skupa MRØ i točke iz skupa mogućih rješenja sa cjelobrojnim koordinatama:



Slika: Moguća rješenja i točke s cjelobrojnim koordinatama

Analitičko riješenje problema LPØ daje optimalno riješenje:

$\widehat{X}_1 = 3.75 \quad \widehat{X}_2 = 1.25 \quad \widehat{Z} = 23.75$

Kako komponenete OBMR nisu cjelobrojne, polazni problem nije riješen, te zahtjeva daljnji postupak:

Između komponenti koje nisu cijelobrojne izaberemo jednu (proizvoljno), npr. $\widehat{X}_1 = 3.75$ i formiramo dva uvjeta:

$X_1 \leq 3$; $X_1 \geq 4$

VARIJABLA GRANANJA

te formiramo dva nova problema linearnog programiranja:

- problemu LPØ dodamo prvi uvjet $X_1 \leq 3$ i dobijemo problem LP1,
- problemu LPØ dodamo drugi uvjet $X_1 \geq 4$ i dobijemo problem LP2

Problem LP1 glasi:

$$\max Z = 5X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$10X_1 + 6X_2 \leq 45$$
$$X_1 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

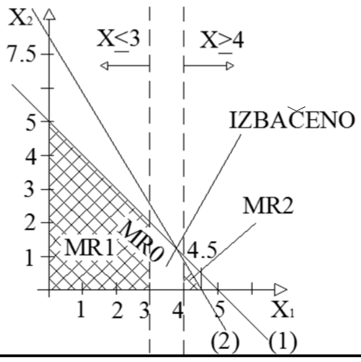
Problem LP2 glasi:

$$\max Z = 5X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$10X_1 + 6X_2 \leq 45$$
$$X_1 \geq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Označimo li skup mogućih rješenja problema LP1 sa MR1, a problem LP2 sa MR2, simbolički možemo pisati:

MR1 = MRØ + ($X_1 \leq 3$) ; MR2 = MRØ + ($X_1 \geq 4$)

Grafički prikaz raspada skupa MRØ na skupine MR1 i MR2:



7

Vidimo da formiranjem dva problema nismo izgubili niti jedno cjelobrojno riješenje, odnosno, izbacivanjem iz MRØ skupa $3 < X_1 < 4$ nismo izbacili iz MRØ niti jednu točku u kojoj je X_1 cjelobrojan. Kažemo da se problem LPØ grana na dva nova problema, a varijablu X_1 zovemo varijablom grananja.

Optimalno rješenje polaznog cjelobrojnog problema leži ili u skupu MR1 ili u skupu MR2, pa stoga trebamo rješiti LP1 i LP2

Rješavanjem LP1 dobivamo optimalno rješenje: $\hat{X}_1 = 3, \quad \hat{X}_2 = 2, \quad \hat{Z} = 23$

OBMR problema LP zadovoljava zahtjeve cjelobrojnosti. Stoga kažemo da je problem LP1 iscrpljen.

To znači da LP1 ne zahtjeva daljnja ispitivanja budući pripadni skup mogućih rješenja MR1 ne sadrži bolja cjelobrojna rješenja.

Nadalje rješavamo problem LP2 i pokušavamo pomoću njega dobiti bolje cjelobrojno rješenje. No, kako je optimalna vrijednost funkcije cilja problema LPØ jednaka $\hat{Z} = 23.75$, a koeficijenti funkcije cilja su cjelobrojni, to slijedi da niti jedno cjelobrojno rješenje problema LP2 ne može dati vrijednost funkcije cilja veći od 23. Tako zaključujemo da smo problem LP2 iscrpili, a kako više nema neistraženih problema, to je 23 maksimalna vrijednost funkcije cilja polaznog cjelobrojnog zadatka i njegovo rješenje čitamo kao rješenje problema LP1: $\hat{X}_1 = 3, \quad \hat{X}_2 = 2, \quad \hat{Z} = 23$

- ovime je polazni problem riješen.

9

Postavljaju se dva pitanja:

1/ da li smo mogli kao varijablu grananja izabrati X_2, a ne X_1?

2/ kada smo nakon grananja birali podproblem koji ćemo riješiti da li smo mogli prvo izabrati LP2 pa onda LP1?

Odgovor na oba pitanja je da, ali je korisno držati se slijedećih pravila:

- ako postoji više komponenata rješenja koja nisu cijela kao varijablu grananja izoliramo onu s manjim indeksom
- od dva novodobivena zadatka prvo rješavamo onaj koji se dobije dodavanjem uvjeta sa nejednadžbom ≤.

Da smo prvo umjesto problema LP1 riješavali LP2, postupak bi tekao ovako:

- optimalno rješenje problema LP2 je:

$$\hat{X}_1 = 4, \quad \hat{X}_2 = 0.83 \quad \hat{Z} = 23.33$$

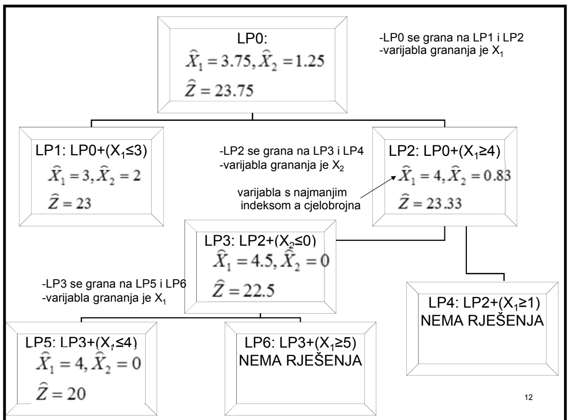
Dobiveno rješenje nije cjelobrojno, pa se LP2 razgrana na LP3 i LP4, a varijabla grananja je X_2.

(jer ta nije cjelobrojna)

Dobivamo:

LP3 = LP2 + (X_2 ≤ 0); LP4 = LP2 + (X_2 ≥ 1)

Riješimo LP3, pa ako treba, njega granamo, pa zatim LP4 itd. po slijedećem algoritmu:



Vidljivo je da je moguća vrijednost funkcije cilja za cjelobrojna rješenja, rješenje problema LP1, pa je optimalno rješenje polaznog problema: $\widehat{X}_1 = 3,\ \widehat{X}_2 = 2,\ \widehat{Z} = 23$

Uočava se da je rješavanje problema krećući se sa LP0 na LP2 bitno dulje. Nažalost ne postoji egzaktna metoda za izbor najkraćeg puta rješavanja problema, pa se predlaže koristiti navedeno pravilo.

Napomena:

- algoritam grananja i ograđivanja možemo primijeniti i na probleme kod kojih se zahtijeva da se samo neke varijable cjelobrojne. U tom slučaju varijablu grananja biramo samo među varijablama koje trebaju biti cjelobrojne.

Zadaća: max $Z = 2x_1 + 3x_2$

$5x_1 + 7x_2 \leq 35$

$4x_1 + 9x_2 \leq 36$

$x_1,\ x_2 \geq 0$