Numeričke metode u hidrodinamici (CFD)

- Prostorna diskretizacija

- Rubni i početni uvjeti

- Numeričke metode (FD, FC, FE)

- Vremenska diskterizacija

- Rješavanje sustava jednadžbi procesa

Computational fluid dynamics(CFD)

- Dobiva na važnosti u odnosu na modeliranje sa fizikalnim modelima.
- napredak kompjuterskih tehnologija uvjetuje daljnji razvoj.
- nužan razvoj obzirom na ograničeni broj ekzaktnih rješenja.
- različite metodologije-pristup:

  konačne diferencije

  konačni volumeni

  konačni elementi

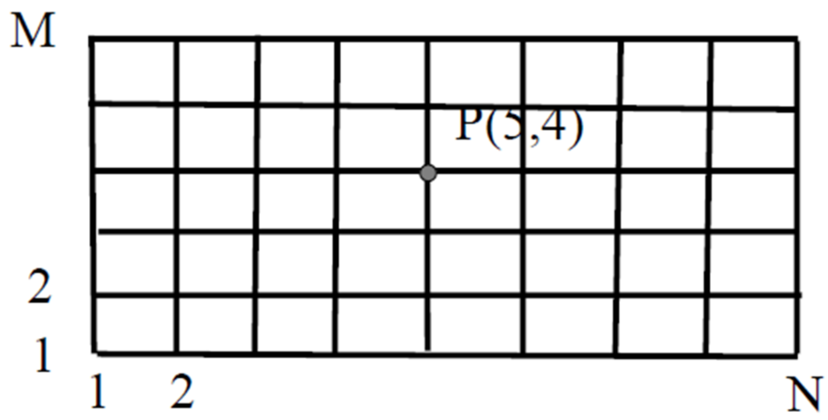
Prostorna diskretizacija

-Prvi korak u provedbi numeričkog modeliranja je podjela prostora na konačni broj domena (konačan broj stupnjeva slobode).

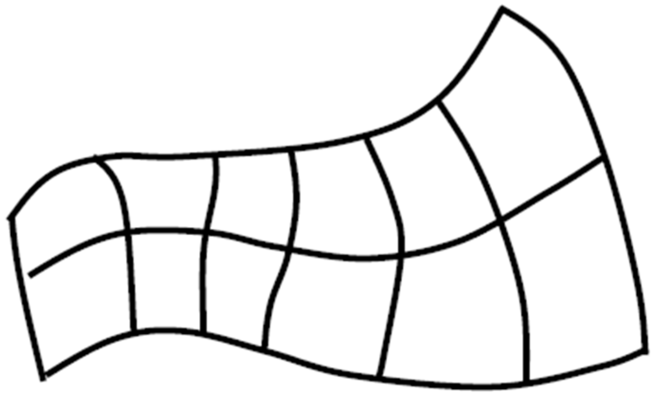
- Dvije osnosvne klase diskretizacije prostora: strukturirana i nestrukturirana mreža.
- Generiranje mreže obavlja se uglavnom automatskim mrežnim generatorima.
- Izbor i adaptacija mreže odnosno diskretizacije je temeljni i vrlo bitak korak u cijelokupnoj provedbi “CFL”.

Strukturirane mreže

- Svaki element i svaki čvor može se identificirati sa n_{dim} "pointerom"



- Podtipovi strukturiranih mreža su:
  - regularne mreže
  - ortogonalne mreže
  - zakrivljene mreže (curvlinear grids)



Prednosti i nedostaci strukturirane mreže

- Relativno malo potrebne memorije za pohranjivanje.

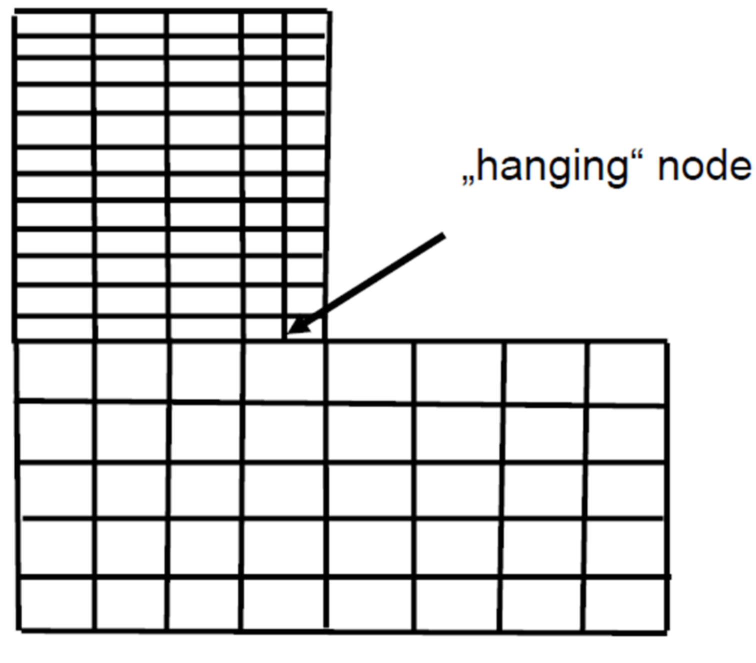
- Jednostavne promjene i administriranje mreža.

- Slaba geometrijska fleksibilnost.

- Nije prikladna u slučaju primjene pokretnih granica (“movable boundaries”).

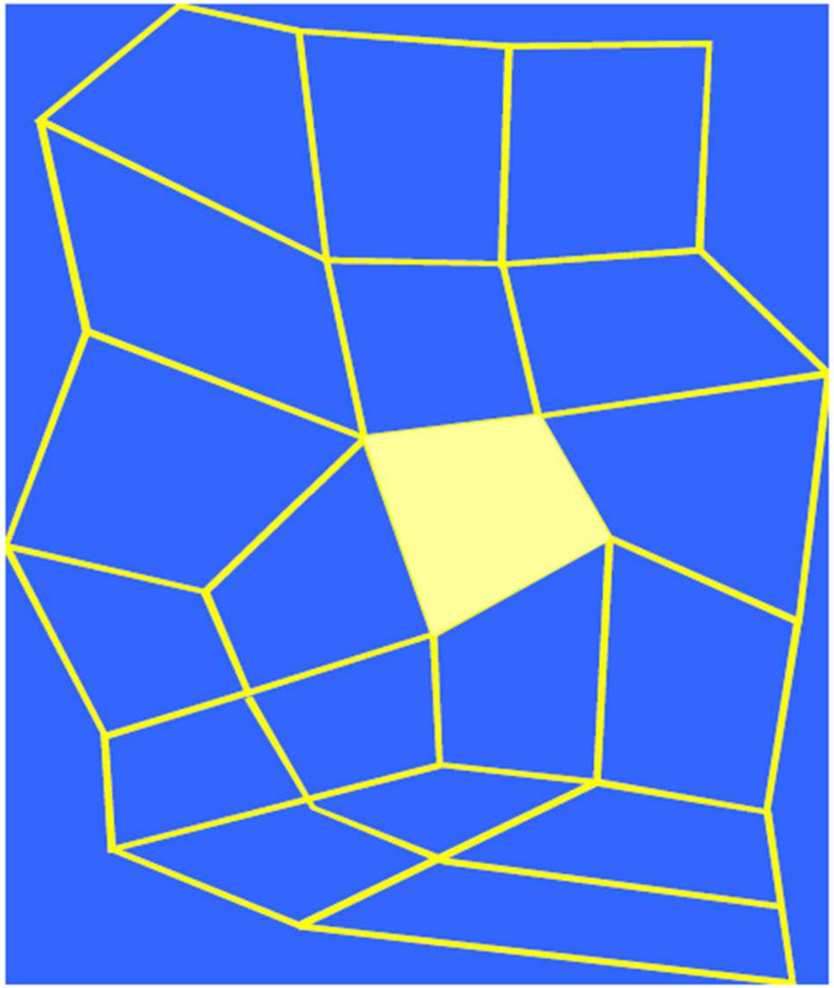
"Multi-block" strukturirane mreže

- Isključeni neki nedostaci generalnih strukturiranih mreža (povećana geometrijska fleksibilnost).
- Potrebne su dodatne intervencije i adaptacije na području prelaza iz mreže jedne gustoće u mrežu druge gustoće.



Nestrukturirane mreže

- Broj elemenata i komunikacija sa susjednim elementima nije prethodno određen.



- Osim koordinata čvorova postrebno je uspostaviti i indeksiranje elemenata.

Prednosti i nedostaci nestrukturirane mreže

- Povoljna za kompleksne i pokretne rubove

- Geometrijska fleksibilnost

- Značajniji zahtjevi memorijskog pohranjivanja

- Zahtjevnije administriranje i manipuliranje

- Duže vrijeme proračuna

Generiranje nestrukturirane mreže

- Uglavnom se koriste dva tipa generatora: algebarski generatori mreža i generatori mreža bazirani na PDE.
- Algebarski generatori koriste jednostavne algebarske algoritme u provedbi generiranja.
- Eliptički i hiperbolni generatori inicijalno se uspostavljaju sa jednostavnom strukturom te se transformiraju o odnosu na PDE (efektivni rubovi postaju rubni uvjeti od PDE).

Rubni uvjeti

- Rješavanje odgovarajuće PDE zahtijeva poznavanje rubnih uvjeta.
- Rubni uvjeti utječu na rješenje, uobičajeno duboko u područje prostorne domene.
- Loše uspostavljeni rubni uvjeti vode do pogrešnog rješenja, neovisno o kvaliteti primijenjenog algoritma rješavanja odnosno numeričke sheme.
- Kao pravilo, ne-trivijalni rubni uvjeti trebaju se postaviti gdje god karakteristične informacije prodiru u proračunsku domenu.

Početni uvjeti

- Početni uvjeti ustvari predstavljaju rubne uvjete u vremenu.
- Stacionarni problemi se često rješavaju sa nestacionarnim algoritmom. U tom slučaju početni uvjeti imaju manje značajnu ulogu.
- Kompleksni nelinearni sustavi konvergiraju samo u slučaju primjene fizikalno smisaonih početnih uvjeta, primjerice definiranje sustava u mirovanju (v=0, h=const.).

Numeričke metode - osnovno

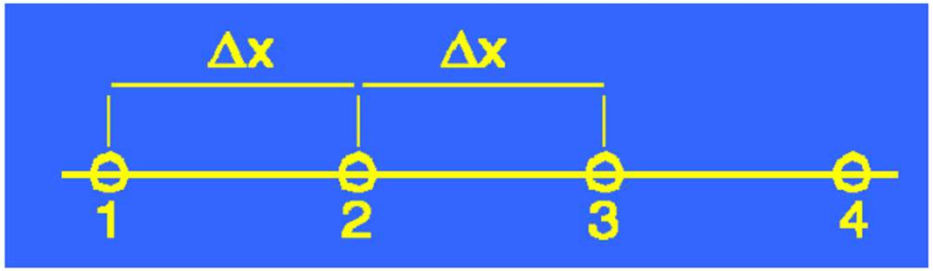
- Analogija između eksperimenta i numerike (temeljna priprema potrebna u svrhu smanjenja vremena proračuna).
- Numeričke metode koriste konačan broj diskretnih čvornih vrijednosti umjesto kontinuirano distribuirane varijable.
- Metode se razlikuju u načinu na koji se realna distribucija varijable aproksimira sa čvornim vrijednostima
- Najčešće upotrebljavane metode su FD, FV i FE.

Modelska jednadžba za primjenu 3 metode (Poisson-ova jednadžba u 1D)

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f$$

Metoda konačnih diferencija

- Modelska varijabla Φ je razvijena u Taylor-ov red, npr. oko čvora 2 i korištena kao aproksimacija za čvor 1. Ta procedura rezultira sa izrazom za traženu derivaciju.



$$\Phi_1 = \Phi_2 - \Delta x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_2 + \frac{1}{2}\Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_2 - \ldots \qquad \Phi_3 = \Phi_2 + \Delta x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_2 + \frac{1}{2}\Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_2 + \ldots$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{2\Delta x}\right) \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_2 = \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_2}{\Delta x^2}\right)$$

- Prema tome, aproksimacija je:

$$f_i = -\left(\frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{\Delta x^2}\right)$$

Metoda konačnih diferencija

- Primjenom na svaku točku proračunske domene te primjenom rubnih uvjeta dobiva se:

$$\mathrm{A} \cdot \phi = \mathrm{b}$$

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & . & 0 \\ 0 & . & . & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

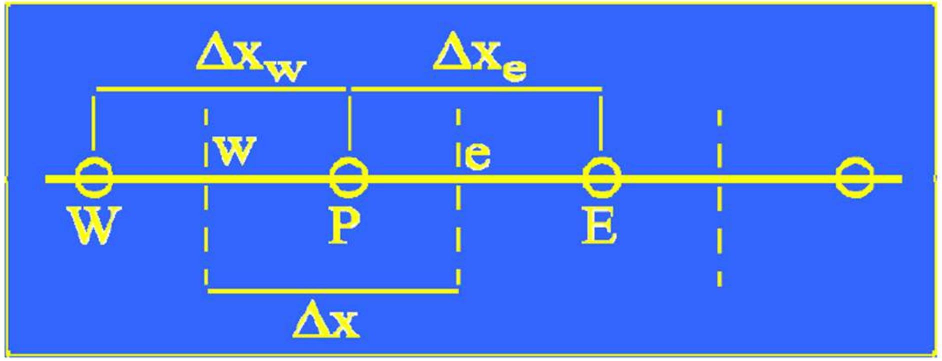
- Intuitivni pristup, brz proračun, mala geometrijska fleksibilnost, problem sa oštrim frontama (moguća pojava beskonačnih gradijenata)

Metoda konačnih volumena

- Metoda počiva na integralnoj formi modelske jednadžbe $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=f$

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_e+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_w=\int_w^e f\,dx$$

$$-\left(\frac{\Phi_E-\Phi_P}{\Delta x_e}\right)+\left(\frac{\Phi_P-\Phi_W}{\Delta x_w}\right)=\bar{f}\Delta x$$



- Primjenom integlanog oblika osigurava se konzerviranje relevantnih veličina poput mase, količine gibanja i energije.
- Prednost naspram KD očituje se kod neregularne diskretizacije, te kod nestrukturiranih mreža u 2D i 3D
- Veća geometrijska fleksibilnost i bolja uvjetovanost matrica nego u KD.

Metoda konačnih elemenata

- Metoda počiva na “slaboj” integralnoj formulaciji kao rezultira primjene “weighted residuals”.
- Integracijom “weighted” modelske jednadžbe uzduž modelske domene (poddomena po poddomena) forsira se minimizacija diskretizacijske greške.

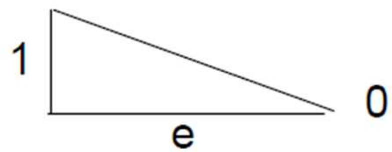
weighting function residual

$$\int_{x_1}^{x_N} W_i \left(\left(\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} \right) + f \right) dx = 0 \qquad \text{i=1, ... N}$$

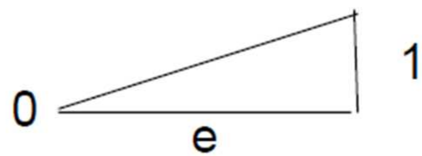
- Pretpostavlja se da je varijacija nepoznate funkcije preko jednog elementa aproksimirana sa poligonom (u najjednostavnijem slučaju linearna funkcija)

$$\hat{\Phi} = \Phi_1 N_{e,1} + \Phi_2 N_{e,2}$$

$N_{e,1}$



$N_{e,2}$

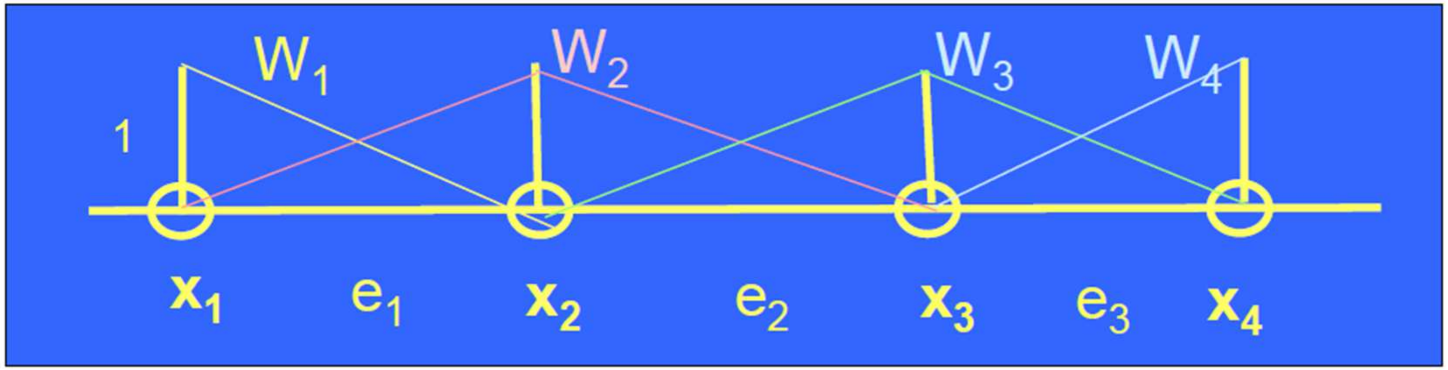


Metoda konačnih elemenata

- Zahtijeva se da elementarne interpolacijske funkcije N imaju vrijednost 1 u pripadnom čvoru i vrijednost 0 u svim ostalim čvorovima.
- Postoji širi izbor pri odabiru “weighted function”.
- Često se primjenjuje Galerkin-ova metoda u kojoj se za “weighted function” odabire funkcija istovjetna čvornoj funkciji sačinjenoj od dvije susjedne N-funkcije unutrašnjeg čvora i jedne N-funkcije vanjskog čvora.
- Sa N integralnih uvjeta formiran je sustav za rješavanje N nepoznatih vrijednosti Φ u čvorovima.

Metoda konačnih elemenata

Napomena: Linearno rješenje po dijelovima ne može se diferencirati dva puta bez upotrebe funkcionala. Zbog toga se jedno deriviranje prebacuje na "weighted function" temeljem parcijalne integracije.



Vremenska diskretizacija

- Eksplicitan pristup: varijabla u trenutku *j+1* ovisi samo o vrijednosti varijable u trenutku *j*. Nije potreban "solver" za provedbu iteracija.
- Zbog uvjeta stabilnosti izbor maksimalnog vremenskog koraka je ograničen (uobičajeno nužan vrlo mali vremenski korak).
- Implicitan pristup: varijabla u trenutku *j+1* ovisi o vrijednosti varijable u drugim čvorovima u trenutku *j+1*. (potreban "solver"). Jednadžbe mogu postati nelinerane.
- Semiimplicitan pristup: mješavina prethodnih (potreban "solver"). Moguće poboljšanje točnosti i linearizacija jednadžbi