


Metoda konačnih volumena za probleme difuzije

Uspostavljamo numeričku metodu baziranu na integraciji, tzv. **metoda konačnih volumena** (eng: finite volume) ili kontrolnih volumena (eng: control volume). Prvotno analiziramo najjednostavniji slučaj pronosa: stacionarna čista difuzija.

Jednadžba procesa za stacionarnu difuziju može se jednostavno izvesti iz opće jednadžbe pronosa za karakteristiku ϕ kroz zanemarenje tranzijentnog i konvektivnog člana. Time se dobiva:

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_{\phi} = 0 \quad (0)$$

Integracija po kontrolnom volumenu, koja je ključni korak u uspostavi **metode konačnih volumena**, (za razliku od ostalih CFD tehnika) poprima slijedeću formu :


$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_{\phi} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_{\phi} dV = 0$$

Uvodimo odgovarajuće tehnike u svrhu iznalaženja tzv. diskertizacijskih izraza za jednadžbu jednodimenzionalne stacionarne difuzije.

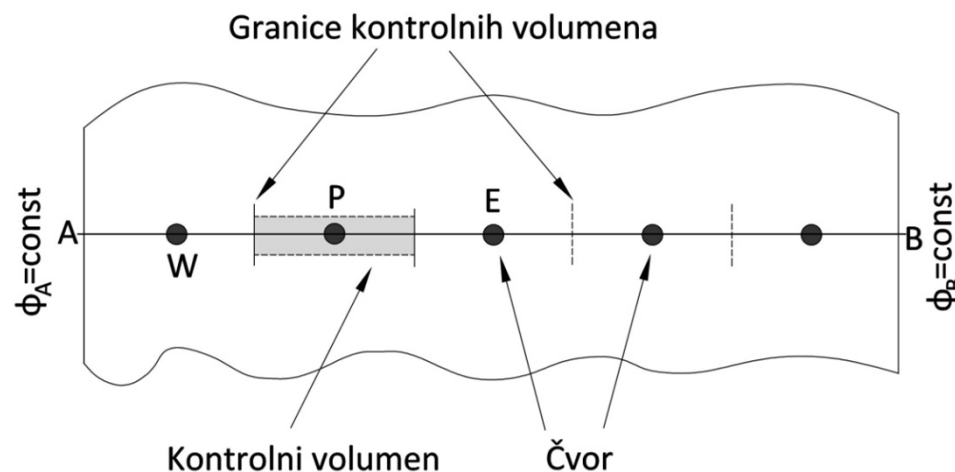
Metoda konačnih volumena (FV) za 1D stacionarnu difuziju

Promatramo stacionarnu difuziju karakteristike ϕ u jednodimenzionoj domeni . Primjer: jednodimenzionalno vođenje topline u štapu.

$$\text{Jednadžba procesa glasi: } \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$$

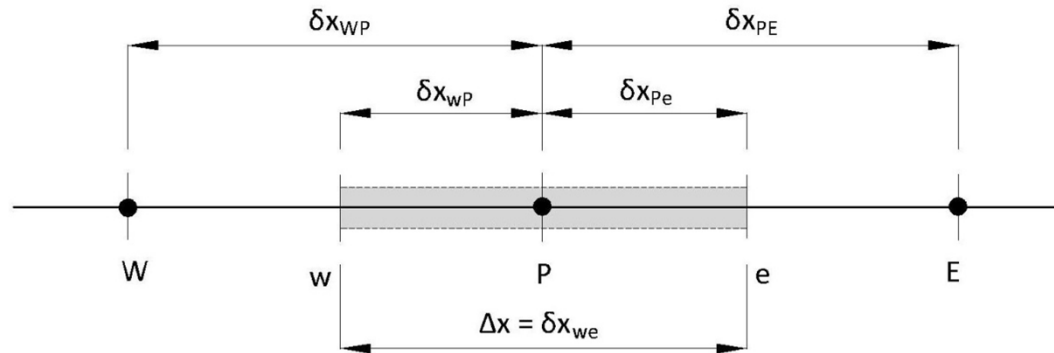
Γ - koeficijent difuzije; S – član izvora ; Rubne vrijednosti za ϕ u točkama A i B (pretpostavljamo da je to poznato).

Prvo dijelimo prostornu domenu u niz diskretnih konačnih volumena. Rubovi (granice ili lica) kontrolnih volumena su pozicionirane na sredinu između dva susjedna čvora. Svaki čvor je okružen sa kontrolnim volumenom (ćelijom).



Metoda konačnih volumena (FV) za 1D stacionarnu difuziju

Uobičajena konvencija za sustav notacije u FV ima formu:



Opći čvor (točka) je identificirana sa P a njegovi susjedi u 1D geometriji, čvorovi na zapadnu i istočnu stranu, su identificirani sa oznakama W i E .

Rub na zapadnoj strani kontrolnog volumena je označeno sa w a na istočnoj strani sa e .

Udaljenosti između čvorova W i P , te između P i E , su označene sa δx_{WP} i δx_{PE} .

Udaljenosti između rubova w i točke P te između točke P i ruba e su označena sa δx_{wP} i δx_{Pe} .

Širina kontrolnog volumena je $\Delta x = \delta x_{we}$.

Metoda konačnih volumena (FV) za 1D stacionarnu difuziju

Ključni korak u metodi konačnih volumena je integracija jednačbe procesa po kontrolnom volumenu u svrhu dobivanja diskretizacijskih jednačbi za čvornu točku P .

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (1)$$

A – Površina presjeka lica kontrolnog volumena; ΔV - volumen ;

\bar{S} - Srednja vrijednost intenziteta izvora S po kontrolnom volumenu

Kako bi se izvela korisna forma diskretizacijske jednačbe potrebno je definirati koeficijent difuzije Γ te gradient $d\phi/dx$ na rubovima e i w . Vrijednosti ϕ i Γ su definirane i evaluirane u čvorovima.

Za proračun gradijenata (protoka) na rubovima kontrolnog volumena koristi se odgovarajuća aproksimativna raspodjela karakteristike (linearna – najjednostavnija) između čvornih vrijednosti. Primjena takve prakse naziva se metoda centralnih diferencija.

Metoda konačnih volumena (FV) za 1D stacionarnu difuziju

U proračunskoj mreži sa jednolikom raspodjelom čvorova vrijednosti linearne raspodjele za Γ_w i Γ_e je dana izrazima:

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_p}{2} \quad (2a)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_p + \Gamma_E}{2} \quad (2b)$$

Član difuzivnog protoka je evaluiran jednakostima:

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) \quad (3)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \quad (4)$$

U praktičnim situacijama situations član izvora S može biti i funkcija ovisne varijable. U takvim slučajevima metoda konačnih volumena

aproksimira član izvora sa linearnom formom: $\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P$ (5)

Supstitucijom jednađbi 3,4,5 u jednađbu 1 dobiva se 6, a daljnjom manipulacijom i jednađba 7:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + S_u + S_p\phi_P = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u \quad (7)$$

Metoda konačnih volumena (FV) za 1D stacionarnu difuziju

Primjenom simbolnih oznaka a_W , a_E i a_P za koeficijente uz ϕ_W , ϕ_E i ϕ_P u jednadžbi 7 može se pisati :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + S_u \quad (8)$$

| a_W | a_P | a_E |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------|
| $\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$ | $\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$ | $a_W + a_E - S_p$ |

Vrijednosti za S_u i S_p mogu se dobiti iz modela izvora 5.

Jednadžbe 8 i 5 predstavljaju diskretiziranu formu jednadžbe 0.

Diskretizacijska jednadžba tipa 8 mora se postaviti za svaki čvor kako bi se moglo dobiti rješenje.

Za kontrolni volumen neposredno uz granicu domene, generalna diskretitacijska jednadžba 8 je modificirana s ciljem uvlačenja (inkorporiranja) rubnog uvjeta.

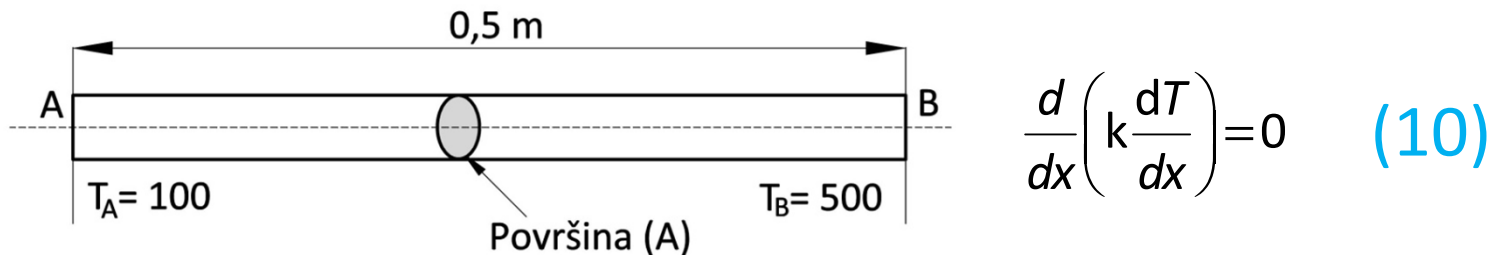
Rezultirajući sustav linearnih algebarskih jednadžbi je potrebno riješiti za iznalaženje raspodjele karakteristike ϕ u čvornim točkama. Bilo koja prigodna tehnika rješavanja matičnog sustava se može koristiti za tu zadaću.

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Rješenje jednostavnog problema difuzije uključujući pronos topline kondukcijom (vođenjem) daje se u nastavku. Jednadžba procesa kojom se opisuje 1D stacionarno vođenje glasi: $\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$ (9)

Termalna vodljivost k zauzima mjesti od Γ u jednadžbi a ovisna varijabla je temperatura T . Član izvora može biti toplina generirana električnom energijom koja prolazi kroz štap.

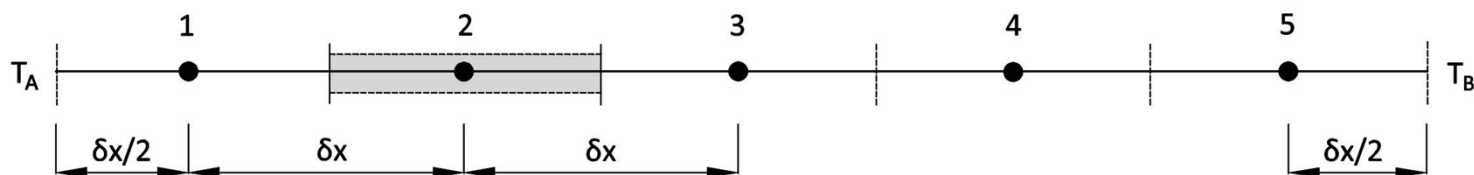
Prvo analiziramo slučaj vođenja topline u izoliranom štapu bez člana izvora (eng: source-free). Na rubovima su konstantne temperature od 100°C i 500°C . 1D problem skiciran na slici je opisan jednadžbom:



Potrebno je proračunati raspodjelu temperature u štapu. Termalna vodljivost k iznosi 1000 W/m.K , a konstantna površina poprečnog presjeka A definirana je sa vrijednosti 10^{-2} m^2 .

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Ukupnu duljinu štapa dijelimo na pet jednakih kontrolnih volumena ($\delta x = 0.1$ m).



Proračunska mreža sadrži pet čvorova. Čvorovi 2, 3 i 4 imaju susjedne čvorove sa lijeve i desne strane u vrijednosti temperature su definirane za values to the east and west are available as nodal values. Shodno tome, diskretizacijske jednadžbe oblika 7 mogu se zapisati za kontrolni volumen omeđen sa tim čvorovima:

$$\left(\frac{k_e}{\partial x_{PE}} A_e + \frac{k_w}{\partial x_{WP}} A_w \right) T_P = \left(\frac{k_w}{\partial x_{WP}} A_w \right) T_W + \left(\frac{k_e}{\partial x_{PE}} A_e \right) T_E$$

Termalna vodljivost ($k_e = k_w = k$), udaljenost među čvorovima (δx) i poprečni presjeci ($A_e = A_w = A$) su konstantni. Prema tome, jednadžba za čvorne točke 2, 3 i 4 je:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e$$

| a_w | a_e | a_p |
|------------------------|------------------------|-------------|
| $\frac{k}{\delta x} A$ | $\frac{k}{\delta x} A$ | $a_w + a_e$ |

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Čvorovi 1 ni 5 su rubni čvorovi. Integracija jednadžbe 10 po kontrolnom volumenu oko čvora 1 daje jednadžbu 11. Protok kroz rub kontrolnog volumena A aproksimiran je usvajanjem pretpostavke linearnih odnosa između temperature u rubnoj točki A i čvoru P . Jednadžba 11 može se preformulirati da se dobije izraz 12.

$$kA \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - kA \left(\frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) = 0 \quad (11) \quad \left(\frac{k}{\delta x} A + \frac{2k}{\delta x} A \right) T_P = 0, T_w + \left(\frac{k}{\delta x} A \right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x} A \right) T_A \quad (12)$$

Usporedimo jednadžbe 7 s jednadžbom 12. Rubni uvjet izražen je sa konstantnom temperaturom i unosi se u proračun kao član izvora ($S_u + S_P T_P$) sa $S_u = (2kA/\delta x) T_A$ i $S_P = -2kA/\delta x$. Poveznica sa zapadnim rubom je ukinuta postavljanjem koeficijenta a_w jednakim nuli.

Kako bi se dobila diskretizacijska jednadžba za rubni čvor 1 koristi se jednadžba 12. Nakon njenog preuređenja dobiva se slijedeća forma:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u$$

| a_w | a_e | a_p | S_p | S_u |
|-------|-----------------------|-------------------|-------------------------|----------------------------|
| 0 | $\frac{kA}{\delta x}$ | $a_w + a_e - S_p$ | $-\frac{2kA}{\delta x}$ | $\frac{2kA}{\delta x} T_A$ |

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Kontrolni volumen oko čvora pet tretira se na sličan način. Njegova diskretizacijska jednačba ima oblik:

$$kA \left(\frac{T_B - T_P}{\partial x / 2} \right) - kA \left(\frac{T_P - T_W}{\partial x} \right) = 0 \quad (13)$$

Kao i u prethodnom slučaju, pretpostavlja se linearna raspodjela temperature između čvora P i rubne točke B za aproksimaciju protoka topline kroz rub kontrolnog volumena. Jednačba 13 može se preurediti:

$$\left(\frac{k}{\partial x} A + \frac{2k}{\partial x} A \right) T_P = \left(\frac{k}{\partial x} A \right) T_W + 0, T_E + \left(\frac{2k}{\partial x} A \right) T_B$$

Diskretizacijska jednačba za čvor 5 je:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u$$

| a_w | a_e | a_p | S_p | S_u |
|-----------------------|-------|-------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\frac{kA}{\delta x}$ | 0 | $a_w + a_e - S_p$ | $-\frac{2kA}{\delta x}$ | $\frac{2kA}{\delta x} T_B$ |

Proces diskretizacije rezultira jednom jednačbom za svaki čvor od 1 do 5. Unosom zadanih vrijednosti dobiva se $kA/\delta x = 100$, te su stvoreni preduvjeti za iznalaženja koeficijenata u diskretizacijskim jednačbama.

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Rezultantni sustav algebarskih jednažbi za ovaj primjer glasi:

| | Čvor | a_W | a_E | S_U | S_P | $a_P = a_W + a_E - S_P$ |
|-------------------------------|------|-------|-------|----------|-------|-------------------------|
| $300 T_1 = 100 T_2 + 200 T_A$ | 1 | 0 | 100 | $200T_A$ | -200 | 300 |
| $200 T_2 = 100 T_1 + 100 T_3$ | 2 | 100 | 100 | 0 | 0 | 200 |
| $200 T_3 = 100 T_2 + 100 T_4$ | 3 | 100 | 100 | 0 | 0 | 200 |
| $200 T_4 = 100 T_3 + 100 T_5$ | 4 | 100 | 100 | 0 | 0 | 200 |
| $300 T_5 = 100 T_4 + 200 T_B$ | 5 | 100 | 0 | $200T_B$ | -200 | 300 |

Ovaj set jednažbi može se preurediti kako bi se dobio sustav 14.

Rješenje sustava jednažbi 14 daje stacionarnu raspodjelu temperatura za analiziranu situaciju. Rezultantna matrična jednažba može se riješiti upotrebom software-skih paketa poput MATLAB.

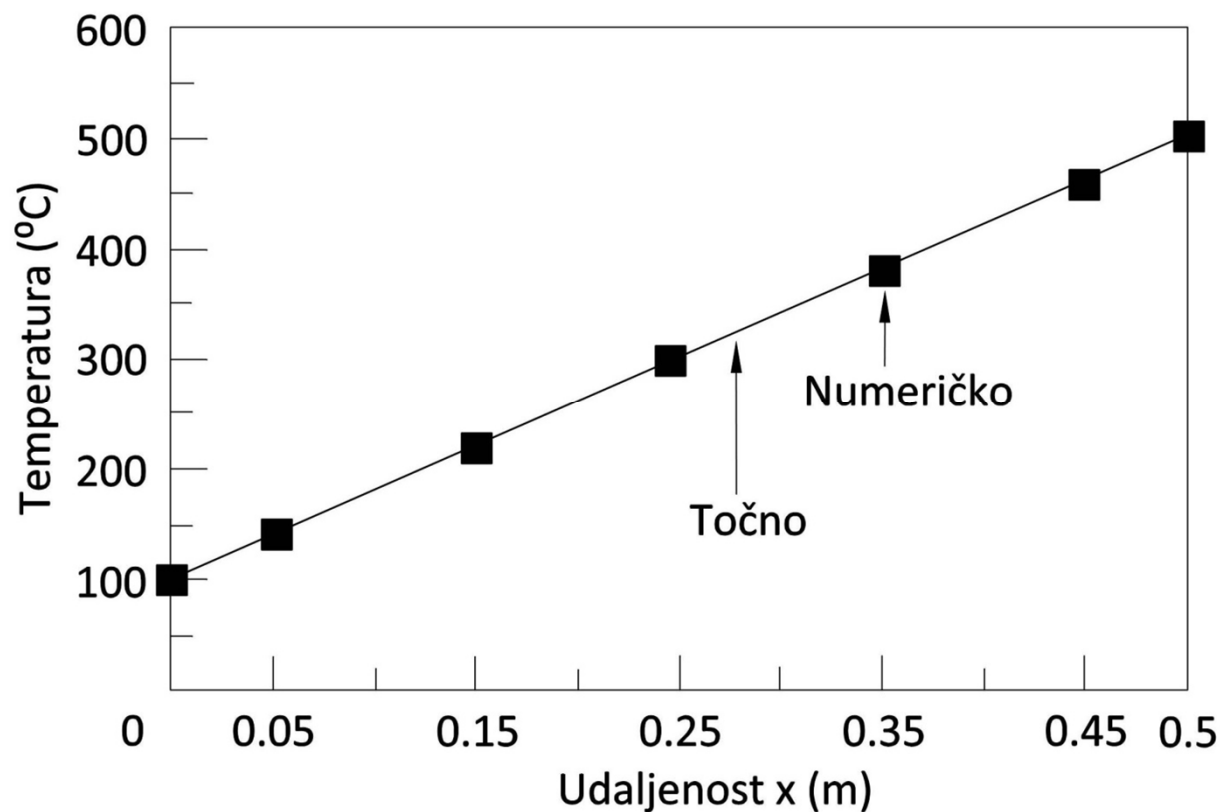
Za $T_A = 100$ i $T_B = 500$ rješenje sustava 14 daje rezultatni vektor 15:

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 450 \end{bmatrix} \quad (15)$$

PRIMJER 1 – 1D stacionarna difuzija

Točno rješenje je linearna distribucija između specificiranih temperatura na rubovima: $T = 800x + 100$. Numeričkim modelom proračunate vrijednosti koincidiraju sa točnim (analitičkim) rješenjem.



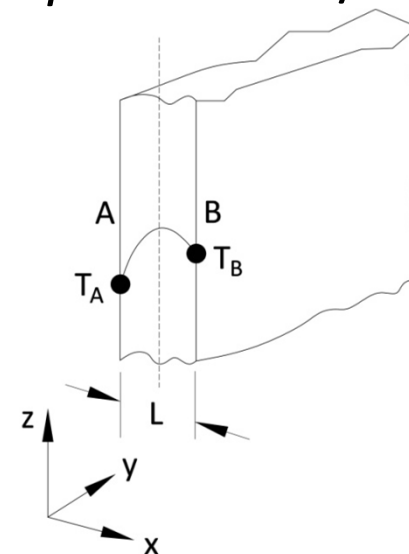
PRIMJER 2 – 1D stacionarna difuzija

Analiziramo problem u kojem je uključen izvor drugačiji od onog koji je primijenjen za definiranje rubnih uvjeta u prethodnom primjeru.

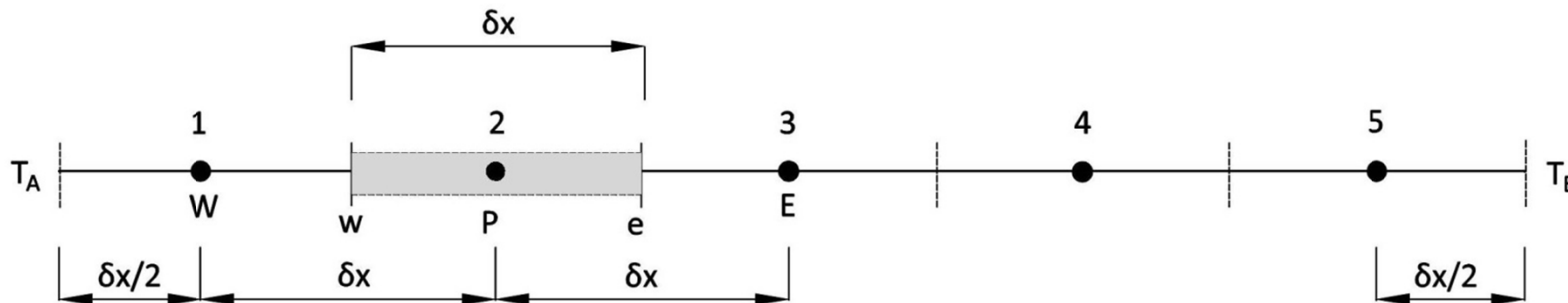
Slika prikazuje veliku ploču debljine $L = 2\text{cm}$ s konstantnom toplinskom vodljivošću $k = 0.5\text{ W/m.K}$ i jednolikog generiranja topline $q = 1000\text{ kW/m}^3$. Rubovi (lica) A i B izloženi su konstantnim temperaurama od 100°C i 200°C .

Dimenzije u y i z smjeru su toliko velike da je temperaturni gradijent u x smjeru jedini relevantan. Jednadžba procesa izražena je izrazom 16.

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0 \quad (16)$$



Domena je podijeljena u pet kontrolnih volumena sa $\delta x = 0.004\text{ m}$; Promatra se jedinična površina u y - z ravnini.



PRIMJER 2 – 1D stacionarna difuzija

Formalna integracija jednačbe procesa po kontrolnom volumenu daje:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} q dV = 0 \quad (17)$$

Tretman prvog člana gornje jednačbe istovjetan je kao i u prethodnom primjeru. Drugi integral je član izvora, a procijenjuje se proračunom srednjeg generiranja ($\bar{S}\Delta V = q\Delta V$) u svakom kontrolnom volumenu. Jednačba 17 može se zapisati:

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q\Delta V = 0 \quad (18) \quad \left[k_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\partial x} \right) - k_w A \left(\frac{T_P - T_W}{\partial x / 2} \right) \right] + qA\partial x = 0 \quad (19)$$

Gornje jednačbe mogu se preurediti na način:

$$\left(\frac{k_e A}{\partial x} + \frac{k_w A}{\partial x} \right) T_P = \left(\frac{k_w A}{\partial x} \right) T_W + \left(\frac{k_e A}{\partial x} \right) T_E + qA\partial x \quad (20)$$

Ta jednačba u općem slučaju poprima oblik iskazan izrazom 8:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (21)$$

| a_w | a_e | a_p | S_p | S_u |
|-----------------------|-----------------------|-------------------|-------|--------------|
| $\frac{kA}{\delta x}$ | $\frac{kA}{\delta x}$ | $a_w + a_e - S_p$ | 0 | $qA\delta x$ |

PRIMJER 2 – 1D stacionarna difuzija

Jednadžba 21 je važeća za kontrolne volumene koji pokrivaju čvorove 2, 3 i 4.

Za implementaciju Trubnih uvjeta na poziciji rubnih čvorova 1 i 5 primjenjujemo linearnu aproksimaciju za temperature između rubnih točaka i susjednih čvorova (rubnih čvorov). U čvoru 1 temperatura na zapadnoj granici je poznata.

Integracija jednadžbe 16 po kontrolnom volumenu oko čvora 1 daje 22 a linearna aproksimacija za temperature između A i P daje 23:

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q\Delta V = 0 \quad (22) \quad \left[k_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\partial x} \right) - k_A A \left(\frac{T_P - T_A}{\partial x / 2} \right) \right] + qA\partial x = 0 \quad (23)$$

Gornja jednadžba može se preurediti koristeći uvjet $k_e = k_A = k$ u cilju dobivanja diskretizacijske jednadžbe za rubni čvor 1:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + S_u \quad (24)$$

| a_w | a_E | a_p | S_p | S_u |
|-------|-----------------------|-------------------|-------------------------|---|
| 0 | $\frac{kA}{\delta x}$ | $a_w + a_E - S_p$ | $-\frac{2kA}{\delta x}$ | $qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_A$ |

PRIMJER 2 – 1D stacionarna difuzija

Za rubni čvor 5, temperatura na istočnom rubu kontrolnog volumena je poznata. Čvor je tretiran na sličan način kao i rubni čvor 1. Za rubni čvor 5 imamo:

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q\Delta V = 0 \quad (25) \quad \left[k_B A \left(\frac{T_B - T_P}{\partial x / 2} \right) - k_w A \left(\frac{T_P - T_w}{\partial x} \right) \right] + qA\partial x = 0 \quad (26)$$

| a_W | a_E | a_P | S_P | S_U |
|-----------------------|-------|-------------------|-------------------------|---|
| $\frac{kA}{\delta x}$ | 0 | $a_W + a_E - S_P$ | $-\frac{2kA}{\delta x}$ | $qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_B$ |

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti za $A = 1$, $k = 0.5 \text{ W/m.K}$, $q = 1000 \text{ kW/m}^3$ i $\delta x = 0.004 \text{ m}$ dobivaju se koeficijenti diskretizacijskih jednadžbi (vidi tablicu).

| Čvor | a_W | a_E | S_U | S_P | $a_P = a_W + a_E - S_P$ |
|------|-------|-------|-----------------|-------|-------------------------|
| 1 | 0 | 125 | $4000 + 250T_A$ | -250 | 375 |
| 2 | 125 | 125 | 4000 | 0 | 250 |
| 3 | 125 | 125 | 4000 | 0 | 250 |
| 4 | 125 | 125 | 4000 | 0 | 250 |
| 5 | 125 | 0 | $4000 + 250T_B$ | -250 | 375 |

PRIMJER 2 – 1D stacionarna difuzija

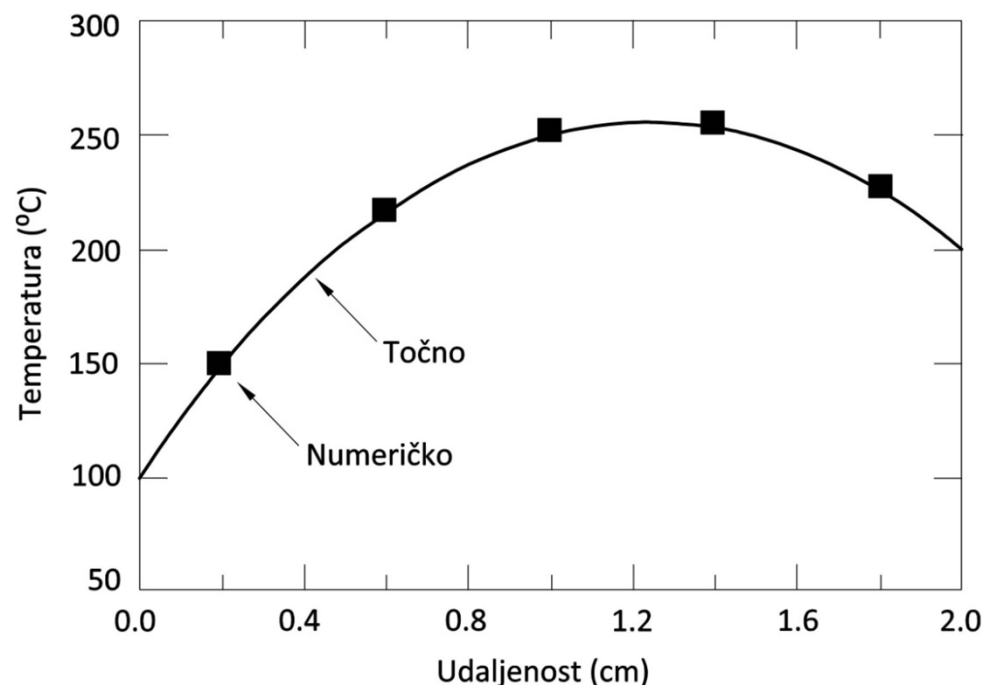
Jednadžbe pisane u matričnoj formi 27 daju vektorsko rješenje 28.

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{bmatrix} \quad (27)$$
$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Analitičko rješenje dobiva se dvostrukom integracijom jednadžbe 16 po x uz zadane rubne uvjete. Time se dobiva izraz :

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$$

Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata dana je na slici.



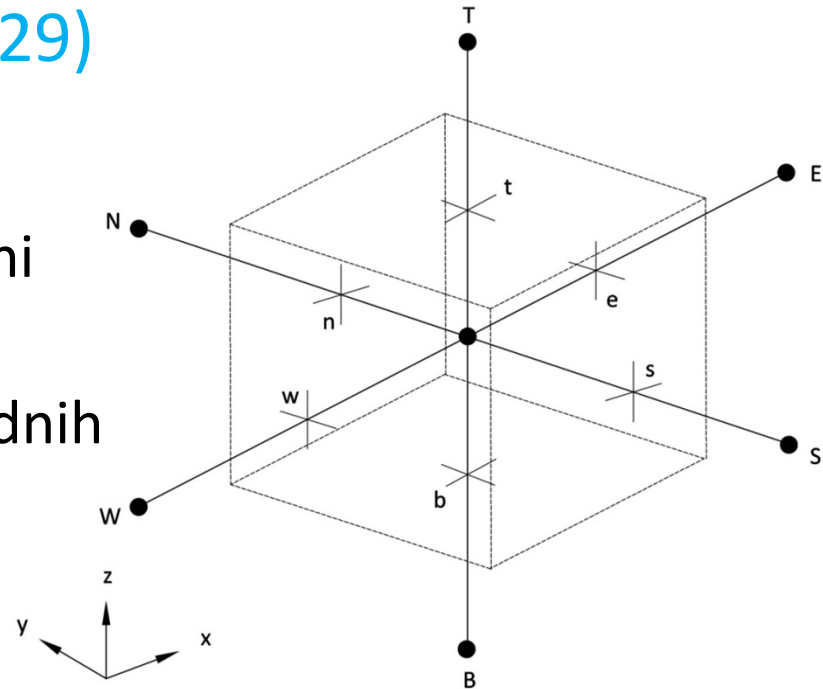
Metoda konačnih volumena (FV) za 3D stacionarnu difuziju

Stacionarni slučaj difuzije u 3D je definiran jednađbom:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi = 0 \quad (29)$$

3D proračunska mreža je korištena za diskretizaciju prostorne domene. Tipični kontrolni volumen je prikazan na slici.

Pripadna ćelija za P sada ima šest susjednih čvorova identificiranih kao W (zapad), E (istok), S (jug), N (sjever), B (dno) i T (vrh). Kao i prije, notacija w , e , s , n , b te t je korištena za odgovarajuće rubove (lica) ćelija.



Integracija jednađbe 29 po 3D kontrolnom volumenu daje izraz 30:

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$

Metoda konačnih volumena (FV) za 3D stacionarnu difuziju

Ponavljajući proceduru izvedenu za 1D slučaj dobiven je diskretizirani oblik jednačbe 30 u slijedećoj formi:

$$\left[\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\partial x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\partial x_{WP}} \right] + \left[\Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\partial y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\partial y_{SP}} \right] + \left[\Gamma_t A_t \frac{(\phi_T - \phi_P)}{\partial z_{PT}} - \Gamma_b A_b \frac{(\phi_P - \phi_B)}{\partial z_{BP}} \right] + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (31)$$

Izraz 31 može se srediti da daje diskretizacijsku jednačbu za “unutrašnje” čvorove:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u$$

| a_W | a_E | a_S | a_N | a_B | a_T | a_P |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| $\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$ | $\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$ | $\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$ | $\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$ | $\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$ | $\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$ | $a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_p$ |

Rubni uvjeti se mogu uvući prekidanjem veza sa odgovarajućim rubovima (licima) te modifikacijom člana izvora na već prethodno prikazan način.