

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II

1. kolokvij

7.5.2014.

α

1. (6 bodova) Riješite diferencijalnu jednažbu:

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

2. a) (3 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \frac{\ln(y^2 - 2y + 1)}{\sqrt{xy - 1}}$$

- b) (9 bodova) Kako se definira rub nekog područja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$? Ilustrirajte skicom.
- c) (4 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = 4 - x^2 - y^2$ koje su paralelne s ravninom $4x + 4y + 2z + 10 = 0$.

3. a) (8 bodova) Ilustrirajte skicom geometrijsku interpretaciju parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ glatke funkcije dviju varijabli.
- b) (6 bodova) Nađite najveću i najmanju vrijednost koju funkcija $f(x, y) = x - y$ postiže na kružnici oko ishodišta, radijusa 1.

4. (8 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = \sqrt{3}x$ i $y = -\sqrt{3}x$. Skicirajte lik.

5. a) (8 bodova) Izračunajte

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

ako je V tijelo omeđeno plohama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Skicirajte tijelo.

b) (8 bodova) Iskažite Steinerov teorem za tijelo u R^3 te ga ilustrirajte skicom.

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II

1. kolokvij

7. svibnja 2014.

β

1. a) (8 bodova) Snižavanjem reda riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''(1 - x^2) - 2y'x = 0.$$

- b) (8 bodova) Što je to Wronskijan dviju funkcija f_1 i f_2 ? Objasnite vezu Wronskijana dviju funkcija i njihove linearne zavisnosti ili nezavisnosti.

2. a) (3 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + 6y}$$

- b) (4 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = e^{-2+\sqrt{x^2+y^2}}$ u točki $T(3, 4, ?)$

3. (7 bodova) Na pravcu $x - y = 4$ nađite točku koja je najbliža točki $(0, 2)$.

4. a) (7 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $r = 1 + \cos \varphi$ i $r = \frac{3}{2}$ koji se nalazi unutar prve, a izvan druge krivulje. Skicirajte lik.
- b) (8 bodova) Opišite cilindrički koordinatni sustav – skicirajte koordinatne plohe, napišite formule prijelaza u oba smjera te Jacobijan.

5. a) (6 bodova) Izračunajte masu homogenog tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = 2 - (x^2 + y^2)$ u 1. oktantu. Skicirajte tijelo.
- b) (9 bodova) Gornja polovica kugle polumjera 1 m ima masu od 3 tone, a donja polovica iste kugle ima masu od 5 tona. Izračunajte prosječnu gustoću mase te kugle.

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II 1. kolokvij 7. svibnja 2014. γ

1. (7 bodova) Odredite ono rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' = y + 2x^2 - 3x$$

koje zadovoljava uvjet $y(1) = 2$.

2. a) (4 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \arccos \frac{4y}{x^2 + y^2 + 3}$$

- b) (3 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = 2x^2 - y^2$ koje su paralelne s ravninom $2x - 2y + z - 1 = 0$.
- c) (7 bodova) Što možete reći o tangencijalnoj ravnini i normali na graf glatke funkcije dviju varijabli u njenoj stacionarnoj točki? Ilustrirajte skicom.

3. (7 bodova) Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

4. a) (8 bodova) Definirajte srednju vrijednost funkcije f na području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Uz koje uvjete na f i Ω postoji točka u kojoj se ta srednja vrijednost postiže?
- b) (8 bodova) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami $z = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$ i $z = 2x - 2y + 4$. Skicirajte tijelo.

5. a) (6 bodova) Izračunajte

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

ako je V tijelo omeđeno plohom $x^2 + y^2 = 4$ i ravninama $z = 0$ i $z = 1$. Skicirajte tijelo.

b) (10 bodova) Kako se promijeni moment inercije homogene kugle s obzirom na os kroz središte ako joj se polumjer udvostruči a gustoća mase smanji na pola?

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II 1. kolokvij 7. svibnja 2014. δ

1. (6 bodova) Riješite diferencijalnu jednadžbu:

$$9y'' - 6y' + y = 2$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

2. a) (4 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{y}} - \ln(xy - 1)$$

b) (3 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ u točki $T(3, 4, ?)$.

3. a) (8 bodova) Nađite ekstreme funkcije $f(x, y) = xy$, uz uvjet $x^2 + y^2 = 2$.
- b) (8 bodova) Kad je stacionarna točka funkcije klase C^2 dviju varijabli sedlasta točka? Ilustrirajte skicom. Navedite primjer funkcije koja ima sedlastu točku u $(0, 0)$.

4. a) (9 bodova) Kako se definiira nepravi integral funkcije f po neomeđenom području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$? Ilustrirajte skicom.
- b) (8 bodova) Odredite težište lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2y$ i $x^2 + y^2 = 4y$ gustoće $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte lik.

5. a) (6 bodova) Izračunajte masu homogenog tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2 - 9$ i $z = 9 - x^2 - y^2$. Skicirajte tijelo.
- b) (8 bodova) Opišite sferni koordinatni sustav – skicirajte koordinatne plohe, napišite formule prijelaza u oba smjera te Jacobijan.

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II 1. kolokvij 7. svibnja 2014. €

1. a) (7 bodova) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$$

uz uvjet $y(1) = \pi$.

b) (9 bodova) Ima li funkcija $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ limes u točki $(0,0)$? Obrazložite odgovor.

2. a) (4 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \arcsin \frac{6x}{x^2 + y^2 + 5} + \ln xy.$$

b) (3 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = \operatorname{arctg} xy$ u točki $T(1, 1, ?)$.

3. (7 bodova) Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 3 \ln \left(\frac{x}{6} \right) + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$.

4. a) (8 bodova) Odredite težište lika omeđenog pravcima $x = -1, x = 1, y = 0, y = 1$ gustoće $\rho(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$. Skicirajte lik.
- b) (8 bodova) Kako se računa moment inercije ravnog lika s obzirom na ishodište ako su poznati momenti inercije tog lika s obzirom na koordinatne osi? Obrazložite odgovor.

5. a) (6 bodova) Izračunajte

$$\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$$

gdje je V tijelo omeđeno plohami $z = 0$, $z = 2$ i $x^2 + y^2 = 4$. Skicirajte područje integracije.

b) (8 bodova) Opišite polarni koordinatni sustav u ravnini – skicirajte koordinatne krivulje, napišite formule prijelaza u oba smjera. Skicirajte element površine i izvedite Jacobijan.

PREZIME I IME:

GRUPA:

MATEMATIKA II

1. kolokvij

7. svibnja 2014.

ζ

1. (8 bodova) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 9y = xe^{3x}.$$

2. a) (4 boda) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \ln(1 - x) + \arccos(y - 2x)$$

b) (4 boda) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = 4 - x^2 - y^2$ koje su paralelne s ravninom $x + y + 2z - 5 = 0$.

3. a) (7 bodova) Nađite ekstreme funkcije $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x > 0$, $y > 0$, uz uvjet $x + y = 2$.
- b) (8 bodova) Što možete reći o točki u kojoj funkcija dviju varijabli ima lokalni ekstrem? Ilustrirajte skicom.

4. a) (5 bodova) Izračunajte

$$\iint_D \frac{2}{x^2 + y^2 + 2} dx dy$$

ako je D područje ravnine omeđeno krivuljom $x^2 + y^2 = 9$ iznad y -osi. Skicirajte područje D .

b) (7 bodova) Kako prepoznamo rotacijsku a kako cilindričku plohu? Navedite primjere i ilustrirajte skicama.

5. a) (7 bodova) Izračunajte masu tijela između ploha $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = 0$ gustoće $\rho(x, y, z) = 4 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte tijelo.
- b) (10 bodova) Kako se promijeni moment inercije homogenog valjka s obzirom na njegovu os ako mu se polumjer osnovice udvostruči, a gustoća mase smanji na pola?