

1. Matematički model konstrukcije

1.1. Uvod

Razvojem društva postupno je nastajala potreba i za većim praktičnim znanjima. Razvojem i percepcijom novih praktičnih znanja, nastajali su i početni pokušaji znanstvenih objašnjenja primjenjivanih znanja i postupaka. Na taj način došlo je do bitnog razvoja matematičke fizike i teorije elastičnosti. Postavljene su diferencijalne jednačbe za mnoge fizikalne procese. Kao dio takvog razvoja javlja se teorija elastičnosti i pripadni matematički modeli u teoriji konstrukcija.

1.2. Materijalni kontinuum

Promatramo područje $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Rub područja Ω označimo $\partial\Omega = \Gamma$. Položaj svake točke unutar područja Ω jednoznačno je određen uređenom trojkom $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Između proizvoljne dvije točke područja Ω uvijek postoji još barem jedna točka. Takvo područje zovemo **kontinuum**. Kontinuum sadrži beskonačno mnogo točaka. Proizvoljne dvije točke kontinuuma možemo uvijek spojiti proizvoljnom neprekidnom krivuljom.

Stvarno stanje konstrukcija zapravo je drugačije. Materija je sastavljena od vrlo bliskih atoma i molekula. U mikroskopskim uvjetima znači da model kontinuuma ne vrijedi. Između dvije čestice možemo naći prazninu. Kod nekih gradiva diskontinuiteti su i makroskopski očiti, npr. pukotine u drvetu, pukotine u betonu, diskontinuitet stjenovitog temeljnog tla.

Idealizacija konstrukcija kontinuumom svejedno je dobra. Rješenja diferencijalnih jednačbi temeljenih na kontinuumu pokazala su poklapanja s rezultatima pokusa uz relativno mala rasipanja oko prosječnih vrijednosti. To zapravo znači da materija na makroskopskoj razini teži uprosječenju svojih svojstava na mikroskopskoj razini. Znakovit primjer za takav stav su rezultati dobiveni ispitivanjem betonskih uzoraka, pri čemu je razdioba rezultata betonskih uzoraka pripremljenih u istim uvjetima načelno grupirana oko prosječne vrijednosti s vrlo malim odstupanjima. Na temelju takvih razmišljanja možemo pretpostaviti da će kontinuum dovoljno dobro aproksimirati mikroskopske konfiguracije konstruktivnih gradiva. Takvom idealizacijom značajno možemo smanjiti broj nepoznanica u standardnim zadaćama proračuna konstrukcije.

U praktičnom proračunu možemo uvesti i dodatna pojednostavljenja. Pretpostavljamo da kontinuum ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim svojim točkama - kontinuum je **homogen**. Kod nekih gradiva

možemo pretpostaviti da ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim smjerovima - kontinuum je **izotropan**.

1.3. Geometrijske (kinematičke) ovisnosti

Konstrukcija se pod djelovanjem opterećenja **deformira**. Nastaje **tenzorsko polje deformacija**, ϵ , matrica skalarnih funkcija,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Točke deformabilnog tijela, točke unutar područja (konstrukcije) mijenjaju svoj položaj. Nastaje vektorsko polje pomaka, \mathbf{u} , vektor skalarnih funkcija,

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T. \quad (1.3.2)$$

Očito je da između deformacija i pomaka postoji međusobne ovisnosti. Ovisnosti deformacije i pomaka nazivamo **geometrijska ovisnost**. Komponente deformacija možemo izraziti kao funkcije pomaka

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Komponente tenzora deformacija možemo prikazati i indeksnom notacijom

$$\epsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial k} \right)^2, \quad i = x, y, z, \quad (1.3.4)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_k}{\partial i} \frac{\partial u_k}{\partial j}, \quad ij = xy, yz, zx. \quad (1.3.5)$$

Matrica tenzora deformacije je simetrična (simetričnost očito slijedi prema definiciji geometrijske ovisnosti pojedinih komponenata), $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$, pa tenzor deformacije možemo prikazati preko 6 komponenti

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T. \quad (1.3.6)$$

Kod realnih konstrukcija relativne su dužinske deformacije ($\partial u/\partial x, \dots$) i kutovi zaokreta ($\partial u/\partial y, \dots$) mali (u odnosu na dimenzije konstrukcije), što povlači da možemo zanemariti kvadratne članove, te slijede poznate linearne komponente Cauchyjevog tenzora deformacija

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

odnosno u indeksnom zapisu

$$\epsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial i}, \quad i = x, y, z, \quad \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}, \quad ij = xy, yz, zx \quad (1.3.8)$$

Sustav jednadžbi, 1.3.3, možemo zapisati i u matričnom obliku

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (1.3.9)$$

gdje je \mathbf{L} diferencijalni operator

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.3.10)$$

1.4. Uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti)

Konstrukcija pod djelovanjem opterećenja postaje deformirana. Uvjet kompatibilnosti zahtijeva da je polje deformacija nastalih zbog djelovanja opterećenja neprekidno i jednoznačno određeno. To zapravo znači da kontinuum i nakon deformiranja ostaje kontinuum. Ako je polje deformacija neprekidno onda su i komponente polja deformacija integrabilne što povlači da je i polje pomaka neprekidno.

Neprekidnost i jednoznačnost nužni su uvjeti koje mora zadovoljiti polje deformacija. Derivacijom neprekidnog i jednoznačnog polja pomaka jednostavno možemo odrediti polje deformacija. Međutim, ako iz polja deformacija želimo integriranjem dobiti polje pomaka zadaća postaje matematički preodređena, iz 6 komponenti polja deformacija potrebno je odrediti 3 komponente polja pomaka. To znači da su komponente deformacija međusobno ovisne. Postoje tri dodatna uvjeta, tri jednadžbe koje će odrediti međusobnu ovisnost komponenti deformacija. Deriviranjem jednadžbi (1.3.7) dobivamo tri jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

koje predstavljaju ponašanje polja deformacija u pripadnim koordinatnim ravninama xy , yz i zx . Na isti način uz kombiniranje derivacija jednadžbi (1.3.7) dobivamo nove tri jednadžbe

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

koje predstavljaju ponašanje polja deformacija u prostoru. Jednadžbe (1.4.11) i (1.4.12) nazivamo **uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti) deformacija**. Sustave jednadžbi (1.4.11) i (1.4.12) možemo zapisati indeksnim zapisom

$$\frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial j} = 0, \quad ij = xy, yz, zx, \quad (1.4.13)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial j \partial k} + \frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ki}}{\partial i \partial j} = 0, \quad ijk = xyz, yzx, zxy \quad (1.4.14)$$

Sustave jednadžbi (1.4.11) i (1.4.12) možemo zapisati i u matričnom obliku pomoću pripadnih diferencijalnih operatora, \mathbf{L}_r za ravninske uvjete

i \mathbf{L}_p za prostorne uvjete

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \end{bmatrix}, \quad (1.4.15)$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.4.16)$$

a sustavi jednostavno slijede

$$\mathbf{L}_r \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_p \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}. \quad (1.4.17)$$

Deformacije (1.3.9) uz jednu od grupa jednadžbi (1.4.17) daju jedinstveno polje pomaka. Uz devet nepoznanica (tri komponente vektora pomaka i šest komponenti tenzora deformacija) imamo i devet jednadžbi. Polje pomaka je dovoljno puta derivabilno, klase C^3 , pa vrijedi i obrat.

Uvjet neprekinutosti ne dozvoljava proizvoljan izbor polja deformacija. Komponente deformacija moraju biti međusobno povezane. Struktura realnih konstrukcija ne odgovara u potpunosti definiciji kontinuuma. To znači da niti uvjet neprekinutosti ne može biti zadovoljen. Uprosječenje pogrešaka u strukturi omogućuje primjenu uvjeta neprekinutosti.

1.5. Uvjeti ravnoteže

Prema poznatom I. Newtonovom zakonu tijelo u inercijalnom sustavu miruje samo ako na njega ne djeluje sila. Tijelo miruje ako je rezultanta svih sila i momenata jednaka nul-vektoru

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{0}, \quad (1.5.18)$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \mathbf{0}, \quad (1.5.19)$$

gdje su \mathbf{f}_i sile, \mathbf{m}_j koncentrirani momenti koji djeluju na tijelo, a \mathbf{r}_i radijus vektori hvatišta sila. Jednadžbe (1.5.18) i (1.5.19) predstavljaju **uvjete ravnoteže**.

U opterećenoj konstrukciji dolazi do pojave naprezanja. Nastaje **ten-**

zorsko polje naprezanja, σ , matrica skalarnih funkcija,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} . \quad (1.5.20)$$

Komponente naprezanja moraju zadovoljiti i diferencijalne uvjete ravnoteže koje možemo izvesti iz jednadžbe (1.5.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 , \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 , \quad (1.5.22)$$

pri čemu su f_x, f_y, f_z komponente vektora volumenskih sila unutar konstrukcije,

$$\mathbf{f}^T = [f_x \quad f_y \quad f_z] . \quad (1.5.23)$$

Iz jednadžbi 1.5.19 možemo izvesti zakon o uzajamnosti posmičnih naprezanja, što povlači simetričnost tenzora naprezanja

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} . \quad (1.5.24)$$

Tenzor naprezanja možemo prikazati pomoću 6 komponenti vektora

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] . \quad (1.5.25)$$

Sustav jednadžbi ravnoteže (1.5.21) možemo prikazati matrično

$$\mathbf{L}^T \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.5.26)$$

ili tenzorski

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (1.5.27)$$

Ako je opterećeno tijelo u mirovanju, tada miruje i svaki dio opterećenog tijela. Tada i svaki izdvojeni dio opet možemo promatrati kao opterećeno tijelo koje miruje i za taj dio opet vrijedi prvi Newtonow zakon. To znači da i svaki izdvojeni dio tijela mora biti u ravnoteži, rezultanta svih sila i momenata koji djeluju na taj izdvojeni dio tijela mora biti jednaka nulvektoru.

Nakon opterećenja tijelo poprimi deformirani položaj i nalazi se u stanju ravnoteže. To znači da bi uvjete ravnoteže morali postaviti na deformiranom stanju. Ali, deformirano stanje nije unaprijed poznato. Deformirano stanje je rezultat proračuna. Jednadžbe ravnoteže su **nelinearne**. Kod relativno malih deformacija uvjete ravnoteže možemo linearizirati, možemo prethodno nepoznati deformirani oblik tijela aproksimiramo početnim nedeformiranim oblikom tijela.

Za nepoznatih šest komponenti naprezanja imamo samo tri jednadžbe ravnoteže. To znači, kao i kod deformacija, da su naprezanja međusobno zavisna. Tri dodatne jednadžbe možemo dobiti ako u jedan od uvjeta neprekinutosti, jednadžbe (1.4.17), uvrstimo zakon ponašanja. Dobivamo **uvjete kompatibilnosti naprezanja** (Beltrami-Michellove jednadžbe).

1.6. Zakoni ponašanja (konstitucije)

Uvjeti kompatibilnosti odnose se na polje deformacija, a uvjeti ravnoteže na polje naprezanja. Očito postoji veza između naprezanja i deformacija. Veza između naprezanja i deformacija ovisi o mehaničkim svojstvima materijala utemeljenim na silama između elementarnih čestica.

1.6.1. Elastični modeli

Najjednostavniji model veze između naprezanja i deformacija je linearno elastičan model - Hookeov zakon. Prema Hookeovom zakonu naprezanja su proporcionalna deformacijama

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} , \quad (1.6.28)$$

gdje je \mathbf{C} matrica materijalnih konstanti

$$\mathbf{C} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6.29)$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.6.30)$$

pri čemu su E modul elastičnosti, a ν Poissonov koeficijent. Za ravninsko stanje naprezanja matrica proporcionalnosti glasi

$$\mathbf{C} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.6.31)$$

Za jednoosno stanje naprezanja, umjesto matrice \mathbf{C} imamo konstantu proporcionalnosti, **modul elastičnosti materijala** E

$$\sigma = E\epsilon. \quad (1.6.32)$$

Postoji i nelinearno elastičan model. Odnos naprezanja i deformacija je elastičan, ali nije proporcionalan. Jednadžba nelinearno elastičnog modela glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (1.6.33)$$

1.6.2. Neelastični modeli

Idealno elastično ponašanje većine materijala ostvarivo je samo pod djelovanjem malih opterećenja. Za realne materijale uobičajena su odstupanja krivulje opterećenja i rasterećenja i kod malih opterećenja. Potrebno je poznavati trenutni prirast deformacije $\dot{\epsilon}$, a u složenijim slučajevima i cijelu povijest ponašanja materijala. Takav odnos naprezanja i deformacije možemo prikazati jednadžbom

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) . \quad (1.6.34)$$

1.7. Rubni uvjeti

1.7.1. Rubni uvjeti na rubu područja

Uvjeti ravnoteže i uvjeti kompatibilnosti moraju vrijediti i na rubu tijela. Uvjete ravnoteže i kompatibilnosti na rubu tijela zajednički nazivamo **rubni uvjeti**. Uvjete ravnoteže zovemo **prirodnim** ili Neumannovim uvjetima, a uvjete kompatibilnosti zovemo **geometrijskim** ili Dirichletovi rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\rho}|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\rho}_0 , \quad \boldsymbol{\rho}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0 , \quad (1.7.35)$$

gdje su Γ_σ i Γ_u područja ruba sa zadanim napreznjima $\boldsymbol{\rho}_0$ i pomacima \mathbf{u}_0 pri čemu mora vrijediti

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma , \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset . \quad (1.7.36)$$

To znači da ne može biti preklapanja rubnih uvjeta u nekoj točki. Rubni uvjet mora u svakoj točki biti jednoznačno definiran. u slučaju da su zadana napreznja i pomaci na rubu jednaki 0, $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{u}_0$ govorimo o **homogenim rubnim uvjetima**.

1.7.2. Rubni uvjeti na spoju

Ako je tijelo u ravnoteži tada je i svaki izdvojeni dio u ravnoteži. Možemo promatrati izdvojeni dio koji sadrži plohu spoja dvaju susjednih tijela. Smanjivanjem promatranog dijela možemo zadaću svesti na ravnotežu sustava dvije bliske točke. Napreznja među njima moraju biti u ravnoteži jer ne može postojati neuravnotežena komponenta napreznja zbog ravnoteže cijelog sustava. Analogno vrijedi i za deformacije, ako shvatimo cijeli sustav kao sastavljen od niza malih dijelova, možemo opet svesti zadaću na

dvije bliske točke. Za takve dvije točke moraju opet vrijediti uvjeti kompatibilnosti, ne može doći do odvajanja točaka na spoju. Na spoju tijela moraju vrijediti prirodni i geometrijski rubni uvjeti.

Ako je spoj dvaju tijela elastičan, nepoznati su i pomaci i naprezanja. Tada mora nužno biti zadana veza između pomaka i naprezanja na spoju. Takav rubni uvjet zovemo **mješovit** ili Robinov rubni uvjet. Primjer za takvu vezu su tijela koja u nekoj točki spoja u smjeru normale imaju zadanu elastičnu oprugu zadane krutosti.

U proračunu znamo uvesti idealizaciju da je neko susjedno tijelo apsolutno kruto i nepomično. Takvo tijelo se ne može se ni deformirati ni gibati na takvom spoju. Promatrano tijelo ne može se gibati, ali se može deformirati. Za deformabilno tijelo u mirovanju vrijedi prvi Newtonov zakon. Na spoju se moraju pojaviti reakcije koje za zadana opterećenja moraju zadovoljiti uvjete ravnoteže. Prirodni rubni uvjeti automatski su tako zadovoljeni uslijed pojave reakcija. Pomaci apsolutno krutog i nepomičnog tijela jednaki su nuli. Uvjet kompatibilnosti vrijedi i na spoju što povlači da točke promatranog tijela spojene za točke apsolutno krutog tijela moraju pri deformiranju imati pomake jednake nuli (homogeni uvjet).

Na slobodnoj konturi mora biti zadovoljen prirodni rubni uvjet, uvjet ravnoteže. Nema susjednog tijela, pa nema potrebe za kompatibilnosti. Naprezanja u smjeru normale σ_n i komponente posmičnih naprezanja $\tau_{\xi n}$ i $\tau_{\eta n}$ moraju odgovarati komponentama zadanog naprezanja u tim smjerovima. Ostale komponente σ_ξ , σ_η , $\tau_{\eta\eta}$ i $\tau_{\eta\xi}$ nisu određene rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati

$$\boldsymbol{\rho} = [\sigma_n \quad \tau_{\xi n} \quad \tau_{\eta n}]^T = \boldsymbol{\rho}_0 = [\sigma_{n,0} \quad \tau_{\xi n,0} \quad \tau_{\eta n,0}]^T, \quad (1.7.37)$$

pri čemu je $\boldsymbol{\rho}$ vektor totalnog naprezanja, a $\boldsymbol{\rho}_0$ vektor vanjskog djelovanja u promatranoj točki. Ako slobodni rub neopterećen onda su i naprezanja na rubu jednaka nuli (na neopterećenom slobodnom kraju konzolne grede, moment i poprečna sila jednaki su nuli, ako na slobodnom kraju konzolne grede djeluje koncentrirana sila okomito na gredu ili koncentrirani moment onda su poprečna sila i moment jednaki iznosima zadanih sile i momenta).

2. Metode rješavanja rubnih zadaća

2.1. Uvod

Osnovne grupe jednadžbi u prostornim zadaćama su

- šest geometrijskih jednadžbi: $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$,
- tri uvjeta ravnoteže: $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$,
- šest jednadžbi ponašanja: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$.

Stanje svake točke područja Ω može biti opisano sustavom od petnaest jednadžbi, a nepoznanice su šest komponenti naprezanja, šest komponenti deformacija i tri komponente pomaka. Potrebno je pronaći stanje konstrukcije koje zadovoljava istovremeno sve jednadžbe. U prethodnih petnaest jednadžbi nisu uključeni i uvjeti neprekinutosti. Uvjeti neprekinutosti nisu temeljni uvjeti, dobiveni su izravno iz geometrijskih uvjeta eliminiranjem komponenti pomaka. Jedinstveno rješenje sustava osigurano je poštivanjem rubnih uvjeta

$$\boldsymbol{\rho}|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\rho}_0, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0. \quad (2.1.1)$$

Umetanjem rubnih uvjeta pričvršćujemo konstrukciju u prostoru i osigurana je jedinstvenost rješenja. Tako definiranu zadaću zovemo **rubna zadaća**.

Unutar područja i na rubu polje naprezanja mora zadovoljiti uvjete ravnoteže, a polje pomaka uvjete kompatibilnosti. Polja naprezanja i polja pomaka su nepoznata, ali su povezana zakonom ponašanja, što povlači da možemo promatrati jedno nepoznato polje (ili polje pomaka ili polje naprezanja).

Metode rješavanja zadanih konstrukcija su **metoda sila** i **metoda pomaka**. Temeljna ideja obje metode je **dikretizacija** matematičkog modela radi jednostavnijeg proračuna. Štapni modeli imaju beskonačno mnogo nepoznanica (u svakoj točki štapa) koje u proračunu koncentriramo na **konačan** broj točaka (čvorova). Kod metode sila model je konačan broj puta statički određen, a kod metode pomaka model ima konačan broj nepoznatih stupnjeva slobode.

2.2. Metoda sila

Metoda sila postupak je kojim eliminiramo pomake iz geometrijskih jednadžbi (1.3.7) i deformacije iz jednadžbe ponašanja (1.6.28), a nepoznanice ostaju šest komponenti naprezanja. Pomake smo već eliminirali iz

geometrijskih uvjeta pri određivanju uvjeta kompatibilnosti, pa možemo, umjesto geometrijskih jednažbi (1.3.7), upotrijebiti jednu od međusobno zavisnih grupa jednažbi (1.4.17)

$$\mathbf{L}_r \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \text{ ili } \mathbf{L}_p \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} . \quad (2.2.2)$$

Uporabom zakona ponašanja (1.6.28) eliminiramo deformacije i slijede grupe jednažbi

$$\mathbf{L}_r \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ ili } \mathbf{L}_p \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} . \quad (2.2.3)$$

Dobivene matrice zapise možemo raspisati, te uz dodatne transformacije i deriviranja uvjeta ravnoteže po x , y i z slijede **Beltrami-Michellove jednažbe**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial x} \right) - \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ili

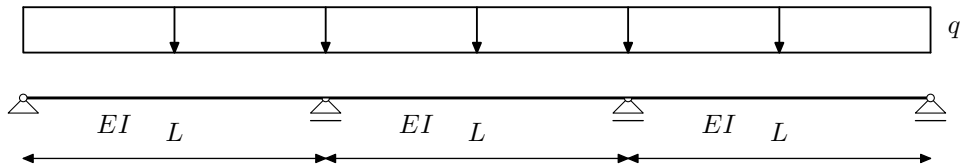
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ove jednažbe predstavljaju uvjete kompatibilnosti izražene pomoću naprežanja. Neovisna je samo jedna grupa jednažbi. To znači da za šest komponenti naprežanja imamo samo tri neovisne jednažbe koje zadovoljavaju geometrijske rubne uvjete. Istodobno moramo riješiti i tri uvjeta ravnoteže (1.5.26) čime dobivamo šest jednažbi za šest potrebnih nepoznatih komponenti naprežanja. Deformacije i pomaci slijede pomoću jednažbi

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} , \mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} . \quad (2.2.6)$$

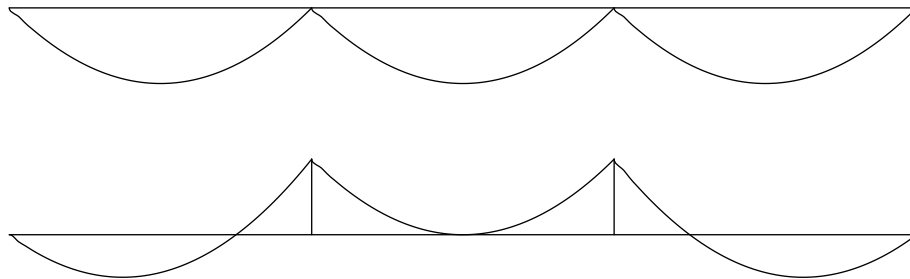
Primjer 2.2.1. *Metoda sila na štapnom modelu*

Postoji beskonačno mnogo polja naprezanja koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže statički neodređenog sustava. Promatramo tropoljnu kontinuiranu gredu pod djelovanjem jednoliko distribuiranog opterećenja. Za zadani



Slika 2.2.1: Tropoljna kontinuirana greda po djelovanjem jednoliko distribuiranog opterećenja

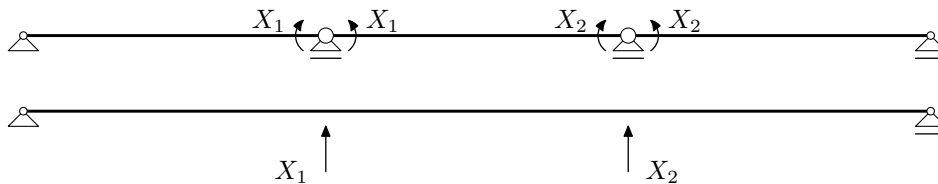
kontinuirani nosač možemo prikazati nekoliko mogućih momentnih dijagrama. Svi prikazani dijagrami zadovoljavaju uvjete ravnoteže i prirodne



Slika 2.2.2: Mogući momentni dijagrami

rubne uvjete (uvjete ravnoteže na ležajima). Provjes parabole momentnog dijagrama iznosi $qL^2/8$. Takva zadaća je linearna i mora imati jedinstveno rješenje. To znači da je samo jedno ravnotežno stanje zapravo ispravno rješenje (zadovoljava uvjete neprekinutosti) koje daje ispravnu progibnu liniju. Kako pronaći takvo stanje? Progibna linija je neprekidna. Očito je da je progibna linija kod svih mogućih rješenja neprekidna. Potrebno je postaviti i riješiti uvjete neprekinutosti u svakoj točki grede. Kod složenijih konstrukcija nije jednostavnom pronaći jedno od ravnotežnih stanja. Tražimo stanje za koje možemo na jednostavniji način odrediti uvjete ravnoteže (odrediti dijagrame unutarnjih sila), ali ujedno i koncentrirati uzroke nekompatibilnosti na zadana mjesta na konstrukciji. Za sustav u ravnoteži ravnoteža vrijedi za svaki dio sustava i za sve međusobne spojeve dijelova sustava neovisno o načinu spajanja. Zbog toga možemo podijeliti gredu na dijelove i odrediti spajanja kako nam odgovara pazeći da ne stvorimo mehanizam. Na taj način dobivamo, iz Građevne statike poznati, **osnovni sistem**. Osnovni sistemi su najčešće statički određeni jer

su jednostavniji za proračun unutarnjih sila od vanjskog opterećenja, a dijagrami su i jedinstveni za zadano opterećenje jer je potrebno riješiti samo uvjete ravnoteže. U daljnjoj analizi promatramo gornji osnovni sistem, niz



Slika 2.2.3: Mogući osnovni sistemi

od tri zglobno povezane proste grede, s oslobođenim vezama iznad ležajeva. Progibna linija osnovnog sistema nije kompatibilna samo u diskretnim točkama, a uzrok takvim nekompatibilnostima su unutarnje sile oslobođene u tim točkama (otvaranjem zglobova unutar grede dobivamo lom progibne linije). Iznose tih sila određujemo iz uvjeta neprekinutosti u tim točkama (nema relativnih pomaka i kuteva zaokreta na mjestima oslobođenih veza). Dodajemo sile na tim mjestima kao vanjsko opterećenje tako da zadani i osnovni sistem budu kompatibilni. Dobivamo statički određeni osnovni sistem opterećen vanjskim opterećenjem i silama u oslobođenim vezama (koncentriranim momentima savijanja u ovom primjeru). Uvjeti neprekinutosti su zadovoljeni u svim točkama (progibna linija je neprekidna) osim u točkama oslobođenih veza (zglobovima nad ležajevima u ovom primjeru). Zadaća je linearna što znači da konačno rješenje možemo dobiti superpozicijom pojedinačnim rješenjima koja pripadaju zadanim opterećenjima. Sile u oslobođenim vezama nisu nam poznate (momenti nad ležajevima u ovom primjeru). Ne možemo ih odrediti iz uvjeta ravnoteže jer je bilo koji par sila (par momenta u ovom primjeru) u ravnoteži. Ispravni su samo oni iznosi sila (momenata) koji na mjestima oslobođenih veza osiguravaju da su relativni pomaci ili kutevi zaokreta jednaki nuli (relativni kutevi zaokreta nad ležajevima u ovom primjeru). To znači da tangenta na gredu lijevo i desno od ležajeva mora biti zajednička, nema nikakvog loma na zadanoj gredi. Na taj način dobivamo dodatne jednadžbe (dvije dodatne jednadžbe u ovom primjeru) kojima ćemo zadovoljiti uvjete neprekinutosti i proračunati vrijednosti sila u oslobođenim vezama (momenata nad ležajevima u ovom primjeru).

Između beskonačno mnogo polja naprezanja koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže, moramo odabrati ono koje zadovoljava uvjete kompatibilnosti. Neovisno o veličini momenata nad ležajevima sustav će biti u ravnoteži, ali samo u jednom slučaju bit će i kompatibilan.

2.3. Metoda pomaka

Iz geometrijskih uvjeta (1.3.7) i zakona ponašanja (1.6.28) eliminiramo polje deformacija, a poje naprezanja izrazimo pomoću polja pomaka. Polje pomaka (3 komponente) ostaje jedino nepoznato polje. Slijede jednadžbe koje imaju značaj uvjeta ravnoteže

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{u} . \quad (2.3.7)$$

Uvrštavanjem tih jednadžbi u jednadžbu ravnoteže (??) slijedi

$$\mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (2.3.8)$$

Uz supstituciju $\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L}$ slijedi poznati sustav

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} . \quad (2.3.9)$$

Matricu \mathbf{K} zovemo **matrica krutosti** elementarnog volumena. Ako matricu \mathbf{C} definiranu s E i ν zapišemo s pomoću Laméovih koeficijenata λ i μ , zbog čega trebamo ovisnosti

$$E = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \quad \text{i} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}, \quad (2.3.10)$$

nakon raspisivanja i sređivanja jednadžbi sustava dobivamo poznate Laméove diferencijalne jednadžbe ravnoteže

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x - f_x &= 0 , \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y - f_y &= 0 , \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z - f_z &= 0 . \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Uvođenjem oznaka za gradijent i divergenciju vektorskog polja

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{i} \quad \text{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} , \quad (2.3.12)$$

te Laplaceov operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.3.13)$$

jednadžbe (2.3.11)-(2.3.12) možemo zapisati u vektorskom obliku

$$[(\lambda + \mu)\text{grad div} + \mu\Delta] \mathbf{u} = \mathbf{f} . \quad (2.3.14)$$

Matrica \mathbf{K} sadrži diferencijalne izraze, matrični je zapis diferencijalnog operatora nad vektorom \mathbf{u}

$$\mathcal{K} = (\lambda + \mu)\text{grad div} + \mu\Delta. \quad (2.3.15)$$

Rješenjem sustava jednadžbi (2.3.14) dobivamo komponente vektora \mathbf{u} . Tada možemo izračunati deformacije i naprezanja. Deformacije moraju zadovoljiti uvjete kompatibilnosti, geometrijske zavisnosti nisu jednoznačne. Isto vrijedi i na rubu. Moramo zadovoljiti samo geometrijske rubne uvjete

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}_0, \quad (2.3.16)$$

jer su prirodni rubni uvjeti zadovoljeni diferencijalnim jednadžbama ravnoteže.

Primjer 2.3.2. *Metoda pomaka na štapnom modelu*

Kod statički neodređenih sustava postoji beskonačno mnogo polja pomaka koja su kompatibilna i zadovoljavaju geometrijske rubne uvjete. U primjeru tropoljnog kontinuiranog nosača sve prikazane funkcije su kompatibilne (neprekidne, pomaci jednaki nula u ležajevima). Zbog jedinstvenosti rješenja linearne zadaće samo jedna takva funkcija pomaka zadovoljava uvjete ravnoteže. Potrebno je postaviti uvjete ravnoteže u svakoj točki konstrukcije. Izbor spojeva u čvorovima nije proizvoljan jer moraju zadovoljiti uvjete neprekinutosti. U ovom slučaju nije potreban osnovni sisitem. Raspored spojeva biramo tako da na nastalim dijelovima možemo jednostavnije pretpostaviti oblik kompatibilne funkcije pomaka i jednostavnije riješiti diferencijalne jednadžbe ravnoteže svakog dijela. Postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe za opterećenja vanjskim djelovanjem i pomacima odgovara stanjima pune upetosti i slobodnih pomaka (Građevna statika). Rješenja takvih jednadžbi zadovoljavaju ravnotežu u svim točkama osim u čvorovima. Dobivena rješenja su reakcije dijelova nosača izražene kao funkcije nepoznatih pomaka i zaokteta čvorova. Nepoznanice dobivamo postavljanjem jednadžbi ravnoteže čvorova.

U primjeru tropoljnog kontinuiranog nosača kao čvorove odredimo točke nad ležajevima i pretpostavimo međusobnu punu upetost gređa u čvorovima. Za takve rubne uvjete riješimo diferencijalnu jednadžbu svake gređe. Uvjeti kompatibilnosti su zadovoljeni u svim točkama nosača, a jednadžbe ravnoteže u svim točkama osim u čvorovima. Reakcije gređa nisu u ravnoteži, ravnoteža momenata u čvorovima nije zadovoljena. Reakcije su izražene kao funkcije kuteva zaokreta čvorova. Čvor mora biti u ravnoteži, pa iz uvjeta ravnoteže čvora možemo izračunati reakcije u čvorovima.

Između beskonačno mnogo polja deformacija koje zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti, moramo odabrati ono polje za koje pripadno polje naprezanja zadovoljava uvjete ravnoteže. Neovisno o veličinama pomaka i zaokreta čvorova sustav je uvijek kompatibilan, ali samo je u jednom slučaju u ravnoteži.

3. Jaka formulacija

3.1. Uvod

Metoda pomaka u praktičnom smislu ima znatno veću primjenu od metode sila. Jednostavnije je pronaći skup kompatibilnih polja pomaka nego skup ravnotežnih polja naprezanja (komplicirano rješavanje diferencijalnih ravnoteža složenih konstrukcija kod metode sila). Algoritme potrebne za provedbu metode u nekom programskom jeziku znatno je jednostavnije postaviti po metodi pomaka. Pristup proračunu matematičkog modela pretežno temeljimo na metodi pomaka.

3.2. Problemi pri rješavanju matematičkog modela

Diferencijalne jednačbe trodimenzionalnog područja (kontinuum) temeljene na metodi pomaka možemo konačno zapisati u obliku

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (3.2.1)$$

pri čemu je \mathcal{K} diferencijalni operator koji djeluje na nepoznato vektorsko polje pomaka \mathbf{u} . Rezultat djelovanja diferencijalnog operatora na polju pomaka mora odgovarati poznatom vektorskom polju zadanog vanjskog opterećenja \mathbf{f} jer jednačbe predstavljaju uvjete ravnoteže. Ovakav klasičan pristup matematičkom modelu pomoću diferencijalnog operatora (diferencijalne jednačbe) zovemo **jaka formulacija** zadaće.

Analitičko rješenje zadaće možemo dobiti samo u nekim posebnim slučajevima. Složenije zadaće rješavamo pomoću poluanalitičkog pristupa, potrebne integrale proračunamo numerički ili pretpostavljamo rješenja razvijena u redove. Postupno su razvijene numeričke metode pomoću kojih možemo riješiti i najsloženije zadaće. Za realnu konstrukciju dobivamo velike sustave jednačbi teško rješive raspoloživim računalima. Postoji opasnost od gomilanja numeričke pogreške. Pojedini proračuni traju prilično dugo što posebno stvara problem kod potrebe ponavljanja proračuna. Znatna količina dobivenih rezultata otežava shvaćanje stvarnog ponašanja konstrukcije.

3.3. Pojam podmodela

Zbog složenosti pojedinih rubnih zadaća, s obzirom na oblik tijela, rubne uvjete i opterećenja, možemo uvesti dodatne pretpostavke o stanju

naprezanja i deformacija što povlači jednostavniji matematički model. Takav model nazivamo **podmodel**.

Najjednostavniji primjer podmodela je podmodel štapa. Ako tijelo ima jednu dimenziju dominantno veću od preostale dvije možemo uvesti podmodel štapa. Štap ne moramo promatrati kao 3D kontinuum, dovoljno je uzeti štapni model, pravac težišne osi štapa, a poprečni presjek definirati kao presjek u ravnini okomitoj na težišnu os. Preostale dvije dimenzije uzimamo u obzir definiranjem krutosti. Sva opterećenja, rubne uvjete i naprezanja svodimo na težišnu os. Na taj način za podmodel je svejedno je li štap opterećen po gornjem ili donjem rubu.

Za daljnji proračun takvog podmodela potrebno je uvesti dodatne pretpostavke. Osnovna pretpostavka kojom se koristimo kod proračuna konstrukcija je Bernoullijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka, *poprečni presjeci nakon deformacije ostaju u ravnini okomitoj na deformiranu težišnu os štapa*. Praktično u proračunu tada zanemarujemo utjecaj poprečnih sila na deformaciju, uzimamo u obzir samo deformaciju zbog savijanja. Takva pretpostavka zapravo definira ponašanje polja deformacija, komponente ϵ_x . Komponenta je linearno ovisna o visini nosača i proporcionalna je udaljenosti, (z), promatrane osi od težišne osi (neutralne osi),

$$\epsilon_x = \frac{z}{r}, \quad (3.3.2)$$

gdje je r udaljenost težišne (neutralne osi) od središta zakrivljenosti nosača.

Kod greda kod kojih je omjer raspona i visine poprečnih nosača manji (visokostijeni nosači, $L/H < 5$) takav podmodel više ne može biti korektan. Utjecaj poprečnih sila više ne može biti zanemaren. Hipoteza ravnih poprečnih presjeka više ne vrijedi. Posmična naprezanja τ_{xz} i posmične deformacije γ_{xz} uzrokuju krivljenje poprečnih presjeka. Posmična naprezanja određujemo iz uvjeta ravnoteže u smjeru osi štapa, a nastaju zbog neravnoteže uzdužnih naprezanja na krajevima izdvojenog dijela grede,

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{T_z S_y}{I_y B G}, \quad (3.3.3)$$

gdje je T_z iznos poprečne sile, S_y statički moment promatranog presjeka oko neutralne osi, B širina poprečnog presjeka, a G modul posmika.

Kod greda s većim odnosom raspona i visine poprečnog presjeka, krivljenje duž nosača je malo i možemo zanemariti posmičnu deformaciju ($\gamma_{xz} \approx 0$) i pretpostavka o ravnim poprečnim presjecima predstavlja dobru aproksimaciju ponašanja konstrukcije. Rezultat takve aproksimacije je diferencijalna jednadžba ravnoteže koja ima samo jednu komponentu pomaka w

ovisnu o koordinati x .,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] = q_z(x) , \quad (3.3.4)$$

gdje je $q_z(x)$ poprečno opterećenje štapa, $E(x)$ modul elastičnosti štapa, a $I_y(x)$ moment tromosti poprečnog presjeka oko osi y . Uz konstanti poprečni presjek i modul elastičnosti, te uz dodatnu pretpostavku malih zaokreta (geometrijska linearizacija, $(dw/dx)^2 \ll 1$) dobivamo poznatu diferencijalnu jednadžbu progiba

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q_z(x)}{EI_y} . \quad (3.3.5)$$

Kod manjih odnosa raspona i visine poprečnog presjeka na oblik progibne linije značajnije utječe poprečna sila. Između ostalog i zato što je utjecaj savijanja zbog relativno velikog momenta tromosti zapravo prilično mali. Takav utjecaj uzimamo u obzir koristeći se Timošenkovom diferencijalnom jednadžbom. Prema Timošenkovoj pretpostavci poprečni presjeci ostaju u ravnini, ali više nisu okomiti na deformiranu neutralnu os štapa. Na taj način uvjetujemo konstantnu posimčnu deformaciju što povlači i konstantna posmična naprezanja.

Možemo spomenuti da postoje i druge varijante podmodela štapa. Štap koji preuzima samo uzdužne sile možemo prikazati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{q_x(x)}{EF} , \quad (3.3.6)$$

gdje je F površina poprečnog presjeka, a $q_x(x)$ opterećenje u smjeru uzdužne osi štapa. Kod štapova s vrlo malim momentom tromosti ($I_y \rightarrow 0$), podmodel štapa zapravo je podmodel užeta koji opisujemo diferencijalnom jednadžbom užeta napetog konstantom silom N

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q_z(x)}{N} . \quad (3.3.7)$$

Osnovni podmodeli, uz podmodel štapa, su podmodeli ploče, ljske i zidnog nosača. Podmodel ploče dobivamo ako pretpostavke podmodela štapa primijenimo u dvije dimenzije.. Ploča je tijelo kojem je jedna dimenzija (debljina ploče h) znatno manja od preostale dvije dimenzije. Primjenom Bernoullijeve hipoteze na ploču dobivamo Kirchhoffovu teoriju tankih ploča,

$$\frac{\partial^4w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D} , \quad (3.3.8)$$

gdje je D krutost ploče,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} . \quad (3.3.9)$$

Poopćenjem Timošenkovih pretpostavki na ploče dobivamo Mindlinovu diferencijalnu jednadžbu debelih ploča. Ako je debljina ploče sve manja, ploča gubi krutost na savijanje i postaje membrana čije ponašanje je opisano linearnom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q_z}{S} , \quad (3.3.10)$$

gdje je S napetost membrane. Prostorno zakrivljene nosače kod kojih je jedna dimenzija znatno manja od ostale dvije zovemo ljuske. Kao i kod ploča, postoje teorije tankih i debelih ljuski.

3.4. Osnovna lema - integralni oblik jake formulacije

3.4.1. Pojam reziduala

Jaku formulaciju možemo zapisati i u obliku

$$\mathbf{f} - \mathcal{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} , \quad (3.4.11)$$

odnosno uvesti **funkciju reziduala**

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathcal{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} . \quad (3.4.12)$$

Fizikalno, funkcija reziduala predstavlja neuravnoteženo opterećenje. Kod analitičkog rješenja diferencijalne jednadžbe funkcija reziduala uvijek je jednaka nul-funkciji. Kod približnog, numerički dobivenog rješenja, funkcija reziduala različita je od nul-funkcije, jer se približno rješenje $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$ razlikuje od analitičkog rješenja. Uslijed toga nisu zadovoljeni uvjeti ravnoteže. Uvrštavanjem približnog rješenja u diferencijalnu jednadžbu ne vrijedi više jednakost

$$\mathbf{f} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) \neq \mathbf{0} . \quad (3.4.13)$$

Prirodno je pri numeričkom rješavanju rubne zadaće tražiti rješenje sa što manjim odstupanjem

$$\mathbf{f} - \mathcal{K}(\mathbf{u}) \simeq \mathbf{0} . \quad (3.4.14)$$

3.5. Osnovna lema

Uvodimo globalnu (integralnu) procjenu kakvoće odstupanja definiranu izrazom

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r} \psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{f} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}})] \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad (3.5.15)$$

pri čemu su \mathbf{r} i ψ_i neprekidne funkcije. Funkciju ψ_i zovemo **test funkcijom**. Ako izraz (3.5.15) vrijedi za bilo koju neprekidnu test funkciju, tada je $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pa je jaka formulacija zadovoljena. Jednostavno je uočljivo da vrijedi i obrat. Ako znamo analitičko rješenje jednadžbe, tada je $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pa vrijedi izraz (3.5.15). Izraz (3.5.15) zovemo **osnovna lema varijacijskog računa**.

4. Slaba formulacija

Osnovna lema je zapravo samo drugačiji zapis jake formulacije. Lema ima smisla jer je diferencijalnu jednadžbu teže riješiti nego pripadni integral osnovne leme. U istom smislu zadržavamo se na integralnom pristupu, ali uz umanjene zahtjeve

- funkcija reziduala može biti prekidna,
- skup test funkcija je prilično sužen.

Prvi ustupak nije problematičan, integral prekidne funkcije možemo odrediti. Prema drugom ustupku test funkcija koja ispunjava osnovnu lemu nije više proizvoljna nego je iz nekog konačnog skupa od n funkcija. Taj skup označimo sa S . Na taj način osnovnu lemu možemo zadovoljiti samo približno, pa govorimo o **slaboj formulaciji** rubne zadaće

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r}\psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{f} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}})] \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad \psi_i \in S, \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (4.0.16)$$

Pomaci $\bar{\mathbf{u}}$ predstavljaju zapravo točno rješenje, ali za približno opterećenje $\bar{\mathbf{f}}$, zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$\mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{f}} \quad . \quad (4.0.17)$$

Sada formulaciju (4.0.16) možemo zapisati u obliku

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r}\psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad \psi_i \in S, \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (4.0.18)$$

Ako su jednadžbe (4.0.16) i (4.0.18) zadovoljene za svaku test funkciju iz skupa S , tada je slaba formulacija zadovoljena. Izrazi u zagradama tada moraju biti jednaki nuli pa dobivamo

$$\mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{f} \text{ i } \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \quad . \quad (4.0.19)$$

U smislu slabe formulacije približno rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu, a približno je opterećenje dobra aproksimacija vektora desne strane jednadžbe. Jasno je da svako rješenje jake formulacije zadovoljava i jednadžbe (4.0.16) i (4.0.18). S obzirom da je za praktične potrebe teško riješiti diferencijalnu jednadžbu, a ako i uspijemo riješiti onda nam slaba formulacija nije potrebna, nama je važno da li rješenje koje zadovoljava slabu formulaciju jamči zadovoljenje jake formulacije.

Rješenje koje zadovoljava slabu formulaciju **ne jamči** zadovoljenje jake formulacije, ali takvo rješenje može biti **dovoljno dobro** s fizikalnog stanovišta.

4.1. Zaključno o slaboj formulaciji

Jaka formulacija ima jedinstveno i točno rješenje. Slaba formulacija može imati **beskonačno mnogo prihvatljivih** rješenja. Za razliku od jakog rješenja, slabo rješenje **nije osjetljivo na promjene** koje variraju oko točnog rješenja.

Fizikalno gledano sve funkcije opterećenja koje zadovoljavaju slabu formulaciju su prihvatljiva rješenja. Pod takvim opterećenjem dobivamo približno iste progibe. U smislu jake formulacije sve takve funkcije su loše jer uvijek vrijedi $r \neq 0$. U praktičnom smislu, jednostavnije je pronaći jedno rješenje iz skupa dovoljno dobrih rješenja nego tražiti samo jedno točno rješenje. Pogotovo treba uzeti u obzir da niti točno rješenje modela ne može u potpunosti odgovarati rješenju realne zadaće. Zbog toga nije potrebno uvijek inzistirati na točnosti koju dobivamo rješenjem jake formulacije. Model koji rješavamo već je idealizacija realne zadaće, pa je zbog toga i njegovo točno rješenje zapravo rješenje idealnog slučaja stvarne zadaće.

Osnovna je ideja naći približnu funkciju opterećenja \bar{q} kako bismo jednostavnije riješili diferencijalnu jednadžbu podmodela $\mathcal{K}(\bar{w}) = \bar{q}$ i dobili dovoljno dobru aproksimaciju pomaka \bar{w} .

5. Aproksimacija funkcije pomaka

5.1. Uvod u aproksimaciju pomaka

Promatramo funkciju pomaka štapa $w(x)$. Osnovna je ideja postupka rješavanja rubne zadaće, dodatno pojednostavljenje, razviti funkciju pomaka u konačan red. Funkciju pomaka možemo razviti u beskonačni red, Taylorov red oko točke x_0 ,

$$w(x) = w(x_0) + \frac{dw}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2w}{dx^2}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (5.1.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n w}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad . \quad (5.1.21)$$

Funkcije reda, polinomi $(x - x_0)^n, n = 0, 1, \dots, \infty$, čine potpuni skup funkcija. Takva je aproksimacija kod nekih funkcija dobra i na nekom intervalu $I = (x_a, x_b)$. Tada funkcija na tom intervalu mora biti beskonačno puta derivabilna (klase C^∞) i $[x_0, x] \in I$. Za potpuni skup funkcija možemo uzeti i trigonometrijske funkcije. Funkciju pomaka razvijamo u Fourierov red

$$w(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad , \quad (5.1.22)$$

pri čemu su

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \cos nxdx \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \sin nxdx \quad . \quad (5.1.23)$$

Za razvoj u Fourierov red funkcija $w(x)$ mora biti integrabilna na intervalu $[\pi, \pi]$.

Uzimanjem u obzir većeg broja članova reda vrijednost aproksimacije postaje sve bliža stvarnoj vrijednosti funkcije. Za relane parametre funkcije pomaka, već i uzimanje prvih nekoliko članova može svesti aproksimaciju funkcije pomaka na vrlo prihvatljivu razinu. Takvu aproksimaciju funkcije pomaka zovemo **diskretizacija** funkcije pomaka. Pogreška približnog rješenja reda je veličine prvog zanemarenog člana reda. Prema ideji diskretizacije, konačan red možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} w(x) \approx \bar{w}(x) &= \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i(x) = [\varphi_1(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varphi}(x)^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}(x) \quad , \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

gdje su funkcije $\varphi_i(x), i = 1, \dots, k$ funkcije reda (bazne funkcije, koordinatne funkcije), a $a_i, i = 1, \dots, k$ skalarni članovi (amplitude baznih funkcija). Osnovi problem pri rješavanju rubne zadaće je činjenica da funkcija $w(x)$ nije unaprijed poznata. Zbog toga ne možemo odrediti funkcije $\varphi_i(x)$ u Taylorovom redu ili koeficijente a_i u Fourierovom redu. Funkcije $\varphi_i(x)$ možemo odabrati unaprijed, tako da uz što manje članova reda što bolje aproksimiramo traženu funkciju pomaka.

5.2. Slaba formulacija u diskretnom obliku

Primijenimo aproksimaciju funkcije pomaka na matematičke podmodele za određivanje polja pomaka konstrukcije. Pri određivanju progiba nosača nepoznata je samo jedna komponenta polja pomaka (w) koju možemo zapisati u obliku

$$w \approx \bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad , \quad (5.2.25)$$

gdje je \bar{w} približni oblik progibne linije. Uz takvu diskretizaciju (5.2.25) slaba formulacija poprima oblik

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i [q_z - \mathcal{K}(\bar{w})] d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[q_z - \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right) \right] d\bar{\Omega} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad . \quad (5.2.26)$$

Ovakav oblik slabe formulacije povećanjem broja članova reda konvergira u limesu prema jakoj formulaciji. Diskretni oblik funkcije opterećenja poprima oblik

$$\bar{q}_z = \mathcal{K}(\bar{w}) = \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right) \quad . \quad (5.2.27)$$

U primjeru trodimenzionalne rubne zadaće jednadžbu (5.2.25) možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = [\mathbf{N}_1 \dots \mathbf{N}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad . \quad (5.2.28)$$

Vektorsko polje $\bar{\mathbf{u}}$ sadrži skalarne funkcije, a vektori \mathbf{a}_i sadrže brojeve

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}] \quad , \quad (5.2.29)$$

$$\mathbf{a}_i = [a_{x,i} \quad a_{y,i} \quad a_{z,i}] \quad . \quad (5.2.30)$$

Članovi matrice \mathbf{N} su podmatrice

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_i \end{bmatrix} = \varphi_i \mathbf{I} \quad . \quad (5.2.31)$$

Prema aproksimaciji funkcije pomaka (5.2.28) slabu formulaciju možemo zapisati

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i [\mathbf{f} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}})] d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[\mathbf{f} - \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{N}_j \mathbf{a}_j \right) \right] d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.2.32)$$

a približno opterećenje

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{N}_j \mathbf{a}_j \right) \quad . \quad (5.2.33)$$

Opisanom diskretizacijom matematički model prelazi u **numerički model**.

5.3. Sustav linearnih jednadžbi

Primjenom diskretnog oblika slabe formulacije dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi numeričkog modela. Promatramo jednodimenzionalni model (5.2.27). Operator \mathcal{K} je linearan. To znači da vrijedi

$$\mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right) = \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{K}(\varphi_j) = 0 \quad . \quad (5.3.34)$$

Slaba formulacija (5.2.26) poprima oblik

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[q_z - \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{K}(\varphi_j) \right] d\bar{\Omega} = 0; \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.3.35)$$

a nakon množenja izraza u zagradi s test funkcijom

$$\int_{\bar{\Omega}} \left[\psi_i q_z - \sum_{j=1}^k a_j \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) \right] d\bar{\Omega}; \quad i = 1, \dots, k \quad . \quad (5.3.36)$$

Integral sum po dijelovima neprekidnih funkcija jednak je sumi integrala (koordinatne funkcije u najgorem slučaju moraju biti barem po dijelovima

neprekidne jer moraju aproksimirati strogo neprekidnu funkciju progiba). Tada izraz (5.3.36) možemo zapisati u obliku

$$\sum_{j=1}^k a_j \int_{\bar{\Omega}} \psi_j \mathcal{K}(\varphi_j) d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_j q_z d\bar{\Omega};, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.3.37)$$

Raspisivanjem zborja dobivamo sustav jednadžbi koji možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 q_z d\bar{\Omega} \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 q_z d\bar{\Omega} \\ \vdots \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_k q_z d\bar{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (5.3.38)$$

Sustav možemo pisati u skraćenom obliku

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{q}, \quad (5.3.39)$$

pri čemu su članovi matrice \mathbf{K} i vektora \mathbf{q} brojevi

$$K_{ij} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) d\bar{\Omega} \quad \text{i} \quad q_i = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i q_z d\bar{\Omega}. \quad (5.3.40)$$

Broj test funkcija ψ_i odgovara broju koordinatnih funkcija φ_i , odnosno broju članova reda k . Zato je matrica \mathbf{K} kvadratna, a sustav algebarskih jednadžbi je linearan jer je temeljen na linearnom matematičkom modelu. Članovi matrice sustava ne ovise o nepoznatim parametrima a_i . Zbog toga je matrica \mathbf{K} regularna i ima inverz što povlači da sustav mora imati jedinstveno rješenje

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}. \quad (5.3.41)$$

Dobiveni koeficijenti a_i uvršteni u (5.2.25) daju aproksimaciju progiba. Tek aproksimacijom funkcije progiba unutar slabe formulacije dobivamo numerički model s konačnim brojem nepoznanica koji možemo prikazati sustavom linearnih algebarskih jednadžbi. Na taj način više ne rješavamo diferencijalnu jednadžbu kontinuiranog modela.

6. Metoda konačnih razlika

6.1. Aproksimacija pomaka metodom konačnih razlika

Klasičan pristup diskretizaciji matematičkog modela temelji se na metodi konačnih razlika. Potrebno je približno riješiti diferencijalnu jednadžbu u određenom broju točaka. Tražimo da u tim točkama rezidual bude jednak nuli. Bit aproksimacije metodom konačnih razlika je u zamjeni derivacije (nagiba tangente) konačnom razlikom (nagibom sekante) na krivulju progiba. Ako pretpostavimo jednaki razmak među točkama (h), možemo pisati

$$w'(x_i) \approx \bar{w}'(x_i) = \tan \alpha = \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (6.1.1)$$

Nagib tangente funkcije $w(x)$ u točki $(x_i, w(x_i))$ aproksimiramo nagibom sekante kroz točke $(x_i - h, w(x_i - h))$ i $(x_i + h, w(x_i + h))$. Ako razmak točaka h teži nuli, jednadžba (6.1.1) zapravo je klasična definicija prve derivacije funkcije

$$w'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (6.1.2)$$

Pogrešku aproksimacije derivacije možemo odrediti pomoću razvoja funkcije u Taylorov red i procjene vrijednosti progiba u točkama $x_i + h$ i $x_i - h$,

$$\begin{aligned} w(x_i + h) &= w(x_i) + hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) + \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad , \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned} w(x_i - h) &= w(x_i) - hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) - \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Ako oduzmemo drugu jednadžbu od prve jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} w(x_i + h) - w(x_i - h) &= 2hw'(x_i) + 2\frac{1}{6}h^3w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + 2\frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}h^{2k-1}w^{(2k-1)}(x_i) + \dots \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Ako podijelimo jednadžbu s $2h$ slijedi

$$\begin{aligned} \frac{w(x_i + h) - w(x_i - h)}{2h} &= w'(x_i) + \frac{1}{3!}h^2w'''(x_i) + \frac{1}{5!}h^4w^{(5)}(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^{2k}}{(2k+1)!}w^{(2k+1)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Vidimo da aproksimacijom prve derivacije lijevom strane jednadžbe odbacujemo članove uz h^2 i više potencije korak h što znači da je pogreška proporcionalna s h^2 i pišemo $\mathcal{O}(h^2)$.

Na isti način možemo odrediti i aproksimaciju druge derivacije

$$\begin{aligned} w''(x_i) = (w'(x_i))' &\approx \bar{w}''(x_i) = \frac{1}{h} [w'(x_i + h/2) - w'(x_i - h/2)] \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{h} [w(x_i + h) - w(x_i)] - \frac{1}{h} [w(x_i) - w(x_i - h)] \right\} \\ &= \frac{w(x_i + h) - 2w(x_i) + w(x_i - h)}{h^2} . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Za rubne zadaće u analizi konstrukcija potrebne su nam i aproksimacije treće i četvrte derivacije. Njihove aproksimacije metodom konačnih razlika su

$$\bar{w}'''(x_i) = \frac{w(x_i + 2h) - 2w(x_i + h) + 2w(x_i - h) - w(x_i - 2h)}{2h^3} , \quad (6.1.8)$$

$$\bar{w}''''(x_i) = \frac{w(x_i + 2h) - 4w(x_i + h) + 6w(x_i) - 4w(x_i - h) + w(x_i - 2h)}{h^4} . \quad (6.1.9)$$

Postupak proračuna rubne zadaće provodimo diskretizacijom područja definiranjem n čvorova na razmaku h i za svaki čvor napišemo jednadžbu konačnih razlika, ovisno o stupnju derivacije diferencijalne jednadžbe rubne zadaće. Izraz (6.1.1) je točan samo ako je progibna linija $w(x)$ parabola (tada su tangenta u x_i lokalnom tjemenu parabole i pripadna sekanta kroz $x_i - h$ i $x_i + h$ paralelne). Funkciju $w(x)$ na segmentu $[x_i - h, x_i + h]$ aproksimirali smo zapravo linearnom kombinacijom triju parabola φ_j , $j = 1, 2, 3$

$$w(x) \approx \bar{w}(x) = \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j , \quad (6.1.10)$$

pri čemu su parabole φ_j i pripadni koeficijenti linearne kombinacije a_j

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 - \frac{x - x_i}{h} \right] , & a_1 &= w(x_i - h) , \\ \varphi_2 &= 1 - \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 , & a_2 &= w(x_i) , \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 + \frac{x - x_i}{h} \right] , & a_3 &= w(x_i + h) . \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Koeficijenti linearne kombinacije a_j su zapravo vrijednosti progiba u čvorovima. Jednadžbe konačnih razlika možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{K} \left[\sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j \right] (x_i) = q_z(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (6.1.12)$$

6.2. Numerički primjeri

Primjer 6.2.1. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*

Diferencijalna jednačina progibne linije grede glasi

$$(E(x)I(x)w'')'' = q(x) \quad . \quad (6.2.13)$$

Ako uzmemo u obzir da su poprečni presjek i modul elastičnosti konstantni uzduž grede, a opterećenje jednoliko distribuirano, jednačina glasi

$$EIw^{(iv)} = q \quad . \quad (6.2.14)$$

Zadana greda je na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \quad , \quad (6.2.15)$$

$$w(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0 \quad . \quad (6.2.16)$$

Gredu (područje) podijelimo na k jednakih dijelova, $h = L/k$, a čvorove ($k + 1$ čvorova) podjele označimo $x_i = ih, i = 0, \dots, k$ (diskretizacija područja).

Vrijednosti funkcije progiba i potrebne derivacije u čvorovima možemo kraće zapisati kao

$$w(x_i) = w_i \quad , \quad w'(x_i) = w'_i \quad \dots \quad (6.2.17)$$

U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednačina progiba. Jednačinu možemo zapisati za svaki čvor x_i

$$EIw_i^{(iv)} = q \quad . \quad (6.2.18)$$

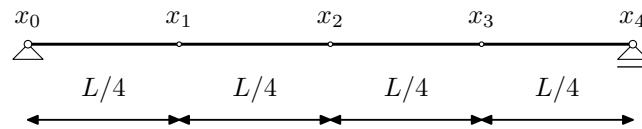
Aproksimacija potrebne četvrte derivacije u smislu metode konačnih razlika glasi

$$w_i^{iv} \approx \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] \quad . \quad (6.2.19)$$

Ako za svaki čvor x_i raspišemo pripadnu jednačinu dobivamo $k + 1$ jednačina. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i , u jednačinama za krajnja dva čvora javljaju se

i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k + 5$ nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe u čvorovima x_0 i x_k uzmemo jednadžbe za geometrijske rubne uvjete (zadane vrijednosti progiba) u ležajnim čvorovima. Za proračun progiba u čvorovima x_{-1} i x_{k+1} izvan područja uzmemo jednadžbe za iznose momenata u ležajnim čvorovima.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$. Za svaki čvor raspíšemo



Slika 6.2.1: Podjela grede na čvorove, $h = L/4$

pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$EI \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q \quad . \quad (6.2.20)$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.2.21)$$

U jednadžbama se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi i zadnji čvor uvodimo geometrijske rubne uvjete, $w_0 = 0$ i $w_4 = 0$. Za proračun vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove x_1 i x_3 iskoristit ćemo rubne uvjete $M_0 = 0$ i $M_4 = 0$. Momente proračunavamo prema izrazu

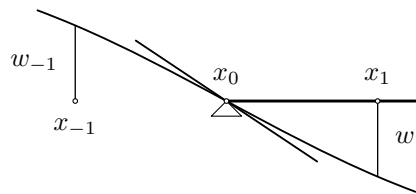
$$M(x) = -EIw''(x) \quad . \quad (6.2.22)$$

Za čvorove x_0 i x_4 slijede jednačbe

$$M_0 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_{-1} - 2w_0 + w_1] \quad , \quad (6.2.23)$$

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5] \quad . \quad (6.2.24)$$

U izrazima imamo još uvijek vrijednosti progiba u točkama izvan područja. Potrebno je izraziti vrijednosti progiba u tim točkama preko vrijednosti progiba u točkama unutar područja. U točkama u kojima je moment jednak nuli očito je i druga derivacija progiba jednaka nuli ($w'' = 0$) što znači da su to ujedno i točke infleksije. Zbog toga možemo funkciju progiba izvan područja aproksimirati kao antimetričnu funkciji progiba unutar područja, $w_{-i} = w_i$. To znači da vrijedi $w_{-1} = w_1$ i $w_5 = w_3$. Sustav jednačbi sada



Slika 6.2.2: Aproksimacija vrijednosti izvan područja oko slobodno oslonjenog ležaja

glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.2.25)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{512} \frac{qL^4}{EI} \quad , \quad w_2 = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI} \quad . \quad (6.2.26)$$

Pogreška rješenja dobivenog metodom konačnih razlika iznosi 5%.

Momente u čvorovima grede proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EI w''(x) \quad ,$$

$$M_i = -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}] \quad . \quad (6.2.27)$$

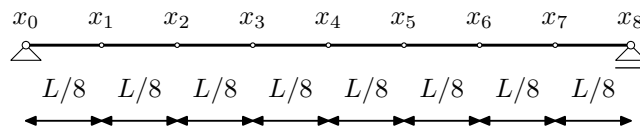
Na taj način momenti u sredini i četvrtini raspona iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (5 - 2 \cdot 7 + 5) = \frac{qL^2}{8} \quad , \quad (6.2.28)$$

$$M_{L/4} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (0 - 2 \cdot 5 + 7) = \frac{3qL^2}{32} \quad , \quad (6.2.29)$$

i jednaki su stvarnim momentima u tim točkama.

Ako podijelimo gredu na 8 dijelova, $h = L/8$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, 8$, rješenje



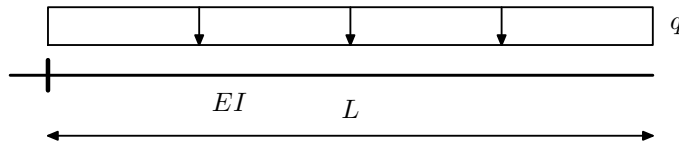
Slika 6.2.3: Podjela grede na čvorove, $h = L/8$

u sredini raspona glasi

$$w_4 = \frac{54}{4096} \frac{qL^4}{EI} . \quad (6.2.30)$$

Pogreška iznosi 1,25%, što je četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela. Metoda konačnih razlika kvadratno konvergira, n puta manji korak povlači n^2 puta manju pogrešku, što u našem primjeru znači da dvostruko manji korak mreže čvorova povlači četiri puta manju pogrešku.

Primjer 6.2.2. *Metodom konačnih razlika odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*



Slika 6.2.1: Konzolna greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

Konzolna greda je na jednom kraju upeta, a drugi kraj je potpuno slobodan, što znači da su progib i kut zaokreta na upetom ležaju jednaki nuli, a na slobodnom kraju moment i porečna sila jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

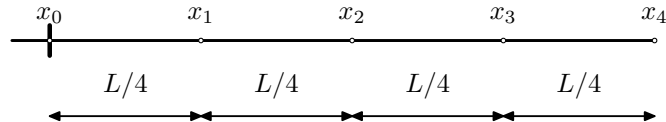
$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad (6.2.1)$$

$$T(L) = -EIw'''(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \quad . \quad (6.2.2)$$

Ako za svaki čvor x_i raspišemo pripadnu jednadžbu dobivamo $k + 1$ jednadžbi. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i , u jednadžbama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama

izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k + 5$ nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe za čvor x_0 uzmemo geometrijski rubni uvjet $w_0 = 0$, a za proračun vrijednosti progiba w_{-1} iskoristit ćemo prirodni rubni uvjet $w'_0 = 0$. Za proračun progiba w_{k+1} i w_{k+2} izvan područja iskoristit ćemo jednadžbe za moment i poprečnu silu u čvoru na slobodnom kraju konzolne grede.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$. Za svaki čvor raspišemo



pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$EI [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q \quad . \quad (6.2.3)$$

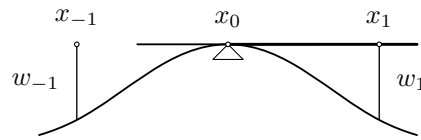
Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.2.4)$$

U jednadžbi se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi čvor x_0 uvodimo geometrijski rubni uvjet, $w_0 = 0$. Za proračun potrebnih vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove x_1, x_3 i x_4 iskoristit ćemo rubne uvjete $w'_0 = 0, M_4 = 0$ i $T_4 = 0$. Kut zaokreta tangente na progibnu liniju u čvoru x_0 jednak je nuli. Progibnu funkciju izvan područja možemo aproksimirati kao simetričnu progibnoj funkciji unutar područja, $w_{-1} = w_1$.

Momente proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EIw''(x) \quad . \quad (6.2.5)$$



Za moment u čvoru x_4 slijedi jednačba

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5] \quad (6.2.6)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_5

$$w_5 = 2w_4 - w_3 \quad . \quad (6.2.7)$$

Poprečne sile proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EI w'''(x) \quad . \quad (6.2.8)$$

Za poprečnu silu u čvoru x_4 slijedi jednačba

$$T_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^3} [w_2 - 2w_3 + 2w_5 - w_6] \quad (6.2.9)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_6

$$\begin{aligned} w_6 &= w_2 - 2w_3 + 2w_5 \\ &= w_2 - 2w_3 + 2(2w_4 - w_3) \\ &= w_2 - 4w_3 + 4w_4 \quad . \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Jednačba sustava sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.2.11)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI} \quad , \quad w_2 = \frac{25}{512} \frac{qL^4}{EI} \quad , \\ w_3 &= \frac{23}{256} \frac{qL^4}{EI} \quad , \quad w_4 = \frac{17}{128} \frac{qL^4}{EI} \quad . \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Pogreška rješenja dobivenog metodom konačnih razlika iznosi 6,25%.

Momente u čvorovima proračunavamo prema izrazu

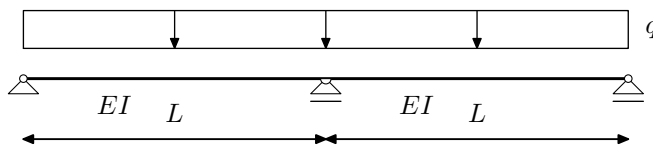
$$\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x) \quad , \\ M_i &= -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}] \quad . \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Na taj način moment na upetom ležaju iznosi

$$M_0 = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{64EI} \cdot 2 = \frac{qL^2}{2} \quad , \quad (6.2.14)$$

i jednak je stvarnom momentu na upetom ležaju.

Primjer 6.2.3. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini raspona kontinuirane grede preko dva jednaka raspona duljine L , konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q duž oba raspona*



Slika 6.2.1: Kontinuirana greda preko dva raspona opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

Zadana greda je na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. Rubni uvjeti za krajeve i za srednji nepomični ležaj glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \quad , \quad (6.2.1)$$

$$w(L) = 0 \quad , \quad (6.2.2)$$

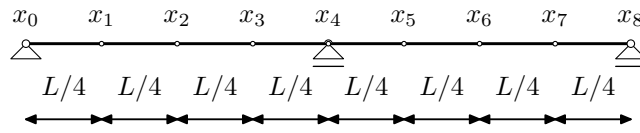
$$w(2L) = 0 \quad , \quad M(2L) = -EIw''(2L) = 0 \Rightarrow w''(2L) = 0 \quad . \quad (6.2.3)$$

U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednadžba progiba. Jednadžbu možemo zapisati za svaki čvor x_i

$$EIw_i^{(iv)} = q \quad . \quad (6.2.4)$$

Podijelimo gredu na osam dijelova jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, 8$. Za svaki čvor raspišemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$\frac{EI}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q \quad , \quad (6.2.5)$$

Slika 6.2.2: Podjela grede na čvorove, $h = L/4$

iskoristimo rubne uvjete i dobivamo sustav jednačbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$\begin{aligned} w_1 &= w_7 = \frac{15}{2816} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_2 &= w_6 = \frac{37}{5632} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_3 &= w_5 = \frac{5}{1408} \frac{qL^4}{EI}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Pogreška rješenja dobivenog metodom konačnih razlika u sredini raspona iznosi 26,1%.

Momenti u sredini raspona i na srednjem ležaju iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{5632EI} (30 - 2 \cdot 37 + 20) = \frac{3qL^2}{44}, \quad (6.2.8)$$

$$M_L = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{1408EI} (2 - 2 \cdot 0 + 2) = -\frac{5qL^2}{44}, \quad (6.2.9)$$

pri čemu su odstupanja od analitičkih vrijednosti

$$\Delta_{L/2} = \Delta_L = 9,1\%. \quad (6.2.10)$$

Podjelom grede na 16 jednakih dijelova, $h = L/8$, progib u sredini raspona iznosi

$$w_{(L/2)} = \frac{6357}{1144832} qL^4 EI = \frac{qL^4}{180,1EI}, \Delta = 6,6\%, \quad (6.2.11)$$

moment na srednjem ležaju iznosi

$$M(L) = -\frac{227}{2236}qL^2 = -\frac{qL^2}{8,19}, \quad \Delta_L = 2,3\%, \quad (6.2.12)$$

a moment u sredini polja iznosi

$$M(L/2) = \frac{143}{2236}qL^2 = \frac{qL^2}{15,636}, \quad \Delta_{L/2} = 2,3\%. \quad (6.2.13)$$

7. Ritzova metoda

7.1. Uvod

Ritzova metoda temelji se na integralnoj (slaboj) formulaciji. Metoda ne polazi od reziduala diferencijalne jednadžbe, već od funkcionala energije matematičkog modela. Zadaća je svedena na određivanje minimuma ukupne potencijalne energije linearnog elastičnog modela. Takvu ukupnu potencijalnu energiju uz geometrijske ovisnosti i rubne uvjete po pomacima zovemo Lagrangeov funkcional energije. Funkcional ima oblik

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{f} \mathbf{u} d\bar{\Omega} - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \mathbf{u} d\Gamma \quad . \quad (7.1.1)$$

Prvi član funkcionala predstavlja potencijalnu energiju deformacija, a drugi i treći član potencijal (rad s negativnim predznakom) volumenskih i površinskih sila. Znamo da prema metodi pomaka sva nepoznata polja možemo svesti na nepoznato polje pomaka. Tada prvi član funkcionala neće biti ovisan o nepoznatom polju naprezanja i deformacija nego o nepoznatom polju pomaka. Pomoću $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ što povlači $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C}^T$, uz $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, i $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ što povlači $\boldsymbol{\epsilon}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T$, prvi član funkcionala energije možemo zapisati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} d\bar{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\bar{\Omega} \quad , \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

pa izraz za potencijalnu energiju glasi

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{f} \mathbf{u} d\bar{\Omega} - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \mathbf{u} d\Gamma \quad . \quad (7.1.3)$$

Na funkcional u takvom obliku, izraženom preko nepoznatog polja pomaka, primijenimo Ritzovu ideju. Funkcional diskretiziramo umetanjem poznatog oblika za približno rješenje polja pomaka

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \quad , \quad (7.1.4)$$

i tražimo minimum tako diskretiziranog funkcionala. Dobivamo sustav algebarskih jednadžbi s nepozatim koeficijentima, članovima vektora \mathbf{a}_j . Uvrštavanjem koeficijenata možemo raspisati približno polje pomaka. Ovakav način je također diskretna aproksimacija slabe formulacije.

7.2. Savijanje štapa Ritzovom metodom

7.2.1. Potencijalna energija savijanja štapa

Usvajanjem podmodela štapa transformira izraz za funkcional energije (7.1.1). Integrale po volumenu $\bar{\Omega}$ rastavljamo na integrale po osi duljine štapa L i površini poprečnog presjeka $F(x)$. Površinski integral možemo prikazati kao integral po opterećenom dijelu i širini djelovanja. Uz pretpostavku ravnih poprečnih presjeka, posmične deformacije ne ulaze u izraz za energiju. Funkcional potencijalne energije štapa možemo pisati

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} \sigma_x \epsilon_x dF \right) dx \\ & - \int_0^L \left(\int_{F(x)} f_z w dF \right) dx - \int_{x_q}^{x_q+l_q} \left(\int_{y_q(x)}^{y_q(x)+b_q(x)} q_z w dy \right) dx \quad , \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

gdje je f_z volumenska sila po jedinici volumena štapa, a q_z površinska sila po štapu. Prvi integral izražen je preko nepoznatih naprezanja i defromacija, a ideja je izraziti taj integral preko nepoznatog pomaka w . Za uzdužnu deformaciju po visini poprečnog presjeka znamo da vrijedi

$$\epsilon_x = \frac{z}{r} = z\rho \quad , \quad (7.2.6)$$

gdje je z udaljenost od težišne osi, a ρ zakrivljenost progibne linije

$$\rho = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad (7.2.7)$$

Uz pretpostavku malih zaokreta zakrivljenost možemo linearizirati

$$\rho \approx \frac{d^2 w}{dx^2} \quad ; \quad (7.2.8)$$

što daje izraz za uzdužnu deformaciju u obliku

$$\epsilon_x = z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad . \quad (7.2.9)$$

Prema zakonu ponašanja znamo da je $\sigma_x = E\epsilon_x$. Prvi integral funkcionala energije možemo onda transformirati

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} \sigma_x \epsilon_x dF \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} E \epsilon_x^2 dF \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_{F(x)} E \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 z^2 dF \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[E \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \int_{F(x)} z^2 dF \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad . \quad (7.2.10)
 \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da su volumne sile konstantne po površini, $f_z = const.$, a površinske po rubu, $q_z = const.$, i uz oznake $p_{f_z}(x) = f_z F(x)$, $p_{q_z}(x) = q_z b_q(x)$, drugi i treći integral funkcionala su

$$\int_0^L \left(\int_{F(x)} f_z w dF \right) dx = \int_0^L p_{f_z} w dx \quad (7.2.11)$$

$$\int_{x_q}^{x_q+l_q} \left(\int_{y_q(x)}^{z_q(x)+b_q(x)} q_z w dy \right) = \int_{x_q}^{x_q+l_q} q_{f_z} w dx \quad . \quad (7.2.12)$$

Izraz za potencijalnu energiju štapa sada glasi

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L p_{f,z} w dx - \int_{x_q}^{x_q+l_q} q_{f,z} w dx \quad . \quad (7.2.13)$$

Energija ovisi samo o progibu (vertikalnom pomaku) w . Znači da smo uvođenjem štapnih pretpostavki potencijalnu energiju trodimenzionalnog modela transformirali u potencijalnu energiju osi štapa.

U praktičnom smislu, oba tipa opterećenja štapa zamijenimo poprečnim opterećenjem težišne osi štapa, $q_z(x)$, definiranim kao funkcija položaja na

osi štapa, (x) u poprečnom smjeru, (z), pa slijedi izraz za potencijalnu energiju štapa

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L q_z w dx \quad . \quad (7.2.14)$$

7.2.2. Diskretni oblik potencijalne energije

Izraz za približno rješenje funkcije progiba \bar{w}

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad (7.2.15)$$

možemo uvrstiti u izraz za potencijalnu energiju štapa (7.2.13) i dobivamo približni i diskretni izraz za potencijalnu energiju štapa

$$\Pi(\bar{w}) = \Pi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\sum_{i=1}^k a_i \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L q_z \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i dx \quad . \quad (7.2.16)$$

7.3. Minimizacija potencijalne energije u diskretnom obliku

Nakon diskretizacije potencijalne energije štapa, na izraz u diskretnom obliku možemo primijeniti teorem o minimumu potencijalne energije:

Tijelo u ravnoteži ima ekstremnu vrijednost potencijalne energije.

U slučaju stabilne ravnoteže vrijednost je minimalna. Ekstremnu vrijednost dobivamo ako parcijalne derivacije po a_i izjednačimo s nulom. Na taj način dobivamo sustav jednažbi

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{a})}{\partial a_i} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\sum_{j=1}^k a_j \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \right) \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} dx - \int_0^L q_z \varphi_i dx = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.3.17)$$

Ako članove sume u prvom integralu pomnožimo s članovima izvan sumacije, a znamo da je i integral zbroja jednak zbroju integrala, a a_j su konstante koje ne ovise o području integracije dobivamo sustav

$$\sum_{j=1}^k a_j \int_0^L EI_y \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} dx = \int_0^L q_z \varphi_i dx, \quad i = 1, \dots, k, \quad (7.3.18)$$

odnosno u matričnom zapisu uz $d^2 \varphi_i / dx^2 = \varphi_i''$

$$\begin{bmatrix} \int_0^L EI_y \varphi_1''^2 dx & \int_0^L EI_y \varphi_1'' \varphi_2'' dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_1'' \varphi_k'' dx \\ \int_0^L EI_y \varphi_2'' \varphi_1'' dx & \int_0^L EI_y \varphi_2''^2 dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_2'' \varphi_k'' dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^L EI_y \varphi_k'' \varphi_1'' dx & \int_0^L EI_y \varphi_k'' \varphi_2'' dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_k''^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L q_z \varphi_1 dx \\ \int_0^L q_z \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^L q_z \varphi_k dx \end{bmatrix}, \quad (7.3.19)$$

ili u skraćenom matričnom obliku

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{q}, \quad (7.3.20)$$

pri čemu su koeficijenti

$$K_{i,j} = \int_0^L EI_y \varphi_i'' \varphi_j'' dx, \quad (7.3.21)$$

$$q_i = \int_0^L q_z \varphi_i dx. \quad (7.3.22)$$

7.4. Nužni uvjeti za izbor koordinatnih funkcija

7.4.1. Uvjeti neprekinutosti

Koordinatne funkcije moraju aproksimirati neprekidnu funkciju pomaka. Zbog toga koordinatne funkcije moraju biti neprekidne ili po dijelovima prekidne (integrabilne su i u zbroju mogu dati neprekidnu funkciju, ali takve treba izbjegavati jer može biti potrebna i neprekidnosti mekih derivacija). Ovisno o stupnju diferencijalne jednadžbe koju aproksimiramo i neke derivacije koordinatnih funkcija moraju biti neprekidne. Za jednadžbu n -tog reda, mora postojati derivacija funkcije reda $n/2$, ali ta derivacija može biti prekidna, odnosno da je funkcija klase $C^{n/2-1}(\Omega)$. Na taj način postavljeni zahtjevi na derivabilnost koordinatnih funkcija su slabiji u odnosu na prethodne postupke. Prethodni postupci koriste stupanj derivacije iz diferencijalne jednadžbe, a ovaj postupak koristi stupanj derivacije pripadnog funkcionala energije.

Zadaća savijanja štapa opisana je diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. U izrazu za energiju javlja se najviše druga derivacija i može biti prekidna. To znači da je dovoljno da pomaci (funkcija) i kutovi zaokreta (prva derivacija) budu neprekidni. Koordinatne funkcije su polinomi trećeg stupnja.

7.4.2. Rubni uvjeti

Za koordinatne funkcije dovoljno je da zadovolje homogene geometrijske rubne uvjete. Ako su zadani nehomogeni geometrijski rubni uvjeti tada aproksimaciju funkcije progiba možemo zapisati u obliku

$$\bar{w} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad , \quad (7.4.23)$$

pri čemu funkcija φ_0 zadovoljava nehomogene rubne uvjete. Fizikalno funkcija φ_0 predstavlja početni progib štapa.

Prirodni rubni uvjeti sadržani su u funkcionalu energije. Područje integracije prvog člana ($\bar{\Omega}$ uključuje i rub Γ , jer naprezanja na rubu doprinose potencijalnoj energiji deformacija (rub modela pod opterećenje bude deformiran, pa naprezanja na rubu rade na deformacijama ruba). Uvjete ravnoteže dobivamo minimizacijom funkcionala energije. Zbog toga uvjeti ravnoteže sadrže i rubna naprezanja, a to su prirodni rubni uvjeti. Koordinatne funkcije ne moraju zadovoljiti prirodne rubne uvjete, ali će ih

linearna kombinacija koordinatnih funkcija približno zadovoljiti, jer su a_i i \bar{w} dobiveni i iz uvjeta ravnoteže po rubu.

7.4.3. Uvjet linearne nezavisnosti

Koordinatne funkcije nužno moraju biti linearno nezavisne. *Funkcije φ_i , $i = 1, \dots, k$ su linearno nezavisne ako vrijedi da je*

$$\sum_{i=1}^k a_i \varphi_i = 0 \iff a_i = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad . \quad (7.4.24)$$

To zapravo znači da nijednu koordinatnu funkciju ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ostalih koordinatnih funkcija.

U ravnini samo dva vektora mogu biti linearno nezavisna, jer uvijek treći vektor možemo prikazati kao linearnu kombinaciju dva linearno nezavisna vektora. U prostoru samo tri vektora mogu biti linearno nezavisna, a svaki četvrti možemo prikazati kao linearnu kombinaciju tri linearno nezavisna vektora. Općenito, u k -dimenzionalnom prostoru potrebno je k linearno nezavisnih vektora.

Ako su koordinatne funkcije φ_i linearno nezavisne tada su stupci i retci matrice \mathbf{K} linearno nezavisni. Determinanta matrice različita je od nule i osigurano je jedinstveno rješenje sustava. Za numeričko rješavanje nepovoljna je situacija ako je determinanta bliska nuli. U vektorskom smislu, to znači da su dva linearno nezavisna vektora pod vrlo malim kutem, međusobno se gotovo podudaraju. Sustav jednadžbi je u tom slučaju loše uvjetovan i rješenje nije stabilno.

7.4.4. Uvjet potpunosti

Linearnom kombinacijom koordinatnih funkcija moramo biti u mogućnosti dobiti bilo kakvu neprekidnu funkciju progiba. Tada možemo reći da je zadovoljen uvjet potpunosti. Zahtjev je bolje pokazati suprotnim primjerima. Ako želimo aproksimirati funkciju progiba, ne možemo izabrati koordinatne funkcije koje imaju nul-točku na istom mjestu jer će i njihova linearna kombinacija dati u istoj točki vrijednost nula. U numeričkom smislu nije dobro uzeti niti koordinatne funkcije s bliskim nul-točkama. Ako su koordinatne funkcije simetrične onda je i njihova linearna kombinacija simetrična, pa bilo kakvo nesimetrično rješenje nije moguće opisati takvim funkcijama.

Svaki konačan skup funkcija je nepotpun jer ne može opisati zadaću s beskonačno mnogo nepoznanica. Za naše potrebe smatramo da je sustav

koordinatnih funkcija potpun ako bilo koje potencijalno rješenje možemo proizvoljno točno aproksimirati (u diskretnom obliku slabe formulacije) kao linearna kombinacija koordinatnih funkcija.

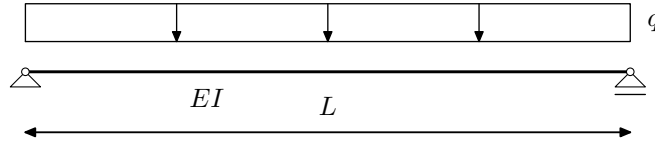
7.4.5. Uvjet ortogonalnosti

Uvjet ortogonalnosti nije nužan, ali je poželjan. Izborom ortogonalnih funkcija matrice postaju povoljnije definirane (dijagonalno dominantne) za numeričko rješavanje. Uvjet ortogonalnosti glasi

$$\int_0^L \varphi_i \mathcal{K} \varphi_j dx = 0 \quad i \neq j \quad . \quad (7.4.25)$$

7.5. Numerički primjeri

Primjer 7.5.1. Ritzovom metodom odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem q



Slika 7.5.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

Ritzovom metodom, umjesto diferencijalne jednačbe progibne linije savijanja štapa, rješavamo problem minimizacije potencijalne energije u diskretnom obliku. Funkciju progiba aproksimiramo linearnom kombinacijom konačnog broja (k) koordinatnih funkcija ($\varphi_i, i = 1, \dots, k$)

$$w \approx \bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad . \quad (7.5.26)$$

Zadaću svodimo na rješavanje sustava jednačbi

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{q} \quad , \quad (7.5.27)$$

pri čemu je \mathbf{a} vektor nepoznatih koeficijenata linearne kombinacije, \mathbf{K} poznata matrica sustava, a \mathbf{q} poznati vektor opterećenja,

$$K_{i,j} = \int_0^L EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad , \quad (7.5.28)$$

$$q_i = \int_0^L q \varphi_i dx \quad . \quad (7.5.29)$$

Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za slobodno oslonjenu gredu izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točkama $x = 0$ i $x = L$. Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) \quad , \quad (7.5.30)$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 2x) \quad . \quad (7.5.31)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L \quad , \quad (7.5.32)$$

$$\varphi_1''\varphi_2'' = 12L - 24x \Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = 0 \quad , \quad (7.5.33)$$

$$\varphi_2''\varphi_2'' = 36L^2 - 144Lx + 144x^2 \Rightarrow K_{2,2} = 12L^3 \quad , \quad (7.5.34)$$

a za vektor opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{6} \quad , \quad (7.5.35)$$

$$q_2 = 0 \quad . \quad (7.5.36)$$

Sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.5.37)$$

Vidimo da su članovi matrice sustava izvan dijagonale jednaki nuli, što znači da smo odabrali ortogonalne koordinatne funkcije. Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{24EI} \quad , \quad a_2 = 0 \quad . \quad (7.5.38)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\bar{w}(x) = \frac{qL^2}{24EI} x(L-x) \quad . \quad (7.5.39)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\overline{w}_{L/2} = \frac{qL^4}{96EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 25\% \quad , \quad (7.5.40)$$

$$\overline{w}_{L/3} = \frac{qL^4}{108EI} \quad , \quad \Delta_{L/3} = 18,2\% \quad , \quad (7.5.41)$$

$$\overline{w}_{L/4} = \frac{qL^4}{128EI} \quad , \quad \Delta_{L/4} = 15,8\% \quad . \quad (7.5.42)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned} \overline{M}(x) &= -EI\bar{w}(x) = -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI\left(\frac{qL^2}{24EI} \cdot (-2) + 0 \cdot 12x\right) = \frac{qL^2}{12} \quad . \quad (7.5.43) \end{aligned}$$

Momentna funkcija je aproksimirana konstantnom funkcijom duž cijele grede što očito ne odgovara stvarnom ponašanju, $M(x) = qx(L - x)/2$. Za kvalitetniju aproksimaciju progibne i momentne funkcije potrebno je odabrati neke druge koordinatne funkcije.

Za sljedeću aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) \quad , \quad (7.5.44)$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 3x)(2L - 3x) \quad . \quad (7.5.45)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L \quad , \quad (7.5.46)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1''\varphi_2'' &= 44L^2 - 216Lx + 216x^2 \\ &\Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = 8L^3 \quad , \end{aligned} \quad (7.5.47)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2''\varphi_2'' &= 484L^4 - 4752L^3x + 16416L^2x^2 - 23328Lx^3 + 11664x^4 \\ &\Rightarrow K_{2,2} = \frac{404}{5}L^5 \quad , \end{aligned} \quad (7.5.48)$$

a za vektor opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{6} \quad , \quad (7.5.49)$$

$$q_2 = \frac{qL^5}{30} \quad . \quad (7.5.50)$$

Sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 8L^3 \\ 8L^3 & \frac{404}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^5}{30} \end{bmatrix} \quad . \quad (7.5.51)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{11qL^2}{216EI} \quad , \quad a_2 = -\frac{q}{216EI} \quad . \quad (7.5.52)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) &= \frac{11qL^2}{216EI}x(L - x) - \frac{q}{216EI}x(L - x)(L - 3x)(2L - 3x) \\ &= \frac{q}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \quad . \end{aligned} \quad (7.5.53)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama dobivamo točnu vrijednost progiba

$$\overline{w}_{L/2} = \frac{5qL^4}{384EI}, \quad (7.5.54)$$

$$\overline{w}_{L/3} = \frac{11qL^4}{972EI}, \quad (7.5.55)$$

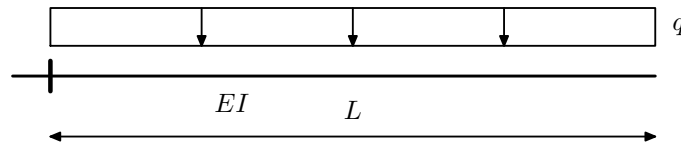
$$\overline{w}_{L/4} = \frac{57qL^4}{6144EI}. \quad (7.5.56)$$

Momentna funkcija aproksimirana je izrazom

$$\begin{aligned} \overline{M}(x) &= -EI (a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left[\frac{11qL^2}{216EI} \cdot (-2) - \frac{q}{216EI} (-22L^2 + 54Lx - 108x^2) \right] \\ &= \frac{q}{4} (2x^2 - Lx). \end{aligned} \quad (7.5.57)$$

Takva aproksimacija značajno odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije, $M(x) = q(Lx - x^2)/2$ u karakterističnim točkama grede. Na desnom ležaju moment nije jednak nuli, $\overline{M}(L) = qL^2/4$, a u sredini raspona nije dostignuta poznata ekstremna vrijednost $qL^2/8$, nego je dobiveni moment jednak nuli, $\overline{M}(L/2) = 0$.

Primjer 7.5.2. Ritzovom metodom odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem q



Slika 7.5.1: Konzolna greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za konzolnu gredu izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točki $x = 0$ i nul-točku prve derivacije u točki $x = L$ (progib i kut zaokreta na upetom lezaju jednaki su nuli). Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x^2, \quad (7.5.1)$$

$$\varphi_2(x) = x^2(L - 2x). \quad (7.5.2)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L, \quad (7.5.3)$$

$$\varphi_1''\varphi_2'' = 4L - 24x \Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = -8L^2, \quad (7.5.4)$$

$$\varphi_2''\varphi_2'' = 4L^2 - 48Lx + 144x^2 \Rightarrow K_{2,2} = 28L^3, \quad (7.5.5)$$

a za vektor opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{3}, \quad (7.5.6)$$

$$q_2 = -\frac{qL^4}{6}. \quad (7.5.7)$$

Sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & -8L^2 \\ -8L^2 & 28L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} \\ -\frac{L^4}{6} \end{bmatrix}. \quad (7.5.8)$$

Vidimo da su članovi matrice sustava izvan dijagonale jednaki nuli, što znači da smo odabrali ortogonalne koordinatne funkcije. Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{6EI}, \quad a_2 = \frac{qL}{24EI}. \quad (7.5.9)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned}\bar{w}(x) &= \frac{qL^2}{6EI}x^2 + \frac{qL}{24EI}x^2(L-2x) \\ &= \frac{q}{24EI}(5L^2x^2 - 2Lx^3) \quad .\end{aligned}\quad (7.5.10)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\bar{w}_L = \frac{qL^4}{8EI} \quad , \quad \Delta_L = 0\% \quad , \quad (7.5.11)$$

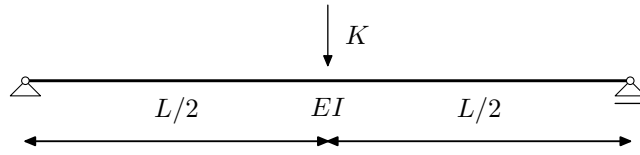
$$\bar{w}_{L/2} = \frac{qL^4}{24EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 5,9\% \quad . \quad (7.5.12)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo opet kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned}\bar{M}(x) &= -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI\left[\frac{qL^2}{6EI} \cdot (2) - \frac{qL}{24EI}(2L-12x)\right] \\ &= -\frac{q}{12}(5L^2 - 6Lx) \quad .\end{aligned}\quad (7.5.13)$$

Takva aproksimacija odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije, $M(x) = -q(L^2 - x^2)/2$ u karakterističnim točkama konzolne grede. Na desnom slobodnom kraju grede moment nije jednak nuli, $\bar{M}(L) = qL^2/12$, a na upetom ležaju nije dobivena poznata ekstremna vrijednost $-qL^2/2$, nego odstupanje od 16,7%, $\bar{M}(L/2) = -5qL^2/12$.

Primjer 7.5.3. Ritzovom metodom odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene koncentriranom silom K u sredini raspona



Slika 7.5.1: Slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom

Koordinatne funkcije uzet ćemo jednake kao za slobodno oslonjenu gredu u prvom primjeru. ačelno izbor koordinatnih funkcija treba podrediti zadanoj konstrukciji, a ne opterećenju. Iznimno, na temelju iskustva, može se u konkretnim slučajevima pokušati odabrati koordinatne funkcije sličnog oblika kao očekivana progibna funkcija. Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) \quad , \quad (7.5.1)$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 2x) \quad . \quad (7.5.2)$$

Matrica sustava ne ovisi o opterećenju, nego samo o geometriji konstrukcije i izboru koordinatnih funkcija. To znači da je jednaka kao u prvom primjertu za iste kordinatne funkcije. Vektor opterećenja, s obzirom da je opterećenje koncentrirana sila u točki $x_K = L/2$, $K(x) = 0$ za $x \neq x_K$, izračunamo

$$\int_0^L \varphi_i(x) K(x) dx = \varphi_i(x_K) \quad , \quad (7.5.3)$$

što povlači

$$q_1 = \varphi_1(L/2) = \frac{KL^2}{4} \quad , \quad (7.5.4)$$

$$q_2 = \varphi_2(L/2) = 0 \quad . \quad (7.5.5)$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^2}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.5.6)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{KL}{16EI} \quad , \quad a_2 = 0 \quad . \quad (7.5.7)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\bar{w}(x) = \frac{KL}{16EI}x(L-x) \quad . \quad (7.5.8)$$

Izračunamo aproksimaciju progiba i pripadnu pogrešku u sredini i četvrtini raspona

$$\bar{w}_{L/2} = \frac{KL^3}{64EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 25\% \quad , \quad (7.5.9)$$

$$\bar{w}_{L/4} = \frac{3KL^3}{256EI} \quad , \quad \Delta_{L/4} = 28,6\% \quad . \quad (7.5.10)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI\bar{w}(x) = -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI\left(\frac{KL}{16EI} \cdot (-2) + 0 \cdot 12x\right) = \frac{KL}{32} \quad . \quad (7.5.11) \end{aligned}$$

Momentna funkcija je aproksimirana konstantnom funkcijom duž cijele grede što očito ne odgovara stvarnom ponašanju. Za kvalitetniju aproksimaciju progibne i momentne funkcije potrebno je odabrati neke druge koordinatne funkcije.

Za sljedeću aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L-x) \quad , \quad (7.5.12)$$

$$\varphi_2(x) = x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \quad . \quad (7.5.13)$$

Matrica sustava za ovaj izbor koordinatnih funkcija izračunata je u prvom primjeru. Vektor opterećenja slijedi prema

$$q_1 = \varphi_1(L/2) = \frac{KL^2}{4} \quad , \quad (7.5.14)$$

$$q_2 = \varphi_2(L/2) = -\frac{KL^4}{16} \quad . \quad (7.5.15)$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 8L^3 \\ 8L^3 & \frac{404}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \\ -\frac{L^4}{16} \end{bmatrix} \quad . \quad (7.5.16)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{13KL}{288EI} \quad , \quad a_2 = -\frac{5K}{576LEI} \quad . \quad (7.5.17)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned}\bar{w}(x) &= \frac{13KL}{288EI}x(L-x) - \frac{5K}{576LEI}x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \\ &= \frac{K}{576EI} (17L^2x - 29Lx^2 - 90x^3 + 45x^4/L) \quad . \quad (7.5.18)\end{aligned}$$

Izračunamo aproksimaciju progiba i pripadnu pogrešku u pojedinim točkama

$$\bar{w}_{L/2} = \frac{189KL^3}{9216EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 1,6\% \quad , \quad (7.5.19)$$

$$\bar{w}_{L/4} = \frac{391KL^3}{49152EI} \quad , \quad \Delta_{L/4} = 12,7\% \quad . \quad (7.5.20)$$

Momentna funkcija aproksimirana je izrazom

$$\begin{aligned}\bar{M}(x) &= -EI (a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left[\frac{3KL}{188EI} \cdot (-2) - \frac{5K}{576LEI} (-22L^2 + 54Lx - 108x^2) \right] \\ &= \frac{K}{32} (9L - 15x + 30x^2/L) \quad . \quad (7.5.21)\end{aligned}$$

Takva aproksimacija odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije u karakterističnim točkama grede. U sredini raspona proizlazi moment $9KL/32$ što je odstupanje 12,5% od analitičke vrijednosti, ali na ležajima iznosi momenata nisu jednaki nuli, $\bar{M}(0) = 9KL/32$ i $\bar{M}(L) = 3KL/4$. Stvarna momentna funkcija ima skok derivacije u točki djelovanja koncentrirane sile, a približna proračunata funkcija beskonačno je glatka u svim točkama područja.

8. Uvod u metodu konačnih elemenata

8.1. Cilj

Metoda konačnih elemenata (MKE) značajna je podrška u inženjerskoj analizi. Metoda je osmišljena u pedesetim godinama dvadesetog stoljeća od kada ima široku primjenu u inženjerstvu. Ovaj prikaz predstavlja osnovne pojmove, bazičnu teoriju i jednostavnu primjenu metode konačnih elemenata.

Na kraju prikaza studenti trebaju

- razumijeti koncept metode konačnih elemenata,
- prepoznati značaj MKE u suvremenom inženjerstvu,
- razumijeti osnovne matrične operacije korištene u MKE,
- upoznati razne tipove konačnih elemenata,
- upoznati osnovne pojmove MKE,
- samostalno riješiti jednostavne zadaće analize konstrukcija uporabom MKE.

8.2. Što je metoda konačnih elemenata (MKE) ?

Mnoge se fizikalne pojave mogu izraziti *pripadnim jednadžbama* i *rubnim uvjetima*. Pripadne su jednadžbe najčešće u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (PDJ) ili običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ). Matematički, metoda konačnih elemenata numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih diferencijalnih jednadžbi kao

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = m\ddot{u}_x \quad (8.2.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = m\ddot{u}_y \quad (8.2.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = m\ddot{u}_z \quad (8.2.24)$$

Inženjerski, metoda konačnih elemenata (MKE) numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih jednadžbi dobivenih aproksimacijom varijabli kontinuiranog područja skupom varijabli u konačnom broju diskretnih točaka (čvorova) tog polja. U proračunu konstrukcija, povezane jednadžbe su jednadžbe ravnoteže, a skup varijabli su pomaci čvorova. Postupak rješavanja MKE svodi se na kompletnu transformaciju diferencijalnih

jednadžbi (stacionarne zadaće) ili transformaciju PDJ u ekvivalente ODJ pogodne za rješavanje metodom konačnih razlika.

8.3. Zašto MKE?

Mnoge inženjerske zadaće imaju vrlo složenu geometriju i rubne uvjete, što dovodi do nemogućnosti dobivanja analitičkih (zatvorenih) rješenja polaznih jednadžbi. Zbog toga su osmišljene mnoge numeričke metode, MKE, metoda konačnih traka, metoda konačnih razlika (MKR), metoda konačnih volumena (MKV), metoda rubnih elemenata (MRE), hibridna RE-KE metoda, za dobivanje uporabom računala približnog rješenja polazne zadaće koje je zadovoljavajuće točnosti. Između navedenih metoda, MKE je najraspostranjenija, najprimijenjenija, ali i najprimjerenija metoda koja je i sastavni dio većine komercijalnih programskih paketa u području inženjerske analize.

S obzirom da MKE može biti prilagođena zadaćama velike složenosti i neuobičajene geometrije područja zadaće, posebno je značajno i korisno sredstvo u rješavanju kritičnih zadaća provođenja topline, mehanike fluida i analize konstrukcija. Dostupnost računala omogućuje inženjerima svakodnevno rješavanje inženjerskih zadaća metodom konačnih elemenata.

8.4. Osnovni pojmovi MKE

Područje, domena - Domena je kontinuirani skup na kojem postavljamo pripadne jednadžbe, u inženjerskoj analizi npr. greda, okvir, ploča.

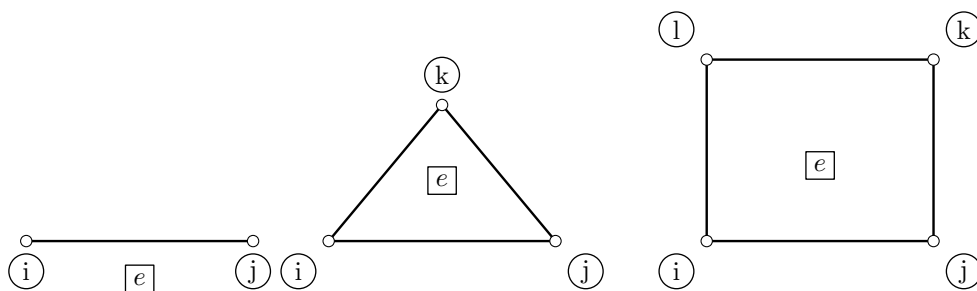
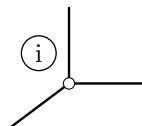
Pripadne jednadžbe - Pripadne jednadžbe sustava su jednadžbe koje slijede fizikalno ponašanje sustava i opisuju karakteristike i ponašanje sustava, u inženjerskoj analizi npr. jednadžba savijanja grede, jednadžba savijanja ploče, jednadžba provođenja topline.

Rubni uvjeti - Rubni uvjeti su vrijednosti funkcije na rubu područja. Nužno je za rješavanje svake inženjerske zadaće znati minimalno potrebne rubne uvjete. U inženjerskoj analizi rubni uvjeti su iskazani kao npr. upeti ležaj, slobodno oslonjeni ležaj, slobodni rub konstrukcije.

Konačni element - Konačni element je izdvojeni dio zadanog područja, najčešće vrlo jednostavnog oblika, u 1D zadaći ili kod okvirnih konstrukcija štap, u 2D zadaći trokut ili četverokut, u 3D zadaći tetraedar ili prizma.

Čvor - Čvor je točka unutar područja, vrh konačnog elementa.

Mreža KE - Konačni elementi i čvorovi tvore mrežu konačnih elemenata, osnovnu strukturu MKE.

Slika 8.4.2: Prikaz karakterističnih 1D i 2D konačnih elemenata (e)

Slika 8.4.3: Čvor konačnog elementa

Generiranje mreže KE - Generiranje mreže KE podjela je područja na čvorove i konačne elemente. Komercijalni programski paketi imaju ugrađeno automatsku podjelu područja primjerenu polaznoj zadaći u svrhu dobivanja što bržeg i kvalitetnijeg rješenja. To je od posebnog značaja kod velikih ili vrlo složenih inženjerskih zadaća.

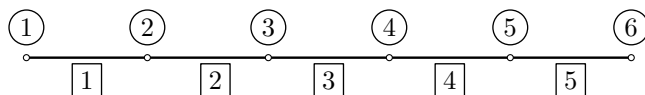
Linearna analiza MKE - Linearna analiza MKE bazirana je na nekoliko osnovnih pretpostavki: (1) teorija malih deformacija; (2) materijal je linearno elastičan.

Nelinearna analiza MKE - Nelinearna analiza MKE uzima u obzir materijalnu nelinearnost i/ili geometrijsku nelinearnost (velike deformacije) inženjerskog sustava.

8.5. Što su matrice i vektori?

Za razumijevanje MKE nužno je shvatiti matematičke pojmove *matrica* i *vektor*. Matrica reda $m \times n$ je pravokutni prikaz $m \times n$ podataka u m redova i n stupaca,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} . \quad (8.5.25)$$



Slika 8.4.4: Mreža 1D konačnih elemenata

Jednostupčane matrice ($n = 1$) su zapravo vektori dimenzije m ,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} . \quad (8.5.26)$$

8.6. Kako riješiti matičnu jednadžbu?

U standardnoj inženjerskoj zadaći, matrica sustava \mathbf{K} i vektor opterećenja \mathbf{q} su poznati, dok je vektor pomaka \mathbf{w} nepoznanica. Za rješavanje sustava potrebno je riješiti

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} . \quad (8.6.27)$$

Sustav rješavamo numeričkim postupcima, npr. Gaussovim eliminacijama.

9. Metoda konačnih elemenata

9.1. Motivacija

Prethodne metode možemo smatrati diskretnim oblikom slabe formulacije koja je dobivena primjenom aproksimacije polja pomka u obliku

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^h a_i \varphi_i \quad . \quad (9.1.28)$$

Na temelju takve aproksimacije, primjenom bilo koje od prethodnih metoda dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{Ca} = \mathbf{b} \quad . \quad (9.1.29)$$

Članove matrice sustava možemo zapisati kao

$$c_{ij} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) d\bar{\Omega} \quad , \quad i, j = 1, \dots, k \quad , \quad (9.1.30)$$

ili

$$c_{ij} = \int_{\bar{\Omega}} \mathcal{A}(\varphi_i) \mathcal{A}(\varphi_j) d\bar{\Omega} \quad , \quad i, j = 1, \dots, k \quad , \quad (9.1.31)$$

a članove vektora

$$b_i = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i q_z d\bar{\Omega} \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad , \quad (9.1.32)$$

gdje su ψ_I test funkcije, a φ_i koordinatne funkcije na području $\bar{\Omega}$. Članovi nepoznatog vektora \mathbf{a} koeficijenti su linearne kombinacije aproksimacije progiba.

Metode se razlikuju ovisno o izboru test funkcija. Kod svih metoda moramo na cijelom području poznavati diferencijalnu jednadžbu \mathcal{K} ili potencijalnu energiju \mathcal{A} i koordinatne funkcije φ_i i dovoljan broj njihovih derivacija $\mathcal{K}(\varphi_i)$ ili $\mathcal{A}(\varphi_i)$. Izbor koordinatnih funkcija složen je problem jer moraju zadovoljiti četiri nužna uvjeta, uvjete neprekinutosti, geometrijske rubne uvjete, uvjete linearne nezavisnosti i uvjete potpunosti. Zbog toga prethodne metode nije jednostavno primijeniti na geometrijski složenija područja. Problem je i analitička integracija postavljenih izraza, pa najčešće moramo složene izraze numerički integrirati. Zbog numeričke integracije je potrebna diskretizacija po području (npr. trapezna formula za integraciju). Nakon integriranja matrica sustava je uglavnom puna.

Motivirani postupcima rješavanja štapnih sustava (metoda sila i metoda pomaka) kao mogući put prema rješenju pokazala se ideja diskretizacije modela tako da koordinatne funkcije budu definirane po dijelovima. Takva su razmišljanja bila ispravna, ali ne i posebno zanimljiva zbog velikog sustava jednadžbi u vrijeme bez računala. Ideja diskretizacije pokušava svesti problem na rješavanje sustava s vrpčastom matricom.

Osnovna je ideja podijeliti područje na potpodručja jednostavnijih oblika. Nakon toga treba definirati koordinatne funkcije φ_i tako da budu različite od nule samo lokalno, na pripadnim potpodručjima.