SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET
ZAVOD ZA TEHNIČKU MEHANIKU

NELINEARNA STATIKA ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

Uvod u nelinearni proračun konstrukcija
GEOMETRIJSKA NELINEARNOST

UVOD- PRORAČUN ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

- sustav diferencijalnih jednadžbi koje opisuju ponašanje konstrukcije pod djelovanjem vanjskih utjecaja
  - **DIF.JED. RAVNOTEŽE** – veza vanjskih djelovanja i unutarnjih sila
  - **DIF.JED. KOMPATIBILNOSTI** – veza pomaka i deformacija
  - **DIF.JED. MATERIJALA** – veza naprezanja i deformacija

- LINEARNI PRORAČUN - pretpostavke
  - pomaci mali; uvjeti ravnoteže na nedeformiranom sustavu
  - veza deformacija i pomaka – linearna dif.jed. I reda
  - veza deformacije i naprezanja linearna – Hookeov zakon

- TEORIJA I REDA – geometrijska i materijalna linearnost
- TEORIJA II REDA – geometrijska nelinearnost i materijalna linearnost
- TEORIJA III REDA – geometrijska nelinearnost i materijalna nelinearnost

UVOD - PRORAČUN ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

STATIKA ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

LINEARNI PRORAČUN
- ravnoteža na nedeformiranom sustavu
- Hookeov zakon
- jedinstveno rješenje
- vrijedi zakon superpozicije

NELINEARNI PRORAČUN

GEOMETRIJSKA NELINEARNOST
- ravnoteža na deformiranom sustavu
- Hookeov zakon
- rješenja nisu jedinstvena
- ne vrijedi zakon superpozicije

MATERIJALNA NELINEARNOST
- ravnoteža na deformiranom sustavu
- ne vrijedi Hookeov z.
- rješenja nisu jedinstvena
- ne vrijedi zakon superpozicije

UVOD- PRORAČUN ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

- GEOMETRIJSKA KRUTOST
  - štap opterećen vlačnom silom→ povećanje krutosti
  - štap opterećen tlačnom silom → smanjenje krutosti
  - geometrijska krutost - funkcija opterećenja, dužine štapa

$$\{F\}=[k_e+k_g]\times\{u\}$$

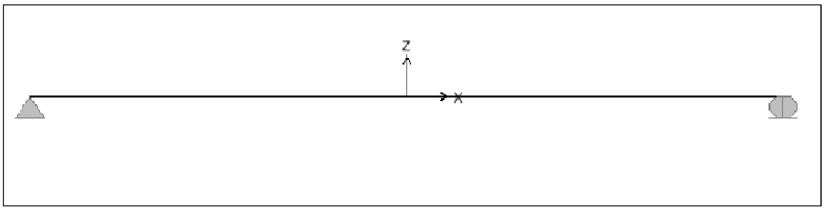
  - problem izvijanja - za vrlo veliku tlačnu silu ukupna matrica krutosti može postati singularna

UVOD- PRORAČUN ŠTAPNIH KONSTRUKCIJA

- P-Δ POSTUPAK ZA ZGRADE
  - uzima se u obzir **geometrijska krutost** i na taj način se uključuju **sekundarni efekti** u proračun konstrukcije
  - zgrade - poprečno opterećenje→pomaci katova
    - vertikalna opt.×pomaci→dodatni momenti

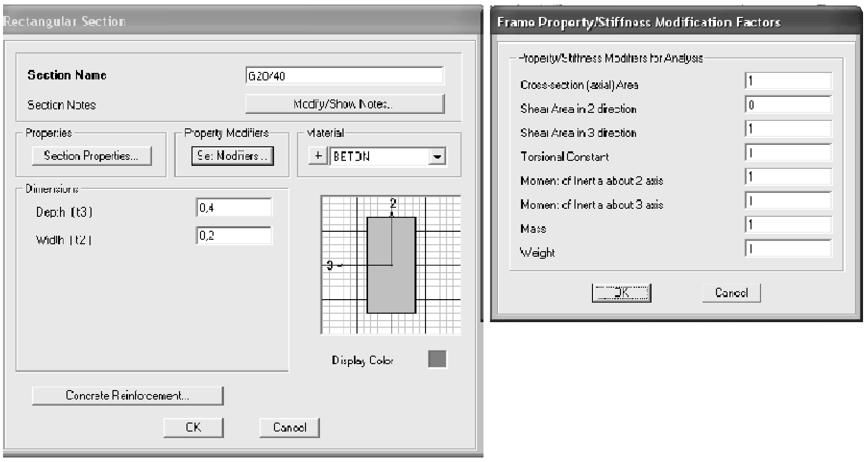
  → **UTJECAJ VERTIKALNOG OPTEREĆENJA NA POPREČNU KRUTOST ZGRADE**
  - DINAMIČKA ANALIZA - **produljenje vlastitih perioda**
  - dobro koncipirane zgrade s povoljnim omjerom odnosa krutost/težina za svaki kat - pomaci i un. sile se razlikuju za manje od 10% (linearni i nelinearni proračun)
  - ako je težina konstrukcije velika u odnosu na poprečnu krutost, P-Δ ima velik utjecaj (>25%)

PRIMJER 1. – PROSTA GREDA



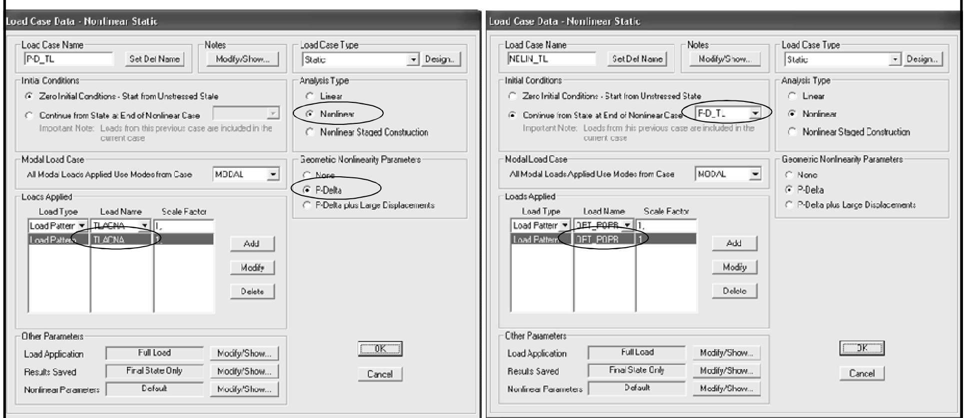
RASPON	ℓ=10 m	
PRESJEK	b/h=20/40 cm	$I=1,067\times10^{-4}$ m^4
MATERIJAL	beton C35/45	$E=3\times10^{7}$ kN/m^2
OPTEREĆENJE	q= 10 kN/m^2	poprečno opterećenje
	H_{tl}=1000 kN	tlačna sila
	H_{vl}=1000 kN	vlačna sila

POPREČNI PRESJEK



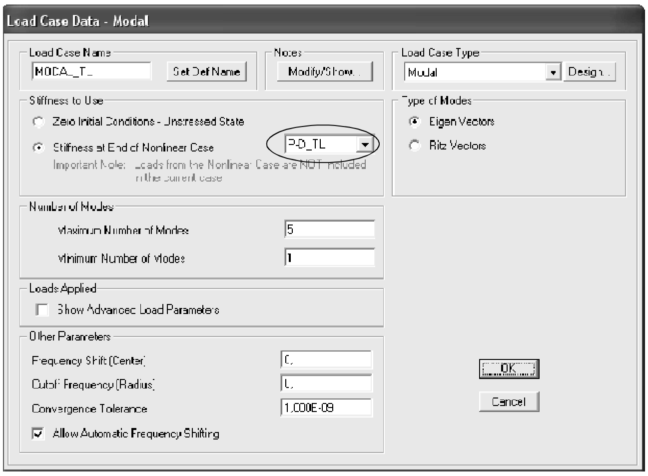
LOAD CASE

Opterećenje uzdužnom tlačnom silom



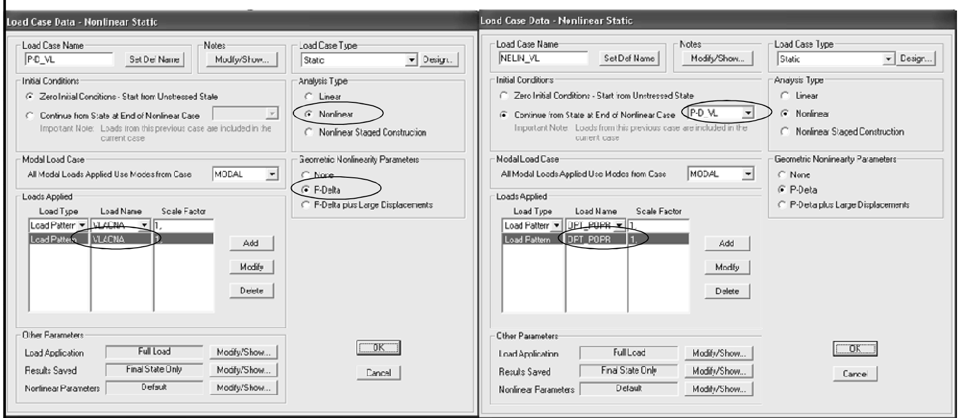
LOAD CASE

Modal – za proračun vlastitih oblika



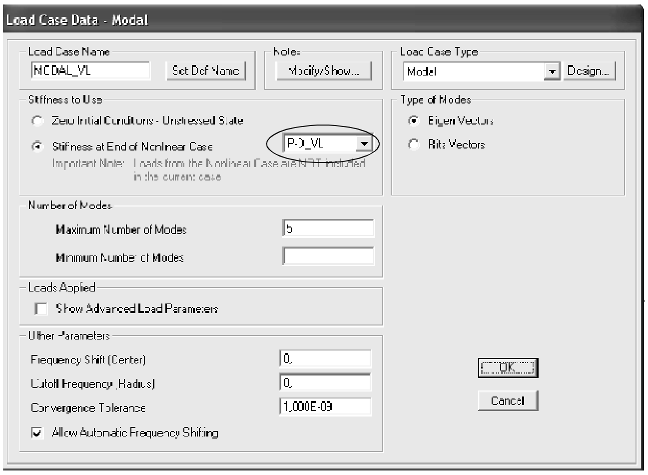
LOAD CASE

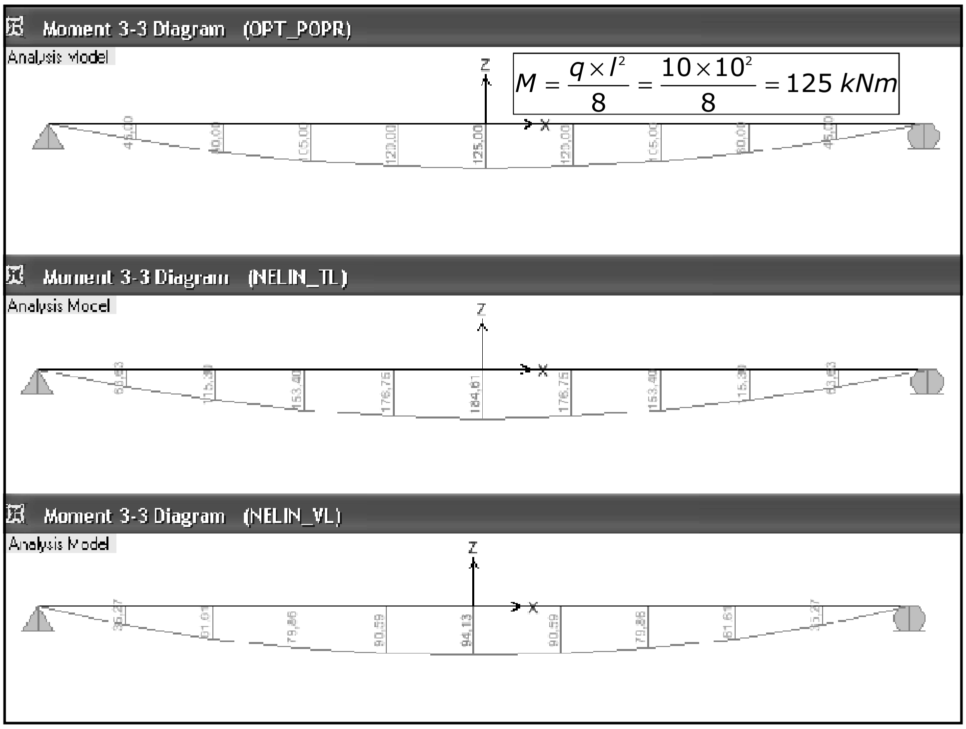
Opterećenje uzdužnom vlačnom silom

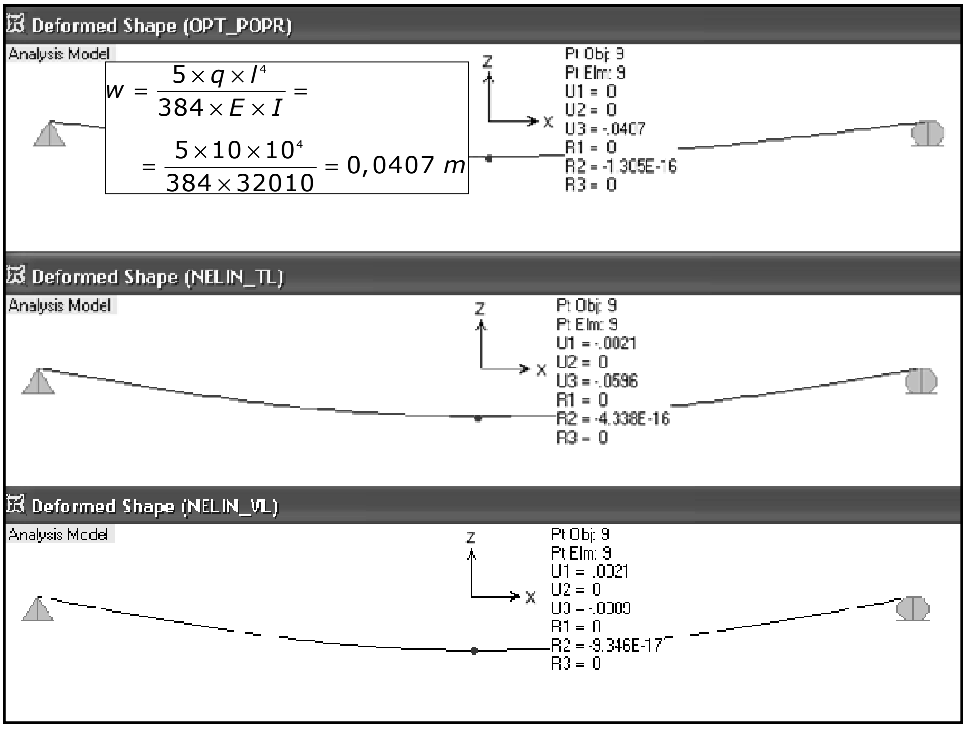


LOAD CASE

Opterećenje uzdužnom vlačnom silom







PRIMJER 1. – PROSTA GREDA

Usporedba momenata i progiba – LINEARNI vs. NELINEARNI PRORAČUN

	TIR	TIIR - TLAČNA SILA	TIIR - VLAČNA SILA
MOMENT U POLJU [kNm]	125	185	94
PROGIB [m]	0,041	0,06	0,031

povećanje momenata i progiba u odnosu na one dobivene lin.proračunom za cca. 50%

$$\Delta M = \frac{M_{II,tl}}{M_I} = \frac{185}{125} = 1,48$$

smanjenje momenata i progiba u odnosu na one dobivene lin.proračunom za cca. 25%

$$\Delta M = \frac{M_{II,vl}}{M_I} = \frac{94}{125} = 0,75$$

PRIMJER 1. – PROSTA GREDA

Usporedba perioda oscilacija – LINEARNI vs. NELINEARNI PRORAČUN

LINEARNI PRORAČUN

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL	Mode	1	0,15600	6,400
MODAL	Mode	2	0.039012	25,633
MODAL	Mode	3	0.017348	57,643
MODAL	Mode	4	0.011332	88,247
MODAL	Mode	5	0,009776	102,29

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

NELINEARNI PRORAČUN S TLAČNOM SILOM

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL_TL	Mode	1	0,188747	5.2981
MODAL_TL	Mode	2	0,040654	24,598
MODAL_TL	Mode	3	0,017561	56,021
MODAL_TL	Mode	4	0,011332	88,247
MODAL_TL	Mode	5	0,009874	101,28

→ "OMEKŠANJE" KONSTRUKCIJE

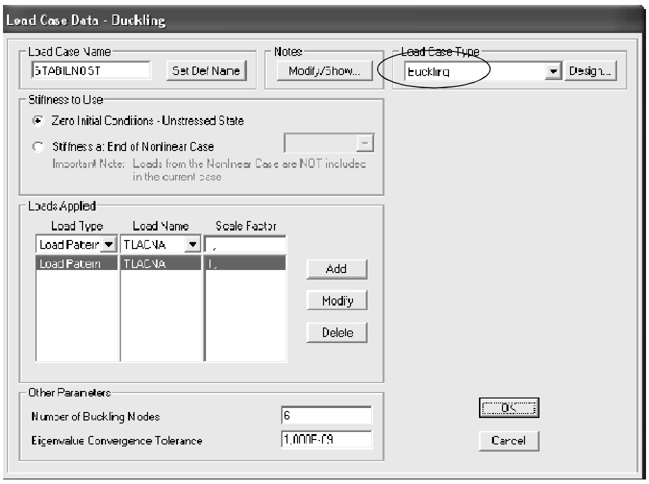
NELINEARNI PRORAČUN S VLAČNOM SILOM

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL_VL	Mode	1	0.135981	7,354
MODAL_VL	Mode	2	0.037554	26,628
MODAL_VL	Mode	3	0.017051	58,647
MODAL_VL	Mode	4	0.011332	88,247
MODAL_VL	Mode	5	0.009681	103,29

→ "OČVRŠĆENJE" KONSTRUKCIJE

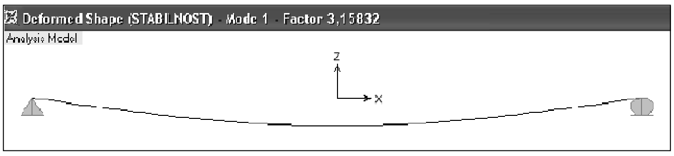
PRIMJER 1. – PROSTA GREDA

STABILNOST – problem tlačne sile



PRIMJER 1. – PROSTA GREDA

STABILNOST – problem tlačne sile



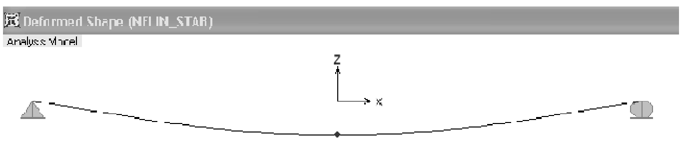
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{3{,}14^2 \times 32010}{10^2} = 3156{,}06\ kN$$

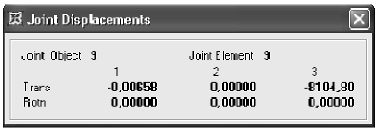
$$P \geq P_{cr} \rightarrow izvijanje\ štapa$$

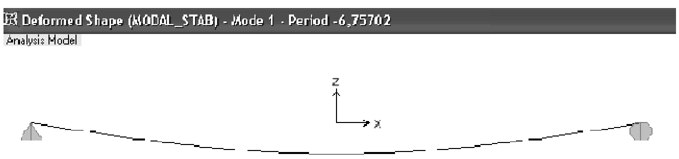
PRIMJER 1. – PROSTA GREDA

STABILNOST – problem tlačne sile

za P=3160 kN

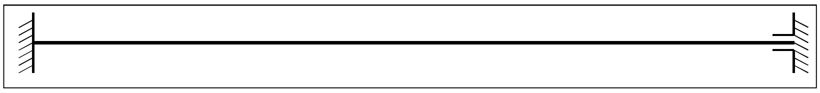


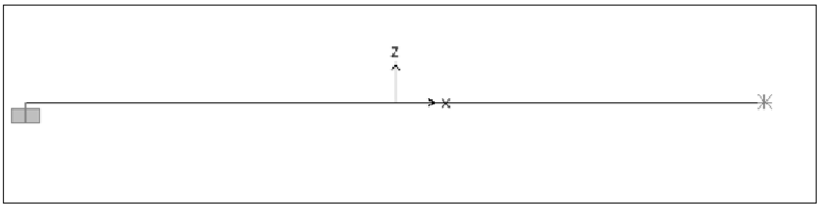




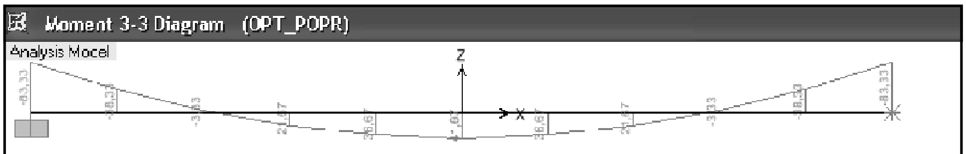
→ NEMOGUĆE!!!!

PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP



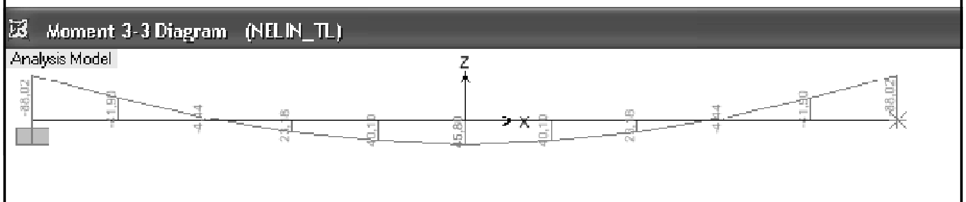


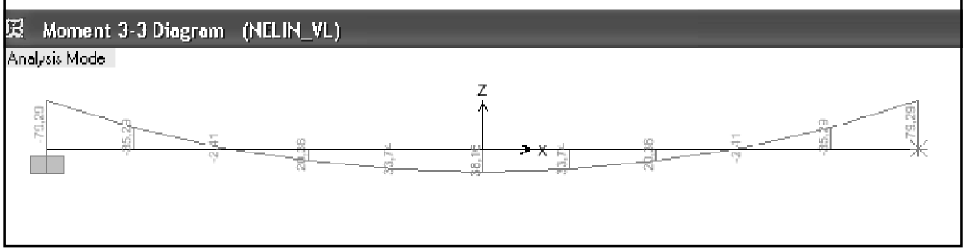
RASPON	ℓ=10 m	
PRESJEK	b/h=20/40 cm	$I=1{,}067\times10^{-4}$ m^4
MATERIJAL	beton C35/45	$E=3\times10^{7}$ kN/m^2
OPTEREĆENJE	q=10 kN/m^2	poprečno opterećenje
	H_{tl}=1000 kN	tlačna sila
	H_{vl}=1000 kN	vlačna sila

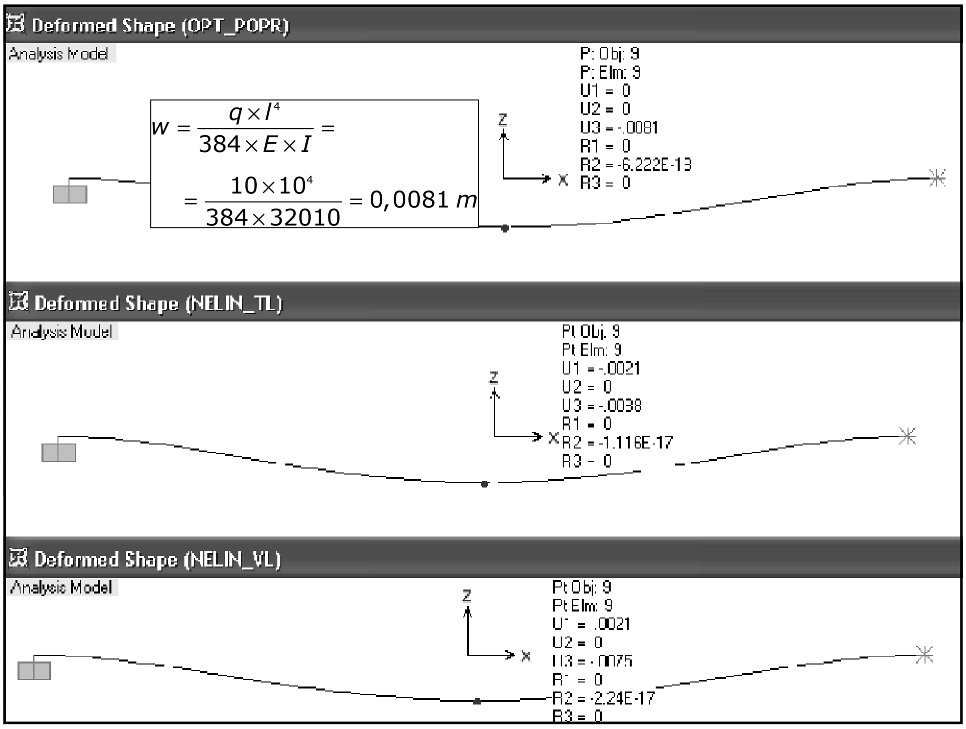


$$M_{lež} = \frac{q\times l^2}{12} = \frac{10\times10^2}{12} = 83{,}33\ kNm$$

$$M_{polje} = \frac{q\times l^2}{24} = \frac{10\times10^2}{24} = 41{,}66\ kNm$$







PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

Usporedba momenata i progiba – LINEARNI vs. NELINEARNI PRORAČUN

	TIR	TIIR - TLAČNA SILA	TIIR - VLAČNA SILA
MOMENT U POLJU [kNm]	42	46	38
MOMENT NA LEŽ. [kNm]	83	88	79
PROGIB [m]	0,0081	0,0088	0,0075

povećanje momenata i progiba u odnosu na one dobivene lin.proračunom za cca. 10%

$$\Delta M = \frac{M_{II,tl}}{M_I} = \frac{46}{42} = 1{,}095$$

smanjenje momenata i progiba u odnosu na one dobivene lin.proračunom za cca. 10%

$$\Delta M = \frac{M_{II,vl}}{M_I} = \frac{38}{42} = 0{,}905$$

PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

Usporedba perioda oscilacija – LINEARNI vs. NELINEARNI PRORAČUN

LINEARNI PRORAČUN

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL	Mode	1	0,068333	14,528
MODAL	Mode	2	0,024979	40,034
MODAL	Mode	3	0,012759	73,377
MODAL	Mode	4	0,011332	88,247
MODAL	Mode	5	0,007749	129,05

NELINEARNI PRORAČUN S TLAČNOM SILOM

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL_TL	Mode	1	0,071644	13,958
MODAL_TL	Mode	2	0,025465	39,269
MODAL_TL	Mode	3	0,012895	77,546
MODAL_TL	Mode	4	0,011332	88,247
MODAL_TL	Mode	5	0,007001	120,19

→ "OMEKŠANJE" KONSTRUKCIJE

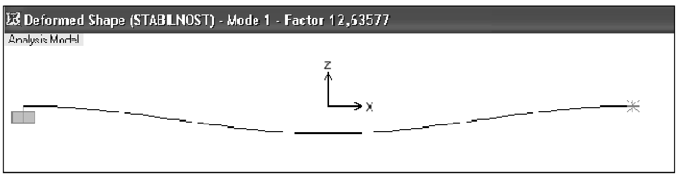
NELINEARNI PRORAČUN S VLAČNOM SILOM

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL_VL	Mode	1	0,066337	15,075
MODAL_VL	Mode	2	0,02452	40,783
MODAL_VL	Mode	3	0,012627	79,199
MODAL_VL	Mode	4	0,011332	88,247
MODAL_VL	Mode	5	0,007698	129,91

→ "OČVRŠĆENJE" KONSTRUKCIJE

PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

STABILNOST – problem tlačne sile

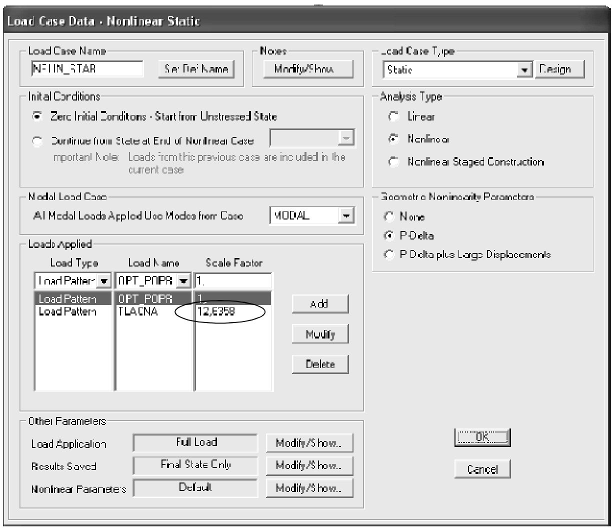


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5\ell)^2} = \frac{3,14^2 \times 32010}{5^2} = 12624,23\ kN$$

$$P \geq P_{cr} \rightarrow izvijanje\ štapa$$

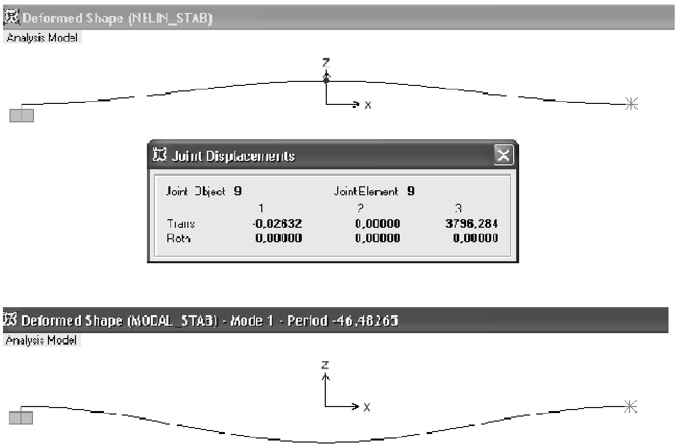
PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

STABILNOST – problem tlačne sile | za P=12640 kN



PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

STABILNOST – problem tlačne sile | za P=12640 kN

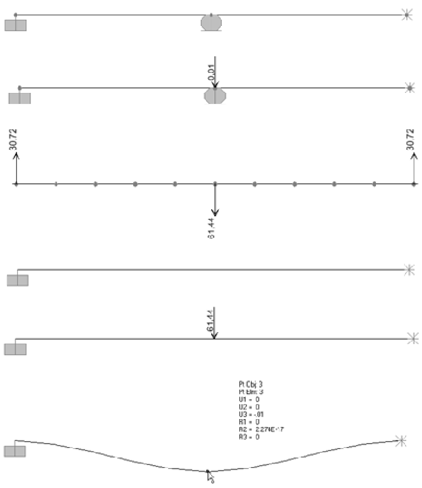


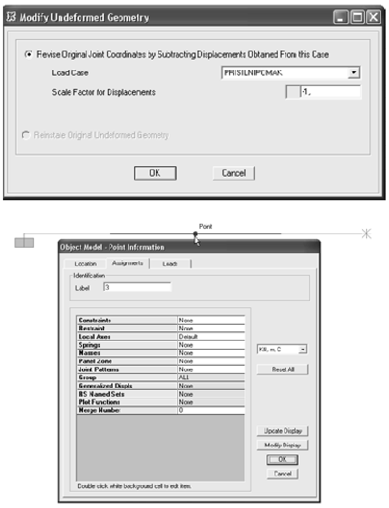
→ NEMOGUĆE!!!!

PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

- AKO POSTOJI POČETNA IMPERFECIJA – npr. 1 cm u sredini nosača

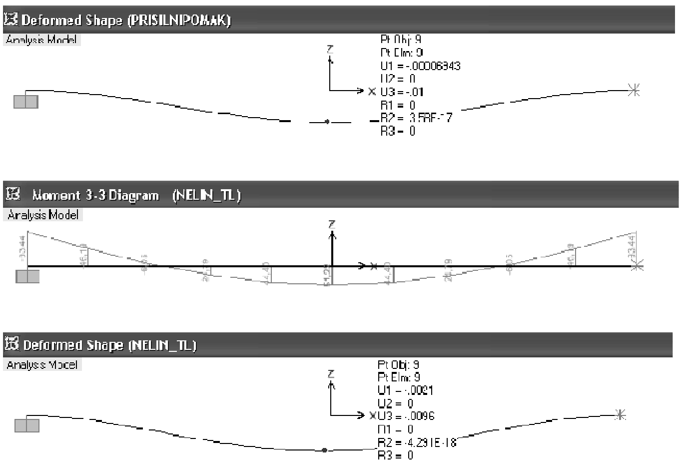
Kako zadati početnu imperfekciju u SAPu?





PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

- AKO POSTOJI POČETNA IMPERFECIJA – npr. 1 cm u sredini nosača

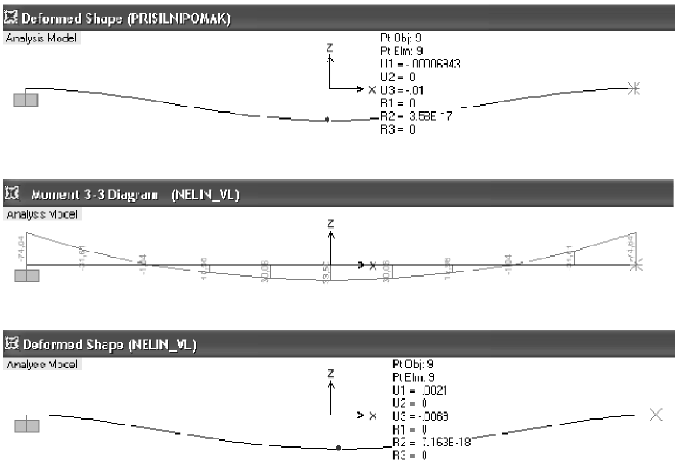


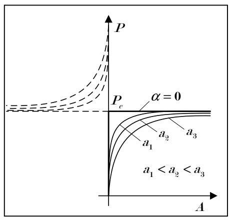
$$\Delta M = \frac{M_{II,tl,imp}}{M_{II,tl}} = \frac{51}{46} = 1,11$$

$$\Delta M = \frac{M_{II,tl,imp}}{M_{I}} = \frac{51}{42} = 1,21$$

PRIMJER 2. – OBOSTRANO UPETI ŠTAP

- AKO POSTOJI POČETNA IMPERFECIJA – npr. 1 cm u sredini nosača



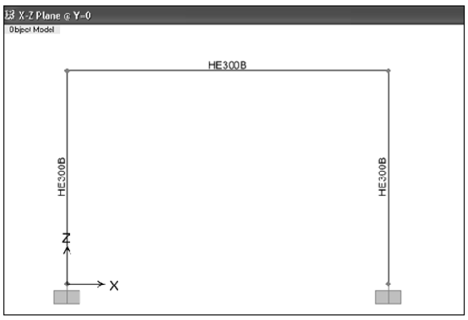


Ovisnost kritične sile o početnoj imperfekciji za elastični štap

$$\Delta M = \frac{M_{II,vl,imp}}{M_{II,vl}} = \frac{33}{38} \approx 0,9$$

$$\Delta M = \frac{M_{II,vl,imp}}{M_{I}} = \frac{33}{42} \approx 0,8$$

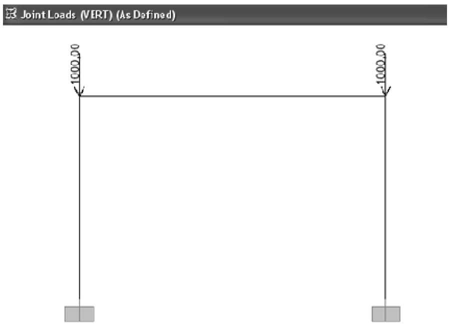
PRIMJER 3. – OKVIR

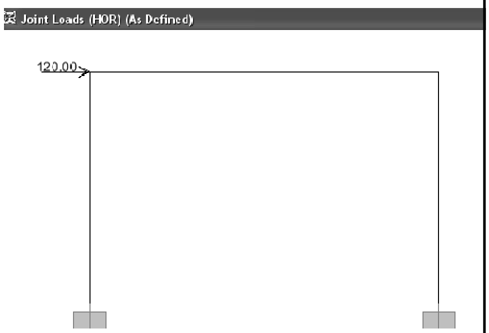


RASPON PREČKE	ℓ=6 m	
VISINA STUPA	ℓ=4 m	
PRESJEK	HEB300	$I=2,517\times10^{-4}$ m^4
MATERIJAL	ČELIK S235	$E=2\times10^{8}$ kN/m^2
OPTEREĆENJE	V=1000 kN	vertikalna sila
	H=120 kN	horizontalna sila

LOAD CASE

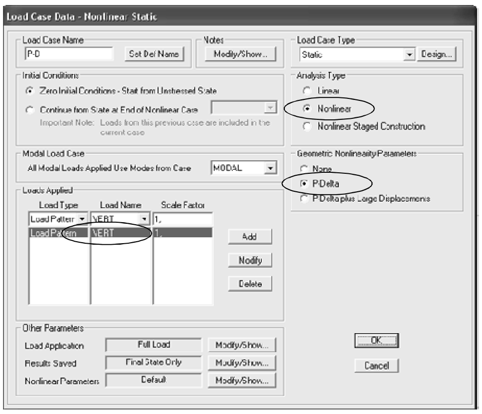
Opterećenja - vertikalne sile i horizontalna sila

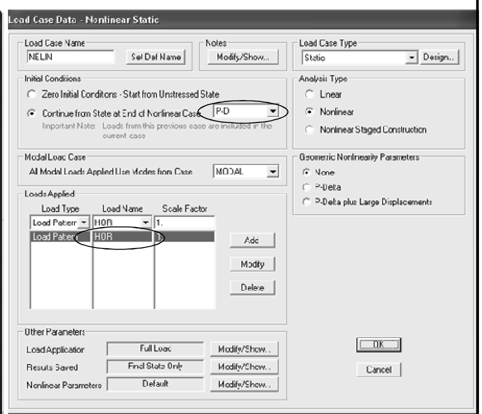




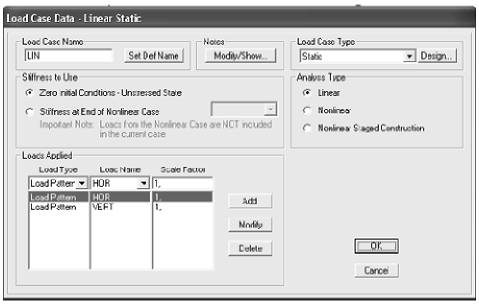
LOAD CASE

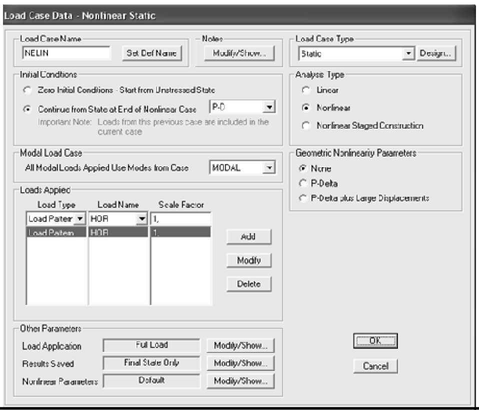
Opterećenje uzdužnom tlačnom silom





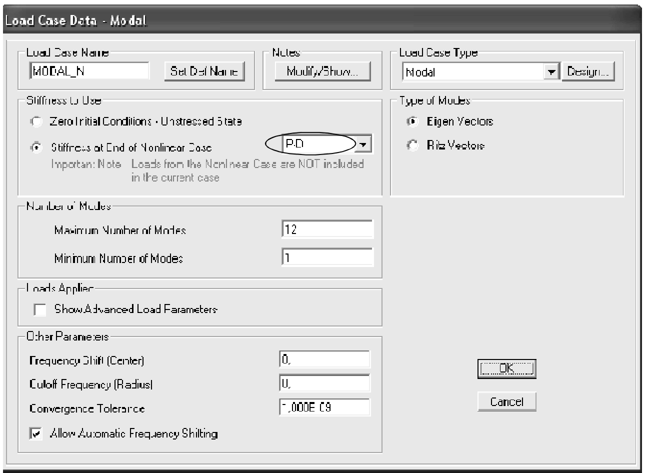
LOAD CASE

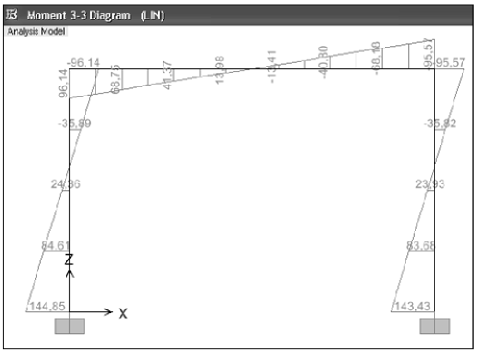


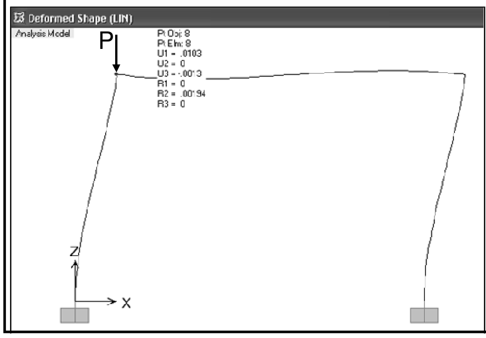


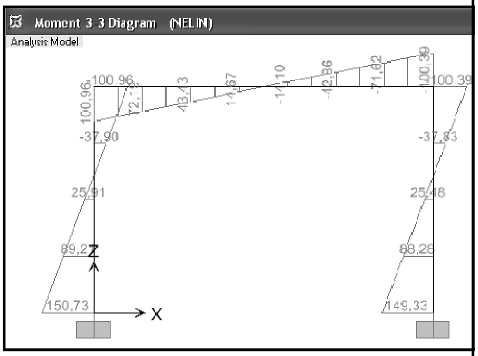
LOAD CASE

Modal – za proračun vlastitih oblika









$$\Delta M = \frac{M_{II}}{M_I} = \frac{151}{145} = 1{,}04$$

PRIMJER 3. – OKVIR

Usporedba perioda oscilacija – LINEARNI vs. NELINEARNI PRORAČUN

LINEARNI PRORAČUN

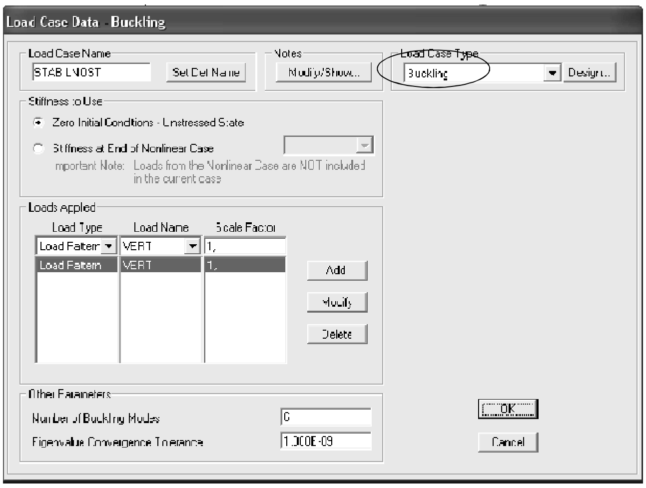
OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL	Mode	1	0.057784	17,306
MODAL	Mode	2	0.022775	43,907
MODAL	Mode	3	0.009197	108,74
MODAL	Mode	4	0.008224	121,59
MODAL	Mode	5	0.006287	159,05
MODAL	Mode	6	0.004167	240
MODAL	Mode	7	0.003508	285,08
MODAL	Mode	8	0.003294	303,62
MODAL	Mode	9	0.002944	339,7
MODAL	Mode	10	0.002050	340,70
MODAL	Mode	11	0,00233	429,77
MODAL	Mode	2	0,00194	515,42

NELINEARNI PRORAČUN

OutputCase Text	StepType Text	StepNum Unitless	Period Sec	Frequency Cyc/sec
MODAL_N	Mode	1	0,059206	16,89
MODAL_N	Mode	2	0,022831	43,8
MODAL_N	Mode	3	0,009235	108,28
MODAL_N	Mode	4	0,00826	121,07
MODAL_N	Mode	5	0,006299	158,76
MODAL_N	Mode	6	0,004167	239,98
MODAL_N	Mode	7	0,003508	285,04
MODAL_N	Mode	8	0,003299	303,14
MODAL_N	Mode	9	0,002944	339,65
MODAL_N	Mode	10	0,002865	349,07
MODAL_N	Mode	11	0,002332	428,76
MODAL_N	Mode	12	0,001941	515,29

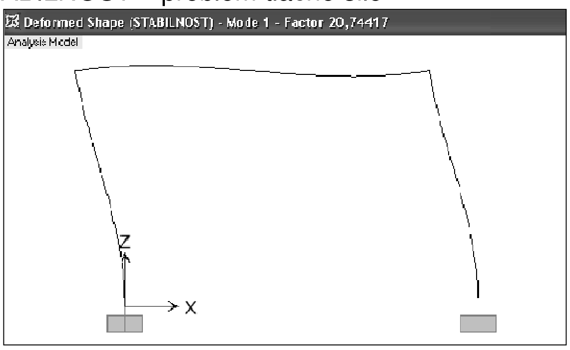
PRIMJER 3. – OKVIR

STABILNOST – problem tlačne sile



PRIMJER 3. – OKVIR

STABILNOST – problem tlačne sile



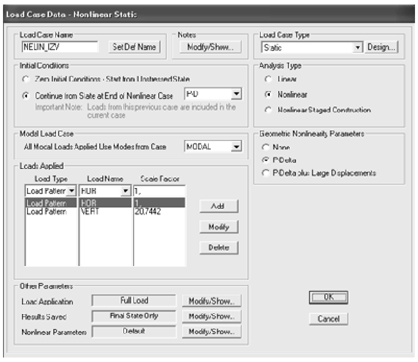
$$P_{cr} = \frac{(kl)^2 EI}{\ell^2} = \frac{2,57^2 \times 50340}{4^2} = 20780\ kN$$

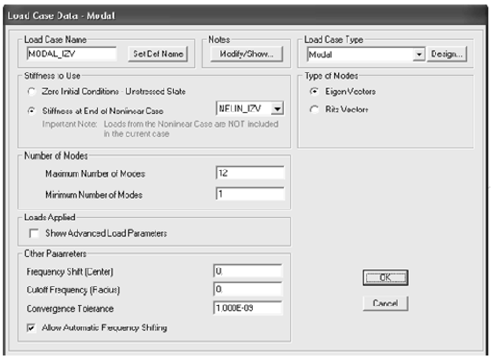
$$P \geq P_{cr} \rightarrow izvijanje\ stupa$$

PRIMJER 3. – OKVIR

STABILNOST – problem tlačne sile

$za\ P = 20780\ kN$

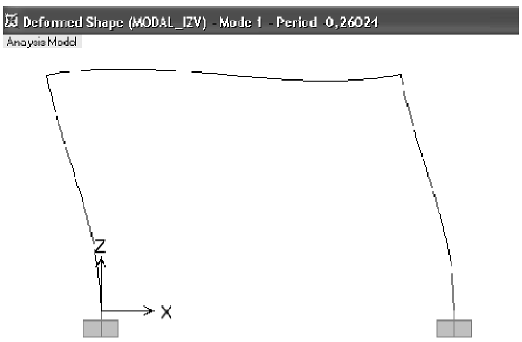




PRIMJER 3. – OKVIR

STABILNOST – problem tlačne sile

$za\ P = 20780\ kN$



→ NEMOGUĆE!!!!

PROJEKTIRANJE ČELIČNIH KONSTRUKCIJA

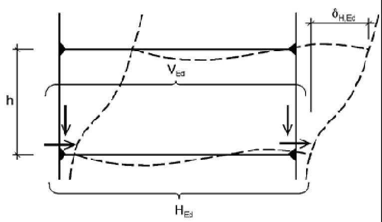
UČINCI PREMA TEORIJI II REDA

- učinci prema teoriji II reda moraju se uzeti u proračun ako utječu na ukupnu stabilnost građevine ili dostizanje graničnog stanja nosivosti
- granična vrijednost kad se učinci II reda **mogu zanemariti**:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10\ (15)$$

- pomični okviri:

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{Ed}}{V_{Ed}}\right)\left(\frac{h}{\delta_{H,Ed}}\right)$$



- u nedostatku drugih podataka - granična vrijednost svedene vitkosti:

$$\bar{\lambda} \geq 0,3\sqrt{\frac{A \times f_y}{N_{Ed}}}$$

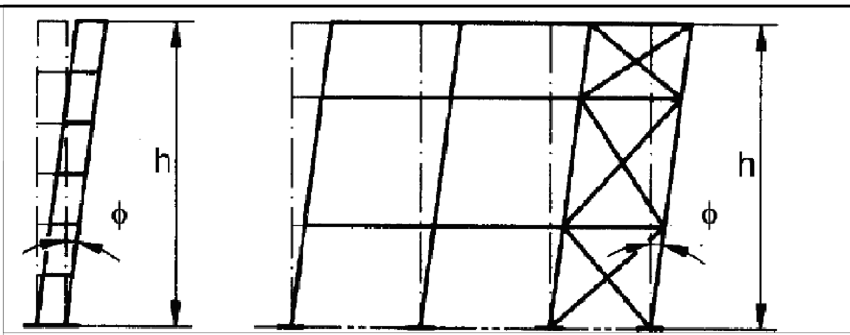
→kad učinci II reda **nisu zanemarivi**

PROJEKTIRANJE ČELIČNIH KONSTRUKCIJA

STABILNOST OKVIRA

- PREMA TIPU OKVIRA I GLOBALNOJ ANALIZI, UTJECAJI II REDA I IMPERFEKCIJE MOGU SE PRORAČUNATI PREMA SLJEDEĆIM METODAMA:
  - oboje pomoću globalne analize
  - djelomično preko globalne analize i djelomično kroz provjeru stabilnosti pojedinačnih elemenata
  - osnovni slučajevi stabilnosti pojedinačnih elemenata uzimajući u obzir odgovarajuće duljine izvijanja prema globalnom tonu izvijanja konstrukcije
- JEDNOKATNI OKVIRI – povećanje horizontalne sile H_{Ed} i ekvivalentnih vertikalnih opterećenja V_{Ed} zbog imperfekcija za faktor

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha_{cr}}}; \quad \alpha_{cr} \geq 3,0$$



GLOBALNE IMPERFEKCIJE OKVIRA

- pretpostavljeni oblik globalnih imperfekcija može se dobiti iz **elastičnog moda izvijanja** konstrukcije u promatranoj ravnini
- uzeti u obzir za **najnepovoljnije opterećenje**
- za okvire osjetljive na izvijanje u pomičnom modu, utjecaj imperfekcija uzima se u obzir preko početne hor. imperfekcije

$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m; \quad \phi_0 = 1/200$$

$$\alpha_h = 2/\sqrt{h}; \quad \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0$$

h – visina konstrukcije

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1+1/m)}$$

m – broj stupova u redu

PRIMJER 3. – OKVIR

PROPISI – da li je trebao proračun po teoriji II reda?

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} = \frac{20780}{1000} = 20,8 \geq 10$$

→ nije trebao, povećanje unutarnjih sila je zanemarivo u odnosu na teoriju I reda

↓

$$\Delta M = \frac{M_{II}}{M_I} = \frac{151}{145} = 1,04 \qquad \frac{1}{1-1/20,78} = 1,05$$