

## 2. TEČENJE U OTVORENIM KORITIMA

Tečenje u otvorenim koritima je najčešći problem s kojim se susreću hidrotehničari, a obuhvaća tečenje u prirodnim vodotocima (uspori u akumulacijama, pronos nanosa, pronos zagađivala), strujanje u sagrađenim kanalima za navodnjavanje i odvodnjavanje, kanalizacionim sustavima itd.... Ovaj tip strujanja spada u među prve oblike tečenja s kojima su se hidrotehničari susretali.

Tečenje u otvorenom koritu je karakterizirano slobodnom površinom na kojoj vlada atmosferski tlak. Za atmosferski tlak se uslovno usvaja da je jednak nuli, pa je na slobodnoj površini piezometarska razina jednaka geodetskoj koti. Također se usvaja da je voda nestišljiva i homogena pri čemu se dakle isključuju brza strujanja u kojima zrak ulazi u vodu.

Kanali spadaju u skupinu hidraulički dugačkih (linijskih) objekata sa dominantnim utjecajem trenja.

U inženjerskoj praksi se tečenje u otvorenim koritima promatra obzirom na promjenu oblika vodnog lica i promjenu parametara toka (npr. brzine, dubine, ..) u vremenu. Obzirom na oblik vodnog lica tečenje se dijeli na jednoliko i nejednoliko. Obzirom na promjenu parametara u vremenu razlikujemo stacionarna i nestacionarna tečenja s postepenim promjenama te nestacionarna tečenja s naglim promjenama.

U stacionarnim strujanjima se veličine kojima su ona opisana (brzina, dubina vode, tlakovi, sile i energija) ne mijenjaju tokom vremena. Stacionarna strujanja mogu biti **jednolika** ili **nejednolika**. Pod pojmom jednolikog se podrazumijeva tečenje koje duž cijelog svog toka ima jednake (iste) karakteristike. Jednoliko tečenje se može javiti samo u prizmatičnim kanalima tj. u koritima koja imaju konstantan pad i konstantan poprečni presjek. Nejednoliko tečenje podrazumijeva promjenu parametara (brzina, dubina, protok,..) duž toka.

U nestacionarnim strujanjima se vodostaji i protoci mijenjaju tokom vremena duž korita i u principu su uvijek nejednolika. Nestacionarnost tečenja se javlja uslijed djelovanja vanjskih faktora, a po intenzitetu njihovog djelovanja razlikujemo nestacionarne pojave s naglim promjenama i nestacionarne pojave s blagim promjenama. Primjer naglih promjena je rušenje brane, naglo zaustavljanje ili povećavanje protoka uslijed rada hidroelektrane,... a takve promjene izazivaju pojavu oštro izraženih valova u vodotoku. Primjer nestacionarnog tečenja s blagim promjenama je propagacija vodnog vala u vodotoku.

Iako je u većini slučajeva tečenje u otvorenom koritu trodimenzionalno (brzina toka ima tri komponente) za većinu praktičnih problema se koristi jednodimenzionalna analiza. Iz tog razloga se i u okviru ovog tečaja razmatra samo jednodimenzionalno strujanje u otvorenim kanalima. To znači da se usvaja **srednja brzina** po presjeku, da su strujnice kvaziparalelne te da je raspored tlakova po vertikali hidrostatski.

Ako se može usvojiti da je polje brzina u proticajnom presjeku praktički konstantno po vertikali a da se značajno razlikuje u ravnini okomitij na os vodotoka, tada se takvo strujanje opisuje kao dvodimenzionalno.

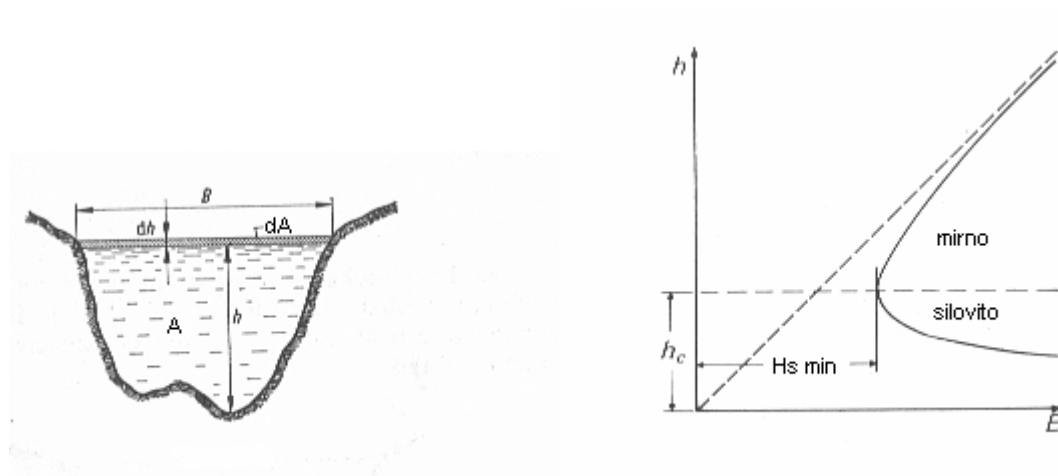
## 2.1 Specifična energija presjeka

Ako se referentna ravnina postavi u dnu korita tada se, na osnovu Bernoulijeve jednadžbe veličina

$$H_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad \dots (2.1)$$

može nazvati *specifična energija* (energija u odnosu na dno kanala). Specifična energija se sastoji iz dva člana: dubina vode  $h$  koja predstavlja potencijalnu energiju i iz kinetičke energije.

Varijacija specifične energije u presjeku za  $Q = const.$  i za zadanu geometriju pokazuje da specifična energija ima minimum kod neke dubine koju zovemo kritičnom.



Slika 2.1 Definijska skica poprečnog presjeka otvorenog korita (lijevo) i krivulja specifične energije (desno)

Kritična dubina dobiva se iz uslova  $Fr = 1$ . Za korito proizvoljnog oblika zbroj potencijalne i kinetičke energije je jednak

$$H_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{A^2 2g} \quad \dots (2.2)$$

Parcijalnom derivacijom izraza za specifičnu energiju i usvajanjem da je promjena proticajne površine po dubini jednaka širini vodnog lica ( $dA/dh=B$ ) dobiva se izraz za Froudiv broj za korito nepravilnog (proizvoljnog) oblika.

$$Fr = \frac{\alpha Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} \quad \dots (2.3)$$

U gornjoj jednadžbi ako se usvoji da je  $A/B = h_{sr}$  dobiva se jednadžba za Froudiv broj u pravokutnom koritu.

$$Fr = \frac{v^2}{gh} \quad \dots (2.4)$$

U inženjerskoj praksi se češće pod pojmom Froudiv broj podrazumijeva korijen iz gornjeg izraza tj.  $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ .

U slučaju kad je Frouddov broj jednak jedinici odnosno u uvjetima kad se javlja kritično tečenje, potencijalna energija izražena preko dubine vode ( $h$ ) je dvostruko veća od kinetičke energije ( $v^2/2g$ ) (Slika 2.1).

Treba naglasiti da se pojam specifične energije (koji se odnosi na jedan presjek) može upotrijebiti kad god su strujnice kvaziparalelne, te važi hidrostatski raspored tlakova. Prilikom definiranja specifične energije promatra se jedan proticajni presjek te se utjecaj trenja ne uzima u razmatranje. Nasuprot tome kod energetskih jednadžbi koje povezuju dva presjeka treba voditi računa o djelovanju trenja.

### 2.1.1 Promjena protoka sa dubinom pri konstantnoj specifičnoj energiji

Slično kao što se tražila promjena specifične energije sa dubinom pri konstantnom protoku, može se promatrati i promjena protoka pri konstantnoj specifičnoj energiji.

Jednadžba specifične energija za pravokutno korito ima oblik:

$$H_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha q^2}{2g h^2} \quad \dots (2.5)$$

pri čemu je sa  $q$  označen specifični protok (protok po jedinici širine vodotoka). Jednadžba se može riješiti po  $q$

$$q = \sqrt{2gh^2 (H_s - h)} \quad \dots (2.6)$$

Za  $h = 0$  i  $h = H_s$  vrijedi da je specifični protok  $q = 0$ . Dakle postoje dvije dubine pri kojima se može propustiti isti protok. Maksimalni protok se može izračunati tako da se pronađe ekstrem funkcije specifičnog protoka (derivacija funkcije mora biti jednaka nuli) što je definirano jednadžbom:

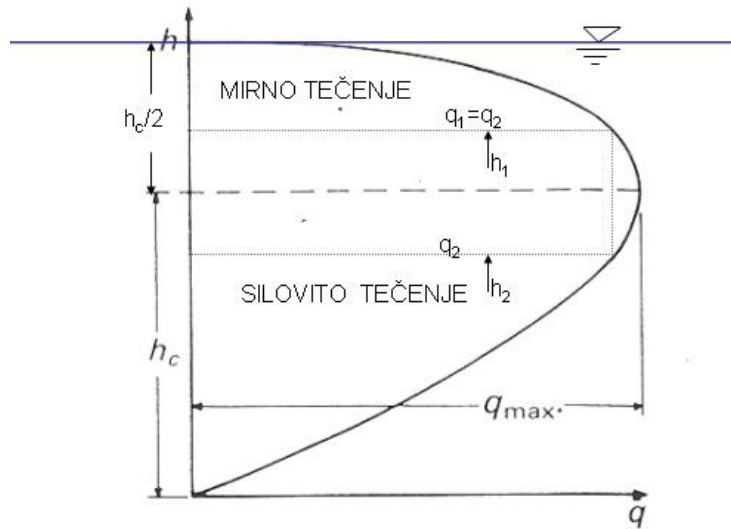
$$\frac{dq}{dh} = \sqrt{2g} \frac{2hH_s - 3h^2}{2\sqrt{h^2 H_s - h^3}} = 0 \quad \dots (2.7)$$

iz koje se dobiva da je dubina koja odgovara najvećem protoku:

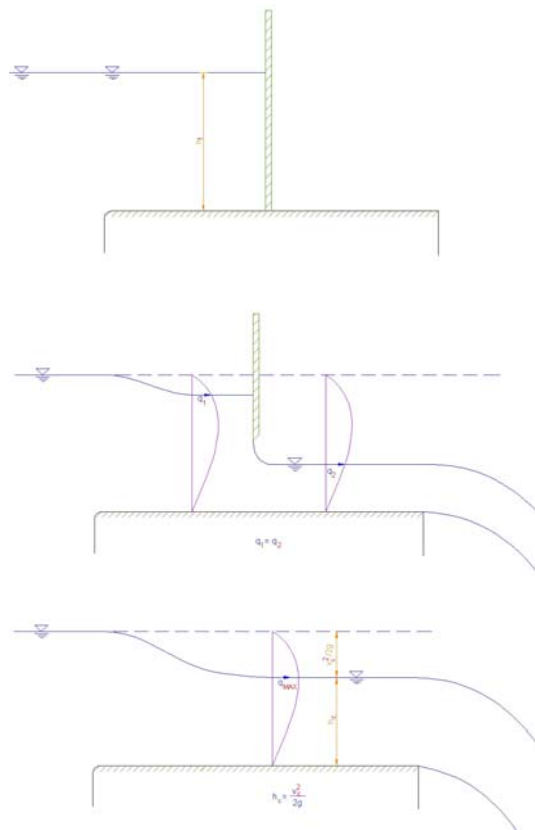
$$h = \frac{2}{3} H_s \quad \dots (2.8)$$

Dubina pri kojoj se javlja najveći protok je  $2/3$  ukupne energije odnosno dvostruko je veća od kinetičke energije. Najveći protok se dakle javlja pri kritičnoj dubini, što se i eksperimentalno jednostavno može pokazati.

Na polovini jednog kratkog (da nema trenja i da je horizontalan) glatkog kanala (slika 2.3) postavi se ustava koja se postepeno otvara a razina vode u vodospremi uzvodno od praga se drži konstantnom. Kad se ustava otvori počne tečenje i to tako da je uzvodno od ustave dubina veća od kritične a nizvodno od ustave manja od kritične. Kad se ustava potpuno otvori, postoji samo jedna dubina na čitavom kanalu (pragu), a to je kritična dubina.



Slika 2.2 Promjena protoka sa dubinom pri konstantnoj specifičnoj energiji



Slika 2.3 Preljevanje preko praga pri konstantnoj specifičnoj energiji

### 2.1.2 Rasprostiranje utjecaja

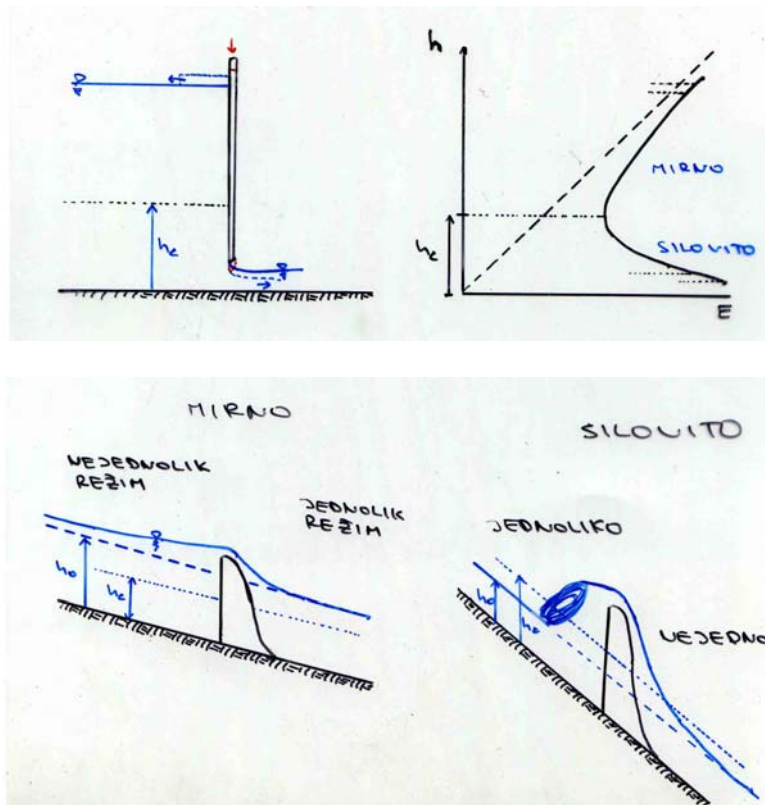
Manevriranje hidrotehničkim objektima u vodotoku (zapornice, zatvarači turbine,..) moguće je utjecati na promjenu parametara toka (dubina, brzina). Promjene u protoku mogu nastati i kao posljedica oborina. Ovi utjecaji se šire od mjesta nastajanja po čitavom vodotoku.

Utjecaji se u mirnom režimu prenose od nizvodnog prema uzvodnom kraju, dok se u silovitom režimu prenose od uzvodnog prema nizvodnom kraju toka. Osnovni uzrok ovoj pojavi je činjenica da se utjecaji prostiru uvijek iz zone veće energije prema zoni manje energije.

Kao primjer se može navesti ustava na kojoj dolazi do prelaska mirnog toka u siloviti. Ispred ustave tok je u mirnom, a iza ustave u silovitom režimu. Prilikom naglog spuštanja ustave za malu veličinu, uzvodna dubina će se povećati, a nizvodna smanjiti. Na osnovu dijagrama specifične energije u mirnom režimu ispred ustave, povećanoj dubini odgovara i povećana energija. Lako se može shvatiti da će se sa uzvodne strane ustave, poremećaj stvoren pokretanjem ustave prostirati od povećane ka prvobitnoj energiji (dakle u uzvodnom smjeru). Nizvodno od ustave u silovitom režimu smanjenoj dubini u silovitom režimu odgovara opet povećanje energije tako da se nizvodno od ustave poremećaj mora širiti nizvodno (Slika 2.4).

U kritičnom režimu se utjecaji neće rasprostirati niti uzvodno niti nizvodno. Na isti način se šire i mali valovi.

Primjer rasprostiranja utjecaja je i formiranje krivulje uspora i depresije.



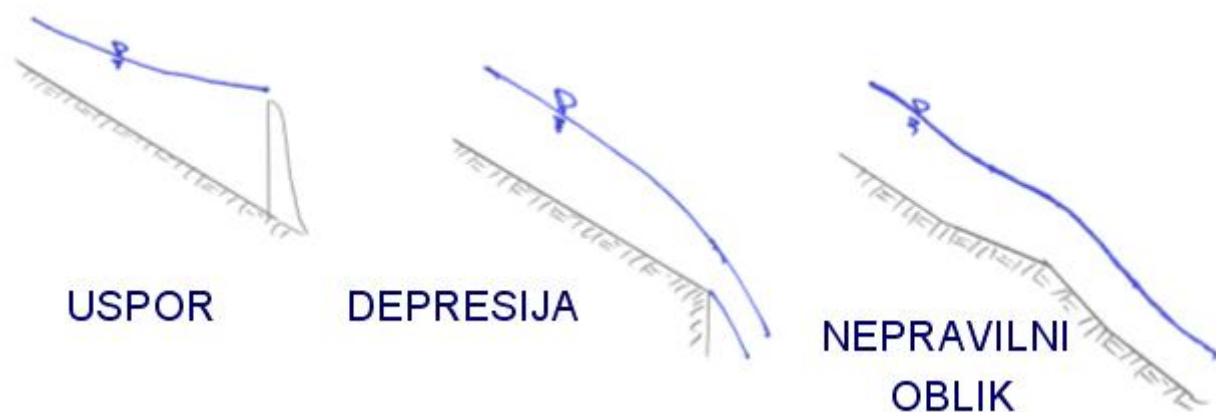
Slika 2.4 Rasprostiranje utjecaja

## 2.2 Nejednoliko tečenje u otvorenim koritima

Jednoliko tečenje se može javiti samo u sagrađenim, najčešće prizmatičnim kanalima, jer takav oblik tečenja zahtijeva da je poprečni presjek duž toka jednak po obliku i površini. Slobodno vodno lice treba biti paralelno sa dnom kanala, što uvjetuje da pad kanala mora biti konstantan. U prirodnim koritima se oblik i površina poprečnog presjeka, kao i pad dna kanala često mijenjaju, pa je pojava jednolikog tečenja vrlo rijetka.

Za zadani oblik kanala i odabranu protoku postoji samo jedna dubina pri kojoj se može javiti jednoliko tečenje. Tu dubinu nazivamo *normalna dubina* i kod nje se uspostavlja ravnoteža sila trenja i gravitacije. Postoji nebrojeno načina u kojima stacionarni protok može proći kroz jedan protočni profil. Slobodno vodno lice u tim slučajevima nije paralelno sa dnom kanala te se takovo tečenje naziva nejednoliko.

Postepene promjene u tečenju se javljaju pri promjeni geometrije vodotoka, promjeni pada dna ili pri promjeni hrapavosti po omočenom obodu vodotoka. U mirnom tečenju se javljaju dva osnovna tipa krivulja. To su krivulja uspora i krivulja depresije. U neprizmatičnim koritima linija vodnog lica može biti nepravilnog oblika (slika 2.5).



Slika 2.5 Osnovni oblici vodnog lica

Dubina vode se uzduž toka može i povećavati, no u svakom slučaju linija energije duž toka opada.

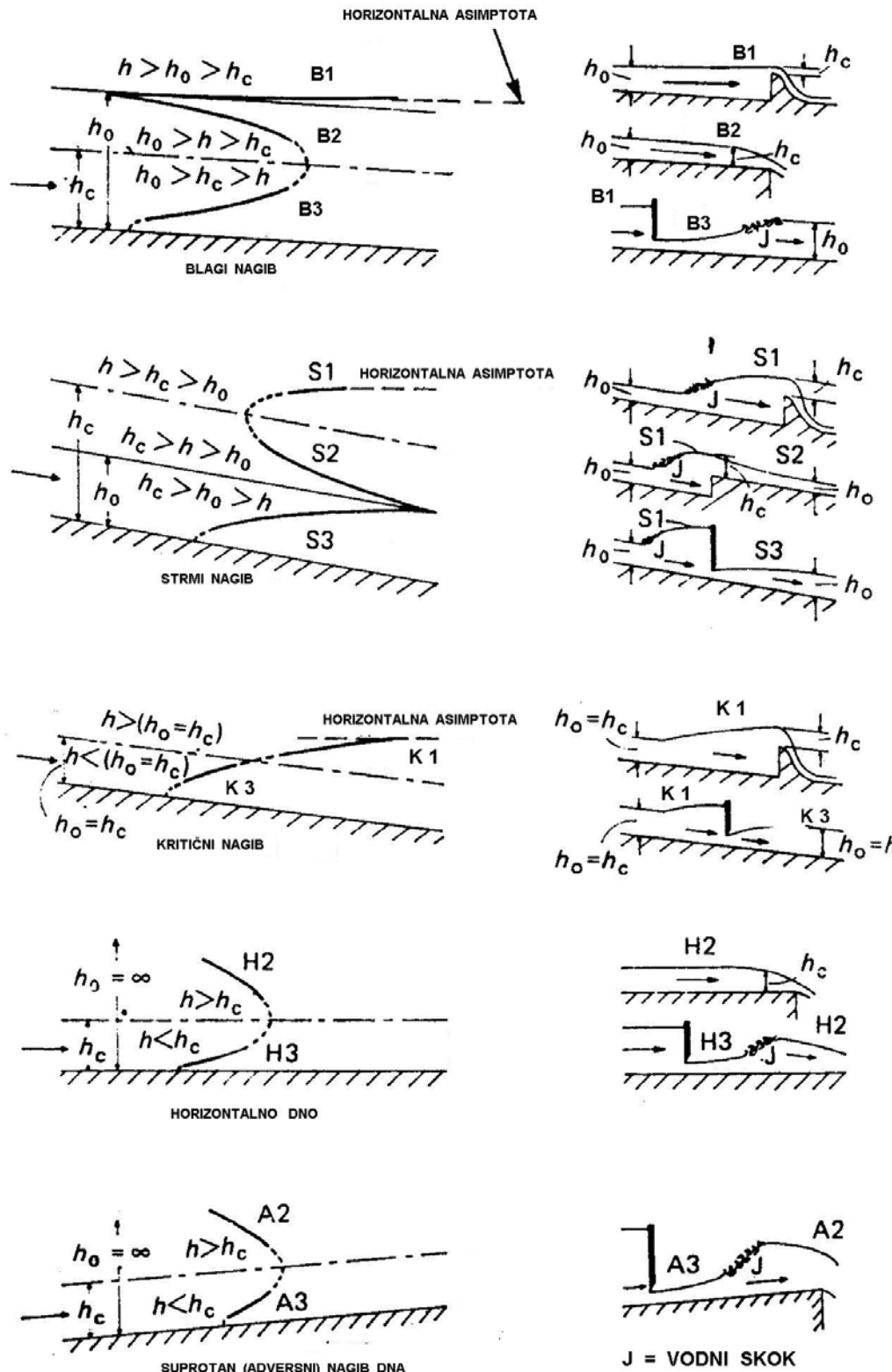
### 2.2.1 Klasifikacija oblika vodnog lica

Vodno lice može imati niz raznih oblika što ovisi o tome kako je tok kontroliran uz pomoć preljeva ili drugih zapreka, promjenama u padu dna kanala i drugom.

Osnovna klasifikacija se zasniva na nagibu dna kanala. On može biti suprotan (*A* - adverse) ( $I < 0$ ), horizontalan (*H*) ( $I = 0$ ), blag (*B*) ( $I < I_c$ ), kritičan (*K*) ( $I = I_c$ ), ili strm (*S*) ( $I > I_c$ ). Profili se dalje klasificiraju ovisno o dubini vode koja može biti veća ili manja od normalne i veća ili manja od kritične. Ako je dubina vode veća od normalne ( $h_0$ ) i kritične dubine ( $h_c$ ) profil nosi oznaku 1, ako je dubina u profilu između  $h_0$  i  $h_c$  oblik vodnog lica nosi oznaku 2, a ako je dubina manja od obje tada oblik nosi oznaku 3.

Na taj način je definirano 12 profila koji su prikazani na slici 2.6 . Normalno tečenje nije moguće u horizontalnom kanalu i adverznom pa krivulje  $H1$  i  $A1$  ne postoje. Kod kritičnog pada su  $h_0$  i  $h_c$  identični pa krivulja  $K2$  ne postoji.

Ove slike su jako distorzirane. U praksi je teško razlučiti da li je tok uniforman ili postepeno promjenjiv.



Slika 2.6 Oblici vodnog lica u nejednolikom tečenju

Oblik vodnog lica u nejednolikom strujanju se proračunava tako da se vodotok podijeli na niz dionica u kojima se usvaja da je promjena brzine i dubine linearna. Proračun počinje od presjeka u kojem je poznata dubina vode i protok. U ostalim presjecima proračun vodostaja se provodi pomoću Bernoullijeve jednačbe iterativno.

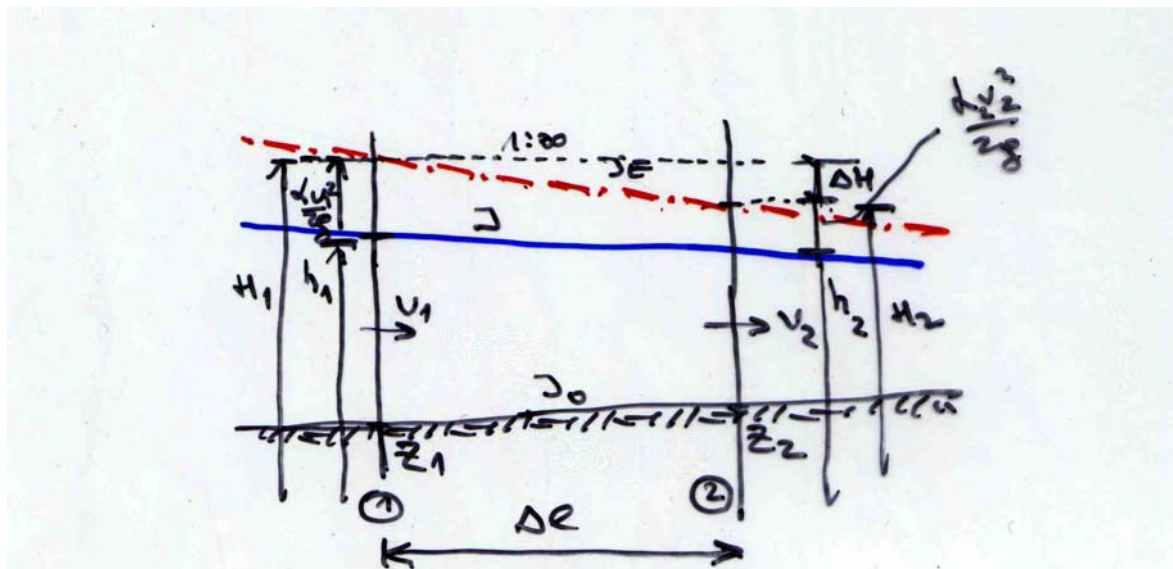
Bernoullijeva jednačba:

$$h_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H \quad \dots (2.9)$$

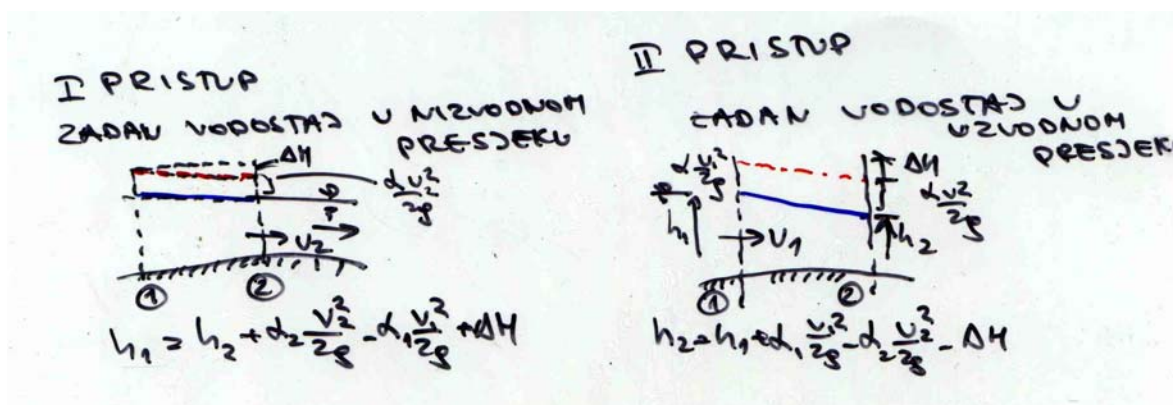
pri čemu je:

$$\Delta H = \frac{\alpha n^2 v_{sr}^2}{R_{sr}^{4/3}} \cdot \Delta l \quad \dots (2.10)$$

Numerički postupak se provodi pretpostavljajući vodostaj u uzvodnom (ili nizvodnom) presjeku te se pomoću njega računaju ostali parametri.



Slika 2.7 Prostorni inkriment za numeričko određivanje oblika vodnog lica pri nejednolikom tečenju



Slika 2.8 Dva smjera računanja oblika vodnog lica



## 2.3 Nestacionarno tečenje

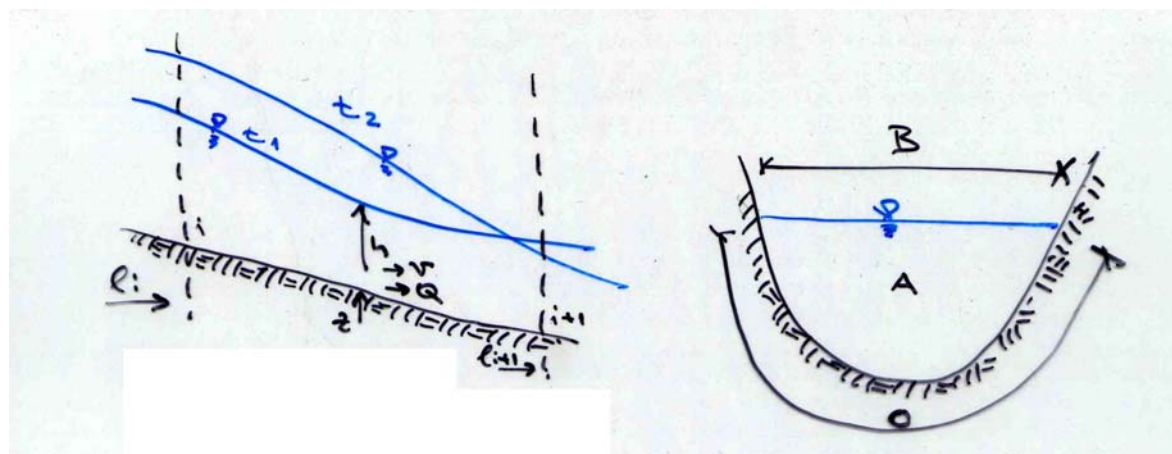
Tečenje u vodotocima, bilo u prirodnim ili umjetnim, rijetko je kada stacionarno. Nestacionarne hidrauličke procese, mada su jako složeni, je moguće opisati zakonima hidrodinamike. Vanjski činioci, bilo prirodni (oborine,..) ili izazvani ljudskom djelatnošću (npr. manevriranje zapornicama na branama), uvjetuju vremensku i prostornu promjenu vodostaja i protoka. O intenzitetu djelovanja vanjskih faktora ovisi karakter nestacionarne pojave, tako da možemo razlikovati dva tipa nestacionarnog, neuniformnog (nejednolikog) tečenja:

- **Tečenje sa postepenim promjenama** je karakterizirano sa promjenama dubine i brzine duž velikih dionica vodotoka.
- **Tečenje sa naglim promjenama** je karakterizirano velikim promjenama dubine i brzine tečenja na kratkim dionicama vodotoka.

Blage i spore promjene rubnih uvjeta na nekom izdvojenom dijelu vodotoka izazivaju odgovarajuću nestacionarnu pojavu. Tipičan primjer nestacionarnog tečenja s blagim promjenama je propagacija vodnog vala u prirodnom koritu.

Tipičan primjer nestacionarnog toka sa naglim promjenama javlja se kod upravljanja hidrotehničkim objektima, nagli ulazak elektrane u pogon, naglo dizanje zapornica na brani, rušenje brane i sl. Takve nagle promjene režima tečenja izazivaju pojavu oštro izraženih valova u vodotoku koji se propagiraju po zakonima održanja mase i količine gibanja.

U praksi se razlika između ova dva tipa tečenja usvaja uz pretpostavku da se u tečenju sa postepenim promjenama parametri toka mijenjaju dovoljno polako da se efekti ubrzanja mogu zanemariti. Jednadžbe kojima se opisuje postepeno promjenjivo tečenje se ne mogu primijeniti na tečenje sa naglim promjenama.



Slika 2.9 Definicijaska skica za jednadžbe tečenja u otvorenom koritu

### 2.3.1 Jednadžbe nestacionarnog tečenja u otvorenim koritima

Nestacionarno strujanje u otvorenim koritima se može opisati primjenom jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeve jednadžbe. Obzirom da smo usvojili da se ovaj oblik strujanja

može tretirati kao jednodimenzionalno, jednačba kontinuiteta se može pisati u obliku (diferencijalni oblik):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0 \quad \dots(2.11)$$

a Bernoulijeva u obliku

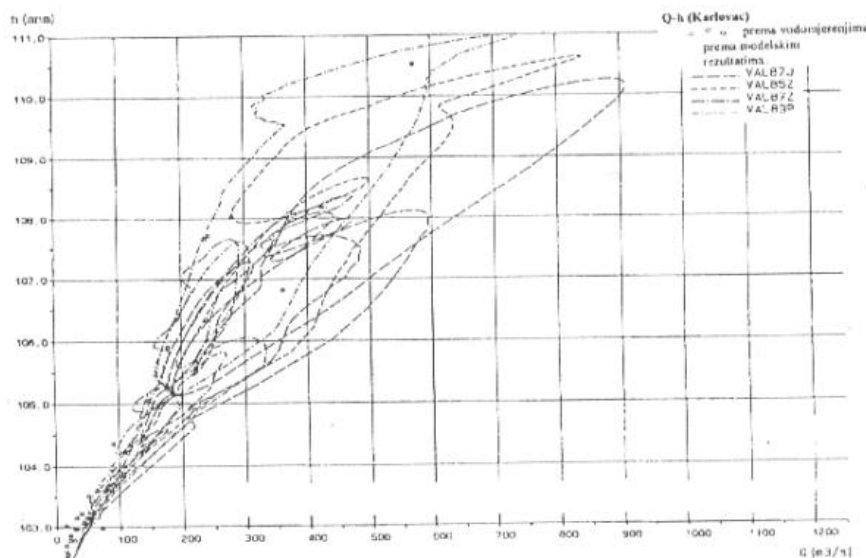
$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial h}{\partial l} = -I_E \quad \dots(2.12)$$

Navedene diferencijalne jednačbe se nazivaju **Saint-Venant-ove jednačbe** za tečenje u otvorenom koritu.

Opisane jednačbe sadrže dvije nepoznanice  $h(x,t)$  i  $v(x,t)$ . One su nelinearne obzirom na član od kinetičke energije  $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial l}$  i na član od trenja  $I_{tr} = \frac{v^2}{c^2 R}$ . Pri tome je pretpostavljeno da je gubitak uslijed trenja pri nestacionarnom strujanju, koje je uvijek i nejednoliko, identičan kao i za jednoliko strujanje pri istoj dubini i brzini. Uspojena pretpostavka je prihvatljiva obzirom da se opisuje sporo promjenjivo strujanje. Nelinearnost članova otežava analitičko i numeričko rješavanje vladajućih jednačbi, pa one nisu rješive u općem obliku tako da se u praksi koriste približna rješenja.

### 2.3.2 Postepeno promjenjivo tečenje

U ovom slučaju tečenja je nagib slobodne površine relativno mali. Strujnice su približno paralelne (vertikalne komponente brzine su zanemarivo male) a tlak se raspoređuje po hidrostatskom zakonu. Vodni valovi su velikih dužina pa je i osnovna karakteristika ovakvog gibanja da je **utjecaj trenja znatno veći od utjecaja inercijalnih sila**.



**Slika 2.10** Konsumpciona krivulja za nestacionarno tečenje – Usporedba izračunatih (linije) i izmjerenih (točke)  $Q$ - $h$  odnosa u Brodarcima i na Kupi.

### 2.3.2.1 Odnos pada slobodne površine $I$ prema padu dna $I_0$

U području dominantnog utjecaja trenja vrijedi jednačba:

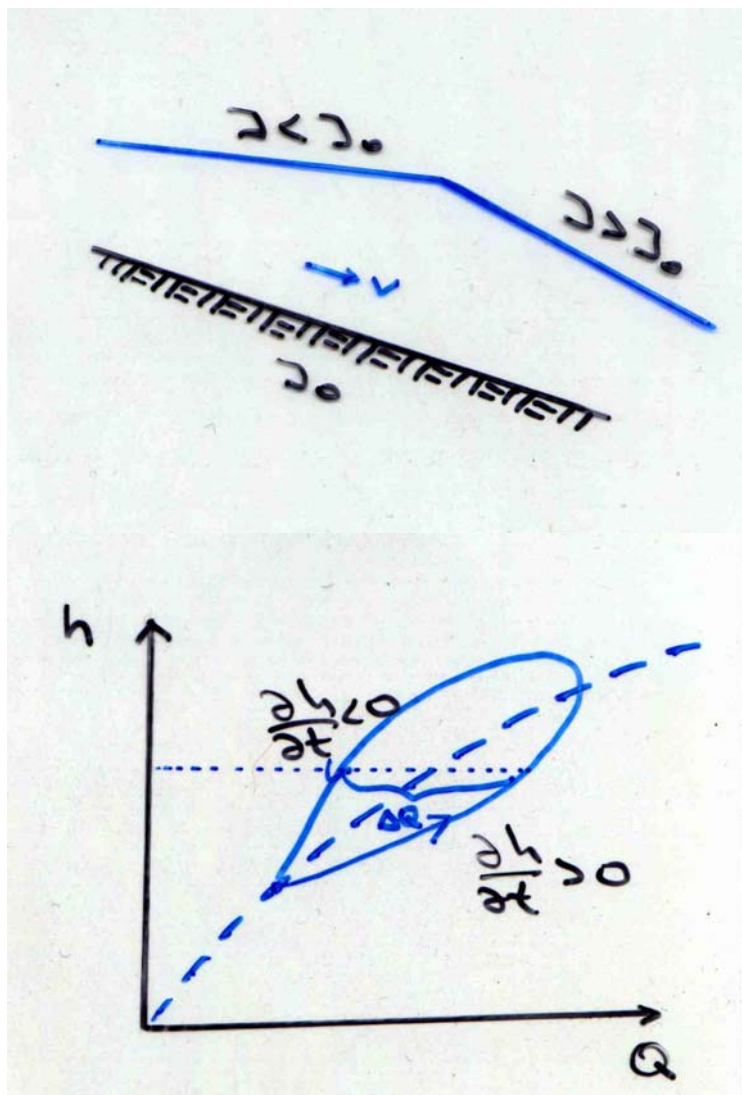
$$-\frac{\partial h}{\partial l} = I_E = \frac{v^2}{c^2 R} \quad \dots(2.13)$$

prema kojoj je pad slobodne površine isključivo definiran trenjem. Protok u bilo kojem presjeku je jednak:

$$Q = \underbrace{Ac\sqrt{R}}_K \sqrt{I} \quad \dots(2.14)$$

Iz gornje jednačbe slijedi da se za istu dubinu vode  $h$  protok  $Q$  mijenja kao  $\sqrt{I}$ .

Pogledajmo skicu vodnog lica pri prolaska vodnog vala u nekom trenutku  $t$  i odnos između vodostaja  $h$  proticaja  $Q$  za neki hidrometrijski profil (Slika 2.11).



Slika 2.11 Petlja u konsumpcionoj krivulji

Na slici 2.11 je prikazana "petlja" u konsumpcionoj krivulji pri čemu je isprekidanom linijom prikazana konsumpciona krivulja za stacionarni režim. Za period dolaska vala odnosno u rastućoj grani hidrograma vrijede relacije  $\partial h/\partial t > 0$  i  $I > I_0$ . Za period opadanja vala vrijede relacije  $\partial h/\partial t < 0$  i  $I < I_0$ .

Kod ovako formirane petlje u konsumpcionoj krivulji je razlika protoka za istu dubinu manja što je manja razlika između  $I$  i  $I_0$ .

### 2.3.2.2 Brzina propagacije u slučaju kad je $I \approx I_0$

Promatra se pozitivni val (pozitivni val je val u kojem protok i dubina vode rastu tijekom vremena) čija će se slobodna površina aproksimirati pravcima. Može se pisati:

$$I - I_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \dots(2.15)$$

pri čemu je  $\Delta y$  prirast dubine vode. Kako je  $\Delta x = wt$  ( $w$  je brzina propagacije vala) vrijedi relacija:

$$I - I_0 = \frac{\Delta y}{w\Delta t} = \frac{1}{w} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad \dots(2.16)$$

podatak  $\Delta y/\Delta t = \Delta h/\Delta t$  se dobiva mjerenjem vodostaja jer predstavlja promjenu vodostaja u vremenu na odabranom profilu. U nastavku će se razmotrit primjer propagacije vala sa malim promjenama kada vrijedi  $I \approx I_0$ .

Brzina kretanja će se promatrati kao kretanje profila konstantnog presjeka pa se može pisati:

$$dA = 0 = \frac{\partial A}{\partial l} dl + \frac{\partial A}{\partial t} dt \quad \dots(2.17)$$

Iz čega slijedi da je brzina propagacije profila  $A = konst.$  dana izrazom:

$$w = \frac{dl}{dt} = - \frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial l}} \quad \dots(2.18)$$

Obzirom da se na osnovu jednadžbe kontinuiteta  $\partial A/\partial t + \partial Q/\partial l = 0$  može pisati  $\partial A/\partial t = -\partial Q/\partial l$  vrijedi:

$$w = \frac{dl}{dt} = - \frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial l}} \quad \dots(2.19)$$

Uz usvojene hipoteze može se napisati jednadžba (usvojeno je da vrijedi  $I_{\pi} \approx I \approx I_0$ ):

$$w = \frac{\frac{\partial Q}{\partial A}}{\frac{\partial y}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial(KI_r^{1/2})}{\partial A}}{\frac{\partial y}{\partial y}} = I^{1/2} \frac{\frac{\partial K}{\partial A}}{\frac{\partial y}{\partial y}} = I_0^{1/2} \frac{\frac{\partial K}{\partial A}}{\frac{\partial y}{\partial y}} \quad \dots(2.20)$$

pri čemu je modul protoke  $K$  definiran izrazom:

$$K = Ac\sqrt{R} = A \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} = \frac{A}{n} R^{2/3} = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{O^{2/3}} \quad \dots(2.21)$$

a sa  $O$  je označen omočeni obod. Kako i površina proticajnog presjeka i omočeni obod ovise o dubini vode slijedi:

$$I_0^{1/2} \frac{\partial K}{\partial y} = I_0^{1/2} \frac{\partial \left( \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{O^{2/3}} \right)}{\partial y} = \frac{5}{3} I_0^{1/2} \frac{1}{n} \frac{A^{2/3}}{O^{2/3}} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{2}{3} I_0^{1/2} \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{O^{5/3}} \frac{\partial O}{\partial y} \quad \dots(2.22)$$

$$I_0^{1/2} \frac{1}{n} \frac{A^{2/3}}{O^{2/3}} = I_0^{1/2} \frac{1}{n} R^{2/3} = v \quad \dots(2.23)$$

pri čemu je  $v$  brzina toka. Može se stoga napisati:

$$w = \frac{5}{3} v - \frac{2}{3} v \frac{A}{O} \frac{\partial O}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial A} \quad \dots(2.24)$$

Gornji izraz predstavlja traženu brzinu propagacije  $w$ . U slučaju širokog pravokutnog korita vrijedi:

$$A = By; \quad O \approx B; \quad \frac{\partial O}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial y}{\partial A} = \frac{1}{B}; \quad \frac{A}{O} \frac{\partial O}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial A} \approx \frac{2y}{B} \ll 1 \quad \dots(2.25)$$

drugi član jednadžbe 2.24 se može zanemariti pa se dobiva

$$w = \frac{5}{3} v \approx 1.7v \quad \dots(2.26)$$

Ova jednadžba pokazuje da je u području dominantnog utjecaja trenja brzina propagacije  $w$  proporcionalna sa stvarnom srednjom brzinom toka.

### 2.3.3 Mjerenje protoka u otvorenom vodotoku

Uobičajeno je da se u vodotocima mjeri razina vode kao najjednostavnija mjerena. Da bi se odredio odnos protoka i dubine vode (konsumpciona krivulja) u vodotoku provode se hidrometrijska mjerenja sa ciljem određivanja konsumpcione krivulje koja je potrebna za ostale hidrološke analize (potrebno za projektiranje nasipa, brana,..).

Konsumpciona krivulja se određuje tako da se za nekoliko dubina vode u koritu izmjeri protok, te se interpolira (i ekstrapolira) konsumpciona krivulja.

Prilikom mjerenja protoka u otvorenom vodotoku usvajamo pretpostavku da je tečenje stacionarno. Kako se u pravilu sva mjerenja provode kod promjenjivog vodostaja nužno je poznavati odnos između stvarno izmjerenog protoka i odgovarajućeg za stacionarno strujanje. Često se u praksi ovaj utjecaj može zanemariti, no takav zaključak može biti valjan samo ako to potvrdi odgovarajuća analiza.

Kao polazna postavka za određivanje veze između protoka u stacionarnom i nestacionarnom režimu uzimaju se diferencijalni oblici jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeva jednadžbe.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0 \quad \dots(2.27)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial l} = -I_E \quad \dots(2.28)$$

Vodomjerni profili izabiru se na potezima jednolikog strujanja gdje se u stacionarnom strujanju protok može izraziti Chezy-evom jednadžbom:

$$Q_o = Ac\sqrt{RI_o} \quad \dots(2.29)$$

pri čemu je:

- $c$  Chezy-ev koeficijent
- $R$ - hidraulički radius
- $I_o$  pad dna, odnosno vodnog lica u jednolikom stacionarnom strujanju
- $Q_o$  Protok u stacionarnom (jednolikom) režimu

Sličnu pretpostavku moguće je primijeniti za protok u nestacionarnom režimu

$$Q = Ac\sqrt{RI_E} \quad \dots(2.30)$$

pri čemu je  $I_E$  trenutni pad linije energije koji se na osnovu gornjih jednadžbi može izraziti:

$$I_E = I_o \frac{Q^2}{Q_o^2} \quad \dots(2.31)$$

Gornja jednadžba (jed. 2.31) se može riješiti po  $Q$

$$Q = \pm Q_o \sqrt{\frac{I_E}{I_o}} = \pm Q_o \sqrt{\frac{\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial l}}{I_o}} \quad \dots(2.32)$$

Primjena ovog izraza za korigiranje izmjerenog protoka nije jednostavna. Kako su navedeni izrazi funkcija trenutnog protoka pojedini članovi iz dinamičke i jednadžbe kontinuiteta se mogu izraziti u obliku:

$$\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{Q}{gA} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{Q}{A} \right) = \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial l} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial l} \quad \dots(2.33)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -B \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots(2.34)$$

$$\frac{\partial A}{\partial l} = B \frac{\partial y}{\partial l} = B \left( \frac{\partial h}{\partial l} - \frac{\partial z}{\partial l} \right) = B \left( \frac{\partial h}{\partial l} + I_o \right) \quad \dots(2.35)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{A} \right) = \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \dots(2.36)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots(2.37)$$

Uvođenjem ovih odnosa kao i izraza (2.31) u Bernoulijevu jednadžbu te sređivanjem i rješavanjem po trenutnom protoku  $Q$  dobiva se:

$$Q = \frac{\frac{B}{gA^2} \frac{\partial h}{\partial t} \pm \sqrt{\frac{B^2}{gA^4} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 - \left[ \frac{I_o}{Q_o^2} - \frac{B}{gA^3} \left( I_o + \frac{\partial h}{\partial l} \right) \right] \left( \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)}}{I_o} \quad \dots(2.38)$$

$$Q_o^2 - \frac{B}{gA^3} \left( I_o + \frac{\partial h}{\partial l} \right)$$

Kako se iz vodomjerenja u nekom hidrometrijskom profilu može odrediti prirast vodostaja  $\partial h/\partial t$ , protok  $Q$ , gradijent  $\partial Q/\partial t$  kao i iz mjerenja vodostaja uzvodno i nizvodno gradijent  $\partial h/\partial x$ , prikladnije je primijeniti rješenje po stacionarnom protoku:

$$Q_o = Q \sqrt{\frac{I_o}{2 \frac{BQ}{gA^2} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{BQ^2}{gA^3} \left( I_o + \frac{\partial h}{\partial l} \right) - \frac{\partial h}{\partial l} - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t}}} \quad \dots(2.39)$$

### 2.3.4 Proračun vodnog lica u nestacionarnom režimu (vodni valovi)

Gibanje vodnih valova je opisano jednadžbama (kontinuiteta i Bernulijevom) koje nije moguće direktno riješiti za zadane početne i rubne uvijete. Promatrat ćemo gibanje vodnog vala na dionici vodotoka (i usvojiti da je korito pravokutnog poprečnog presjeka). Kao što je već rečeno, tečenje u otvorenom koritu je opisano Saint-Venantovim jednadžbama.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0 \quad \dots(2.40)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial h}{\partial l} = -I_E \quad \dots(2.41)$$

Prilikom korištenja Saint-Venantovih jednadžbi se usvajaju slijedeće pretpostavke:

- tečenje je približno jednoliko tj. površine poprečnog presjeka se ne mijenjaju značajno duž toka a raspored tlakova po vertikali je hidrostatski,
- gubici energije uslijed trenja pri nestacionarnom tečenju su praktički jednaki onima kod stacionarnog tečenja
- promjena brzine po omočenoj površini ne utječe na širenje vala
- pad dna vodotoka je relativno malen te vrijedi da je kut koji tvori nagib dna s horizontalom  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$  a  $\cos \alpha \approx 1$ .

Da bi se mogla izračunati promjena razine i protoka duž vodotoka u funkciji vremena potrebno je uz vladajuće jednadžbe poznavati početne i rubne uvjete.

*Početni uvjeti* su uvjeti koji definiraju stanje na početku modeliranog procesa. U ovom slučaju je to razina vode i protok duž modelirane dionice vodotoka u početnom trenutku  $t_0$ .

$$h_o = h(x, t_o) \quad Q_o = Q(x, t_o) \quad \dots(2.42)$$

Time je definiran odnos razina i protoka duž promatrane dionice vodotoka prije dolaska vodnog vala. Najčešće se za početno stanje usvaja jednoliko strujanje.

*Rubni uvjeti* definiraju geometriju korita te protok i dubinu vode na ulaznom profilu.

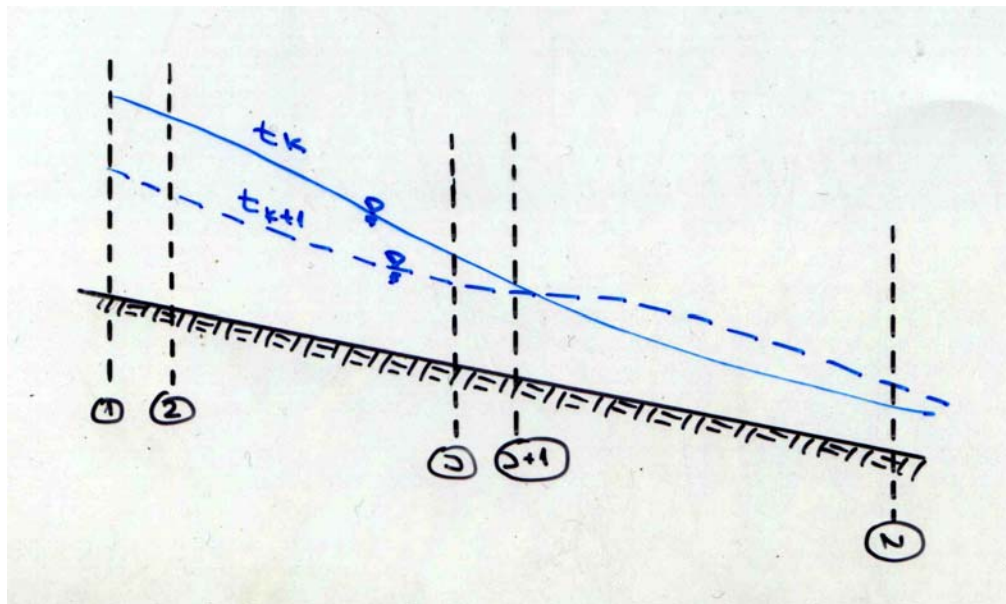
$$h_1 = h(x_1, t) \quad Q_1 = Q(x_1, t) \quad \dots(2.43)$$

*Rezultat* modeliranja je raspored protoka i vodostaja u prostoru i vremenu.

$$h = h(x, t) \quad Q = Q(x, t) \quad \dots(2.44)$$

Numerički postupak se obično provodi tako da se dionica vodotoka podijeli na niz (dijelova) elemenata na kojima moraju biti zadovoljene vladajuće jednadžbe. Na taj način se za svaki vremenski korak formira sistem jednadžbi koji se numerički može riješiti. Nizom uzastopnih vremenskih koraka simulira se nestacionarnost strujanja.





Slika 2.12 Definijska skica za diskretizaciju vodotoka pri računanju vodnog lica u nestacionarnom režimu tečenja

Za potrebe proračuna se obično usvaja pretpostavka da je na svakom pojedinačnom elementu raspored potencijala i protoka po prostoru i vremenu linearan. Na osnovu tako usvojene pretpostavke se mogu izračunati srednje vrijednosti pojedinih veličina.

### 2.3.5. Tečenje s naglim promjenama

Prilikom izučavanja strmih valova zanemaruje se trenje i utjecaj pada dna i slobodne površine neposredno uzvodno odnosno nizvodno od čela vala. Čelo vala je tipičan "kratki objekt" u kojem trenje nije primarno (ne dolazi do izražaja). Strmi valovi se najčešće formiraju prilikom manevriranjem zapornicom na hidrotehničkim objektima.

#### Tipovi valova obzirom na smjer kretanja i promjenu dubine

Obzirom na smjer kretanja valovi se dijele na:

*Uzvodne valove* – to su valovi koji se kreću suprotno od smjera toka

*Nizvodne valove* – valovi koji se kreću u smjeru toka

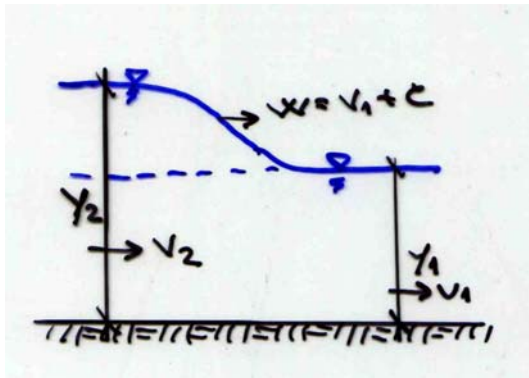
Obzirom na promjenu razine valovi se dijele na:

*Pozitivne valove* – dubina poremećenog toka je veća od dubine neporemećenog toka (dubina nakon vala je veća od dubine prije vala)

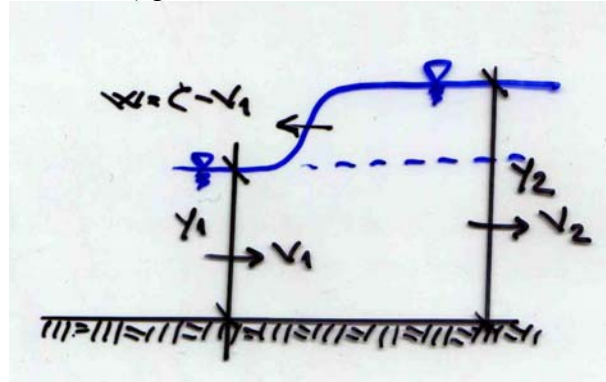
*Negativne valove* – dubina poremećenog toka je manja od dubine osnovnog neporemećenog toka (dubina iza vala je veća od dubine ispred vala)

U mirnom režimu se mogu formirati četiri tipa valova (podrazumjeva se valovi kreću u vodotoku u kojem je mirni režim tečenja):

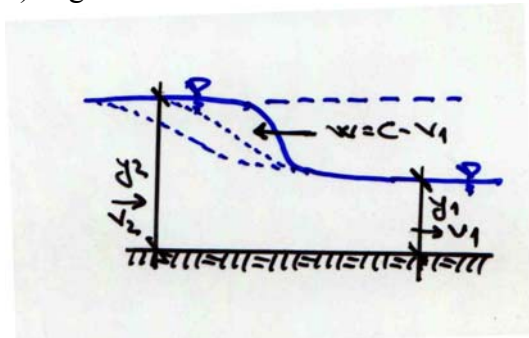
a) pozitivni nizvodni val



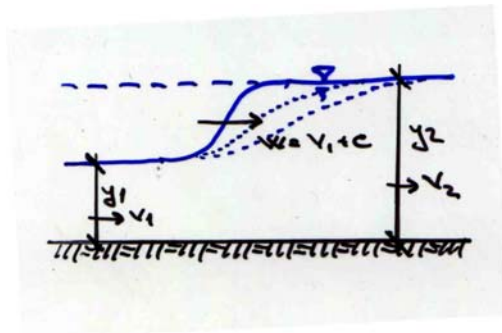
b) pozitivni uzvodni val



c) negativni uzvodni val



d) negativni nizvodni val

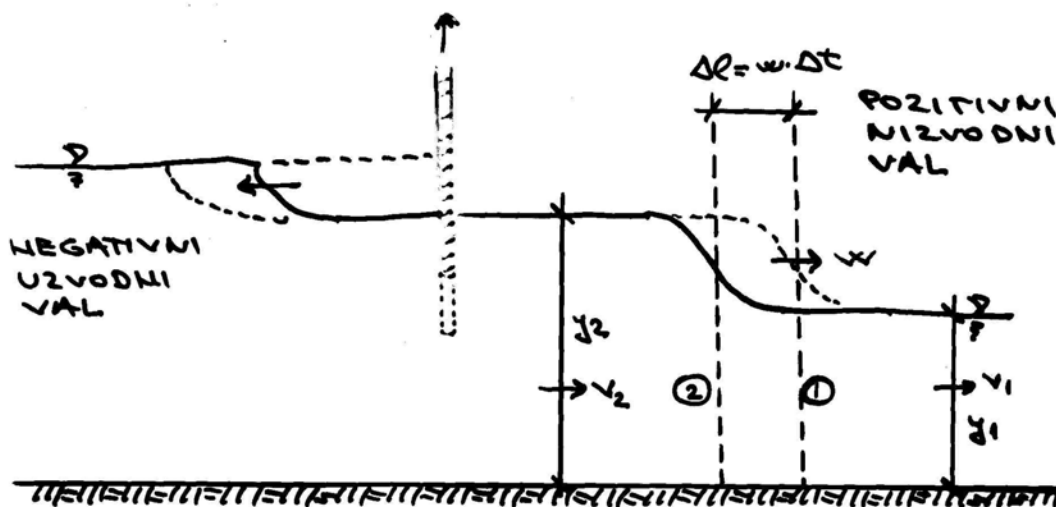


Slika 2.13 Tipovi strmih valova

Uvijek će se sa  $y_2$  označavati veća dubinu a sa  $y_1$  manja dubina.

2.3.5.1 Brzina vala

Propagacija valova u otvorenom koritu će se promatrati na primjeru otvaranja zapornice. Pozitivni val se kreće apsolutnom brzinom  $w$ . Ispred čela vala strujanje se može smatrati praktički stacionarnim.



Slika 2.14 Formiranje strmih valova

Primjenom integralne jednadžbe kontinuiteta na volumen vode između presjeka 1 i 2 u vremenskom intervalu  $\Delta t$

$$\int_{l_i}^{l_{i+1}} A dl \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} Q_{i+1} dt - \int_{t_1}^{t_2} Q_i dt = 0 \quad \dots(2.45)$$

Ako se usvoji da vrijedi:

$$\begin{aligned} (A_2 - A_1)\Delta l & \text{ promjena volumena vode između dva presjeka} \\ Q_2 t = A_2 v_2 \Delta t & \text{ volumen vode koja ulazi u kontrolni volumen} \\ Q_1 t = A_1 v_1 \Delta t & \text{ volumen vode koja izlazi iz kontrolnog volumena} \end{aligned}$$

jednadžba kontinuiteta poprima oblik

$$\underbrace{(A_2 - A_1)}_{\Delta v} \cdot \Delta l + \underbrace{(A_1 v_1)}_{Q_1} - \underbrace{(A_2 v_2)}_{Q_2} \cdot \Delta t = 0 \quad \dots(2.46)$$

Iz jednadžbe (2.46) slijedi:

$$w = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{A_2 - A_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{A_2 - A_1} \quad \dots(2.47)$$

pri čemu je  $w$  *apsolutna brzina* propagacije vala i može poslužiti za izračunavanje povišenja vodostaja uslijed naglog povećanja protoka

$$A_2 = A_1 + \frac{Q_2 - Q_1}{w} \quad \dots(2.48)$$

Da bi se jednadžba (2.48) mogla upotrijebiti za izračunavanje promjene vodostaja potrebno je apsolutnu brzinu vala  $w$  izraziti još pomoću dinamičke jednadžbe. Primijenit će se impulsni oblik dinamičke jednadžbe.

Promatrat će se pozitivni nizvodni val. Postoji promjena količine gibanja unutar kontrolnog volumena u vremenu  $\Delta t$  prouzrokovana pomakom vala za duljinu  $\Delta l$  (slika 2.14). Na tom dijelu dolazi do promjene brzine od  $v_1$  na  $v_2$  (to je  $\rho \Delta l A_1 (v_2 - v_1)$ ). Prostor čela vala iznad osnovnog toka u vremenu  $\Delta t$  promjeni brzinu od nula na  $v_2$  što se može pisati  $\rho \Delta l (A_2 - A_1) v_2$  tako da je ukupna promjena količine gibanja između presjeka 2 i 1:

$$\rho \Delta l A_1 (v_2 - v_1) + \rho \Delta l (A_2 - A_1) v_2 \quad \dots(2.49)$$

Također se mogu definirati i :

$$\text{Ulazna količina gibanja } \rho A_2 v_2^2$$

$$\text{Izlazna količina gibanja } \rho A_1 v_1^2$$

$$\text{Tlačne sile na ulazu } \rho g A_2 \bar{y}_2 (= F_{H1})$$

$$\text{Tlačne sile na izlazu } \rho g A_1 \bar{y}_1 (= F_{H2})$$

pri čemu su  $\bar{y}_1$  i  $\bar{y}_2$  dubine težišta površina  $A_1$  i  $A_2$ .

Izjednačavanjem promjene količine gibanja i sila (impulsa) se dobiva

$$\rho \Delta l A_1 (v_2 - v_1) - \rho \Delta l (A_2 - A_1) v_2 + \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2 = \rho g A_2 \bar{y}_2 - \rho g A_1 \bar{y}_1 \quad \dots(2.50)$$

te uvrštavanjem izraza za  $w$  (kako je  $\Delta l = w \Delta t$ ) nakon sređivanja se dobiva:

$$\rho w A_1 (v_2 - v_1) - \rho A_1 v_1 (v_2 - v_1) = \rho g A_2 \bar{y}_2 - \rho g A_1 \bar{y}_1 \quad \dots(2.51)$$

odnosno:

$$\rho A_1 (v_2 - v_1) (w - v_1) = \rho g A_2 \bar{y}_2 - \rho g A_1 \bar{y}_1 \quad \dots(2.52)$$

Uvrštavanjem ponovo jednadžbe za  $w$  dobiva se:

$$(w - v_1)^2 = g \frac{A_2}{A_1} \frac{A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1}{A_2 - A_1} = g \bar{y}_2 \frac{A_2}{A_1} \frac{A_2 - A_1 \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}}{A_2 - A_1} \quad \dots(2.53)$$

ili konačno:

$$w = v_1 \pm \sqrt{g \bar{y}_2} \sqrt{\frac{A_2}{A_1} \frac{A_2 - A_1 \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}}{A_2 - A_1}} \quad \dots(2.54)$$

Dobiveni izraz za apsolutnu brzinu propagacije čela strmog vala se sastoji od brzine osnovnog toka ( $v_1$ ) i relativne brzine vodnog vala  $c$

$$w = v_1 \pm c \quad \dots(2.55)$$

Pri tome je relativna brzina vodnog vala

$$c = \pm \sqrt{g \bar{y}_2} \sqrt{\frac{A_2}{A_1} \frac{A_2 - A_1 \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}}{A_2 - A_1}} \quad \dots(2.56)$$

što je ujedno i brzina propagacije vala na mirnoj vodi. Jednadžba kontinuiteta (2.48) i dinamička (2.54) omogućuju proračun visine i brzine strmog vala a rješavaju se iterativno.

Ako se promatra pravokutni kanal jedinične širine ( $B=1$ ) vrijedi  $A_1=y_1$ ;  $A_2=y_2$ ,  $\bar{y}_1=y_1/2$  i  $\bar{y}_2=y_2/2$  relativna brzina je definirana izrazom:

$$c = \pm \sqrt{\frac{g y_2}{2 y_1}} (y_1 + y_2) \quad \dots(2.57)$$

Brzina propagacije elementarnog vala na mirnoj vodi u pravokutnom kanalu se dobiva iz jednadžbe (2.57) kada se uvrsti  $y_1 = y_2 = y$  ( $y$  – dubina vode po kojoj se val propagira)

$$c = \pm \sqrt{g y} \quad \dots(2.58)$$

pri čemu se predznak + koristi za računanje brzine nizvodnog a predznak – za brzinu uzvodnog vala.

Visina čela pozitivnog vala ( $h_v$ ) se može izračunati ako se poznaje prirast protoke  $\Delta Q$ . Jednadžba kontinuiteta se može pisati u obliku:

$$\Delta Q = Bh_v w \quad (h_v = y_2 - y_1) \quad \dots(2.59)$$

odnosno:

$$h_v = \frac{\Delta Q}{Bw} = \frac{\Delta q}{w} \quad \dots(2.60)$$

Na osnovu poznatog izraza za brzinu propagacije vala u pravokutnom kanalu je visina vala definirana izrazom:

$$h_v = \frac{\Delta q}{v_1 + \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)}} \quad \dots(2.61)$$

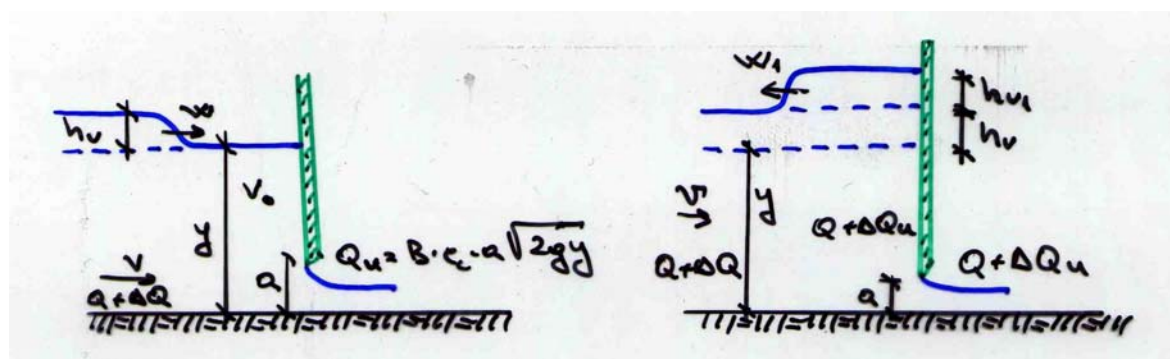
Ova jednadžba se najlakše rješava iterativno.

### 2.3.5.2 Odbijanje (refleksija) strmih valova

Pod odbijanjem (refleksijom) strmih valova podrazumijeva se nestacionarno strujanje koje nastaje kad val naiđe na neku prepreku. U slučaju da prepreka potpuno zaustavi kretanje vode (npr. kad val naiđe na potpuno zatvorenu vertikalnu ustavu) javlja se potpuna refleksija. U slučaju kad je ustava djelomično otvorena, javlja se djelomična refleksija.

#### *Djelomična refleksija*

Promatrat će se pravokutni kanal širine  $B$  kroz koji protječe voda u jednolikom režimu. Naglim povećanjem protoka za  $\Delta Q$  na uzvodnom kraju kanala izazvan je pozitivni nizvodni val visine  $h_v$ . Za poremećeno stanje je dubina vode  $y+h_v$  a brzina strujanja  $v=(q+\Delta q)/(y+h_v)$ . Kad val naiđe na prepreku (ustavu) on se od nje odbije.



**Slika 2.15 Djelomična refleksija vala** (Usvojena je pretpostavka da je  $Q$  mali pa je brzinska visina sa uzvodne strane zanemarena u izrazu za brzinu nizvodno od ustave  $v = \sqrt{2gy}$ .)

Pretpostavit će se da se položaj ustave nije promijenio pa se povećani protok  $\Delta Q$  (odnosno  $\Delta q$ ) dijeli na dva dijela:

- povećanje proticaja  $\Delta Q_u$  kroz ustavu uslijed povećanja dubine ispred ustave iznosi

$$\Delta Q_u = Bc_c a \left( \sqrt{2g(y + h_v + h_{v1})} - \sqrt{2gy} \right) \quad \dots(2.62)$$

- refleksija vala tj. formiranje indirektnog vala. Promjena proticaja na mjestu odbijenog vala iznosi  $\Delta Q_l < 0$ . Vrijedi relacija  $\Delta Q = \Delta Q_u + \Delta Q_l$  što zapravo znači da je početni (dolazni) prirast protoka  $\Delta Q$  podijelio na povećanje protoka ispod ustave ( $\Delta Q_u$ ) te je došlo do smanjenja protoka uzvodno od ustave  $\Delta Q_l$ .

Pri tome je:

$$\Delta Q_l = Bw_l h_{v1} < 0 \quad (\text{jer je } w_l < 0) \quad \dots(2.63)$$

Veličina  $w_l$  se dobiva iz jednadžbe brzine širenja vala ( usvajajući predznak -) i uvrštavajući umjesto  $y$ ,  $y+h_v$  a umjesto brzine  $v_0$ :

$$v = \frac{q + \Delta q}{y + h_v} \quad \dots(2.64)$$

Dobiva se:

$$w_l = v - \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}} (y_1 + y_2) \quad \dots(2.65)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} y_1 &= y + h_v \\ y_2 &= y + h_v + h_{v1} \end{aligned}$$

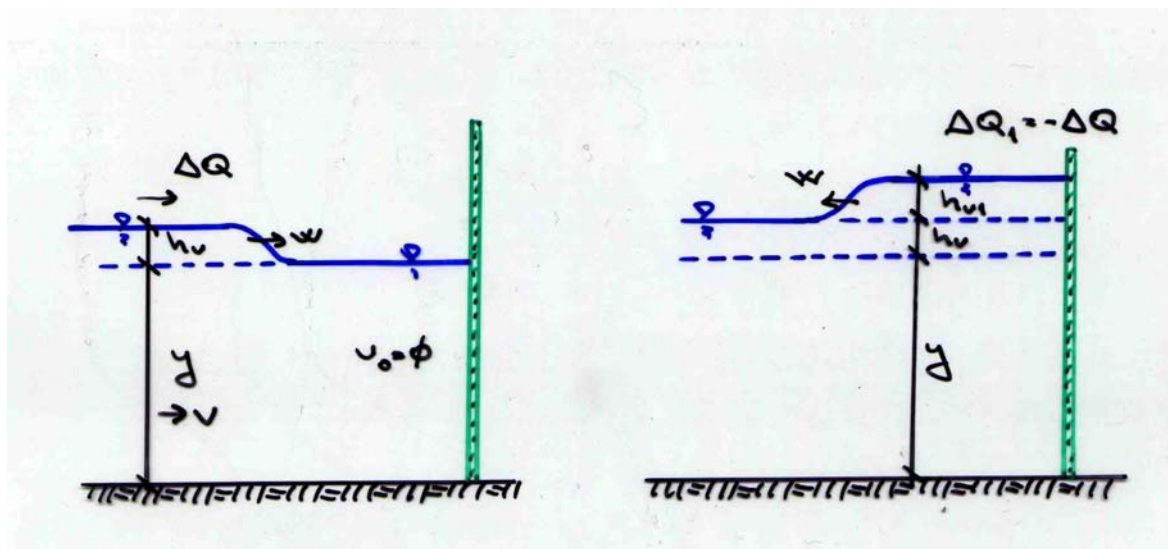
Potpuna refleksija nastaje u slučaju kad je ustava potpuno zatvorena.  $v_o = 0 \Rightarrow w = c$

U ovom slučaju, obzirom da je  $v = 0$  (tj.  $w=c$ ) za osnovni val vrijedi slijedeća relacija:

$$\Delta Q = Bh_v c = Bh_v \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}} (y_1 + y_2) \quad \dots(2.66)$$

Za odbijeni val vrijedi relacija:

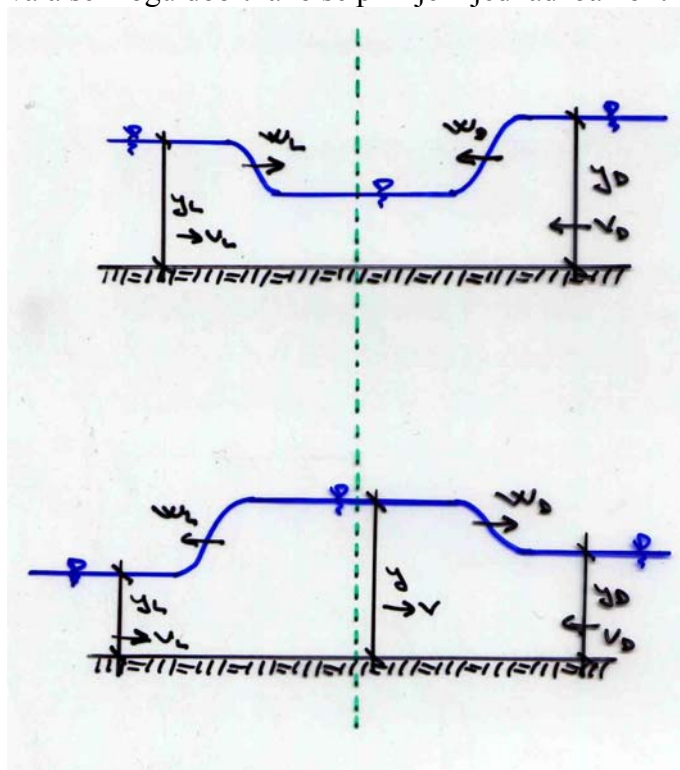
$$\Delta Q_l = -\Delta Q = Bh_{v1} c_1 = Bh_{v1} \left( \frac{\Delta Q}{h + h_v} - \sqrt{\frac{g(y + h_v + h_{v1})}{2(y + h_v)}} (y + h_v + h_{v1} + y + h_v) \right) \quad \dots(2.67)$$



Slika 2.16 Potpuna refleksija vala

2.3.5.3 Princip superpozicije strmih valova

Na strme valove se može primijeniti princip superpozicije. Ako se dva vala kreću jedan prema drugom, nakon sraza formirat će se dva nova vala koji putuju u suprotnom smjeru. Parametri vala se mogu dobiti ako se primjeni jednačba kontinuiteta i dinamička jednačba.



Slika 2.17 Superpozicija strmih valova

Usvojit će se da se okvir giba brzinom  $c$  prema lijevo (uzvodno) pa je ulazna brzina  $v_L + c$  a izlazna  $v + c$ .

Jednadžba kontinuiteta je tada:

$$\begin{aligned}(v_L + c_L)y_L &= (v + c_L)y \\ (v_D + c_D)y_D &= (v - c_D)y\end{aligned}\quad \dots(2.68)$$

a dinamička:

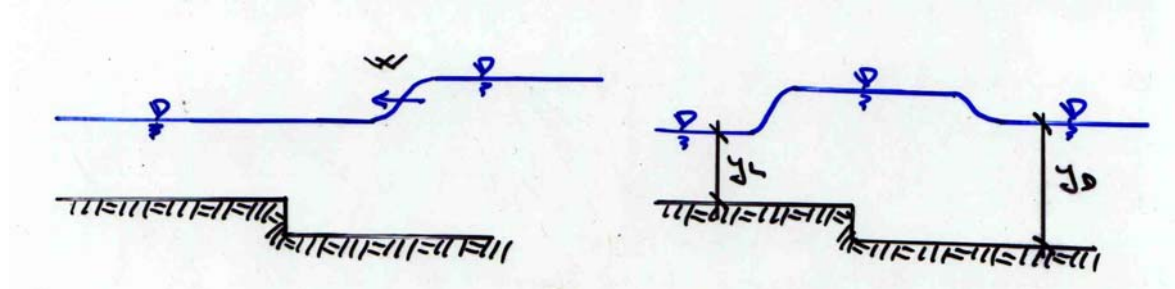
$$\begin{aligned}(y_L)^2 - y^2 &= \frac{2y_L}{g}(v_L + c_L)(v_L - v) \\ y^2 - (y_D)^2 &= \frac{2y_D}{g}(v_D + c_D)(v - v_D)\end{aligned}\quad \dots(2.69)$$

Pri tome su  $v_D$ ,  $y_D$ ,  $v_L$ ,  $y_L$  i  $g$  poznate veličine dok su  $y$ ,  $c_D$ ,  $c_L$  i  $v$  nepoznanice.

Na ovaj način je formiran sistem od četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice, rješenjem kojeg se dobivaju nepoznate vrijednosti.

### Prag u koritu

Nailaskom vala na prag u koritu formiraju se dva vala, jedan uzvodno i jedan nizvodno. I u ovom slučaju se rješenje može naći primjenom jednadžbe kontinuiteta i dinamičke jednadžbe.

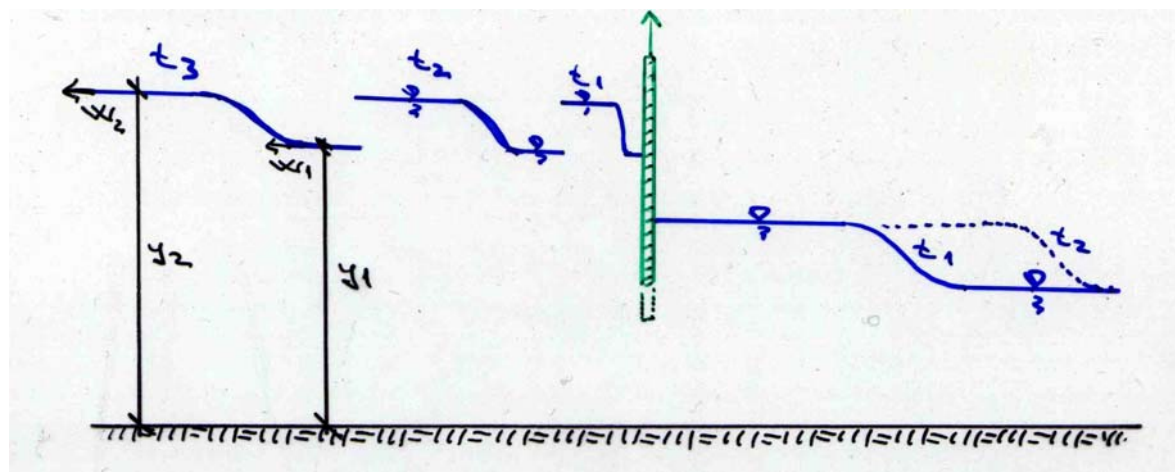


Slika 2.18 Prelaz strmog vala preko praga

### 2.3.5.4 Deformacija vala

Svi navedeni tipovi valova neposredno nakon generiranja imaju strmo čelo vala.

Pozitivni val zadržava strmo čelo vala dok se negativni val relativno brzo deformira.



Slika 2.19 Promjena oblika negativnog vala



Deformacija negativnog vala se tumači principom superpozicije elementarnih valova čija je relativna brzina:

$$c = \sqrt{gy} \quad \dots(2.70)$$

pri čemu je  $y$  dubina vode po kojoj se val propagira.

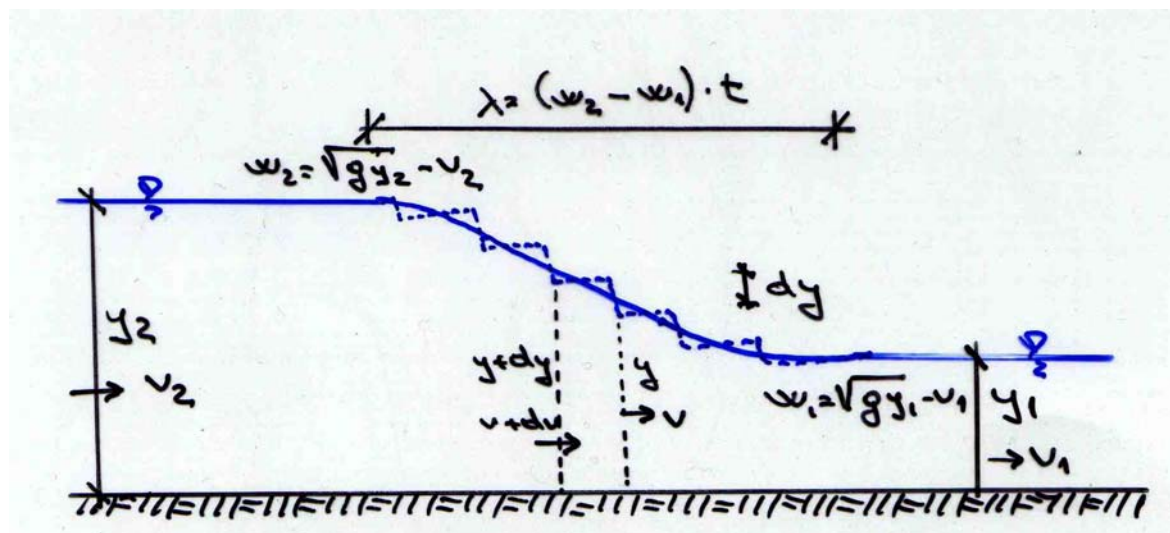
Kod **pozitivnog vala** je brzina elementarnog vala uvijek manja od brzine idućeg elementarnog vala jer idući val ima povećanu dubinu pa mu je i brzina veća. Kako svaki generirani val ima veću brzinu od prethodnog on sustigne ranije generirane. Na taj način pozitivni val zadržava svoj oblik nepromijenjen srazmjerno dugo.

**Negativni val se izdužuje** jer se prva elementarna promjena propagira najbrže radi najvećih dubina. Svaki daljnji elementarni negativni val ima manju brzinu propagacije uslijed toga što dubina vode opada, tako da se početak vala propagira brže od kraja vala. Iz tog razloga se negativni val vrlo brzo mijenja, bilo da je uzvodnog ili nizvodnog tipa.

Negativni val brzo mijenja svoj oblik tako da čelo vala nema strmu formu. Negativni val se može prikazati kao neprekidni slijed elementarnih valova čija brzina ovisi o odgovarajućoj dubini vode i lokalnoj brzini.

$$w = \sqrt{gy} - v \quad \dots(2.71)$$

Pri tome se brzina  $v$  kontinuirano mijenja od brzine  $v_2$  neporemećenog vala do brzine  $v_1$  koja se uspostavlja nakon prolaska vala.



Slika 2.20 Deformacija negativnog vala

Ako se val podijeli na niz elementarnih valova kao što je prikazano na slici, jednačba kontinuiteta poprima oblik:

$$(y + dy)(v + dv) - yv + wdy = 0 \quad \dots(2.72)$$

Sređivanjem izraza, te nakon zanemarivanja članova nižeg reda veličine dobiva se:

$$(w + v)dy = -ydv \quad \dots(2.73)$$

Obzirom da je  $w = \sqrt{gy} - v$  gornja jednačba poprima oblik:

$$\sqrt{gy}dy = -ydv \quad \dots(2.74)$$

odnosno:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dv}{\sqrt{g}} \quad \dots(2.75)$$

koja se može integrirati u granicama od  $y_2$  do  $y$ , odnosno od  $v_2$  do  $v$  tako da se konačno dobije brzina toka u profilu vala ( $v$ ):

$$v = v_2 + 2\sqrt{gy_2} - 2\sqrt{gy} \quad \dots(2.76)$$

Uvođenjem jednačbe (2.76) u jednačbu brzine vala ( jednačba 2.71) dobiva se brzina vala u bilo kojoj točki profila vala.

$$w = 3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_2} - v_2 \quad \dots(2.77)$$

pri čemu su  $y_2$  i  $v_2$  parametri osnovnog - neporemećenog toka a  $y$  je trenutna dubina na nekom profilu. Duljina negativnog vala mijenja se od  $\lambda=0$  u trenutku  $t=0$  do

$$\lambda = (w_2 - w_1) t \quad \dots(2.78)$$

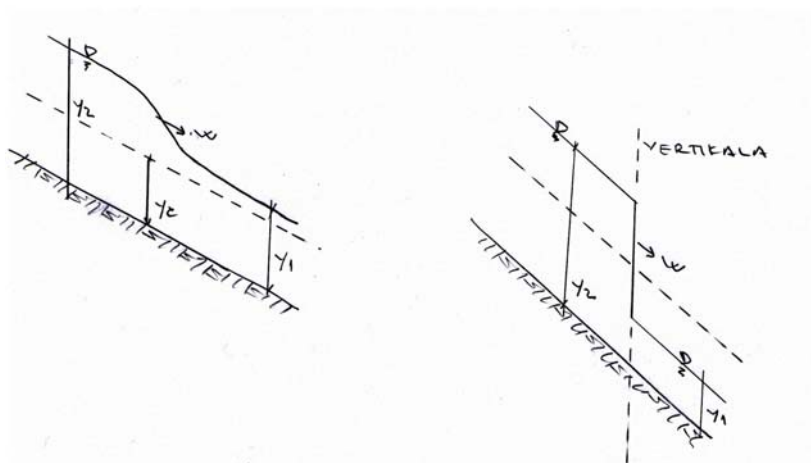
u trenutku  $t$ .

### 2.3.5.5 Pozitivni nizvodni val

Dosad smo promatrali širenje valova u mirnom režimu. U slučaju kad se čelo vala propagira u silovitom strujanju oblik vala se bitno mijenja. Na slici 2.21 je prikazan oblik čela vala za slučaj pozitivnog nizvodnog vala u mirnom i silovitom režimu.

a) mirni režim

b) siloviti režim



Slika 2.21 Oblik pozitivnog nizvodnog vala u mirnom i silovitom režimu

### 2.3.5.6 Pozitivni uzvodni val

Brzina pozitivnog vala koji se kreće uzvodno je manja nego kad se val propagira na mirnoj vodi i definirana je izrazom:

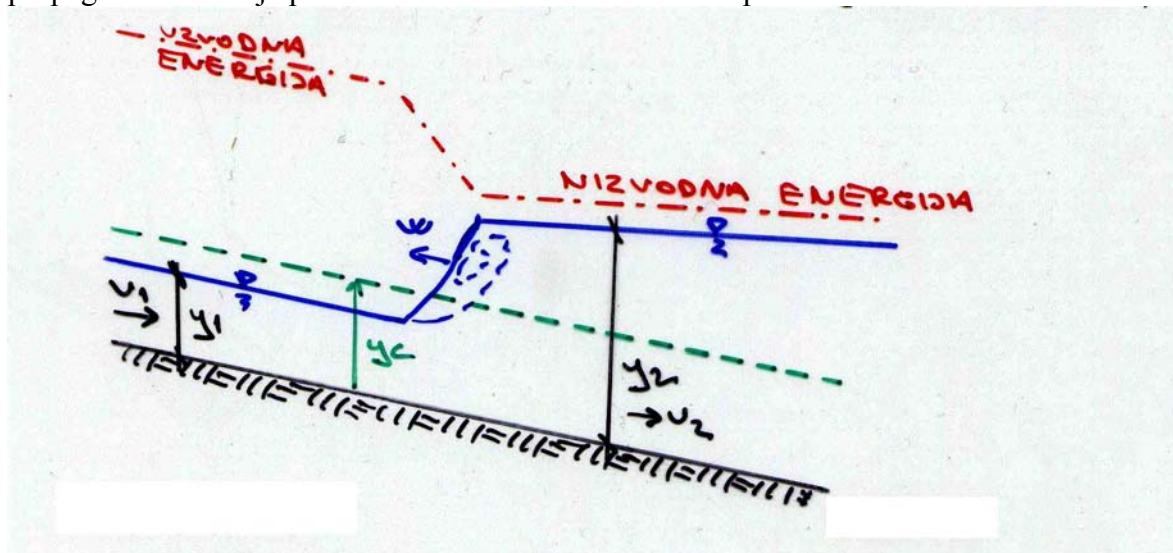
$$w = c - v_1 \quad \dots(2.79)$$

Ako je osnovni tok u **mirnom** režimu, tada je relativna brzina propagacije vala  $c$  uvijek veća od osnovne brzine toka ( $c > v_1$ ) pa se val može se pomicati i uzvodno i nizvodno.

Ako je osnovni tok **silovit** tada mogu nastati tri slučaja:

- |              |         |  |
|--------------|---------|--|
| a) $c > v_1$ | $w > 0$ | val se širi uzvodno  |
| b) $c = v_1$ | $w = 0$ | $w = c - \sqrt{gh} = 0 \Rightarrow c = \sqrt{gh} \Rightarrow 1 = \frac{c}{\sqrt{gh}} = Fr = 1$ |
| c) $c < v_1$ | $w < 0$ |  |

a) Da bi se val mogao kretati uzvodno energija u nizvodnom profilu preostala nakon disipacije u vodnom skoku, mora zajedno sa disipiranom energijom biti veća od energije u uzvodnom profilu. Takav pozitivni val je dakle **pomični vodni skok** koji će se pomicati uzvodno sve dok se ne izjednače energija u nizvodnom profilu i disipirana energija s jedne strane i uzvodna energija s druge strane. Ako je nizvodna energija veća i od energije na početku silovitog strujanja, pomični vodni skok će potopiti siloviti režim u cijelosti i propagirat će se dalje po mirnom režimu sve dok se ne uspostavi ravnoteža.



Slika 2.22 Pozitivni uzvodni val u silovitom režimu

Kada bi val bio u silovitom režimu i kad bi iza vala bilo silovito tečenje tada po krivulji specifične energije nebi moglo ići s područja manje prema većoj energiji.

b) U slučaju ravnoteže  $w = c - v_1 = 0$  se formira stojni pozitivni val uzvodno na silovitom režimu koji je opisan jednačbom:

$$c = \sqrt{\frac{gy_2}{2y_1}(y_1 + y_2)} \quad \dots(2.80)$$

Iz gornje jednadžbe se uvrštavanjem  $c = v_I$  može izlučiti  $y_2$

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \frac{v_I^2}{gy_1}} \right) \quad \dots(2.81)$$

Dobivena jednadžba predstavlja konjugirane (spregnute) dubine vodnog skoka, pa je prema tome vodni skok stoji pozitivni (uzvodni) val na silovitom režimu.

c) Treći slučaj uz uvijet  $w=c-v_I < 0$  tj.  $c < v_I$  (to znači da je brzina širenja vala  $c$  manja od brzine  $v_I$  pa se val ne može širiti u smjeru suprotnom od strujanja) govori da se nikakav poremećaj valne naravi ne može prenijeti uzvodno kroz silovit režim strujanja sve dok njegova energija ne poraste dovoljno da nastaju  $c > v_I$

### 2.3.6 Lom brane

Brane su hidrotehnički objekti koji služe za zadržavanje velikih količina vode tj. za formiranje akumulacija potrebnih u sustavima vodoopskrbe i energetike. Visoke brane zadržavaju vrlo velike količine vode koje mogu, u slučaju naglog rušenja ili preljevanja, izazvati formiranje poplavnog vala velike razorne moći te ugroziti stanovništvo i izgrađene objekte nizvodno od brane.

Rušenje velikih brana spominje se i kroz povijest. Neki povjesničari dopuštaju pretpostavku da je i Biblijska priča o potopu imala vezu s rušenjem neke prirodne brane u Mezopotamiji (Stojić, 1997)

Poplave izazvane prolomima brana nisu previše česte, ali mogu imati katastrofalne posljedice naročito zbog toga što nizvodno od brana obično ima naselja koja se koriste upravo vodom iz uzvodnih akumulacija. U SAD ja poznata takva katastrofa bila 12.ožujka 1928. god. na brani St. Francis u Kaliforniji. Riječ je o masivnoj betonskoj 60 m visokoj brani koja je naglo popustila. Katastrofalne posljedice bile su 400 poginulih ljudi i šteta od 4 milijuna dolara. Posebno dramatične bile su posljedice popuštanja lijevog boka 66,5 m visoke brane Malpasset u blizini Frejusa u Francuskoj, što se dogodilo 2.prosinca 1959. Masa vode od  $25 \times 10^6 \text{ m}^3$  devastirala je cijelu nizvodnu dolinu rijeke Reyron i do temelja razorila grad Frejus, uzrokujući smrt 421 čovjeka. Popuštanje te brane bio je čisto geološko – geomehaničke prirode uzrokovano najvjerojatnije slabošću temeljnog stijenskog masiva na lijevom boku (Bonacci, 1994).

Lomovi visokih brana mogu nastati iz više uzroka a najčešći su:

- a) tehničkih grešaka
  - preljevanje preko krune brane uslijed poddimenzioniranih preljeva
  - procjeđivanja kroz nasutu branu
  - popuštanje tla u temelju
- b) elementarnih nepogoda (potresi, veliki odroni,...)
- c) namjerno rušenje

Obzirom da rušenje brane u ratnim uvjetima može biti strateški važno (primjer rušenja brana u Njemačkoj u II svjetskom ratu i Peruče u Hrvatskoj) potrebno je unaprijed znati posljedice rušenja. Za svaku veliku branu se prije izgradnje zahtijeva provođenje ispitivanja o posljedicama loma brane na okolinu.

Lom brane može biti:

- a) trenutni potpuni
- b) trenutni djelomični
- c) postepeni potpuni
- d) postepeni djelomični

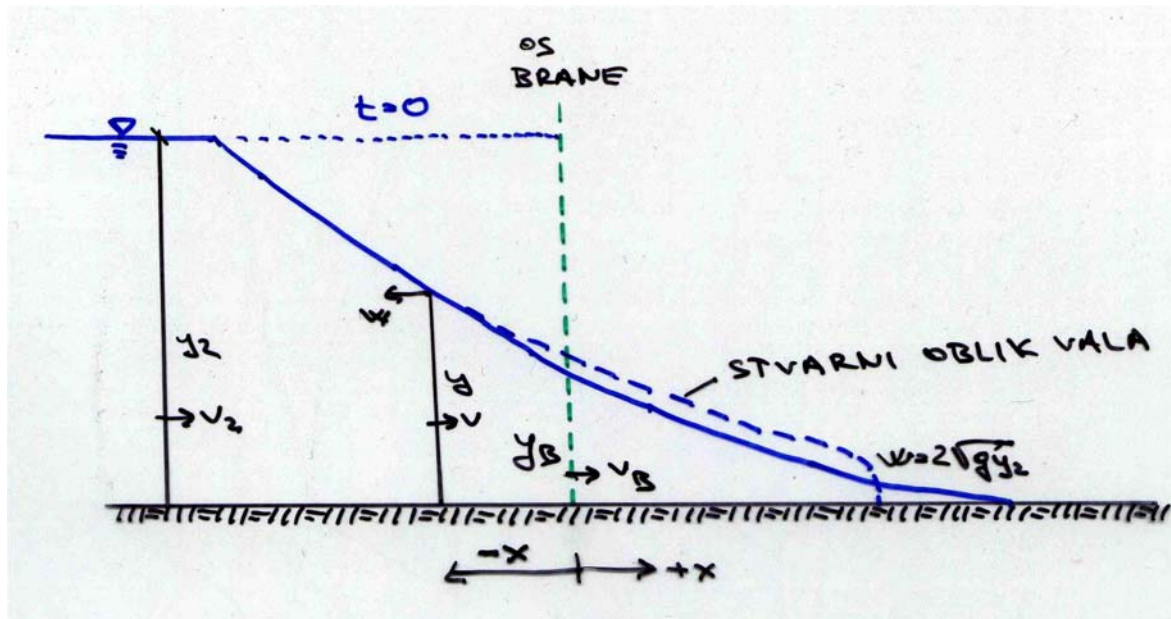
Trenutni potpuni lom brane predstavlja slučaj kad se cijela brana u potpunosti sruši u vrlo kratkom vremenu – praktički trenutno. Ovakav scenario rušenja brane daje najveći i najbrži poplavni val pa se takav val usvaja kao najnepovoljniji iako je to za nasute brane relativno mala vjerojatnost.

Kod nasutih brana može doći do procurivanja vode kroz tijelo brane ili preljevanja preko krune. Na mjestu na kojem je došlo do tečenja vode kroz tijelo brane se zbog energije vode javlja progresivna erozija koja formira otvor u nasipu tzv. brešu (*eng*:BREACH). Kroz brešu mogu istjecati značajne količine vode a takovi slučajevi loma brane se tretiraju kao trenutno ili postepeno djelomično rušenje brane ovisno o brzini formiranja breše.

Lom brane uzrokuje pojavu pozitivnog vodnog vala koji se nizvodno od brane propagira bilo po suhom koritu ili po nekom osnovnom toku. Uzvodno od brane širi se negativni val koji prazni akumulaciju.

Određivanje parametara širenja poplavnih valova nakon loma brane je vrlo složeno zbog nepravilne geometrije korita, gibanja po suhom, složenosti režima strujanja (mogući je i mirni i siloviti režim tečenja) kao i niza drugih čimbenika. Zbog navedenih razloga može se reći da je modeliranje poplavnog vala jedno od najsloženijih hidrotehničkih pojava.

Prostiranje valova nakon loma brane se može modelirati fizikalnim i numeričkim modelima. Dosad su se uglavnom koristili fizikalni modeli jer se složeniji slučajevi mogu na odgovarajući način simulirati jedino izgradnjom fizikalnog modela i simulacijom loma brane u laboratorijskim uvjetima. Razvojem računarske tehnike i numerički modeli postaju sve kompleksniji i pogodniji za simuliranje loma. U okviru ovog tečaja će se pokazati samo jednostavno (najjednostavnije) analitičko rješenje na osnovu pretpostavke da je brana na horizontalnoj podlozi, akumulacija je beskonačna i pravokutnog oblika a lom brane trenutni i potpun. Ovo je krajnje shematiziran slučaj rušenja brane, a daje se zbog činjenice da je to jedno od rijetkih analitičkih rješenja kojim se može modelirati lom brane.



Slika 2.23 Oblik vodnog lica kod proloma brane

Rješenje se zasniva na aproksimaciji oblika vala profilom negativnog vala koji nastaje uzvodno od brane. Brzina negativnog vala je u promatranoj točki sa dubinom  $y$  uz pretpostavku da voda u akumulaciji miruje ( $v_2=0$ ) definirana jednačbom:

$$w = 3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_2} \quad \dots(2.82)$$

Kako se razmatra negativni val, odgovarajuća apscisa je :

$$-x = w \cdot t \quad \dots(2.83)$$

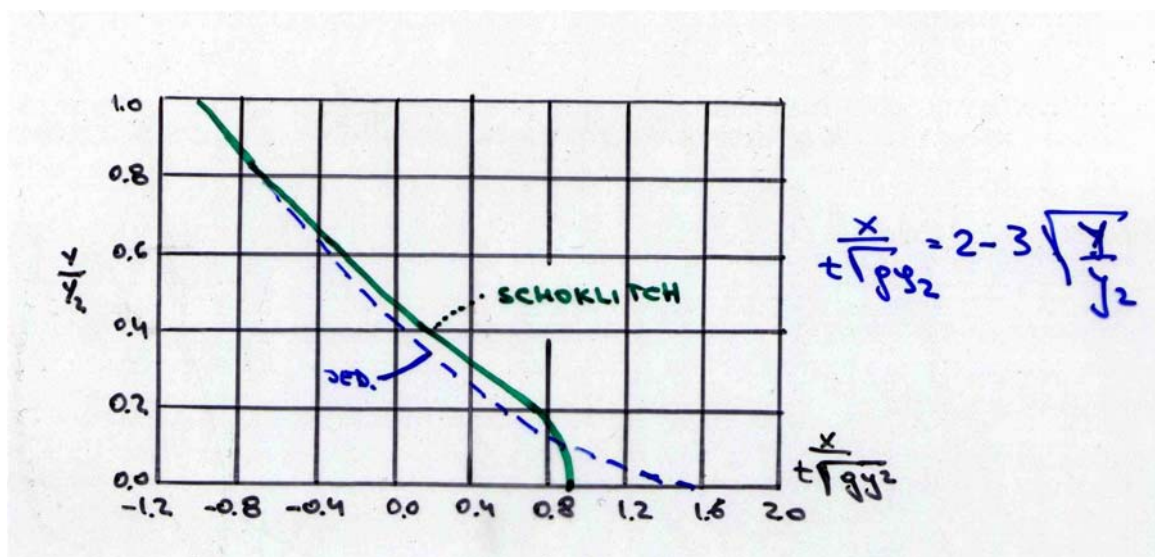
pri čemu je  $t$  vrijeme proteklo od trenutka loma brane. Uvrštavanjem jednačbe brzine propagacije (jednačba 2.82) u jednačbu za prevaljeni put (2.83) se dobiva jednačba oblika vodnog lica:

$$x = 2t\sqrt{gy_2} - 3t\sqrt{gy} \quad \dots(2.84)$$

odnosno u bezdimenzionalnom obliku:

$$\frac{x}{t\sqrt{gy_2}} = 2 - 3\sqrt{\frac{y}{y_2}} \quad \dots(2.85)$$

Ovaj izraz predstavlja jednačbu vodnog lica u bilo kojem trenutku  $t$  nakon loma brane. Vodno lice u slučaju loma brane ima oblik parabole.



Slika 2.24 Usporedba analitičkog izraza i izmjerenog vodnog lica nakon loma brane

Ovaj izraz za profil vodnog lica nakon loma brane je dao Saint-Venant, a Schoklitsch je proveo eksperimente koji pokazuju da se teoretsko rješenje podudata sa izmjerenim vrijednostima na fizikalnom modelu.

Brzina propagacije negativnog vala uzvodno kroz akumulaciju se na osnovu prikazanog izvoda može dobiti ako se u izraz za brzinu negativnog vala ... (2.82) uvrsti  $y=y_2$  i  $v_2=0$ .

$$w_2 = \sqrt{gy_2} \quad \dots(2.86)$$

što se odlično podudara sa mjerenjima. Brzina propagacije čela vala nizvodno od brane se dobiva ako se u brzinu negativnog vala uvrsti  $y=0$  i  $v_2=0$ .

$$w_1 = 2\sqrt{gy_2} \quad \dots(2.87)$$

Ovaj izraz se znatno razlikuje od izmjerenih vrijednosti. Propagacija čela vala je složena pojava te se ne može obuhvatiti pojednostavljenim izrazima. Odstupanje između prikazanih izraza i izmjerenih vrijednosti je logično jer su izrazi izvedeni pod uvjetom ravnoteže sila koje nastaju promjenom količine gibanja postojeće tekućine i ne vode računa kako o raspodjeli brzina u vertikalnom smjeru, tako ni o silama otpora.

Dubina vode u profilu brane tj. kad  $x=0$  iznosi:

$$y_b = \frac{4}{9}y_2 \quad \dots(2.88)$$

a brzina vode:

$$v_b = \frac{2}{3}\sqrt{gy_2} \quad \dots(2.89)$$

Iz jednadžbe se vidi da brzina vode ne ovisi o vremenu. Množeći brzinu i dubinu vode dobiva se vrijednost protoka po jedinici širine:

$$q_b = \frac{8}{27}\sqrt{g}y_2^{3/2} \quad \dots(2.90)$$

Popis literature:

Bonacci, O., Poplave, Hrvatska vodoprivreda br 21/22 –srpanj 1994.  
Stojić P., Hidrotehničke građevine, FGZ, Split 1995