

5. Hidraulika podzemnih voda u slojevima međuzrnske poroznosti

Voda je jedan od preduvjeta za nastajanje, razvijanje i održavanje života na Zemlji u obliku u kojem se on danas odvija. Podzemna voda je često najčišći oblik vode koji se nalazi u prirodi.

Strujanje vode u tlu se ovisno o sredini kroz koju voda protiče dijeli na:

- strujanje u poroznim sredinama (stijene međuzrnske poroznosti - pijesak, šljunak)
- strujanje u stijenama sa pukotinskom poroznošću

U okviru ovog tečaja će se izučavati strujanje vode u poroznim sredinama koje se često puta naziva i filtracija.

5.1 Shema kontinuuma

Hidrogeološki sistem je višefazni sistem koji se sastoji od krutih čestica (čvrsta faza) i pora koje su ispunjene podzemnom vodom ili zrakom i nekim drugim supstancama koje mogu biti zagađivala (tekuća faza). Hidrogeološka sredina je sredina u kojoj se rubni uvjeti mogu značajno mijenjati u vremenu i prostoru.

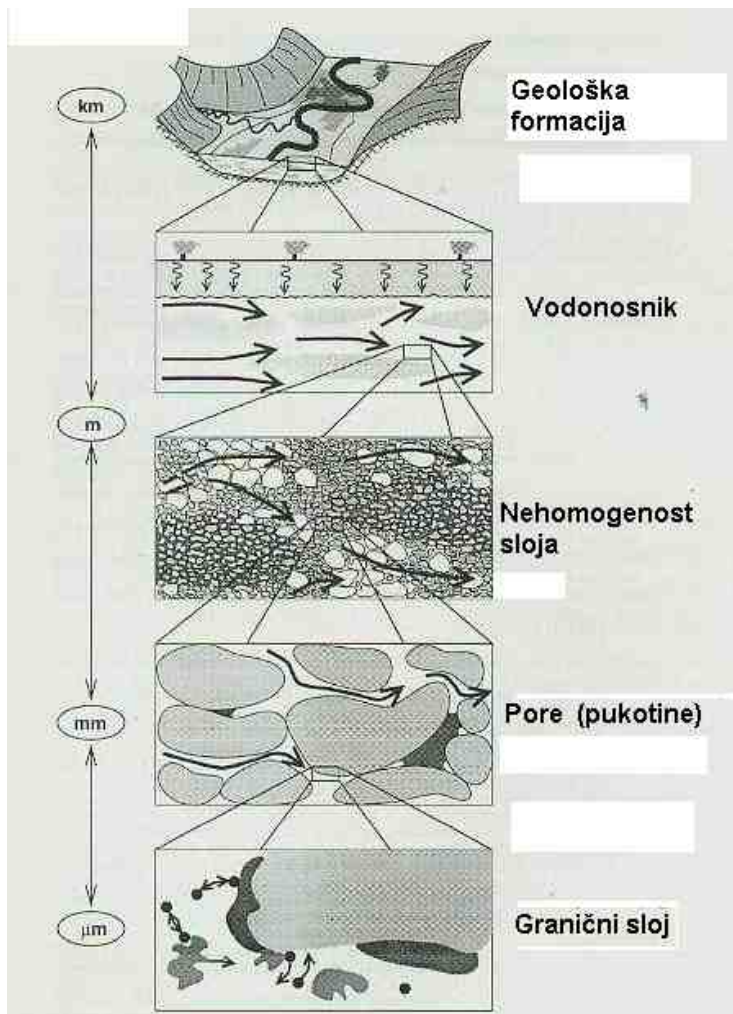
Veličina prostora u kojem se promatra tok podzemne vode i pronos može varirati od regionalnog mjerila (čija veličina se izražava u kilometrima) u kojem se promatra bilanca podzemne vode te promjene smjera toka u vodonosnicima do prostora veličine molekula u kojima se promatraju fizikalni, kemijski i mikrobiološki procesi (Slika 5.1).

Prije nego što se krene u opisivanje toka podzemnih voda valja objasniti pojmove *mikroskopskog* i *makroskopskog* mjerila.

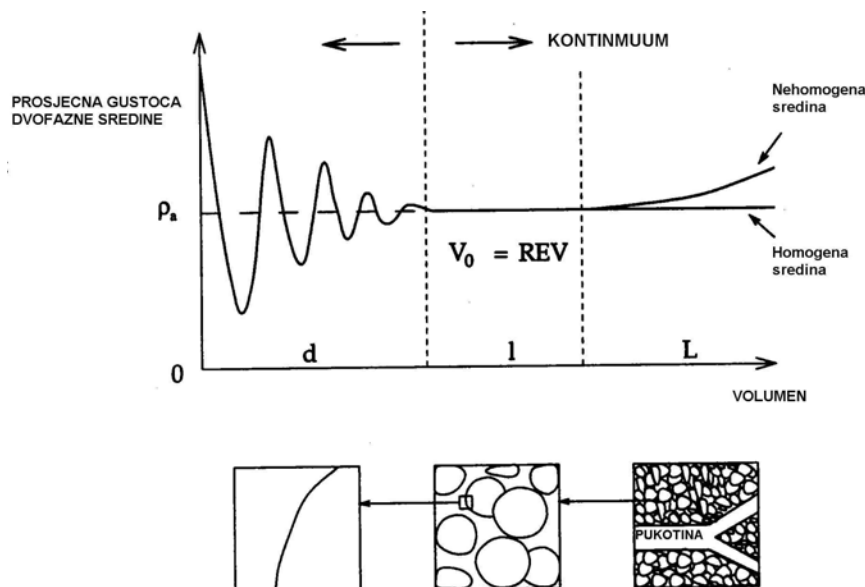
U mikroskopskom mjerilu se promatra točka unutar promatrane faze ili na granici između dvije faze. Mikroskopsko mjerilo podrazumijeva da se diskontinuiteti, koji su mali obzirom na veličinu pore ili promjer zrna (čestice), mogu jasno razabrati i opisati. Zahvaljujući osnovnom konceptu mehanike kontinuuma, to predstavlja osrednjavanje u odnosu na molekularnu razinu.

U makroskopskom mjerilu se svojstva koja su definirana na mikroskopskom mjerilu osrednjavaju unutar reprezentativnog elementarnog volumena (REV-a). Iz tog razloga se prelaskom iz mikroskopskog u makroskopsko mjerilo usvaja novi pristup koji se zasniva na osrednjavanju pri čemu se diskontinuiteti koji se razmatraju na mikroskopskoj razini više nemogu uočiti.

Prelaskom sa mikroskopskog na makroskopsko mjerilo se mogu formirati nove jednadžbe (npr. Darcy-ev zakon) sa novim parametrima (npr. koeficijent filtracije, saturacija,...). Ovaj proces se razlikuje od procesa osrednjavanja pojedinih karakteristika u jednoj točki na veći promatrani prostor. Iz tog razloga je vrlo važno da karakteristična svojstva toka i pronosa na mikroskopskoj razini budu odgovarajuće prenešena na makroskopsku razinu.



Slika 5.1 Različite veličine prostora u kojem se promatra tok podzemne vode i pronos



Slika 5.2 Shema kontinuuma

5.2 Osnove strujanja vode u poroznoj sredini

Podzemne vode struje pri vrlo malim brzinama koje su reda veličine 10^{-4} m/s a često puta i znatno manje. Kod takvih brzina se u izrazu za ukupnu energiju

$$B = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{v^2}{2g} \quad \dots (5.1)$$

član kinetičke energije ($v^2/2g$) može zanemariti i usvojiti da se energija u presjeku podudara sa piezometarskom visinom h . Iz toga proističe da je pad piezometarske linije u ovom slučaju identičan padu linije energije.

Obzirom na vrlo male brzine koje se javljaju u strujanju kroz poroznu sredinu, strujanje je u pravilu laminarno.

Porozni medij se sastoji od niza zrna i međuprostora čiju geometriju u praktičnim slučajevima nije moguće definirati niti opisati. Zbog toga se kod strujanja podzemne vode u poroznim sredinama promatraju samo statistički osrednjene veličine (srednje brzine, srednji pritisci, srednja poroznost,..) (Slika 5.2) u nekom odabranom volumenu V . Odabrani volumen mora biti dovoljno velik u odnosu na pojedina zrna da osrednjavanje ima svoje opravdanje a s druge strane dovoljno malo da se promatrani volumen V može tretirati kao "točka" u cjelokupnom promatranom prostoru. Ovakav model strujanja se naziva *shema kontinuuma* a volumen *reprezentativni elementarni volumen* (REV). Za potrebe proračuna brzine toka podzemnih voda se u shemi kontinuuma se uvodi pojam *Darcy-eva brzina*:

$$v = \frac{Q}{A} \quad \dots (5.2)$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} Q & \text{ protok (L}^3\text{/T)} \\ A & \text{ proticajna površina (L}^2\text{)} \end{aligned}$$

Darcyeva brzina se dakle dobiva dijeljenjem protoka kroz neko područje (strujnu cijev) s površinom proticajnog presjeka strujne cijevi. Tok vode se odvija samo kroz pore pa se stvarna brzina strujanja vode kroz porozni medij dobiva dijeljenjem Darcyeve brzine sa poroznošću:

$$v_s = \frac{v}{n} \quad \dots (5.3)$$

Poroznost n se definira kao odnos volumena pora kroz koje se odvija tečenje (V_s) i ukupnog volumena (V).

$$n = \frac{V_s}{V} \quad \dots (5.4)$$

Napominje se da se u energetskim jednadžbama po shemi kontinuuma, utjecaj zrna manifestira samo u tome što postoje unutarnji otpori - otpori trenja.

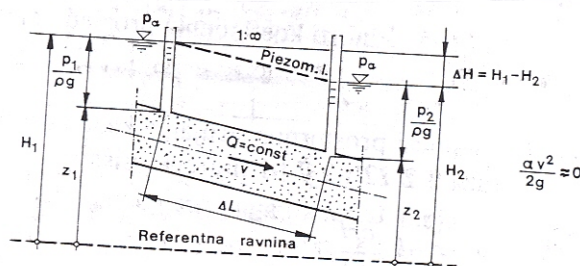
5.2.1 Darcy-ev zakon

Brzina strujanja vode u poroznom mediju je određena Darcyevim zakonom koji glasi:

$$v = k \cdot I = k \cdot \frac{dh}{dl} \quad \dots (5.5)$$

pri čemu je:

v	Darcyeva brzina	(L/T)
I	pad piezometarske linije	(1)
h	razina podzemne vode	(L)
k	koeficijent filtracije	(L/T)



Slika 5.3 Shematski prikaz Darcy-evog pokusa

Darcy je svoj zakon izveo na osnovu ispitivanja na fizikalnom modelu (Slika 5.3). Darcyev zakon se može dobiti i analitičkim putem prikazujući porozni medij kao niz uskih (kapilarnih) cjevčica u kojima je strujanje laminarno.

Vrijednosti koeficijenta filtracije za pojedine materijale se moraju odrediti mjerenjem (eksperimentom) a kao orijentacione vrijednosti se mogu usvojiti:

Materijal	Šljunak	Pijesak	Glinoviti pijesak	Glina
n^* (1)	0.30-0.40	0.30-0.45	0.35-0.50	0.40-0.55
k (m/s)	10^{-2}	$10^{-5}-10^{-2}$	$10^{-8}-10^{-5}$	$10^{-9}-10^{-8}$

* ovi podaci se odnose na geomehaničku poroznost

Tablica 5.1 Orijentacione vrijednosti fizikalnih parametara za šljunak, pijesak i glinu

Koeficijent filtracije opisuje otpor tečenju fluida kroz neku poroznu sredinu. On ovisi o karakteristikama porozne sredine kroz koju se odvija strujanja (propusnost p) kao i o karakteristikama fluida. Koeficijent filtracije se može definirati jednadžbom:

$$k = \frac{\rho g}{\mu} \cdot p \quad \dots (5.6)$$

pri čemu je:

- p - propusnost porozne sredine koji ovisi o obliku i rasporedu zrna
- ρ - gustoća fluida koji protječe
- μ - dinamički koeficijent viskoznosti fluida koji protječe kroz poroznu sredinu

Propusnost ovisi samo o geometriji porozne sredine i u općem slučaju je tenzor drugog reda. U slučaju izotropne sredine je propusnost skalar.

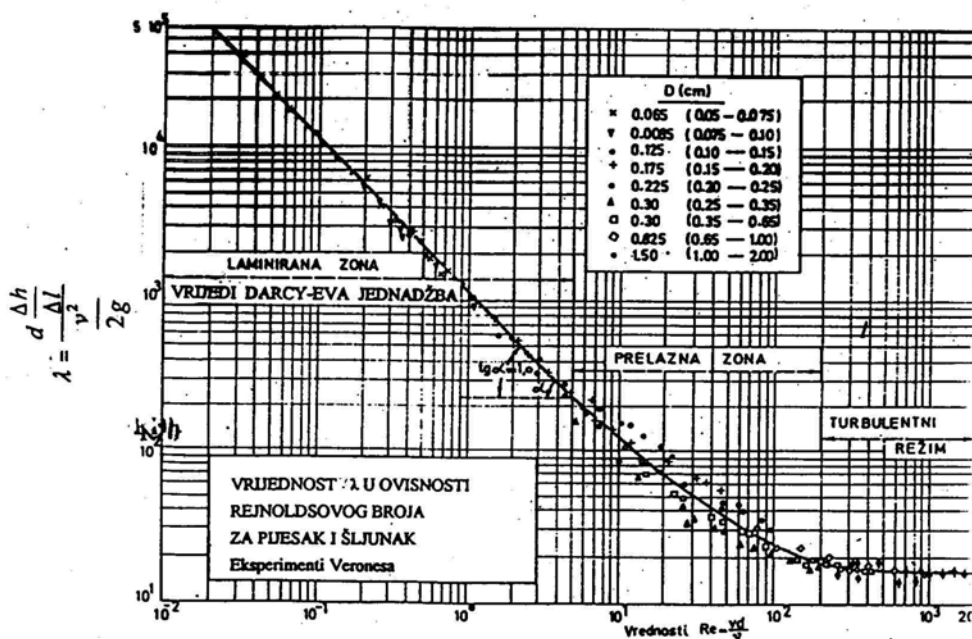
Granica važenja Darcyevog zakona filtracije

Darcyev zakon je ograničen na laminarni režim strujanja koji se javlja kod malih brzina strujanja odnosno kod malih Reynoldsovih brojeva. Ekperimentalno određena veza između koeficijenta trenja λ i Reynoldsovog broja je prikazana na slici 5.4 iz koje se vidi analogija sa tečenjem u cijevi s time da se kod strujanja u cijevima turbulentni režim javlja kod $Re > 2300$ a kritični Re je u poroznoj sredini reda veličine 1 do 10 (Bear, 1972) što zavisi od oblika zrna i poroznosti. Ova se razlika javlja uslijed toga što je oblik zrna i šupljina vrlo nepravilan pa kod filtracije dolazi do ranijeg prelaska iz laminarnog u turbulentni režim tj. do pojave turbulencije.

Također valja napomenuti da se kod strujanja u cijevima Reynoldsov broj računa preko srednje brzine i promjera cijevi, a kod filtracije preko Darcyve (fiktivne) brzine i reprezentativnog promjera zrna (d).

Kao i u ostalim slučajevima strujanja fluida, režim strujanja je definiran Reynoldsovim brojem Re koji je definiran kao odnos između inercijalnih i viskoznih sila. Općenito je prihvaćeno da Darcyev zakon vrijedi u slučajevima kad je $Re < 10$, jer su tada brzine male, režim strujanja je laminaran a viskozne sile su dominantne. Kad Reynoldsov broj pređe graničnu vrijednost inercijalne sile su značajnije od viskoznih te Darcyev zakon treba modificirati kako bi se uzeli u obzir i posljedice pojave turbulencije.

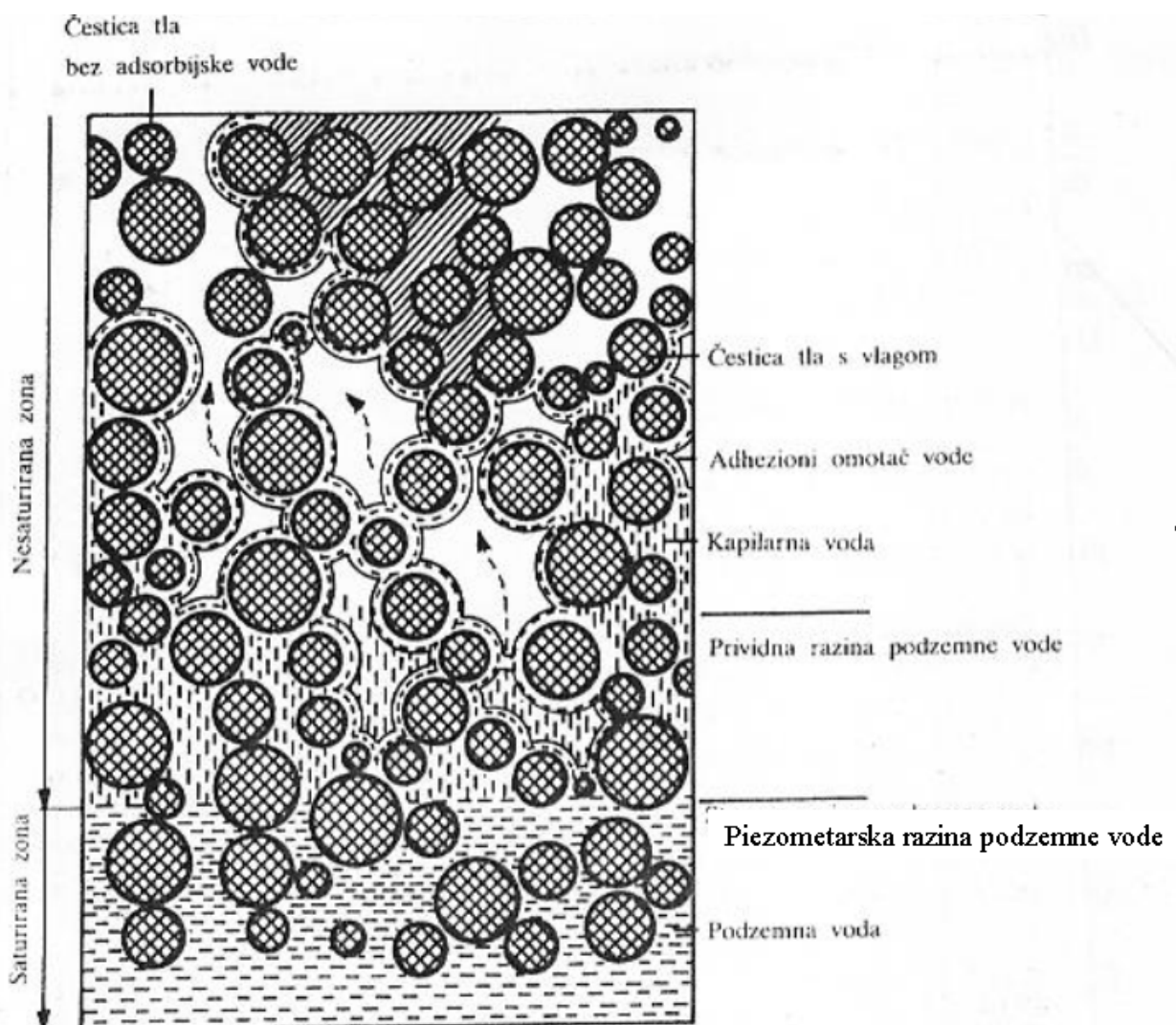
Prelazak iz laminarnog u turbulentno strujanje je kod filtracije znatno postepenije, bez skokova karakterističnih za strujanje vode u cijevima.



Slika 5.4 Odnos koeficijenta gubitaka o Reynoldsovom broju

5.2.2 Saturiranost

U nezasićenim poroznim sredinama strujanje tekućina se odvija kroz prostor koji nije u potpunosti ispunjen tekućinom, već i nekim drugim fluidom u plinovitom agregatnom stanju. Za nezasićene vodonosne slojeve taj drugi fluid je u većini slučajeva zrak. Iz tog razloga, gibanje vode nije više uzrokovano samo gravitacijskim silama već i silama *međumolekularnog djelovanja* između vode, zraka i čestica poroznog tijela. Za razumijevanje i opisivanje gibanja vode u takvim uvjetima, potrebno je sagledati način međudjelovanja te tri tvari na mikroskopskoj razini. Nakon spoznavanja njihovih interakcija, prelaz s mikroskopskog na makroskopsko promatranje tečenja, omogućit će postupak osrednjavanja karakterističnih veličina toka. Za opisivanje gibanja vode u takvom tlu, potrebno je promatrati njeno strujanje u blizini čestica poroznog tla, uz prisustvo zraka koji djelomično ispunjuje prazan prostor njegovih pora. Kako bi se olakšalo sagledavanje takvog toka, uvodi se pojam *faze*.



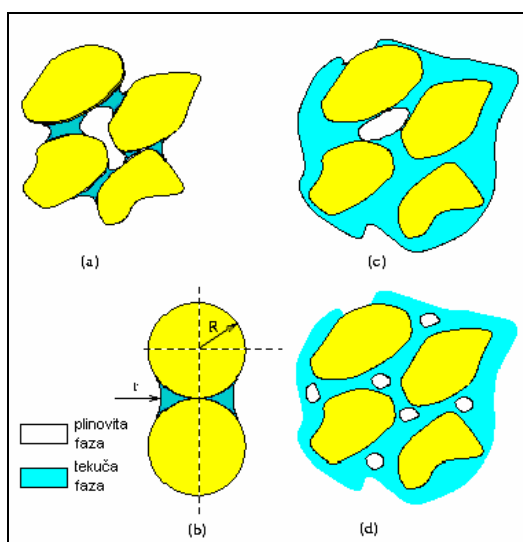
Slika 5.5 Voda u tlu međuzrnske poroznosti

Fazu definiramo kao prostor koji zauzima neka tvar tekućeg, krutog ili plinovitog agregatnog stanja. Na taj način, faza je definirana kao homogeni dio prostora koji je odvojen od ostalih sličnih dijelova oštro definiranom granicom (*međufazna granica*). Unutar poroznog tijela može se nalaziti samo jedna plinovita faza i to iz razloga što se

takva stanja lako miješaju pa među njima ne postoji vidljiva granica. Za slučaj miješanja dviju ili više tekućih faza, moguće ih je promatrati kao odvojene, ukoliko su vidljive njihove dodirne točke.

Na slici 5.6 su prikazana četiri karakteristična slučaja interakcije krute i tekuće faze u tlu međuzrnske poroznosti. Detalj *a* prikazuje slučaju kad se pojedini djelovi tekuće faze rastežu prema njima najbližim česticama tla. Nastali oblik tekuće faze naziva se *viseći prsten*. Oni su izolirani jedan od drugoga i ne tvore kontinuiranu cjelinu. Zaključuje se da za takvu količinu tekuće faze nije moguć nikakav protok kroz tlo jer ne postoji kontinuirana staza toka vode. Na sljedećoj slici (detalj *b*) prikazan je slučaj visećih prstenova između dvije idealno okrugle čestice tla. Za taj slučaj moguće je odrediti volumen visećeg prstena, s obzirom na radijus zakrivljenosti dodirnih područja vode i zraka. Ukoliko se količina vode dalje povećava, viseći prstenovi se šire i spajaju sve dok se ne formira kontinuirana tekuća faza (detalj *c* i *d*). Za onu količinu vode, u kojoj tekuća faza postaje kontinuirana, moguće je formiranje njenog toka. Razlog tome je činjenica da je u takvim uvjetima omogućen prijenos tlaka unutar nje.

Kako se promatra dvodimenzionalna slika trodimenzionalnog poroznog područja, na detalju *c* obje faze mogu biti u kontinuiranom stanju. Daljnjim povećavanjem sadržane vode zrak prestaje biti kontinuirana faza, već se raspada u pojedine međusobno nepovezane mjehuriće (detalj *d*). Takvi mjehurići se mogu pomicati samo ako u okružujućoj vodi postoje razlike u tlakovima. U slučaju odsutnosti zraka dolazi do potpune ispunjenosti poroznog tla. Tlo u kojem su sve pore ispunjene vodom, naziva se *potpuno zasićeno* ili *saturirano tlo*, a tok vode koji se kroz njega odvija, *saturirani tok*. Tijekom vremena moguće je smanjenje volumena zraka s obzirom na njegovu topivost u vodi. Isto tako se i volumen visećih prstenova može smanjiti, u slučaju kada dolazi do isparavanja uslijed temperaturnih promjena. Moguća je i situacija u kojoj, zbog dijelomične ispunjenosti tla vodom, dio vode tvori kontinuiranu fazu, a preostali dio se još uvijek nalazi u stanju visećih prstenova. U tom slučaju, za opisivanje toka vode, potrebno je razlučiti pomičan i nepomičan dio vode prisutne u poroznom tijelu.



Slika 5.6 Različiti stupnjevi zasićenosti tla

Da bi se objasnio pojam stupnja zasićenosti tla, zamišlja se porozno tlo u kojem tekuća faza zaprema dio praznog prostora u njemu. Opisat će se količina tekuće faze α u vremenu

t i u točki x , uz uvjet da prostor točke promatranja zadovoljava pretpostavke reprezentativnog elementarnog volumena.

Razlozi promjena vrijednosti koeficijenta filtracije u nezasićenim sredinama se također mogu objasniti pomoću slike 5.6 u kojoj su predstavljena tri stupnja zasićenosti tla (detalj a , c i d). Prvi detalj te slike (detalj a) prikazuje relativno malu zasićenost promatranog tla, u kojem se prisutna voda pojavljuje u višećim prstenovima. Zamišlja se ulazak određene količine vode unutar takvog tla. Njenim ulaskom ona se spaja s višećim prstenovima, povećavajući stupanj zasićenosti uzorka. U takvim okolnostima napredovanje fronte vode bitno se usporava. Razlog je u tome što ta voda ispunjava slobodne pore tla i ne nastavlja tok kroz njega. Na makroskopskoj skali, takva se situacija toka opisuje na način da se djelomično zasićenom materijalu pridodaje smanjena veličina koeficijenta filtracije. Ta vrijednost se naziva nesaturirani koeficijent filtracije (k_n). Na istoj slici (detalj c) vidljiv je takav stupanj zasićenja u kojem nisu više prisutni višeći prstenovi, ali postoje područja u koje voda još nije prodrla. Za takvu situaciju, dio fronte dolazeće vode zaustavlja se unutar slobodnih pora dok njen preostali dio nastavlja putovati kroz tlo. U tom slučaju nesaturirani koeficijent filtracije poprima nešto veću vrijednost od one prije spomenute.

5.2.3 Van Genutchenov model

Nakon više laboratorijskih ispitivanja opazilo se da nesaturirani koeficijent filtracije rapidno raste sa povećanjem stupnja zasićenosti tla, što dovodi do zaključka da funkcija koja ta dva parametra povezuje mora biti nelinearnog karaktera. Kako nesaturirani koeficijent filtracije ovisi o trenutnoj zasićenosti uzorka, za opisivanje van Genutchenovog modela, krenut će se s definiranjem *stupnja zasićenosti tla*. On je jednak volumenu vode sadržane u volumenu pora tla (jed. 5.7).

$$S = \frac{V_v}{V_p} \quad \dots (5.7)$$

Stupanj zasićenosti tla varira od nule za potpuno nezasićeno tlo do jedinice za potpuno zasićeno. U praktičnim slučajevima nije moguće potpuno isušivanje tla, pa ga preostala voda čini djelomično zasićenim, što se naziva *rezidualni stupnjem saturacije* (S_r). Veličina tog stupnja zasićenja je relativno mala ($S_r = 0.001-0.02$).

Općenito gledajući, svako gibanje fluida pa tako i vode, uzrokovano je postojanjem gradijenta tlaka. Specifičnost nesaturiranih sredina je u tome da, ukoliko je tlo u potpunosti zasićeno, tlak u njegovim porama ima vrijednost veću od atmosferskog, a za slučaj djelomičnog stupnja zasićenosti, njegova vrijednost postaje manja od atmosferskog. Profesor *van Genutchen* 1980. postavio je empirijski izraz koji opisuje porast zasićenosti tla ovisno o tlaku u porama.

Vrijednost koeficijenta filtracije za nesaturiranu poroznu sredinu je uvijek manja nego za potpuno saturiranu. Iz tog razloga se koeficijent filtracije za nesaturiranu sredinu definira (k_n) kao umnožak koeficijenta filtracije za saturiranu sredinu (k) i *relativnog koeficijent filtracije* (k_r). Relativni koeficijent filtracije (k_r) uvijek ima vrijednost manju od 1 (Slika 5.7).

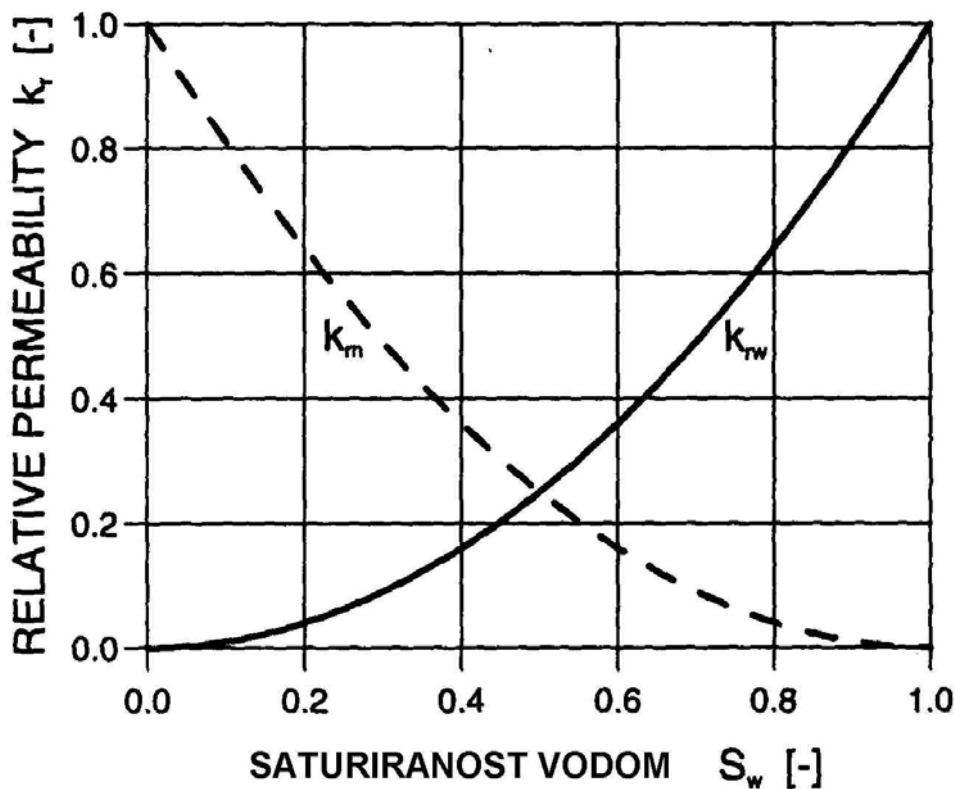
$$k_n = k \cdot k_r \quad \dots (5.8)$$

Vrijednost relativnog koeficijenta filtracije mora biti u funkciji zasićenosti tla, koja opet ovisi o tlaku u porama. U konačnosti može se napisati jednačba koju je predložio van Genutchen, a služi za izračunavanje relativnog koeficijenta filtracije (jed. 5.9).

$$k_r = \sqrt{S} \left[1 - \left(1 - S^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 \quad \dots (5.9)$$

pri čemu je m van Genutchenov parametar.

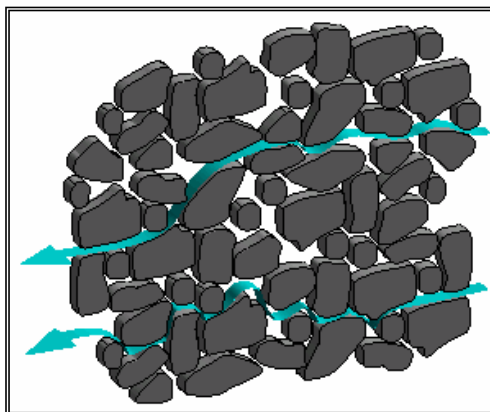
Rekapitulirajući ovo poglavlje, može se reći da se vrijednost nesaturiranog koeficijenta filtracije dobiva ukoliko su poznati karakteristični parametri tla, van Genutchenovi parametri i vrijednost tlaka unutar pora.



Slika 5.7 Ovisnog relativnog koeficijenta filtracije o stupnju saturiranosti

5.2.4 Anizotropija

Anizotropija se definira kao svojstvo materijala s raznim karakteristikama u različitim smjerovima. U vodonosnim slojevima anizotropija se manifestira na način da koeficijent filtracije mijenja svoju vrijednost ovisno o smjeru strujanja vode.



Slika 5.8 Strujnice kroz sredinu sa međuzrnskom poroznošću

Na slici 5.8 su prikazane dvije horizontalne strujnice koje prolaze kroz porozno tlo. Promatrajući čestice tla, uočava se da je njihova prosječna horizontalna dimenzija veća od vertikalne. Razlog tomu je način taloženja čestica tla koje prilikom taloženja uglavnom naliježu na dulju stranicu. Da bi se potanje objasnio pojam anizotropije, zamišljaju se dvije čestice vode, koje kroz takvo tlo putuju jednakim brzinama. Prva čestica se giba u vertikalnom, a druga u horizontalnom smjeru. Čestica fluida koja kroz takav medij putuje vertikalno (od gore prema dolje), na svom putu zaobilazi dulju stranu čestice tla, dok ona čestica koja se giba u horizontalnoj ravnini zaobilazi kraću stranu te čestice. Promatrajući veličinu prevaljenih putova u jednakom vremenskom intervalu, primjećuje se da je čestica horizontalne putanje prevalila bitno veći put od one s vertikalnom putanjom. Na makroskopskoj skali promatranje razlike u prevaljenim putovima objašnjava se na način, da se česticama pridodaju različite brzine. Takav je pristup moguć ukoliko se za brzinu procijeđivanja, koja je definirana Darcyevim zakonom, usvoje dvije različite vrijednosti koeficijenta filtracije. Na taj način, razlikuju se vertikalni (k_v) i horizontalni koeficijent filtracije (k_h).

Anizotropija može biti i posljedica nehomogenosti vodonosnog sloja u vertikalnom presjeku. Ova vrsta anizotropije je posljedica izmjenjivanja slojeva vrlo različite vodopropusnosti (*uslojene strukture*). U praktičnim razmatranjima, svojstvo anizotropije poroznog tla, mjeri se *koeficijentom anizotropije* (A). On je definiran omjerom horizontalnog i verikalnog koeficijenta filtracije.

$$A = \frac{k_h}{k_v} \quad \dots (5.10)$$

U izotropnim vodonosnim slojevima, koeficijent filtracije ne ovisi o smjeru strujanja vode te je brzina procijeđivanja određena Darcyevim zakonom u kojem je koeficijent filtracije predstavljen sa skalarnom vrijednošću. Ukoliko se promatrano strujanje odvija unutar

anizotropnog poroznog materijala, koeficijent filtracije varira ovisno o smjeru tečenja. Kako bi u jednadžbama toka uzeli u obzir njegovu promjenjivost, skalarnu vrijednost iz jednadžbe (5.5 Darcy-eva jednadžba) zamjenjuje se *tenzorskom veličinom*. U matematičkoj konotaciji tenzori se prikazuju matričnim zapisom. Na taj način koeficijent filtracije za trodimenzionalnu anizotropnu sredinu poprima sljedeću vrijednost, a naziva se *tenzorom filtracije* (jed. 5.11).

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad \dots(5.11)$$

Analogno Darcyevom zakonu za izotropno sredstvo, brzine procijeđivanja u trodimenzionalnom anizotropnom sredstvu dobivaju se množeći tenzor filtracije s hidrauličkim gradijentom, napisanim u matričnom obliku (jed. 5.12).

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\partial h / \partial x \\ -\partial h / \partial y \\ -\partial h / \partial z \end{bmatrix} \quad \dots(5.12)$$

Koristeći se pravilima matrične algebre moguće je izraziti brzine procijeđivanja za pojedine smjerove tečenja vode (jed. 5.13).

$$\begin{aligned} v_x &= -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_y &= -k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_z &= -k_{zx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad \dots (5.13)$$

Tenzor filtracije opisuje propusne karakteristike tla u promatranj točki. Vidljivo je da se on sastoji od devet komponenata. Svaka komponenta predstavlja skalarnu vrijednost koeficijenta filtracije za odgovarajući pravac gibanja vode. Tenzor filtracije je simetričan tenzor, što govori da su njegove suprotne komponente, s obzirom na njegovu dijagonalu, međusobno jednake (5.14).

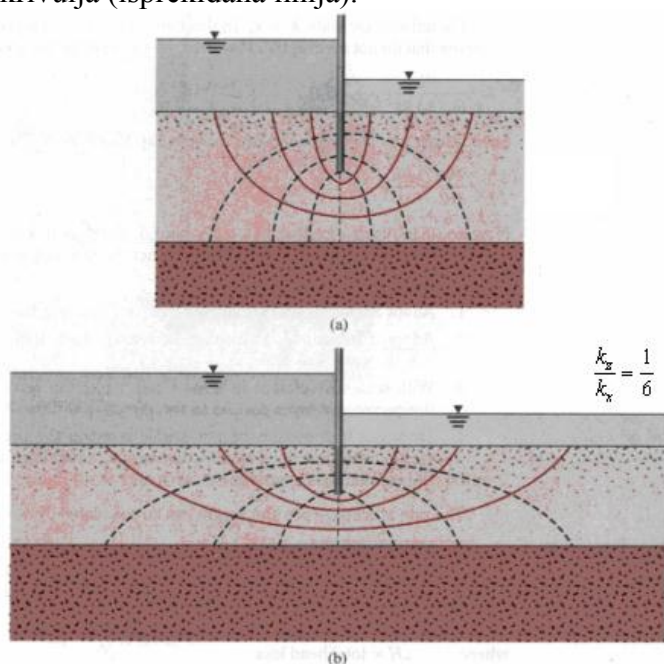
$$k_{yx} = k_{xy} \quad , \quad k_{zx} = k_{xz} \quad , \quad k_{zy} = k_{yz} \quad \dots (5.14)$$

Ukoliko se koordinantne osi Kartezievog koordinatnog sustava podudaraju s pravcima za koje je definiran pojedini koeficijent filtracije, tenzor filtracije može se pisati na sljedeći način (5.15).

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\partial h / \partial x \\ -\partial h / \partial y \\ -\partial h / \partial z \end{bmatrix} \quad \dots (5.15)$$

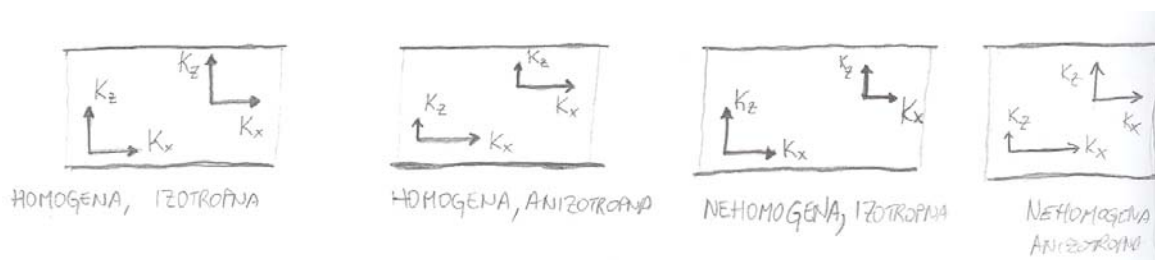
Ukoliko je ispunjen posljednji zahtjev, brzine procijeđivanja za anizotropan medij mogu se definirati kao umnožak odgovarajućeg koeficijenta filtracije i hidrauličkog gradijenta za pojedini pravac koordinantne osi. Množeći takve brzine s širinom vodonosnog sloja od jednog metra, dobivaju se vrijednosti specifičnih protoka.

Na donjoj slici (slika 5.9) prikazana je usporedba strujnih mreža dobivenih za filtracijski tok ispod vodonepropusne zavjese, ostvaren kroz izotropno (a) i anizotropno (b) porozno tlo. Primjećuju se razlike u kutovima između strujnih (puna crta) i ekvipotencijalnim krivulja (isprekidana linija).



Slika 5.9 Strujne mreže za tok kroz izotropno (a) i anizotropno (b) porozno tlo

Kod opisivanja vodonosnih slojeva valja istaknuti razliku između nehomogenosti i anizotropije. Nehomogenost je svojstvo sloja da ima različite karakteristike u pojedinim točkama prostora (neravnomjernost po prostoru) a nehomogenost je karakteristika sloja da u jednoj točki ima različite karakteristike u raznim smjerovima (Slika 5.10).



Slika 5.10 Definijska skica anizotropije i nehomogenosti

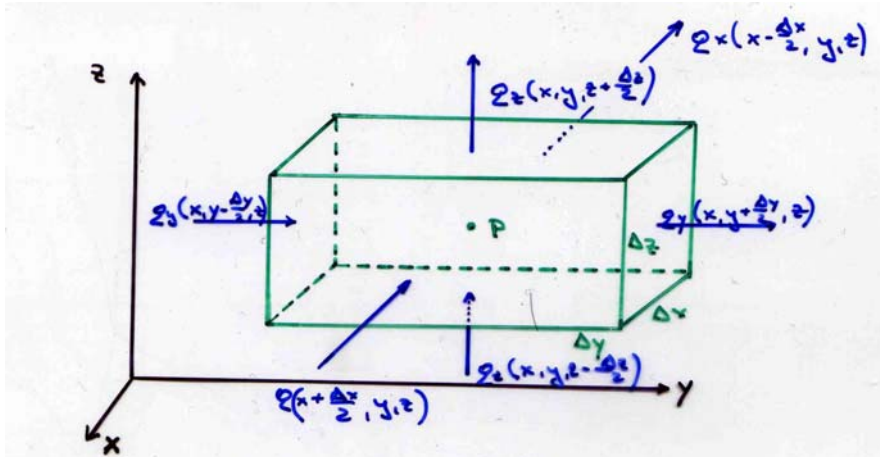
5.3 Jednadžba trodimenzionalnog nestacionarnog toka

Izvod jednadžbe se zasniva na principima kontinuuma te zadovoljavanju jednadžbe kontinuiteta i zakonu o očuvanju mase. Pod pojmom kontinuuma se u ovom slučaju podrazumijeva da su svojstva vodom saturiranog poroznog sloja, neprekinute funkcije

prostornih koordinata i vremena. Ova pretpostavka vrijedi ako kao najmanju cjelinu promatramo reprezentativni elementarni volumen (REV).

Volumen koji služi za analizu strujanja na makroskopskoj razini je tzv. *kontrolni volumen*. Njegova veličina je proizvoljna ali je bitno da zadovoljava kriterij kontinuuma.

Jednadžba kontinuiteta za poroznu saturiranu sredinu pod tlakom se može izvesti promatrajući kontrolni volumen dimenzija x, y, z s bridovima koji su paralelni Cartezijevim koordinatnim osima.



Slika 5.11 Kontrolni volumen

pri čemu su

$q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$, $q_z(x, y, z)$ specifični protoci u x, y i z smjeru koji označavaju prolaz mase vode po jedinici širine i jedinici vremena;

$P(x, y, z)$ točka koja se nalazi u središtu kontrolnog volumena V ;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ bridovi kontrolnog volumena

Razlika mase vode (Δm_x) koja ulazi i izlazi iz kontrolnog volumena u smjeru osi x za vrijeme Δt , dana je izrazom:

$$\Delta m_x = \rho \left[q_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - q_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta y \Delta z \Delta t \quad \dots (5.16)$$

pri čemu je:

ρ gustoća fluida

q_x specifični protok u smjeru osi x

Razvojem funkcije $q_x(x, y, z)$ u Taylorov red u okolini točke $P(x, y, z)$ i zanemarivanjem članova s višom potencijom od Δx dobiva se izraz:

$$\Delta m_x = -\rho \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad \dots (5.17)$$

analogno se dobiju izrazi za promjenu mase u y i z smjeru

$$\Delta m_y = -\rho \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad \dots (5.18)$$

$$\Delta m_z = -\rho \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad \dots (5.19)$$

pri čemu su q_x i q_z specifični protoci u y i z smjeru

Ukupna promjena mase u kontrolnom volumenu jednaka je sumi promjena mase u x, y i z smjeru.

$$\Delta M = \Delta m_x + \Delta m_y + \Delta m_z \quad \dots (5.20)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi 5.17, 5.18 i 5.19 u jednadžbu 5.20 slijedi:

$$\Delta M = -\rho \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad \dots (5.21)$$

Masa vode sadržana u kontrolnom volumenu $\Delta x \Delta y \Delta z$ poroznog medija dana je kao:

$$\Delta M = \rho n \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (5.22)$$

pri čemu je n označena poroznost vodonosnog sloja, pa se promjena mase unutar kontrolnog volumena može izraziti kao

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta M) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n \Delta x \Delta y \Delta z) \quad \dots (5.23)$$

Uvrštavanjem jednadžbe 5.23 u jednadžbu 5.21 dobiva se:

$$-\rho \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n \Delta x \Delta y \Delta z) \quad \dots (5.24)$$

Desna strana gornje jednadžbe se za saturirani tok može pisati (Bear 1972)

$$\rho S_s \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (5.25)$$

pri čemu je S_s koeficijent specifičnog uskladištenja i predstavlja količinu vode koju će uskladištiti ili otpustiti jedinični volumen porozne sredine kad se visina stupca vode spusti za jedinicu. Koeficijent uskladištenja S se odnosi na ukupnu debljinu saturiranog vodonosnog sloja što znači da je jednak umnošku koeficijenta specifičnog uskladištenja i (S_s) i debljine vodonosnog sloja (m).

Uvrštavanjem jednadžbe 5.25 u jednadžbu 5.24 i dijeljenjem s $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ jednadžba poprima oblik:

$$-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.26)$$

ili pisano u drugoj notaciji:

$$- \operatorname{div} \vec{q} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.27)$$

Jednadžba 5.26 odnosno 5.27 pokazuje promjenu specifičnog protoka u svakoj točki elastičnog vodonosnog sloja i poznata je pod imenom *jednadžba kontinuiteta*.

Specifični protok se na osnovu Darcyevog zakona može izraziti kao :

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} h \quad (= -k \nabla h) \quad \dots (5.28)$$

Za anizotropnu sredinu u skalarnom obliku vrijedi:

$$\begin{aligned} q_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_y &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ q_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad \dots (5.29)$$

pri čemu su sa k_x, k_y, k_z označeni koeficijenti filtracije u odgovarajućim smjerovima. Uvrštavanjem izraza 5.29 u jednadžbu 5.27 se dobiva jednadžba koja opisuje nestacionarni tok podzemne vode u anizotropnoj nehomogenoj sredini

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.30)$$

pri čemu je S_s koeficijent specifičnog uskladištenja.

U slučaju da je sloj izotropan ($k_x = k_y = k_z = k$) jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.31)$$

ili u drugoj notaciji zapisano:

$$\nabla^2 h = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.32)$$

pri čemu je ∇ Laplaceov operator u Cartezijevim koordinatama a T transmisivnost. Transmisivnost je jednaka umnošku koeficijenta filtracije (k) i debljine saturiranog djela vodonosnog sloja (m) te predstavlja transportnu karakteristiku vodonosnog sloja.

$$T = k \cdot m \quad \dots (5.33)$$

U slučaju da je strujanje stacionarno jednačba 5.32 poprima oblik:

$$\nabla^2 h = 0 \quad \dots (5.34)$$

što je Laplaceova jednačba za potencijalno strujanje.

5.3.1 Matematički model

Pod pojmom matematički model se podrazumijeva jednačba toka te početni i rubni uvjeti izraženi matematičkim simbolima.

Početni uvjeti predstavljaju raspored potencijala, odnosno razina podzemne vode u početno vrijeme. Početne uvjete je potrebno definirati ako je strujanje nestacionarno. U matematičkoj notaciji ovaj uvjet je izražen kao :

$$h = f(x, y, z) \quad \text{za } t = 0$$

Rubni uvjeti opisuju značajke granice pod čijim utjecajem se odvija tok u sloju. Najčešće se javljaju tri tipa rubnih uvjeta:

- a) *poznat raspored potencijala* ili razina podzemne vode na granici (Dirichletov uvjet) koji se simbolički može zapisati:

$$h = f(x, y, z, t)$$

pri čemu je f poznata funkcija u svim točkama granice

- b) *poznat protok* na granici (Neumanov uvjet)

$$\frac{\partial h}{\partial n} = f(x, y, z, t)$$

pri čemu je $\partial h / \partial n$ promjena potencijala okomito na granicu

- c) *Cauchyjev uvjet uključuje poznavanje* rasporeda potencijala i njegove derivacije.

Rješenja jednačbe toka mogu biti

- a) analitička ili egzaktna
- b) numerička ili približna.

5.4 Regionalni modeli toka podzemnih voda

Svrha ovog poglavlja je opisivanje regionalnog strujanja, koje predstavlja strujanje u vodonosnicima čija je horizontalna dimenzija znatno veća od vertikalne i može se primjeniti Dupuit-ova hipoteza.

Tok podzemnih voda se dijeli na tok u saturiranoj i na tok u nesaturiranoj sredini. Tok u nesaturiranoj sredini je primarno vertikalna a tok u saturiranoj sredini je primarno horizontalan. U regionalnim modelima je horizontalni tok znatno izraženiji od vertikalnog pa će se u okviru ovog tečaja baviti samo horizontalnim tokom u saturiranoj zoni.

Usvojiti će se pretpostavka da je tok primarno horizontalan ($\partial h/\partial z=0$). Ova pretpostavka nije točna u blizini nepotpunog zdenca, u područjima sa velikom varijacijom debljina vodonosnog sloja te u području intenzivne infiltracije.

U ovim razmatranjima se usvaja da su karakteristike vode (gustoća i viskoznost) konstantni u cijelom vodonosniku i tokom vremena. To ne vrijedi kod velike promjene temperature npr. crpilište Gaza grada Karlovca¹.

Jednadžba koja opisuje tok podzemne vode se zasniva na primjeni jednadžba kontinuiteta i Darcyev zakona te ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (5.35)$$

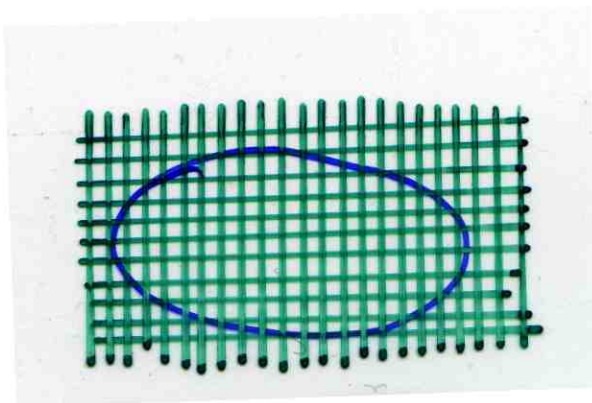
Za nepravilnu geometriju prostora kao i za dane početne i rubne uvijete ovu jednadžbu nije moguće u općem slučaju direktno riješiti već se pristupa (u matematičkom smislu) približnim rješenjima. Od približnih metoda koristi se:

- a) metoda konačnih diferencija (MKD)
- b) metoda konačnih elemenata (MKE)
- c) metoda rubnih elemenata (MRE)

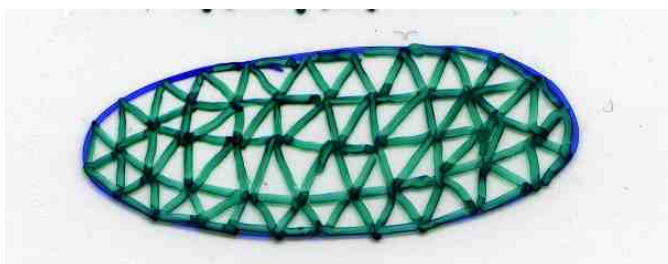
Metode se razlikuju po načinu diskretizacije prostora i načinu formiranja sistema algebarskih jednadžbi kojima se zamjenjuju parcijalne diferencijalne jednadžbe. Princip se zasniva na zadovoljavanju jednadžbi u jednom vremenskom koraku a u slučaju modeliranja nestacionarnih pojava u vodonosnom horizontu potrebno je provesti i diskretizaciju tokom vremena na niz inkremenata unutar kojih se strujanje smatra stacionarnim. Sukcesivnim povezivanjem stanja toka sa susjednih vremenskih razina realizira se napredovanje u vremenu.

Najjednostavnija je *metoda konačnih diferencija*. Najčešće joj se pristupa tako da se promatrani prostor podjeli na konačne - dovoljno male komade (cijeline - ćelije) na kojima se može usvojiti da su odnosi linearni (ovaj postupak se naziva diskretizacija prostora). Podjela prostora u ovoj metodi je najčešće ortogonalna. Za svaki čvor u mreži se piše jednadžba kontinuiteta i Darcy-eva jednadžba i na taj način se dobiva sistem jednadžbi koji se može riješiti iterativno ili nekim od direktnih postupaka. (Slika 5.12)

¹ Vodocrpilište Gaza se nalazi u neposrednoj blizini rijeke Korane u kojoj se temperatura vode tijekom godine mijenja od 8°C (zimi) do 22°C (ljeti). Promjenom temperature se mijenja i viskoznost vode koja utječe na transmisivnost tako da zdenci u ljetnim mjesecima imaju uz iste hidrološke uvjete i do 30% veću izdašnost nego zimi.



Slika 5.12 Primjer diskretizacije sheme za metodu konačnih diferencija



Slika 5.13 Primjer diskretizacije sheme za metodu konačnih elemenata

Kod primjene *metode konačnih elemenata* (MKE) moguće je podijeliti prostor elementima proizvoljnog oblika što omogućuje dobro opisivanje geometrije modeliranog prostora, kao i nehomogenost promatranog područja. U MKE se pristup modeliranju zasniva na aproksimaciji rasporeda potencijala nizom polinoma te primjenom osnovne leme varijacionog računa (Slika 5.13).



Slika 5.14 Primjer diskretizacije sheme za metodu rubnih elemenata

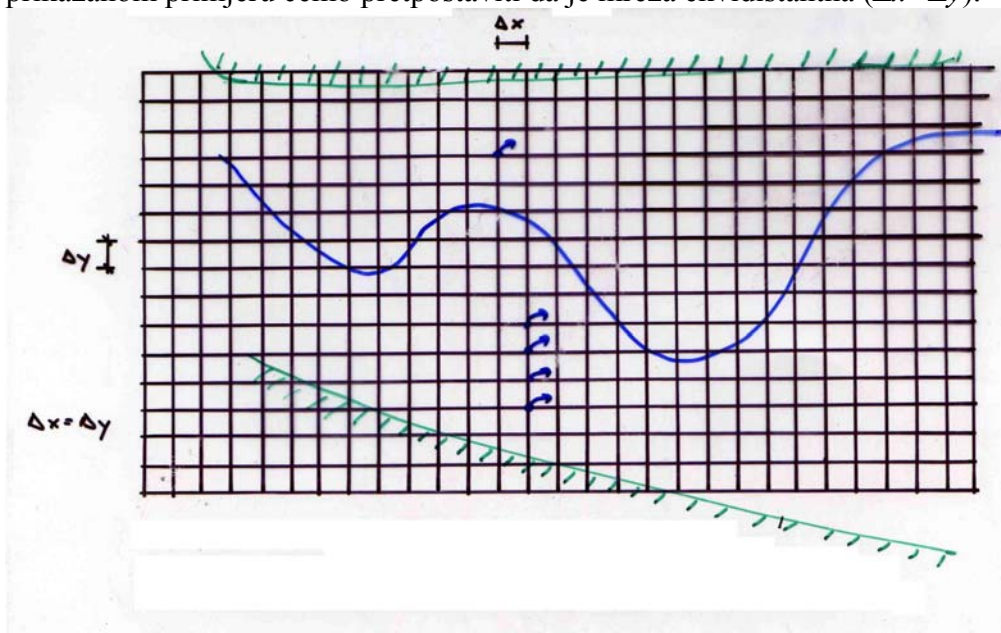
Metoda rubnih elemenata se zasniva na transformaciji vladajućih jednačbi u oblik kojim je strujanje u modeliranom području opisano vrijednostima na rubu područja. Na taj način se ravninski problemi modeliraju jednodimenzionalnim elementima. Riješenje unutar domene se računa naknadno iz izračunatih vrijednosti po rubu i to samo za točke koje nas interesiraju. Ova metoda još nije ušla u široku primjenu za modeliranje toka podzemnih voda (Slika 5.14).

U nastavku će biti prikazana metoda konačnih diferencija zasnovana na zakonu održanja jer je najjednostavnija za prikazivanje (najprikladnija za sagledavanje materije). Ova metoda je fizikalno zasnovana a jednostavna je za primjenu naročito u pravilnim područjima.

5.4.1 Metoda konačnih diferencija

Numeričke metode zahtijevaju diskretizaciju prostora i vremena. Metoda konačnih diferencija prevodi (zamjenjuje) parcijalnu diferencijalnu jednačbu toka nizom jednačbi u diskretiziranom prostoru i vremenu.

Prvi korak je podjela modeliranog prostora na niz podpodručja pravilnom mrežom dok razmaci mreže u x (Δx) i y (Δy) smjeru mogu varirati. Da bi jednačbe bile jednostavnije u prikazanom primjeru ćemo pretpostaviti da je mreža ekvidistantna ($\Delta x = \Delta y$).



Slika 5.15 Diskretizacija prostora za metodu konačnih diferencija

Ovisno o homogenosti i pravilnosti prostora diskretizaciona shema je gušća ili rijedja. Provedenom podjelom prostora dobiva se n čelija. U centru svake čelije je čvor.

Vrijeme se također diskretizira u vremenska stanja t_0, t_1, t_2, \dots koja su odjeljena vremenskim korakom Δt .

Rješavanje jednačbe numerički znači da se počevši od nekog početnog rasporeda potencijala u vrijeme t_0 u čvorovima modeliranog prostora, računaju potencijali u narednim vremenskim stanjima t_1, t_2, t_3, \dots s korakom Δt .

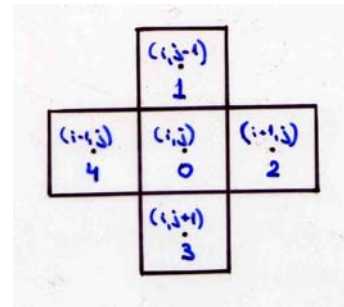
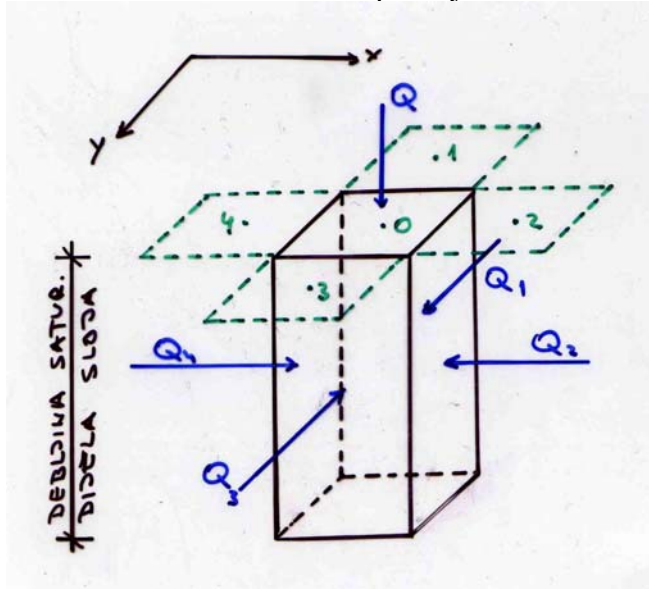
Jednačbe u čvoru se mogu dobiti na osnovu dva pristupa:

- zamjenom (mehaničkom) parcijalnih derivacija konačnim diferencijama
- iznalazjenje jednačbi u čvorovima primjenom jednačbe kontinuiteta i Darcy-eve.

Koristit ćemo pristup koji se zasniva na primjeni jednačbe kontinuiteta i pretpostavit da svaki čvor diskretizacione sheme ima četiri susjedna čvora između kojih se odvija strujanje.

Numeracija čvorova može bit ili sa indeksima (i, j) ili cjelobrojnim (integer) brojevima (npr. 1, 2, ..., n) što ovisi o kasnijem pristupu numeričkom rješavanju sistema jednačbi.

U svakom čvoru se može napisati jednačba kontinuiteta:



Slika 5.16 Način označavanja ćelija i pripadajući protoci

$$\Delta t(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q) = (h_o(t + \Delta t) - h_o(t))S \Delta x \Delta y \quad \dots (5.36)$$

Koeficijent uskladištenja se odnosi na uskladištenja cijelog sloja odnosno u cijeloj ćeliji te vrijedio $S_0 = S_S \cdot m$ (pri čemu je sa m označena debljina sloja). Korištenjem Darcy-evog zakona mogu se izraziti protoci iz pojedinih smjerova:

$$Q_1 = \Delta x T_{10} \frac{h_1(t') - h_o(t')}{\Delta y}$$

$$Q_2 = \Delta y T_{20} \frac{h_2(t') - h_o(t')}{\Delta x} \quad \dots (5.37)$$

$$Q_3 = \Delta x T_{30} \frac{h_3(t') - h_o(t')}{\Delta y}$$

$$Q_4 = \Delta y T_{40} \frac{h_4(t') - h_o(t')}{\Delta x}$$

pri čemu su :

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 srednji (prosječni) protoci u odabranom vremenskom intervalu t'
 vrijeme unutar intervala $(t, t + \Delta t)$
 $T_{10}, T_{20}, T_{30}, T_{40}$ prosječna vrijednost transmisivnosti među čvorovima

Uvrštavanjem izraza za protoke u jednačbu kontinuiteta dobiva se izraz:

$$\frac{S_o}{\Delta t} (h_o(t + \Delta t) - h_o(t)) = T_{10} \frac{h_1(t') - h_o(t')}{\Delta y^2} + T_{20} \frac{h_2(t') - h_o(t')}{\Delta x^2} +$$

$$+ T_{30} \frac{h_3(t') - h_o(t')}{\Delta y^2} + T_{40} \frac{h_4(t') - h_o(t')}{\Delta x^2} + q_o \quad \dots (5.38)$$

pri čemu je:

q_o vanjski dotok neovisan o piezometarskoj razini u čvoru. On može opisivat

crpljenje, evaporaciju, infiltraciju uslijed oborina ili zdenaca.

Da bi se mogao napisati sustav jednačbi za sve čvorove u mreži potrebno je provesti numeraciju koja se može provesti ili po redovima i kolonama ili numeracija svih čvorova u mreži. U nastavku će se prikazati numeracija sa indeksima redova i kolona.

U skladu s usvojenim pristupom mogu se uvrstiti oznake:

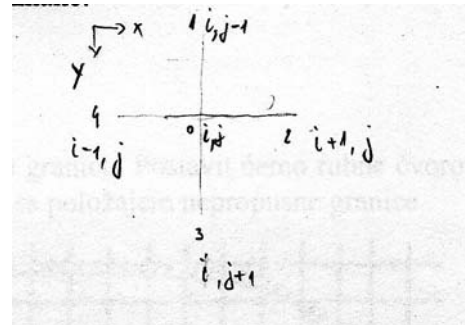
$$h_0 \rightarrow h_{i,j}$$

$$h_1 \rightarrow h_{i,j-1}$$

$$h_2 \rightarrow h_{i+1,j}$$

$$h_3 \rightarrow h_{i,j+1}$$

$$h_4 \rightarrow h_{i-1,j}$$



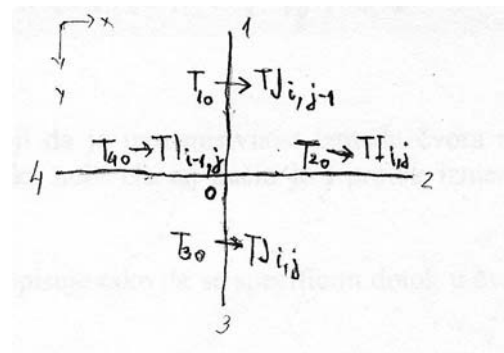
U svakom čvoru postoje dvije vrijednosti transmisivnosti TI i TJ koje opisuju transmisivnost u x i y smjeru. Pri tome je $TI_{i,j}$ transmisivnost između čvora (i,j) i njegovog susjednog čvora u pozitivnom x -smjeru (tj. čvora $i+1,j$) a $TJ_{i,j}$ je transmisivnost između čvora (i,j) i njemu susjednog čvora u y -smjeru $(i,j+1)$. Transmisivnosti oko čvora (i,j) se mogu izraziti kao:

$$T_{10} \rightarrow TJ_{i,j-1}$$

$$T_{20} \rightarrow TI_{i,j}$$

$$T_{30} \rightarrow TJ_{i,j}$$

$$T_{40} \rightarrow TI_{i-1,j}$$



Konačno se može zamijeniti i

$$S_0 \rightarrow S_{i,j}$$

$$q_0 \rightarrow q_{i,j}$$

Nakon zamjene članova za sve čvorove (i,j) dobiva se N jednačbi za N nepoznatih piezometarskih visina $h_{ij}(t+\Delta t)$:

$$h_{i,j}(t + \Delta t) = h_{i,j}(t) + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \left(\frac{TJ_{i,j-1}(h_{i,j-1}(t') - h_{i,j}(t'))}{\Delta y^2} + \frac{TI_{i,j}(h_{i+1,j}(t') - h_{i,j}(t'))}{\Delta x^2} + \frac{TJ_{i,j}(h_{i,j+1}(t') - h_{i,j}(t'))}{\Delta y^2} + \frac{TI_{i-1,j}(h_{i-1,j}(t') - h_{i,j}(t))}{\Delta x^2} + q_{i,j} \right) \dots (5.39)$$

Čvorovi koji definiraju rub modeliranog područja zahtijevaju informacije o rubnom uvjetu.

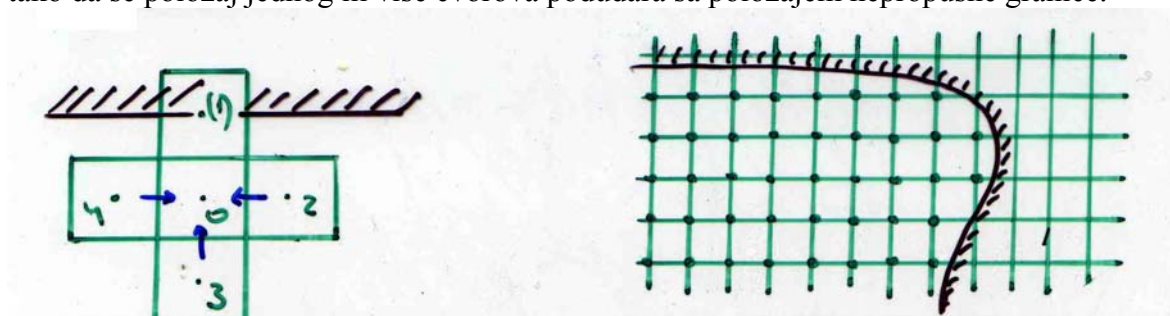
5.4.2 Rubni uvjeti

Da bi se postigla jednostavnost i univerzalnost numeričkog algoritma (jedan algoritam sa raznim ulaznim podacima može služiti za rješavanje niza realnih problema) obično se formira mreža sa NX ćelija u x - smjeru i NY ćelija u y -smjeru. Ovako postavljena mreža mora pokriti cijelo modelirano područje i dio područja koje se ne obuhvaća modelom (u kojem nema strujanja podzemnih voda). U svim čvorovima izvan područja u kojem se modelira strujanje postavlja se uvjet da je transmisivnost jednaka nuli.

Za modeliranje strujanja podzemnih voda je od presudne važnosti ispravno odabrati rubne uvjete. Matematički model nekog područja (jednadžbe i hidrogeološki podaci) može za razne rubne uvjete dati bitno drugačije rezultate.

a) nepropusna granica

Promotrimo prvo čvorove koji opisuju nepropusnu granicu. Postavit ćemo rubne čvorove tako da se položaj jednog ili više čvorova podudara sa položajem nepropusne granice.



Slika 5.17 Rubni čvorovi

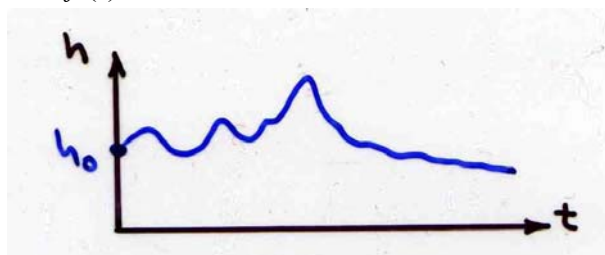
Ovaj primjer se može riješiti tako da se usvoji da je transmisivnost između čvora na nepropusnoj granici i promatranog čvora jednaka nuli. Na taj način je i protok između promatrana dva čvora jednak nuli.

U općem slučaju se granica Neumanovog tipa opisuje tako da se specificira dotok u čvor koji opisuje rubni uvjet tj. da se zada protok q_0 .

b) zadana razina podzemne vode

Čvorovi u kojima je zadana vrijednost potencijala (razina podzemne vode) su jednostavni za uvrštavanje u sustav jednadžbi. Oni imaju unaprijed riješenu jednadžbu koja je u obliku:

$$h = f(t) \quad \text{za} \quad t \geq 0$$



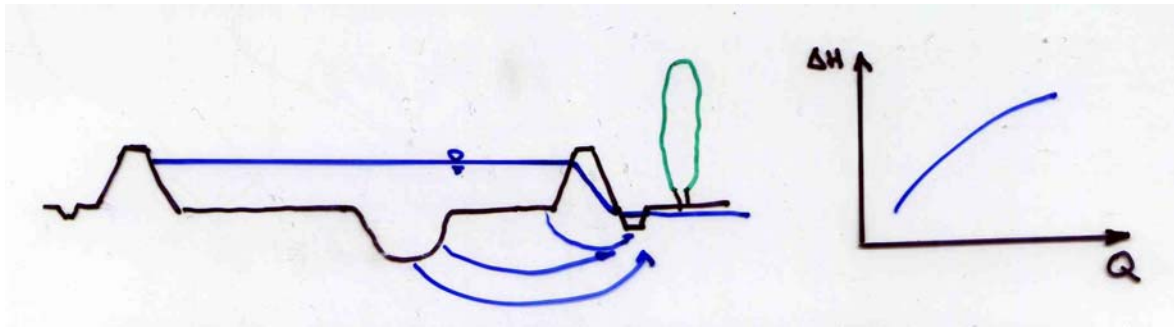
Slika 5.18 Nivogram

i zamjenjuje čvornu jednadžbu.

Čvorovi u kojima je konstantan potencijal se za potrebe numeričkog pristupa mogu tretirati kao čvorovi sa vrlo velikom poroznošću npr. $S = 10^{30}$ i tada se tretiraju kao obični čvorovi.

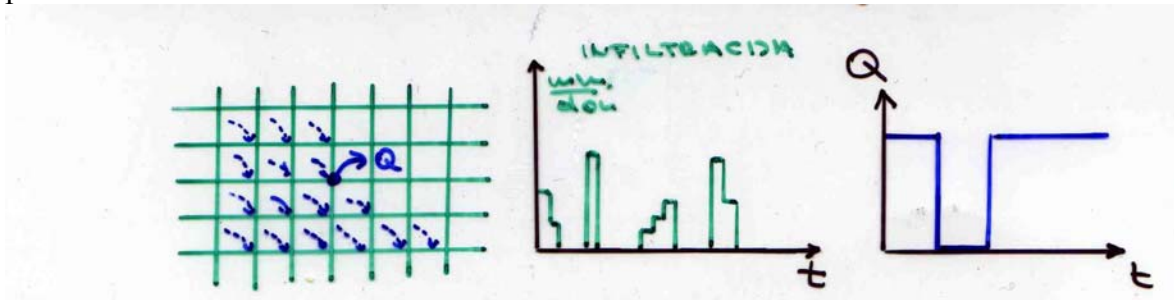
Čvor koji može prihvatiti toliku količinu vode neće bitno mijenjati razinu vode obzirom da dotoci i istjecanje ne mogu bitno promijeniti količinu vode u ćeliji.

U praksi se mogu javiti i rubni uvjeti u kojima treba opisati procjeđivanje iz akumulacija. To su primjeri strujanja gdje se lokalno trodimenzionalno strujanje treba uklopiti u dvodimenzionalni (ravninski) model. U takvim slučajevima treba izraditi dvodimenzionalne modele u vertikalnoj ravnini i na njima odrediti ovisnost količine koja se procijedi o razlici razine u akumulaciji i zaobalju.



Slika 5.19 Primjer strujanja za kojeg ne vrijedi Dupuitova hipoteza

U modelu također treba definirati položaj zdenaca (ako ih ima) kao i njihovu izdašnost tokom vremena (Q - t dijagram) odnosno crpljene količine u određenim vremenskim periodima.



Slika 5.20 Dodavanje infiltracije od oborina

Sada je postavljen sustav od $NX*NY$ jednadžbi. Prije rješavanja treba također odrediti vrijeme t' unutar intervala $(t, t+\Delta t)$ u kojem će se zadovoljavati vladajuća jednadžba (kontinuiteta) (5.39).

U slučaju na usvojimo h_{ij} u vremenu $t'=t$ pristup će biti *explicitan*, što znači da aproksimiramo integral na osnovu poznatog stanja (razine) na početku vremenskog intervala.

U slučaju da usvojimo h_{ij} u vremenu $t'=t+\Delta t$ postupak je *implicitan*, što znači da aproksimiramo integral na osnovu poznatog stanja (razine) na kraju vremenskog intervala. Postupak se naziva *mješoviti* ako je t' izabran unutar intervala $(t, t+\Delta t)$

$$h_{i,j}(t') = (1 - \theta)h_{i,j}(t) + \theta h_{i,j}(t + \Delta t) \quad \dots (5.40)$$

5.4.3 Stacionarno strujanje

Stacionarno strujanje je karakterizirano sa uvjetom da je $\partial h/\partial t=0$. Za simuliranje takvog stanja se mogu usvojiti stacionarni rubni uvjeti te pustiti model da računa niz stanja sa velikim vremenskim inkrementom dok se ne postignu vrlo male (zanemarive) razlike u pomaku vodnog lica između dva vremenska koraka. Ekonomičniji način je svakako da se iz jednadžbe toka za svaku čeliju (čvor) izostavi član koji sadrži $S\partial h/\partial t$. To je član:

$$\frac{S_{ij}}{\Delta t} (h_{i,j}(t + \Delta t) - h_{i,j}(t)) \quad \dots (5.41)$$

Ovaj član se može poništiti ili usvajanjem vrijednosti $S_{ij}=0$ ili usvajanjem ekstremno velike vrijednosti Δt .

Eksplícitan pristup

Odabirom vremena $t'=t$ (usvajanje vodostaja na početku modeliranog vremenskog intervala) u jednadžbi (5.39) i rješavajući po $h_{ij}(t+\Delta t)$ dobiva se set jednadžbi:

$$h_{i,j}(t + \Delta t) = h_{i,j}(t) + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \left(\frac{TJ_{i,j-1}(h_{i,j-1}(t) - h_{i,j}(t))}{\Delta y^2} + \frac{TI_{i,j}(h_{i+1,j}(t) - h_{i,j}(t))}{\Delta x^2} + \frac{TJ_{i,j}(h_{i,j+1}(t) - h_{i,j}(t))}{\Delta y^2} + \frac{TI_{i-1,j}(h_{i-1,j}(t) - h_{i,j}(t))}{\Delta x^2} + q_{i,j} \right) \quad \dots (5.42)$$

Eksplícitna shema je jednostavna za programiranje na računalu. Mana joj je da za neodgovarajuću (preveliku) vrijednost Δt numerički postupak postaje nestabilan. Kao kriterij stabilnosti se može usvojiti nejednakost koja treba biti zadovoljena u svakom čvoru:

$$\frac{T}{S} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad \dots (5.43)$$

Objašnjenje ovog kriterija se može naći u literaturu (npr. Kinzelbach). Na osnovu poznatog (usvojenog) početnog rasporeda potencijala i jednadžbe 5.42 se mogu računati rasporedi potencijala za bilo koje vrijeme $t > t_0$.

Implicitni pristup

Implicitni pristup je nešto složeniji ali je bezuvjetno stabilan. Usvajanjem da je $t'=t+\Delta t$ i preslagivanjem jednadžbe 5.39 dobiva se:

$$h_{i-1,j}(t + \Delta t) \frac{TI_{i-1,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j-1}(t + \Delta t) \frac{TJ_{i,j-1}}{\Delta y^2} + h_{i,j}(t + \Delta t) \left(- \frac{TI_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{TI_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{TJ_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \frac{TJ_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{S_{i,j}}{\Delta t} \right) + h_{i+1,j}(t + \Delta t) \frac{TI_{i,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j+1}(t + \Delta t) \frac{TJ_{i,j+1}}{\Delta y^2} = -q_{i,j} - S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t)}{\Delta t} \quad \dots (5.44)$$

pri čemu su $i=1, \dots, NX$ i $j=1, \dots, NY$

Poznavajući $h_{ij}(t)$ gornja jednačba formira sistem jednačbi sa nepoznatim vrijednostima $h_{ij}(t+\Delta t)$.

Za kompaktnije pisanje jednačbe 5.44 može se usvojiti numeracija čvorova sa jednim indeksom npr. indeksom k pri čemu je:

$$(i, j) \rightarrow k = (j-1) * NX + i$$

Sada se sustav jednačbi može pisati u obliku:

$$AX = b \quad \dots (5.45)$$

pri čemu je:

A	matrica u kojoj su članovi uz nepoznate (tražene) vrijednosti
X	vektor nepoznatih vrijednosti potencijala u vremenu $(t+\Delta t)$
b	vektor slobodnih članova

Matrica A je veličine $N*N$ pri čemu je $N=NX*NY$ ukupan broj čvorova. Većina članova u ovoj matrici je jednaka nuli jer u formiranju jednačbe za jedan čvor sudjeluju samo četiri susjedna čvora, tj. za čvor k je najviše pet koeficijenata različito od nule.

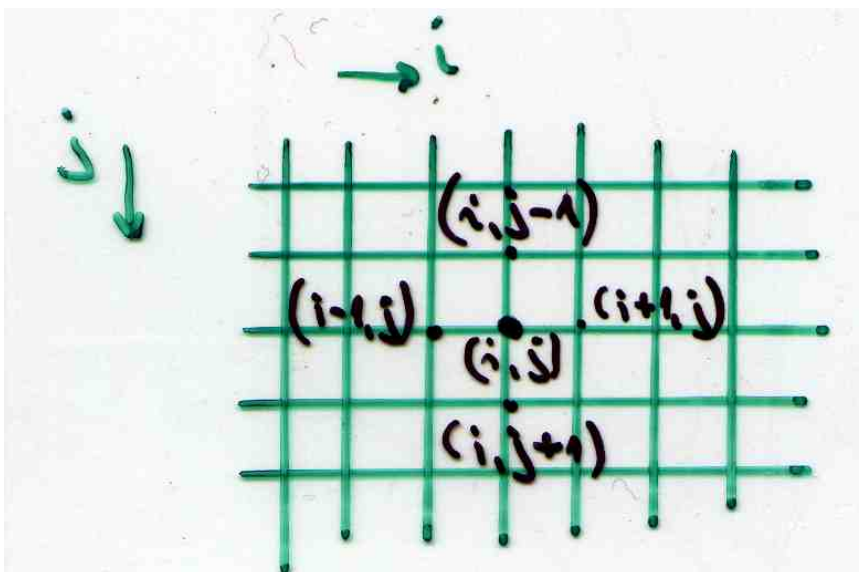
$$a_{k, k-NX} = \frac{TJ_{i, j-1}}{\Delta y^2}$$

$$a_{k, k-1} = \frac{TI_{i-1, j}}{\Delta x^2}$$

$$a_{k, k} = -\frac{TI_{i-1, j}}{\Delta x^2} - \frac{TI_{i, j}}{\Delta x^2} - \frac{TJ_{i, j-1}}{\Delta y^2} - \frac{TJ_{i, j}}{\Delta y^2} + \frac{S_{i, j}}{\Delta t} \quad \dots (5.46)$$

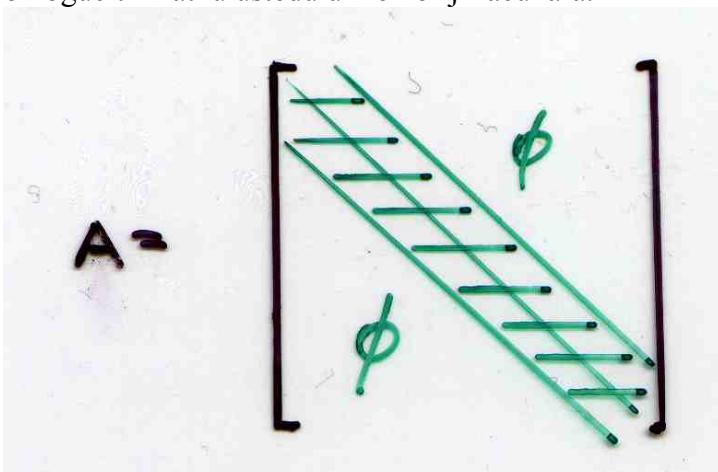
$$a_{k, k+1} = \frac{TI_{i, j}}{\Delta x^2}$$

$$a_{k, k+NX} = \frac{TJ_{i, j+1}}{\Delta y^2}$$



Slika 5.21 Čvor za kojeg se pišu jednačbe i njemu susjedni čvorovi

Sistem jednačbi opisan izrazom 5.45 se može riješiti nekim od poznatih algoritama za rješavanje sustava jednačbi kao što su npr. Gaussov algoritam, metoda Khaletskog, metoda drugog korijena,...). Valja također uočiti da je matrica A vrpčasta matrica tj. da su članovi različiti od nule grupirani uz dijagonalu što također može olakšati rješavanje i omogućiti znatnu uštedu u memoriji računara.



Slika 5.22 Vrpčasta matrica

Opisani sistem jednačbi se može rješavati i iterativno. Iako vrpčasti zapis šteti memorijski prostor u računalu, za realne probleme broj čvorova (a time i jednačbi) može biti veći od raspoloživog prostora u memoriji računala. U tom slučaju se koriste iterativni postupci za rješavanje sustava jednačbi.

Jedan od popularnih metoda je i IADI (Iterative Alternating Direction Implicit procedure).

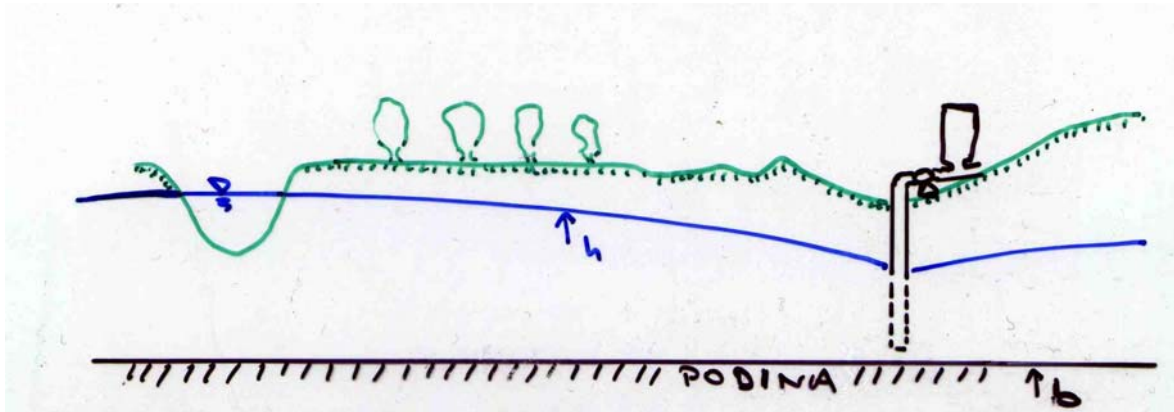
5.4.4 Tečenje sa slobodnim vodnim licem

Za tečenje sa slobodnim vodnim licem se mogu u principu koristiti iste jednačbe koje su se koristile i za modeliranje tečenja pod tlakom. U ovom slučaju je transmisivnost funkcija piezometarske visine koja odgovara slobodnom vodnom licu. Ako podinu vodonosnog

sloja u čvoru (i,j) označimo sa b_{ij} tada se transmisivnost u promatranom čvoru T_{ij} može pisati:

$$T_{i,j} = k_{i,j}(h_{i,j} - b_{i,j}) \quad \dots (5.47)$$

Pri čemu je sa k označen koeficijent filtracije.



Slika 5.23 Tečenje sa slobodnim vodnim licem

U implicitnoj shemi se vrijednosti h_{ij} za računanje transmisivnosti moraju usvojiti u vremenu $t+\Delta t$ pri čemu jednačba kontinuiteta 5.39 postaje nelinearna, što uvjetuje primjenu iteracija. Jednačba se linearizira zamjenom nepoznatog $h_{ij}(t+\Delta t)$ u izrazu za transmisivnost sa starom vrijednosti razina $h_{ij}^s(t+\Delta t)$. U prvom vremenskom koraku se za staru vrijednost usvaja:

$$h_{i,j}^s(t + \Delta t) = h_{i,j}(t)$$

Nakon usvajanja ove pretpostavke sustav jednačbi se rješava jednom od opisanih metoda (direktna ili iterativna) čime se dobiva nova vrijednost $h_{ij}(t+\Delta t)$. Uvrštavanjem:

$$h_{i,j}^s(t + \Delta t) = h_{i,j}(t + \Delta t)$$

dobiva se iterativna shema. Iterativna shema se ponavlja dok nije zadovoljen uvjet:

$$\max_{i,j} |h_{i,j}(t + \Delta t) - h_{i,j}^s(t + \Delta t)| < \varepsilon$$

Kod tečenja sa slobodnim vodnim licem treba također zamjeniti član uskladištenja S sa koeficijentom efektivne poroznosti n_e u čvoru (i,j)

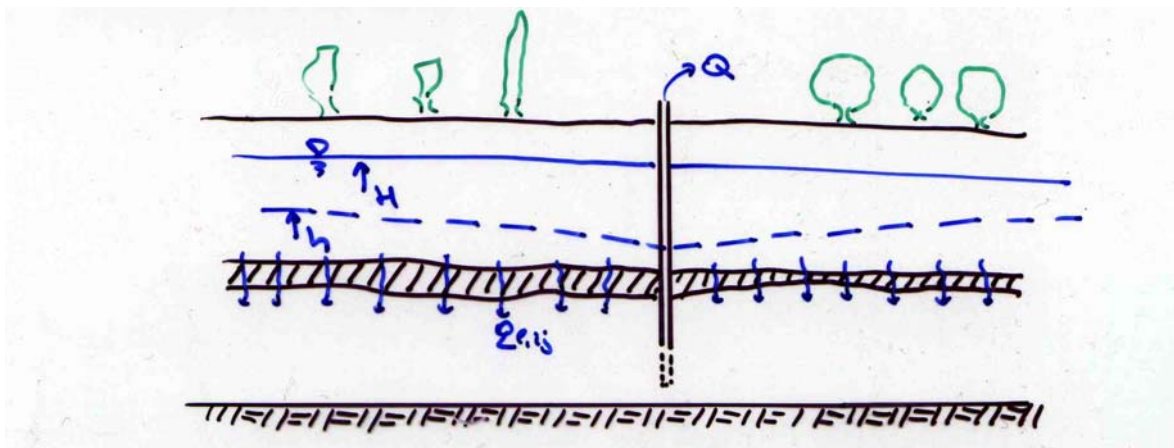
Prilikom modeliranja tečenja sa slobodnim vodnim licem treba također voditi računa da se vodno lice h ne može spustiti ispod razina podine vodonosnog sloja b . U slučaju da razina u čvoru padne ispod razine podine obično se usvaja da je u čvoru transmisibilnost jednaka nuli. Ovakav pristup može izazvati dva problema;

- u trenucima kad razina vode počinje ponovo rast i dignut se iznad kote podine to u čvoru nije moguće jer nema transmisibilnosti i
- voda koja dotiče uslijed infiltracije se nemože infiltrirati.

Ovi problemi se obično izbjegavaju tako što se za potrebe numerike ostavlja neka mala vrijednost debljine saturiranog vodonosnog sloja (ϵ), koja ne utiče na regionalno strujanje a omogućuje izbjegavanje numeričke nestabilnosti.

Vodonosni slojevi velike debljine se mogu bez veće pogreške tretirati kao vodonosnici pod tlakom.

5.4.5 Vodonosnici sa procjeđivanjem



Slika 5.24 Vodonosnik s procjeđivanjem

Vodonosnici u kojima se javlja međuslojno procjeđivanje se mogu tretirati tako da se međuslojno procjeđivanje opiše izrazom:

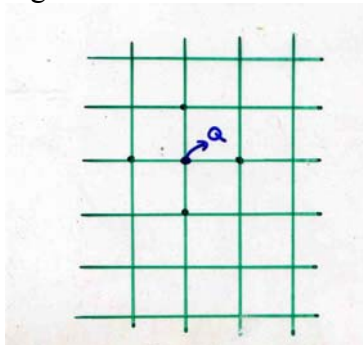
$$q_{l,i,j} = B_{i,j}(H_{i,j} - h_{i,j}) \quad \dots (5.48)$$

pri čemu je

$q_{l,i,j}$	protok među slojevima
$B_{i,j}$	faktor procjeđivanja
$H_{i,j}$	tlak u gornjem (susjednom) sloju
$h_{i,j}$	tlak u promatranom vodonosnom sloju

Protok $q_{l,i,j}$ se može direktno dodati u jednadžbi 5.39 u član q_{ij} . U slučaju da se promatra gornji i donji sloj protok među njima treba u jedan sloj dodati a iz drugog ga treba oduzeti.

Izračunato sniženje u čvoru u kojem je zdenac, zbog usvojene linearne raspodjele između čvorova ne daje točnu vrijednost sniženja koje će se javiti u stvarnosti. Iz tog razloga u regionalnim modelima treba sniženje u zdencima posebno tretirati.

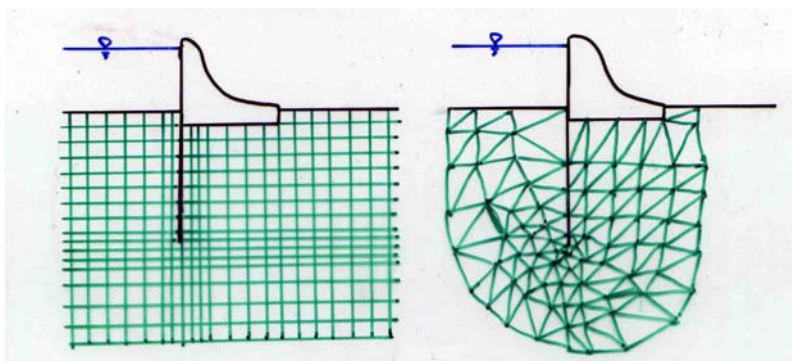


Slika 5.25 Sniženje u zdencu

5.4.6 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih diferencija je za rješavanje većine praktičnih problema zadovoljavajuća, ali ipak ima određene mane od kojih su glavne:

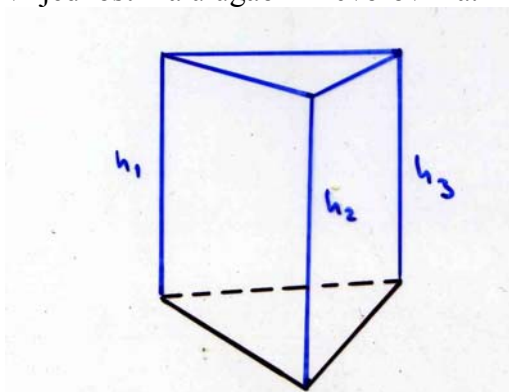
- neprilagodljivost geometriji rubnih uvijeta
- neprilagodljivost progušćenju tj. nemogućnost laganog progušćivanja mreže u područjima gdje se gradienti brže mijenjaju pa veliki elementi sa usvojenom linearnom interpolacijom unose veliku grešku kao npr. na vrhu zagata, u okolini zdenca,....)
- nezgrapnost u (predstavljanju) korištenju tenzorskog pristupa tj. tenzora transmisivnosti u slučaju da se glavni smjerovi toka ne poklapaju (podudaraju) sa koordinatnim osima.



Slika 5.24 Diskretizacione sheme za metodu konačnih diferencija i za metodu konačnih elemenata

To su bili glavni razlozi za primjenu metode konačnih elemenata u modeliranju toka podzemnih voda. Ova metoda se zasniva na podjeli modeliranog područja na niz nepravilnih elemenata. Promatrat ćemo najjednostavniji slučaj kad se domena dijeli na trokutne elemente. Sada čvorovi mogu biti tako postavljeni da dobro opisuju geometriju modeliranog područja.

U metodi konačnih diferencija su potencijali definirani samo u čvorovima i predstavljaju prosječne vrijednosti na cijeloj ćeliji, metoda konačnih elemenata opisuje raspored potencijala na cijelom elementu zahvaljujući primjeni interpolacionih funkcija. U najjednostavnijem slučaju raspored razina podzemne vode $h(x,y)$ u svakom elementu se može aproksimirati linearnom interpolacionom funkcijom koja je definirana sa vrijednostima u ugaonim čvorovima.



Slika 5.25 Konačni element

Prostorna diskretizacija se radi pomoću malo prije opisanog postupka dok se vremenska diskretizacija obično usvaja kao diferencijska.

Nepoznate vrijednosti u čvorovima su definirane tako da se stvarni raspored razina, koji je glatka funkcija koja zadovoljava jednačbu toka, što bolje aproksimira interpolacionim funkcijama u svakom vremenskom koraku.

Numerički pristup se zasniva na primjeni osnovne leme varijacionog računa a postoji niz raznih pristupa.

5.5 Zdenci

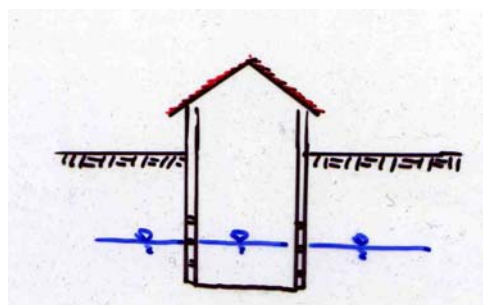
Zdenac je hidrotehnička građevina koja služi za zahvatanje podzemne vode. Zdenci spadaju u gotovo najstarije hidrotehničke objekte širom svijeta, a posebno u aridnim područjima. Postoje pouzdani dokazi da su zdenci u Aziji i Africi bili korišteni još prije nekoliko tisuća godina za vodosnabdijevanje i navodnjavanje. Poznato je da je u starom Egiptu vodosnabdijevanje bilo široko razvijeno i na tim prostorima su otkriveni zdenci stari i preko 4000 godina. Isto tako u Kini, daleko prije nove ere, zdenci su građeni i korišteni u različite svrhe. Tako se na primjer pouzdano zna da je u regiji Tung-Kiao, na površini od oko 100 km², postojalo i više od 10 000 zdenaca. Za izradu bunarske i filtarske konstrukcije u ovim uslovima je korišten bambus. Poznato je da su drevni zdenci izrađeni do dubine od 1200 i 1500 m.

Koliko je danas poznato prvi objekti za zahvatanje podzemne vode u Evropi su bili zdenci u Flandriji (XII stoljeće), Engleskoj i Sjevernoj Italiji. U području provincije Artoa izvedeni su zdenci do dubine od nekoliko desetina i čak stotinjak metara, koji su kaptirali izdani formirane u ispucanim krečnjacima iz kojih se voda sama izlivala na površinu terena. Prema ovim vodozahvatima izrađenim u oblasti Artoa, samoizlivni zdenci su i nazvani arteški zdenci.

Zdenci mogu po konstrukciji biti:

a) KOPANI

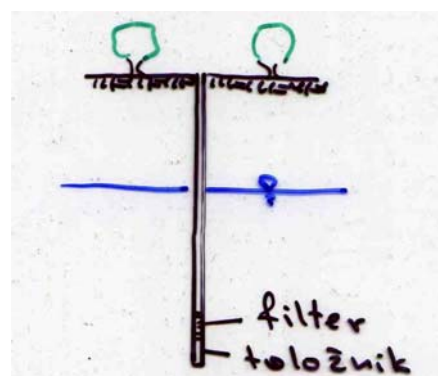
- tradicionalan način izgradnje
- znatno skuplji
- (- veća izdašnost (veći radius))
- trajniji



Slika 5.26 Kopani zdenac

b) BUŠENI (profil je obično 400-1000 mm)

- jeftiniji ali manje trajni
- pogodni za duboke vodonosne slojeve
- mogu primit veliko sniženje



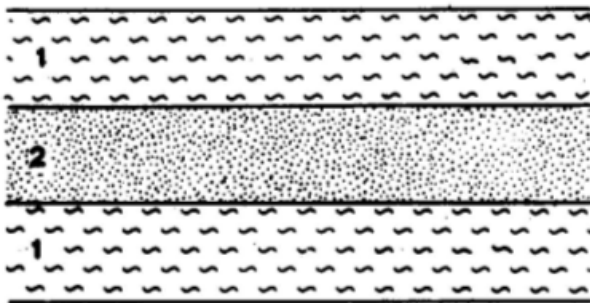
Slika 5.27 Bušeni zdenac

Na osnovu podataka pokusnog crpljenja iz zdenca se određuju hidrogeološki parametri vodonosnog sloja. Valja napomenuti da su ovakvi podaci znatno pouzdaniji od podataka o koeficijentima filtracije koji se dobivaju na osnovu granulometrijskih krivulja.

Da bi se na osnovu podataka crpljenja iz zdenca mogli izračunati hidrogeološki parametri vodonosnog sloja, potrebno je raspolagati relativno jednostavnim analitičkim rješenjima parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Takve izraze se dobiva pod pretpostavkom da je sloj *homogen, izotropan*, ili shematizirano anizotropan, vodoravan s poznatim rasporedom potencijala. U slučaju radijalnog toka sloj se smatra cilindrom konačnog ili beskonačnog radiusa R .

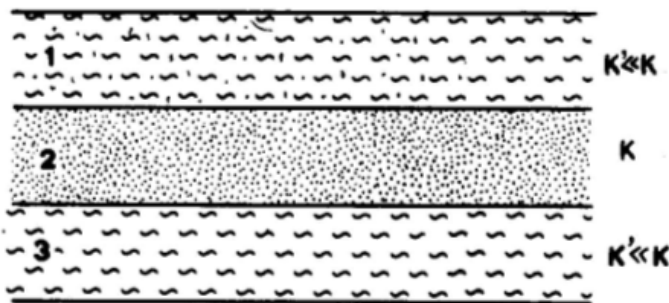
Prema hidrogeološkim značajkama krovine i podine te odnosa krovinskih i podinskih naslaga razlikuju se četiri osnovna tipa *geološkog modela*:

- *sloj pod tlakom* (zatvoreni vodonosni sloj)



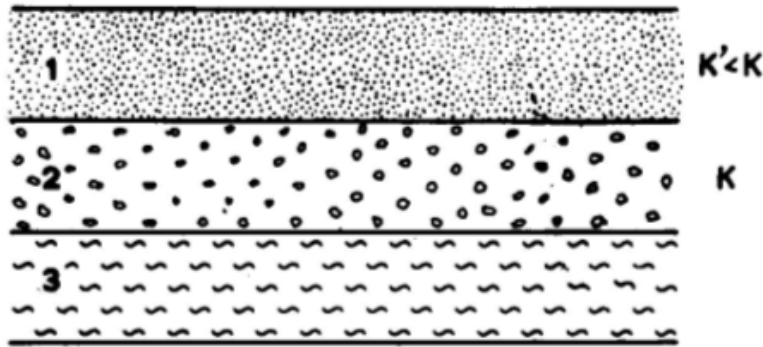
Slika 5.28 Shematski prikaz zatvorenog vodonosnog sloja (2) sa nepropusnom krovinom i podinom (1)

- *poluzatvoreni vodonosni sloj* je omeđen (u krovini i podini ili samo u krovini ili samo u podini) slojevima male ali konačne propusnosti. Horizontalni tok se u krovini i/ili podini može zanemariti ali postoji međuslojno procjeđivanje



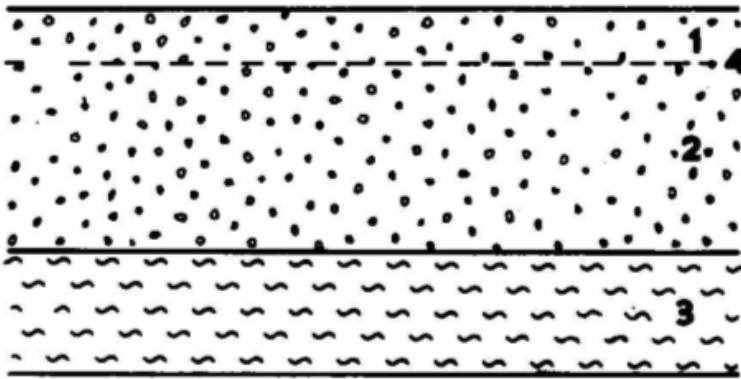
Slika 5.29 Shematski prikaz poluzatvorenog vodonosnog sloja, (1) polupropusna krovina, (2) vodonosni sloj, (3) polupropusna podina, (K) koeficijent filtracije vodonosnog sloja, (K') koeficijent filtracije krovine odnosno podine

- *Poluotvoreni vodonosni sloj* je omeđen u krovini slabopropusnim pokrovnim slojem čiji koeficijent filtracije se ne može usvojiti kao zanemarivo mali.



Slika 5.30 Shematski prikaz poluotvorenog vodonosnog sloja, (1) slabije propustan krovinski dio vodonosnog horizonta, (2) vodonosni sloj, (3) nepropusna podina, (K) koeficijent filtracije vodonosnog sloja, (K') koeficijent filtracije krovine

- *tečenje sa slobodnim vodnim licem* (otvoreni vodonosni horizont) za njega je karakteristično zakašnjelo otpuštanje



Slika 5.31 Shematski prikaz otvorenog vodonosnog sloja, (1) nesaturirani dio sloja, (2) saturirani dio sloja, (3) nepropusna podina, (4) razina podzemne vode

5.5.1 Analitički izrazi za sniženje u zdencu

Izvodi jednadžbi za stacionarno strujanje prema potpunom zdencu u homogenoj (izotropnoj) sredini uz usvajanje Dupuit-ove pretpostavke vrlo su jednostavni. Zasniva se na direktnoj integraciji Darcy-evog zakona.

Potpuni zdenac u strujanju sa slobodnim vodnim licem (Slika 5.32)

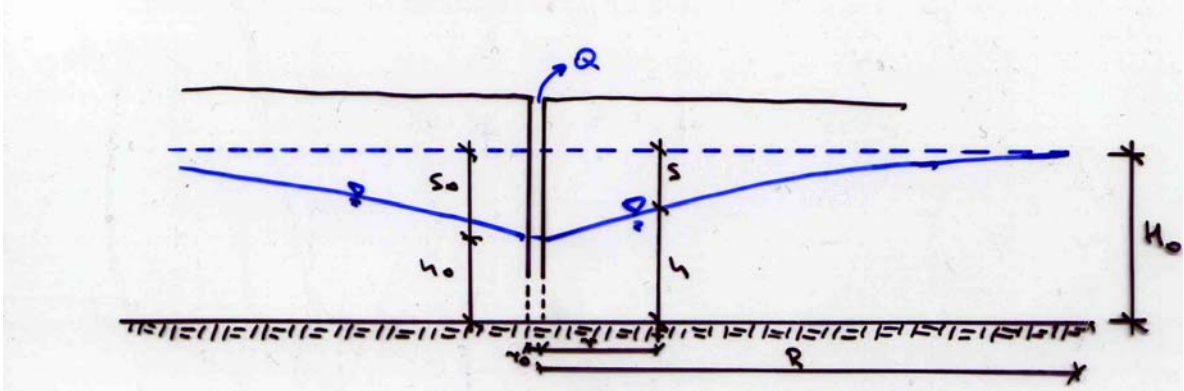
$$Q = 2r \pi q$$

$$Q = 2r \pi k h \frac{dh}{dr}$$

$$Q \frac{dr}{r} = 2\pi k h dh$$

$$Q \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi k \int_{h_0}^{H_0} h \, dh$$

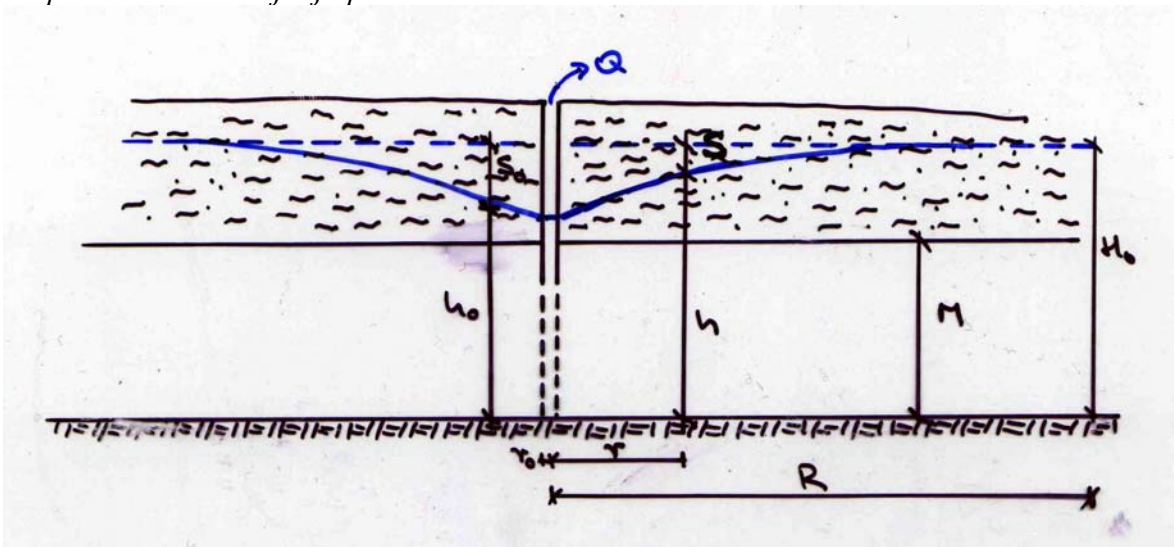
$$Q = \pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad \dots (5.49)$$



Slika 5.32 Depresioni lijevack za potpuni zdenac u strujanju sa slobodnim vodnim licem

Napomena: Integracija se može provesti između bilo koja dva radiusa (r_1 i r_2) i pripadajuća razina podzemne vode (h_1 i h_2).

Potpun zdenac u strujanju pod tlakom



Slika 5.33 Depresioni lijevack za potpuni zdenac u strujanju pod tlakom

Izvod jednadžbe za stacionarno strujanje prema potpunom zdencu u vodonosnom sloju pod tlakom je sličan izvodu za zdenac sa slobodnim vodnim licem uz napomenu da u ovom slučaju debljina saturiranog djela vodonosnog sloja kroz koji se odvija tečenje ne ovisi o radiusu već je konstantna i iznosi M (debljina sloja).

$$Q = 2r \pi q$$

$$Q = 2r \pi k M \frac{dh}{dr}$$

$$Q \frac{dr}{r} = 2\pi k M dh$$

$$Q \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi k M \int_{h_0}^{H_0} dh$$

$$Q = 2\pi k M \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad \dots (5.50)$$

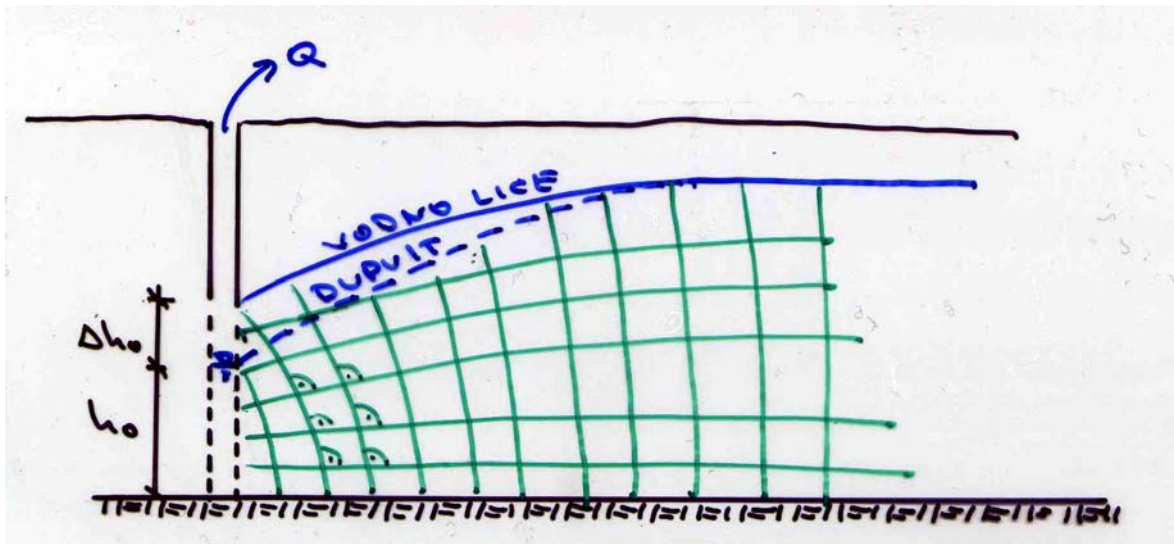
Treba primijetiti da se kod strujanja sa vodnim licem dobiva nelinearna veza između protoka i sniženja, dok je kod zdanaca pod tlakom ta veza linearna.

Osim ovih izraza postoje i izvodi za stacionarni tok uz usvajanje procjeđivanja kroz polupropusni sloj iz krovine,....

Nepotpuni zdenac svojim filtarskim dijelom ne dopire do dna vodonosnog sloja. U okolini zdenca radiusa $r \approx 1.5 M$ ne vrijedi Dupuitova hipoteza.

5.5.2 Vrelna ploha

U primjerima procjeđivanja sa slobodnim vodnim licem se skoro u pravilu javlja *vrelna ploha*. To je ploha na koju prokapljuje voda iznad nižeg vodostaja, a javlja se kod većih hidrauličkih gradienata iz razloga što su brzine procjeđivanja malene te slobodna strujnica "izbije" znatno iznad nižeg potencijala.



Slika 5.34 Vrelna ploha

Strujnice i ekvipotencijale nisu okomite na vrelnu plohu. Veličina vrelne plohe kod zdenca je definirana izrazom (dobivenim na osnovu niza teoretskih i eksperimentalnih radova):

$$\Delta h_o = \sqrt{\frac{Q}{k} \left(0.73 \log \frac{\sqrt{\frac{Q}{k}}}{r_o} - 0.5 \right)} + h_o^2 - h_o \quad \dots (5.51)$$

Iz slike je vidljivo da će Dupuitova teorija dati dobru aproksimaciju vodnog lica u području gdje su ekvipotencijale praktički vertikalne. U blizini zdenca Dupuitovo rješenje se razlikuje od stvarnog vodnog lica, te predstavlja piezometarsku visinu po dnu.

Dupuitova teorija daje ipak stvarni dotok u zdenac za određeno h_o i H_o dok se razine p.v. uz zdenac bitno razlikuju

5.5.3 Radijus utjecaja zdenca

Radijus utjecaja zdenca je radijus na kojem se primjećuje snižavanje razina podzemnih voda uzrokovano radom zdenca. Nakon početka crpljenja radijus se kontinuirano povećava dok ne dosegne granice prihranjivanja odnosno dok se ne uspostavi ravnoteža između crpljenja s jedne strane i prihranjivanja (oborine, vodotok), smanjenja evapotranspiracije s druge strane.

Greške u procjeni vrijednosti radijusa utjecaja nemaju veliki značaj jer u jednadžbi zdenca vrijednost R ulazi u logaritamskoj funkciji koja za velike brojeve nema znatne razlike u vrijednosti logaritma.

U praksi se usvaja da je vrijednost radijusa utjecaja za pojedine materijale slijedeći:

	R (m)
fini pijesak	25-100 m
srednji do grubi pijesak	100-500 m
fini do srednji šljunak	400-1500 m
krupni šljunak	1500-3000 m

5.5.4 Grupe zdenaca

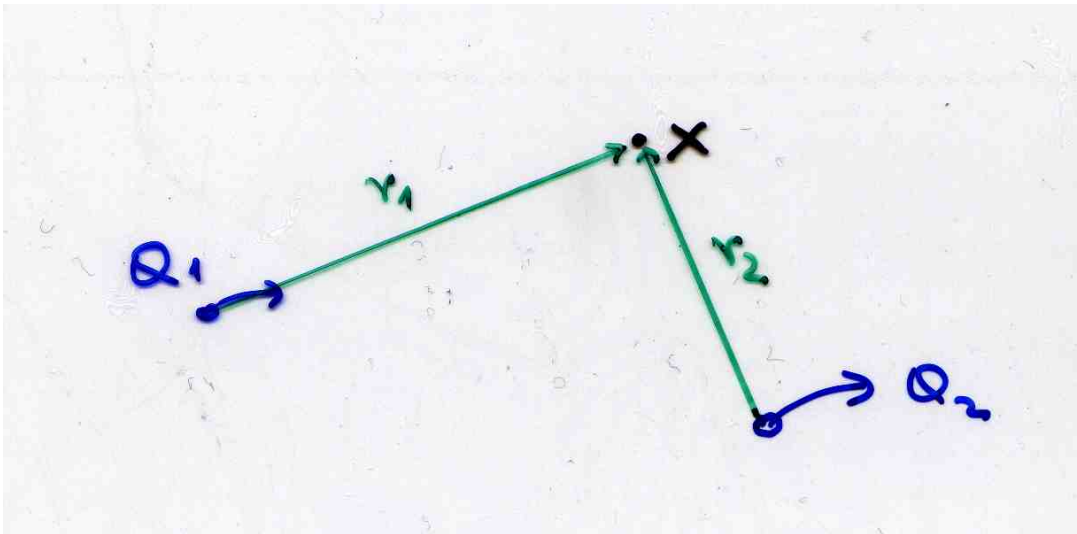
5.5.4.1 Zdenci pod tlakom

Sniženje između dvije točke koje se nalaze u prilivnom području zdenca (u radiusu utjecaja zdenca) je definirano jednadžbom:

$$h_2 - h_1 = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \dots (5.52)$$

Valja uočiti da je kod zdenaca pod tlakom veličina sniženja u svakoj točki proporcionalna (linearno) s količinom crpljenja. U problemima koji su definirani linearnim ovisnostima može se primjeniti princip superpozicije koji u primjeru zdenca glasi:

Sniženje vodostaja u nekoj točki u okolini zdenca uslijed usporednog crpljenja iz više zdenaca bit će jednako zbroju sniženja uslijed crpljenja svakog pojedinačnog zdenca.



Slika 5.35 Superpozicija sniženja uslijed rada dva zdenca

$$S_x = S_1 + S_2$$

$$S_x = \frac{Q_1}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_1} + \frac{Q_2}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_2} \quad \dots (5.53)$$

odnosno općenito:

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_i} \quad \dots (5.54)$$

U slučaju da su izdašnosti zdenaca identične tj. da vrijedi $Q_1=Q_2=\dots Q_n$ gornja jednažba poprima oblik:

$$S_x = \frac{Q_i}{2\pi k M} \sum_{i=1}^n \ln \frac{R}{r_i} \quad \dots (5.55)$$

5.5.4.2 Zdeneci sa slobodnim vodnim licem

Kod zdenaca sa slobodnim vodnim licem sniženje piezometarske plohe nije linearno ovisno o protoku. Vrijedi jednakost:

$$Q = \pi k \frac{H_o^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} \quad \dots (5.56)$$

$$H_o^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

$$h = \sqrt{H_o^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}}$$

Sniženje između dviju točaka je definirano izrazom:

$$h_2 - h_1 = \sqrt{H_o^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_2}} - \sqrt{H_o^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_1}} \quad \dots (5.57)$$

Iz jednadžbe se vidi da je odnos između sniženja i protoka nelinearan. Da bi se mogla opisati sniženja u pojedinim točkama uvodi se linearizacija pomoću *potencijala Girinskog*.

Jednadžba zdenca sa slobodnim vodnim licem glasi:

$$Q = \pi k \frac{H_o^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} \quad \dots (5.58)$$

može se pisati kao:

$$\pi k H_o^2 - \pi k h^2 = Q \ln \frac{R}{r} \quad \dots (5.59)$$

odnosno:

$$\frac{k H_o^2}{2} - \frac{k h^2}{2} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \quad \dots (5.60)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_o - \Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \quad \dots (5.61)$$

Sada postoji linearan odnos između pada potencijala Girinskog i protoka pa se može primjeniti princip superpozicije.

Princip superpozicije će se prikazati na padu potencijala Girinskog u točki x koji je jednak padu potencijala uslijed djelovanja dva zdenca - zdenca 1 i zdenca 2.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_x &= \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 \\ \Delta\Phi_x &= \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{R}{r} + \frac{Q_2}{2\pi} \ln \frac{R}{r_2} \end{aligned} \quad \dots (5.62)$$

odnosno za slučaj djelovanja n zdenaca vrijedi:

$$\Delta\Phi_x = \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \ln \frac{R}{r_i} \quad \dots (5.63)$$

Kako je pad potencijala Girinskog definiran izrazom:

$$\Delta\Phi_x = \Phi_o - \Phi_x = \frac{kH_o^2}{2} - \frac{kh^2}{2} \quad \dots (5.64)$$

pri čemu je h razina vode u čvoru x , slijedi:

$$h = \sqrt{H_o^2 - \frac{2\Delta\Phi_x}{k}} \quad \dots (5.65)$$

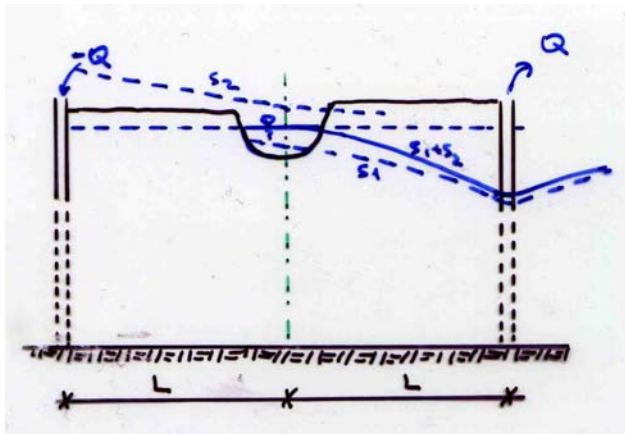
5.5.4.3 Zdenac uz vodotok

Djelovanje zdenca uz vodotok se može dobiti *superpozicijom* pozitivnog i negativnog zdenca. Ovaj pristup se može usvojiti ako je vodotok unutar radiusa utjecaja zdenca ($R > L$). Negativni zdenac se postavlja simetrično u odnosu na vodotok tako da se anulira sniženje koje bi se pojavilo na kontaktu vodotoka i vodonosnog sloja. Analitički se to može izraziti:

$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_1} + \frac{-Q}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_2} \quad \dots (5.66)$$

$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \left(\ln \frac{R}{r_1} - \ln \frac{R}{r_2} \right) \quad \dots (5.67)$$

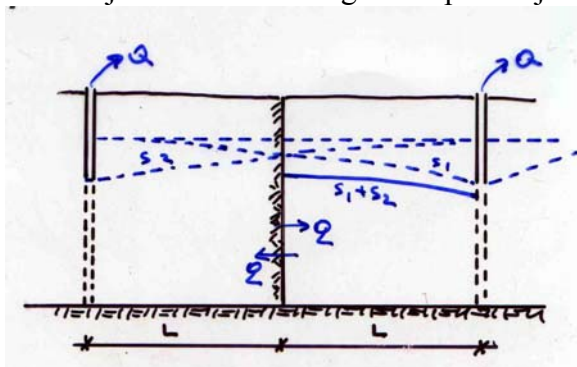
$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



Slika 5.36 Zdenac uz vodotok

5.5.4.4 Zdenac uz nepropusnu granicu

Kod zdenca uz nepropusnu granicu treba voditi računa da se zdenac ne može prihranjivati kroz nepropusnu granicu. Iz tog razloga se uvodi zdenac simetrično u odnosu na granicu tako da je numerički kroz granicu protok jednak nuli (Sloj je pod tlakom)



Slika 5.34 Zdenac uz nepropusnu granicu (u sloju pod tlakom)

$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_1} + \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{R}{r_2}$$

$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \left(\ln \frac{R}{r_1} + \ln \frac{R}{r_2} \right)$$

$$S_x = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{R^2}{r_1 r_2} \quad \dots (5.69)$$

5.5.5 Nestacionarno strujanje prema zdencu

Strujanje podzemne vode prema zdencu je zbog promjenjivosti hidroloških prilika i izdašnosti zdenaca gotovo uvijek nestacionarno. Postoji niz analitičkih izraza koji definiraju sniženje u nestacionarnom režimu za pojedine hidrogeološke uvjete (zatvoreni sloj, otvoreni sloj, međuslojno procjeđivanje, zakašnjeno otpuštanje,...) a jednadžbe se mogu potražiti u literaturi (npr. Miletić: Uvod u kvantitativnu hidrogeologiju, Bear, 1972..). Kao primjer će se u ovom poglavlju navesti jednadžba za nestacionarni tok u zatvorenom vodonosnom sloju.

Nestacionarni tok u zatvorenom vodonosnom sloju

Neograničeni zatvoreni vodonosni sloj je elastično tijelo u kome se gubitak tlaka izazvan crpljenjem iz zdenca prenosi po sloju analogno prenosu toplone u željeznoj ploči. Tu je sličnost prvi zamjetio Theiss (1935) i iz navedene analogije izveo tzv. "neravnotežnu jednadžbu" radijalnog toka u zatvorenom horizontu a isti izraz se može dobiti i integriranjem jednadžbe toka u polarnim koordinatama:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial S}{\partial t} \quad \dots (5.70)$$

pri čemu je:

s sniženje u točki ($s = h_0 - h$)
 S koeficijent uskladištenja

Pri izvodu jednadžbe je usvojeno da je vodonosni sloj horizontalan te da u beskonačnosti nema sniženja. Također su usvojeni slijedeći početni i rubni uvijeti:

$$s(r, 0) = 0 \quad r \geq 0$$

$$s(r, t) = 0 \quad r \rightarrow \infty \quad t \geq 0 \quad \dots (5.71)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{-Q}{2\pi T}, \quad t \geq 0$$

Posljednji uvjet kaže da je crpljenje iz zdenca konstantno, a uskladištenje u zdencu ne postoji, što znači da otpuštanje vode iz sloja nastupa neposredno sa sniženjem razine vode u zdencu.

Rješenje gornje jednadžbe uz navedene početne i rubne uvjete je dano izrazom:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad \dots (5.72)$$

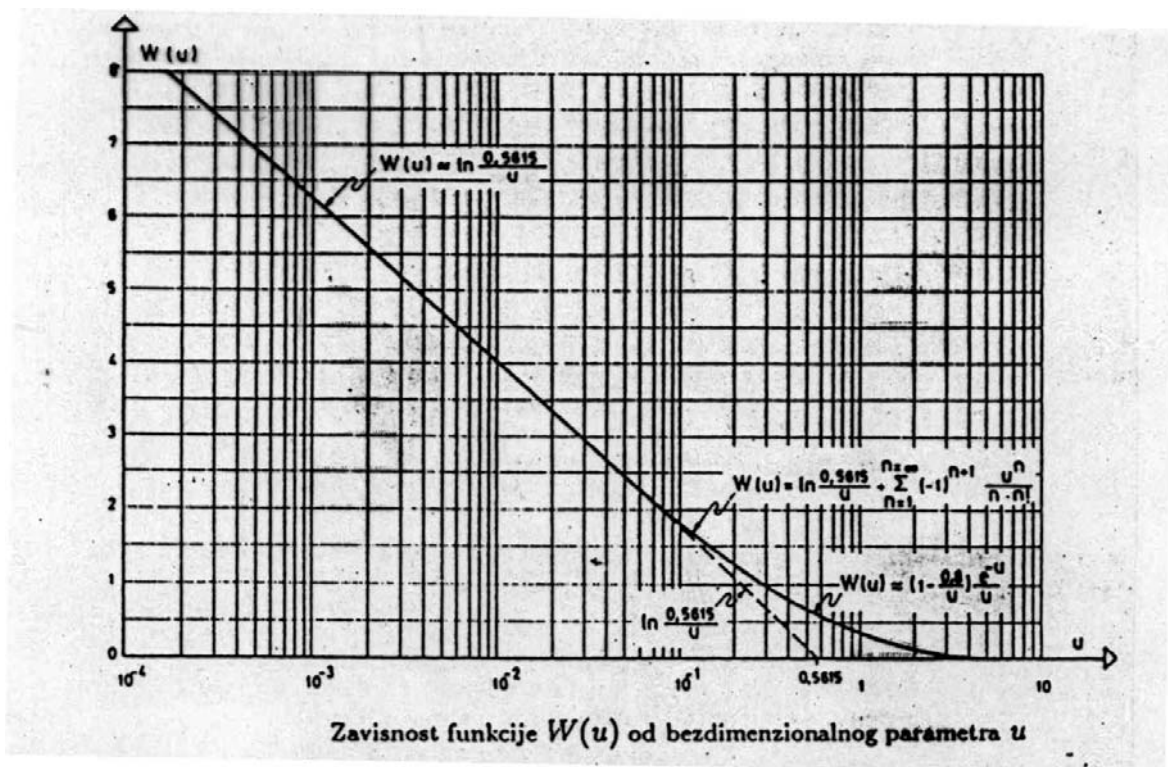
pri čemu je :

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

Eksponencijalni integral koji figurira u gornjem izrazu se u literaturi najčešće naziva bunarska funkcija $W(u)$ koja je definirana izrazom

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = \ln \frac{0.5615}{u} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n \cdot n!} \quad \dots (5.73)$$

koji se može razviti u red. Vrijednosti bunarske funkcije se mogu naći i u tablicama. Oblik bunarske funkcije je prikazan na slici 5.35.



Slika 5.35 Bunarska funkcija

5.5.6 Određivanje osnovnih hidrogeoloških parametara pomoću rezultata probnog crpljenja

Osnovni parametri kojima je definiran tok u vodonosnom sloju su: horizontalni i vertikalni koeficijent filtracije (k_h i k_v), transmisivnost (T), poroznost (n) i faktor procjeđivanja (B).

Spomenuti parametri se najtočnije mogu odrediti na osnovu rezultata probnog crpljenja. Probno crpljenje se provodi iz zdenca oko kojeg postoji niz piezometara (najmanje dva) u kojima se prati promjena razine podzemne vode kao posljedica crpljenja. Traženi hidrogeološki parametri se mogu odrediti u

- stacionarnom režimu* – kao razlika sniženja na poznatoj udaljenosti od zdenca i
- nestacionarnom režimu* - na temelju mjerenja sniženja i proteklog vremena

Postupak identifikacije parametara vodonosnog sloja se svodi na usvajanje (pretpostavljanje) geološke sheme vodonosnog sloja i odabira odgovarajuće jednadžbe te pretpostavljanjem hidrogeoloških parametara i simuliranjem strujanja na modelu. Uspoređivanjem sniženja izračunatih matematičkim modelom i izmjerenih sniženja se može ocjeniti vjerodostojnost na početku usvojenih parametara. Na osnovu provedene usporedbe se mijenjaju na početku pretpostavljeni parametri dok se ne postigne zadovoljavajuća podudarnost izmjerenih i izračunatih vrijednosti.

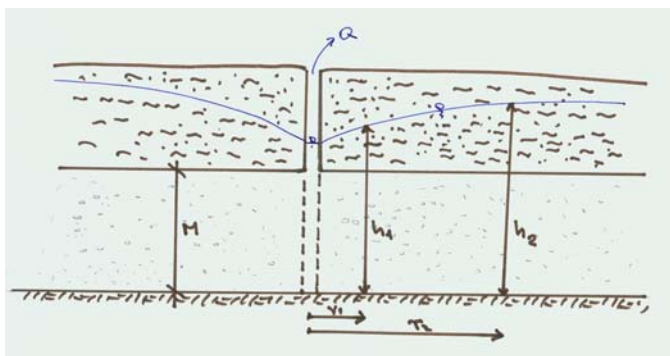
5.5.6.1 Stacionarni tok - Thiem-ova jednadžba

Najjednostavnija metoda se zasniva na korištenju Thiemove jednadžbe za stacionarni tok u zatvorenom vodonosnom sloju (tečenje pod tlakom) koja glasi:

$$Q = 2\pi k M \frac{h_2 - h_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots (5.74)$$

Pomoću ove metode se može odrediti transmisivnost koja je, izražena preko dekadskog logaritma, jednaka:

$$T = \frac{2.3Q}{2\pi(h_2 - h_1)} \log \frac{r_2}{r_1} \quad \dots (5.75)$$



Slika 5.36 Određivanje transmisivnosti na osnovu razina podzemne vode u dva piezometra prilikom strujanja prema zdencu pod tlakom

Ova metoda određivanja transmisivnosti traži najmanje dvije opažачke bušotine da bi se izbjegle pogreške koje unosi otpor zdenca.

5.5.6.2 Nestacionarni režim

U nestacionarnom režimu se za određivanje parametara vodonosnog sloja često koriste pravolinijske metode.

Prilikom određivanja sniženja u nestacionarnom režimu se kod definiranja bunarske funkcije $W(u)$ u području u kojem je vrijednosti $u < 0.01$ članovi koji su viši od $\ln u$ mogu zanemariti pa se jednadžba sniženja u promatranom piezometru (npr. piezometar 1 na slici 5.36) može pisati u obliku:

$$s_1 = \frac{Q}{4\pi T} (-0.577216 - \ln u_1) = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u_1} - 0.577216 \right) \quad \dots (5.76)$$

a u drugom piezometru

$$s_2 = \frac{Q}{4\pi T} (-0.577216 - \ln u_2) = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u_2} - 0.577216 \right) \quad \dots (5.77)$$

razlika sniženja između dva piezometra se može izraziti

$$s_1 - s_2 = \Delta s = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u_1} - 0.577216 \right) - \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u_2} - 0.577216 \right) \quad \dots (5.78)$$

ili nakon sređivanja:

$$\Delta s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{u_2}{u_1} \quad \dots (5.79)$$

kako je

$$u_1 = \frac{r_1^2 S}{4Tt}$$

$$u_2 = \frac{r_2^2 S}{4Tt}$$

i vrijedi

$$\ln \frac{1}{r^2} = 2 \ln \frac{1}{r}$$

sniženje se može izraziti

$$\Delta s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \dots (5.80)$$

Analogno se za istu udaljenost a za različita vremena može pisati:

$$s_2 - s_1 = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{t_1}{t_2} \quad \dots (5.81)$$

Transformacijom gornjih jednažbi te korištenjem dekadskih logaritama proizlazi

$$\Delta s = 0.366 \frac{Q}{T} \log \frac{r_2}{r_1} \quad \dots (5.82)$$

i

$$\Delta s = 0.183 \frac{Q}{T} \log \frac{t_1}{t_2} \quad \dots (5.83)$$

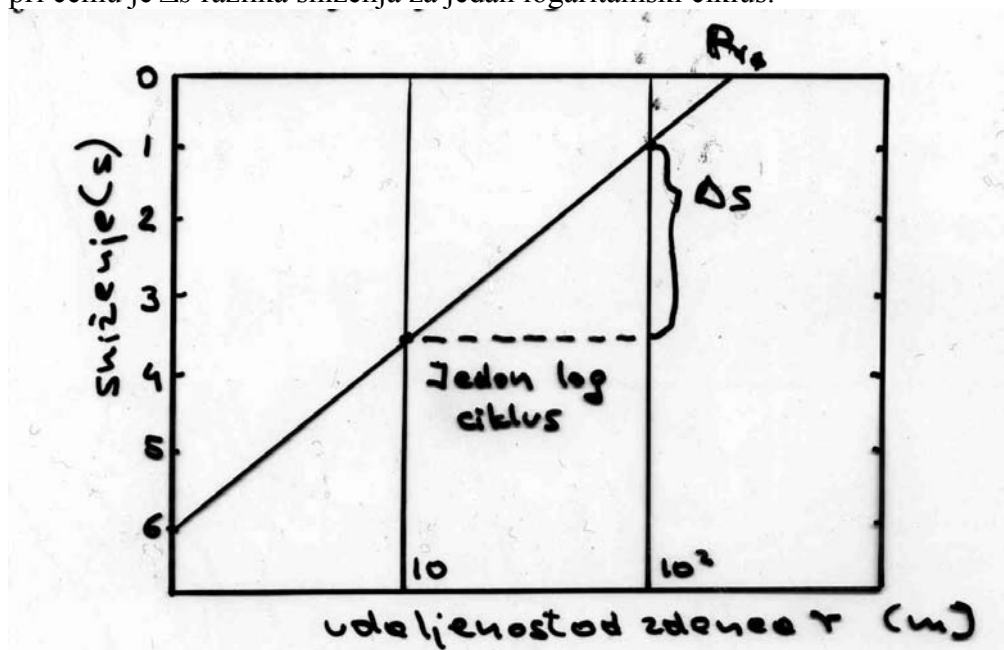
za jedan logaritamski ciklus:

$$\log \frac{r_2}{r_1} = 1 \quad \dots (5.84)$$

iz jednažbe 5.82 slijedi:

$$T = 0.366 \frac{Q}{\Delta s} \quad \dots (5.85)$$

pri čemu je Δs razlika sniženja za jedan logaritamski ciklus.



Slika 5.37 Dijagram za određivanje transmisivnosti

Produži li se linija sniženja do presjeka sa sniženjem $s = 0$ i za tu točku odredi $r = R$ (radijus utjecaja zdenca), tada se prema jednažbi

$$\frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u} - \ln 1.78 \right) = 0 \quad \dots (5.86)$$

odnosno

$$\frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} \right) = 0 \quad \dots (5.87)$$

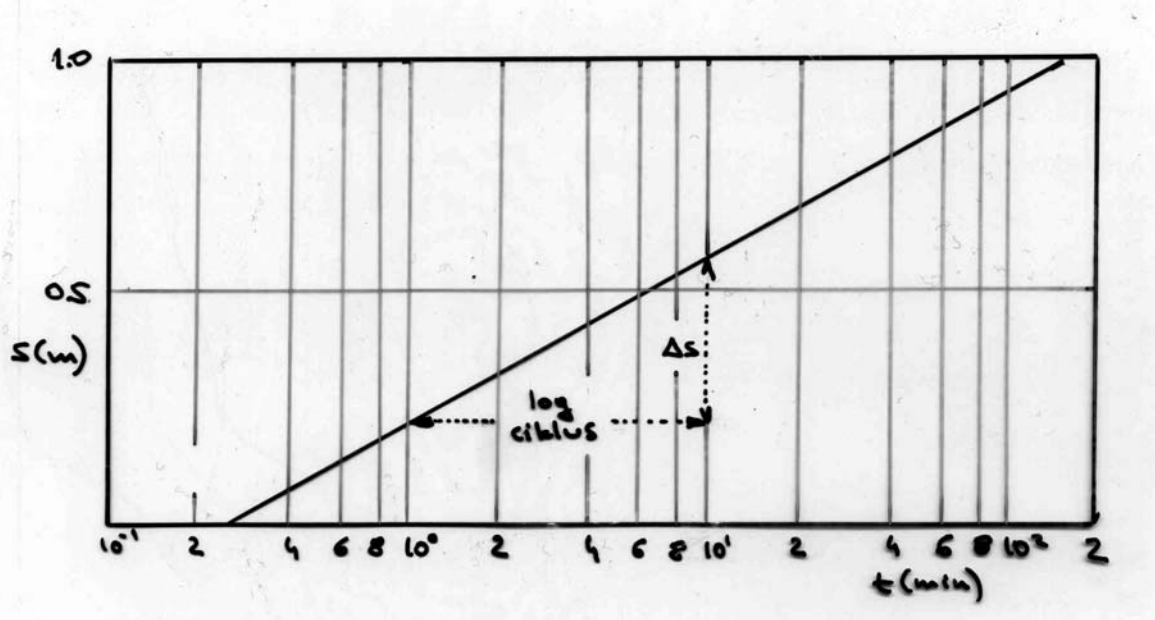
Gornji izraz vrijedi za $r = R$ ako je:

$$\frac{2.25Tt}{R^2 S} = 1$$

odkud slijedi:

$$S = \frac{2.25Tt}{R^2} \quad \dots (5.88)$$

Jednako navedenom postupku nanošenjem sniženja (s) za istu udaljenost (r) u linearnom mjerilu u odnosu na proteklo vrijeme (t) u logaritamskom mjerilu dobiva se također pravac



Slika 5.38 Dijagram za određivanje transmisivnosti

za jedan logaritamski ciklus

$$\log \frac{t_1}{t_2} = 1$$

se iz jednadžbe za sniženje u funkciji vremena može izraziti transmisibilnost

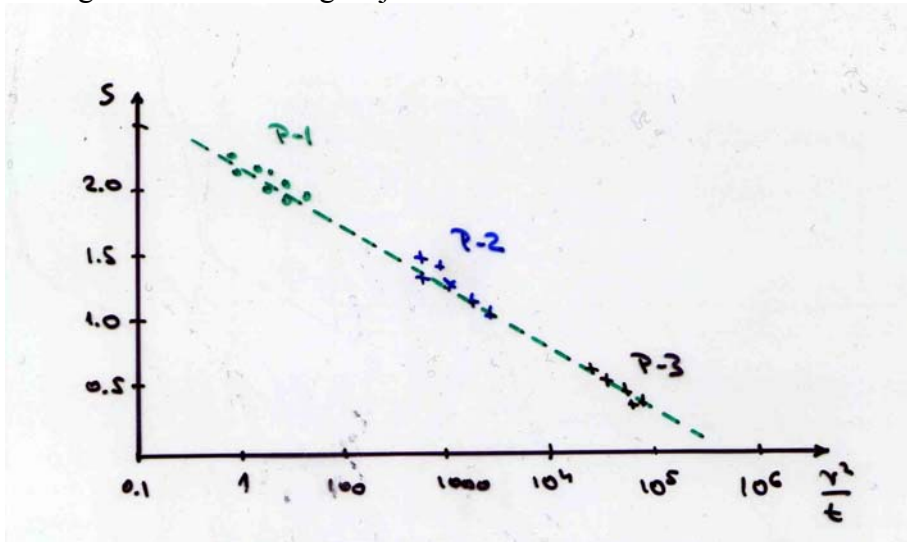
$$T = 0.183 \frac{Q}{\Delta s} \quad \dots (5.89)$$

odnosno uz određivanje vremena t_0 za s_0 slijedi

$$S = \frac{2.25Tt_0}{R^2} \quad \dots (5.90)$$

Istom logikom i sličnim postupcima se može dobiti koeficijent poroznosti, parametri na osnovu opažanja povratka razina, i niz drugih što je detaljnije opisano u literaturi (Miletić).

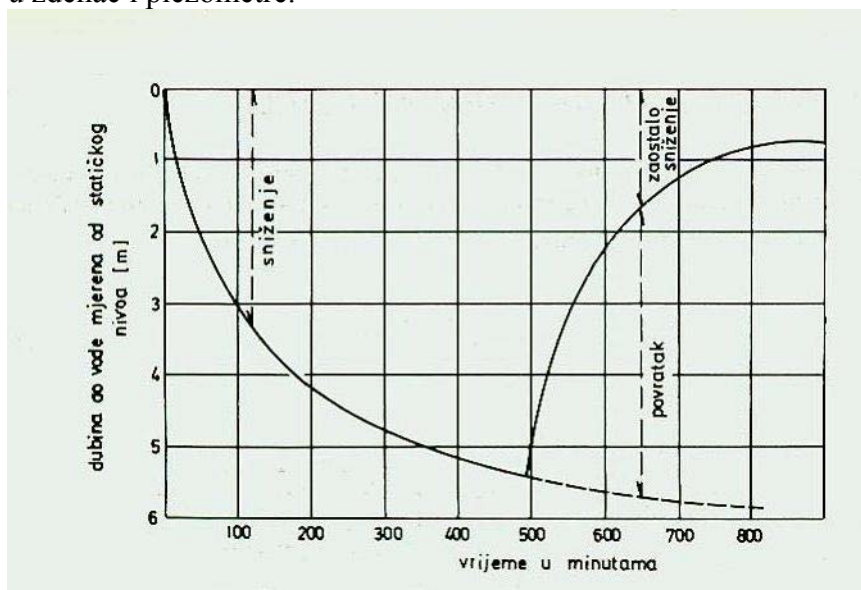
Za sloj pod tlakom u nestacionarnom režimu moraju sve vrijednosti pasti na pravac u mjerilu $s - \log r^2/t$. Ovakav prikaz sniženja daje karakteristike sredine u svim točkama (piezometrima) u okolini zdenca pa se može provjeriti ispravnost usvojene pretpostavke o homogenosti vodonosnog sloja.



Slika 5.39 Ovisnost sniženja i r^2/t

Nestacionarni tok – metoda povratka

Ova metoda se zasniva na mjerenju "zaostalog" sniženja (Miletić), tj. sniženja nakon prestanka crpljenja. Nakon što prestane crpljenje, počinje vraćanje razine podzemne vode u zdenac i piezometre.

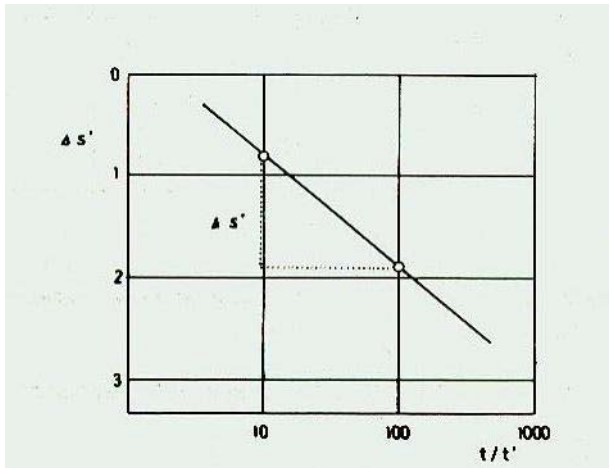


Slika 5.50 Sniženje razine podzemne vode prilikom prestanka crpljenja

Koristeći Jakob-Cooperovu aproksimaciju, zaostalo sniženje $\Delta s'$ jednako je

$$\Delta s' = \frac{2,3Q}{4\pi T} \log \frac{t}{t'} \quad \dots (5.91)$$

pri čemu je t vrijeme (u minutama) proteklo od početka crpljenja a t' vrijeme (u minutama) nakon što je crpljenje prestalo. Postupak određivanja transmisibilnosti se sastoji u ucrtavanju izmjerene vrijednosti zaostalog sniženja ($\Delta s'$) na ordinatu a vrijednost t/t' na apscisu logaritamske podjele.



Slika 5.51 Odnos $\Delta s'$ i t/t'

Za jedan logaritamski ciklus (t/t') se transmisibilnost može izračunati pomoću jednadžbe:

$$T = \frac{2,3Q}{4\pi\Delta s'} \quad \dots (5.92)$$

Ovom metodom se ne može odrediti koeficijent uskladištenja S .

5.5.6.3 Numerički model

Analitička rješenja su izvedena najčešće pod pretpostavkom da je vodonosni sloj homogen, izotropan, konstantne debljine, beskonačan, da je početna razina horizontalna, da je razina na rubu područja konstantan, da je crpljenje konstantno, da zdenac u potpunosti zahvaća vodonosni sloj.... Postoje neka približna rješenja za nepotpune zdence, za nestacionarno strujanje prema zdencu, za crpljenje sa promjenjivom količinom, ali oni ne mogu uključiti sve slučajeve koji se mogu javiti u praksi.

Korištenje postojećih analitičkih izraza u uvjetima za koje nisu predviđeni, može dati krive rezultate. Iz tog razloga se sve više koriste numerički modeli koji se zasnivaju na diskretizaciji prostora oko zdenca i na zadovoljavanje jednadžbe kontinuiteta u svakom pojedinom čvoru.

Popis literature:

Miletić, P., M H Miletić; Uvod u kvantitativnu hidrogeologiju,
Vuković M, Anđelko Soro, Hidraulika bunara teorija i praksa, Građeviska knjiga