

7. PRONOS

7.1 Pronos tvari tokom podzemne vode

Podzemna voda je jedan od glavnih izvora vode u vodoopskrbi (u Zagrebu je 97% vode za vodoopskrbu tog porijekla). Od svih prirodnih izvora podzemna voda je najmanje podložna zagađivanju. Nakon što je čovjek svojom djelatnošću ugrozio kvalitetu površinskih voda i zraka, u zadnje vrijeme smo nažalost svjedoci i sve većeg stupnja zagađenosti podzemnih voda. U vodoopskrbi dakle osim kvantitete vode koja se može zahvatiti sve više postaje upitna i kvaliteta vode.

Razlog što je kvaliteta podzemnih voda tekar sada, dugo nakon kvalitete površinskih voda i zraka došla kao tema u raspravama o zaštiti okoliša su:

- za većinu tvari koje se nalaze u podzemnoj vodi je vodonosnik prirodan filter. Samo rijetka, vrlo mobilna zagađivala, mogu zagaditi velike dijelove vodonosnika (npr. nitrati). Purifikaciono svojstvo vodonosnika nije nužno konstanta na dulje vrijeme, i tokom vremena se može značajno smanjiti.
- zbog malih brzina toka podzemne vode se zagađivala često puta otkriju tekar nekoliko godina nakon ulaska u vodonosnik, a najčešće tekar kad uđu u sustav za vodoopskrbu. Ova sporost napredovanja zagađivala daje ujedno i izvjesnu (prividu) dozu sigurnosti. Ona također utječe da samo zagađivala sa dugačkim vremenom "života" mogu ugroziti kvalitetu velikih djelova vodonosnog sloja
- razvoj industrije u posljednjih stotinjak godina ima za posljedicu formiranja niza novih mogućih zagađivala. Moderna industrija se služi nizom novih, vrlo stabilnih spojeva. Ovi spojevi zajedno sa nagomilanim odlagalištima predstavljaju rastuću opasnost za kvalitetu podzemnih voda.

Nekoć su glavni uzrok zagađivanja podzemnih voda bile bakterije, pa je to dosad bio uglavnom i kriterij za određivanje zaštitnih zona. Šezdesetih godina prošlog stoljeća je sa porastom korištenja nafte kao energenta porastao i udio zagađivanja podzemnih voda raznim derivatima, pa je i danas to glavni izvor zagađivanja. Na sreću se mineralna ulja u podzemlju relativno brzo razgrađuju i adsorbiraju pa dosad nije bilo neke velike katastrofe.

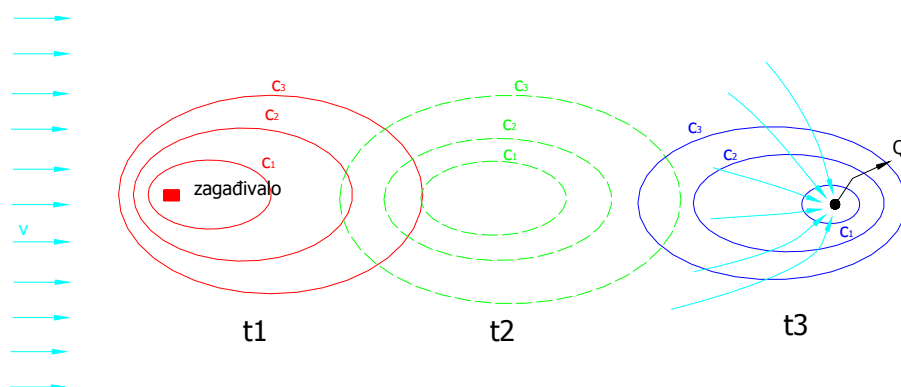
Slijedeći veliki izvor zagađivanja podzemnih voda su sredstva za prihranjivanje i zaštitu bilja od kojih se najviše ističu nitrati koji su sastavni dio umjetnih gnojiva.

Obzirom da osim ova dva glavna uzroka zagađivanja postoji niz drugih, sagledavanje i sanacija vodonosnika je multidisciplinarna tako da ga mora raditi tim stručnjaka (geolozi, kemičari, hidrolozi, hidrauličari, mikrobiolozi i drugi).

7.1.1 Ciljevi modela pronosa tvari

- iscrtavanje izolacija jednakih koncentracija sa ciljem sagledavanja stanja
- prognoza budućeg stanja tj. procjena napredovanja oblaka zagađivala po prostoru i vremenu
- planiranje i proračun uspješnosti pojedine hidrauličke varijante sanacije (mogućnost jeftinog i brzog sagledavanja)

- izrada zaštitnih zona
- planiranje mreže opažачkih bušotina
- bilanciranje brzine raspadanja štetnih tvari



Slika 7.1 Primjer napredovanja oblaka zagađivala

7.1.2 Podjela modela

Pronos zagađivala u vodonosniku se može promatrati obzirom na vrstu zagađivala koje putuje, mjestu unosa, tipu vodonosnog sloja, vrsti strujanja i drugome. Modeli pronosa se dijele obzirom na:

a) vrstu porozne sredine

Razlikuju se stijene sa *međuzrnskom* poroznosti i stijene sa *pukotinskom* poroznošću. Zasad se koriste uglavnom modeli pronosa za sredine sa međuzrnskom poroznošću. Modeli koji obrađuju sredine sa pukotinskom poroznošću su praktički još u ranim fazama razvoja.

b) stupanj zasićenosti porozne sredine

Razlikuje se pronos u *saturiranoj* i pronos u *nesaturiranoj* sredini. Samo strujanje i pronos u saturiranoj sredini može prenijeti zagađivalo na velike horizontalne udaljenosti. U nesaturiranoj zoni je interesantno sagledavati pronos u vertikalnom smjeru.

c) topivost

Postoje tvari koje se ne otapaju u vodi kao što su npr. nafta i njeni derivati, te se pronos takovih tvari promatra kao kretanje suspenzije. Takvo strujanje se naziva *višefazno* strujanje. Ovakve tvari obično imaju i drugu specifičnu težinu tako da su praktički potpuno odvojene od vode.

S druge strane se neka zagađivala otapaju u vodi i s njom čine homogenu cjelinu te se takova tekućina naziva otopina. Ta zagađivala mogu dospjeti na velike udaljenosti.

d) razgradivost zagađivala

Obzirom na razgradivost zagađivala razlikujemo *idealni traser* i tvari koje podliježu reakcijama. Idealni traser je tvar čija masa tokom vremena ostaje konstantna. Modeli pronosa mogu uzimati u obzir i adsorpciju, radioaktivno raspadanje i kemijske reakcije.

e) hidrodinamičku aktivnost

Razlikuju se hidrodinamički aktivne i hidrodinamički neaktivne koncentracije. Hidrodinamički aktivne otopine utječu na strujnu sliku i to uglavnom ili promjenom efekta izazvanog gravitacijom ili promjenom (kinematskog koeficijenta) viskoziteta. U ovakvim slučajevima treba uspostaviti i povratnu vezu između modela pronosa zagađivala i modela toka.

f) ovisno o dimenzionalnosti strujanja

Razlikujemo jedno, dvo i trodimenzionalni modele. U poroznoj sredini je strujanje trodimenzionalno, ali je u nekim slučajevima moguća redukcija dimenzionalnosti. Uglavnom se koriste:

- *jednodimenzionalni* modeli za analizu rezultata ispitivanja u laboratorijima (ispitivanja na kolonama), analizu vertikalnog pronosa kroz nesaturiranu sredinu (npr. bilans nitrata i pesticida),....

- *horizontalno dvodimenzionalni* (regionalni) modeli su modeli u kojima je horizontalna dimenzija znatno veća od debljine vodonosnog sloja. Ovi modeli se mogu koristiti i u slučaju kad je vodonosnik po vertikali nehomogen. Pri tome treba voditi računa da li se zagađivalo pronosi prosječnom brzinom po cijeloj dubini vodonosnog sloja ili ima samo jedan sloj u kojem je brzina veća od ostalih.

- trodimenzionalno strujanje u ostalim slučajevima tj. kada se modelira pronos u okolini izvora zagađivanja koji je točkasti (tj. nije jednoliko raspoređen po vodonosnom sloju npr. sanacija smetlišta Jakuševac).

U okviru ovog tečaja promatrat će se pronos u stijenama međuzrnske poroznosti, u saturiranoj sredini, tvari koje se otapaju i neaktivne koncentracije (ostalo će varirati).

7.1.3 Mehanizmi pronosa

Cilj modeliranja pronosa je opisivanje makroskopskog širenja zagađivala koje nastaje kao posljedica konvektivnog pronosa tokom vode, miješanja (disperzije), adsorpcije i reakcije. Jednadžbe daju opis (informaciju) o procesima koji se odvijaju na nivou pora. Kao i kod toka podzemnih voda opis procesa na nivou pora nije prikladan u praksi pa se provodi osrednjavanje strujanja u poroznom mediju.

U literaturi postoji niz opisa pristupa prelaska iz mikroskopskih pora u jednadžbe pronosa na makroskopskom nivou (npr. Kinzelbach 1987)

Promatrajući otopljeno zagađivalo koje nema adsorpcije niti kemijskih reakcija sa okolnim medijem, na nivou pora postoje samo dva fizikalna procesa; konvekcija u smjeru i sa brzinom v i molekularna difuzija. Pronos uzrokovan konvekcijom je posljedica toka fluida, a njena neravnomjernost se naziva disperzija.

Konvekcija

Konvekcija je pronos osnovnim tokom. Brzina toka podzemne vode se može dobiti dijeljenjem Darcy-eve brzine sa efektivnom poroznošću.

$$v_s = \frac{v}{n} \quad \dots (7.1)$$

Pri tome je efektivna poroznost onaj dio šupljina kroz koji se odvija tok podzemne vode.

Neravnomjernost konvekcije se naziva disperzija.

Molekularna difuzija

Pronos uzrokovan molekularnom difuzijom je posljedica razlike u koncentraciji promatrane tvari u otopini (mediju). Protok promatrane tvari unutar neke otopine uzrokovan difuzijom se može opisati prvim Fickovim zakonom:

$$q_m = -D_M \nabla c \quad \dots (7.2)$$

pri čemu je:

- q_m protok tvari uzrokovan molekularnom difuzijom [M/L²T]
- D_m koeficijent molekularne difuzije promatrane tvari u promatranom otapalu [L²/T]
- ∇ Hamiltonov operator [1/L]
- c koncentracija promatrane tvari [M/L³]

Molekularna difuzija je dominantan proces u slučajevima kad nema toka podzemne vode odnosno kad nema konvekcije kao što se dešava npr. kod pronosa zagađivala kroz brtvene slojeve na sanitarnim deponijama.

U stijenama međuzrnske poroznosti je pronos tvari uzrokovan difuzijom sporiji nego u samoj otopini jer je površina kroz koju se odvija pronos u poroznoj sredini manja (pronos se odvija samo kroz strujne cijevi) a strujne cijevi su zakrivljene što povećava put trasera (Gorišek, 1996). Pokretnost tvari koje se pronose može biti smanjena i zbog interakcije tvari i stijenske porozne sredine. Iz navedenih razloga je potrebno definirati efektivni koeficijent difuzije (D_M^E) koji se može zapisati u obliku:

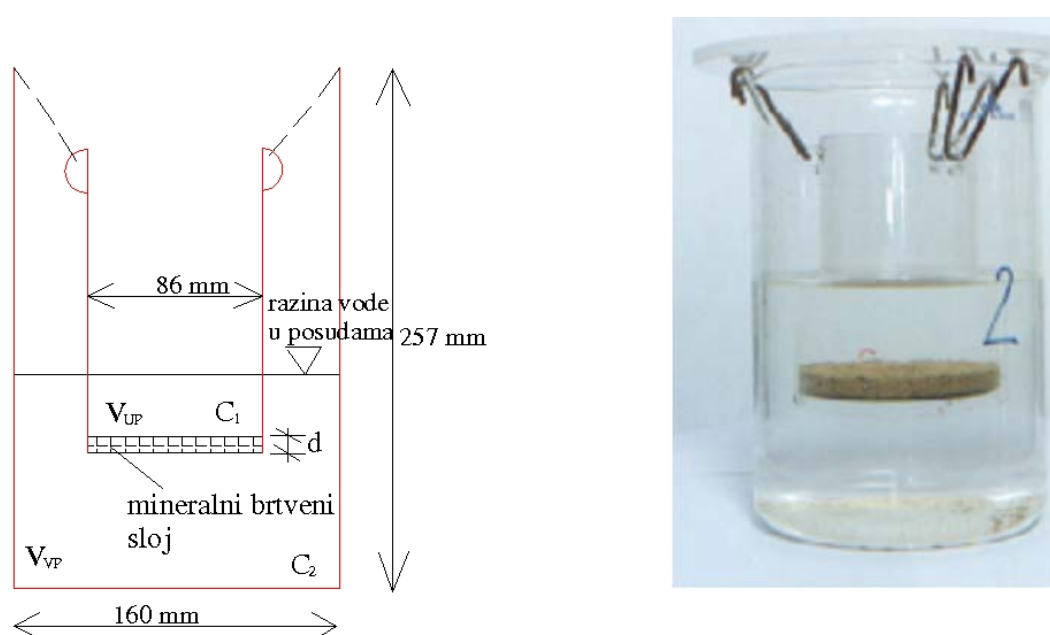
$$D_M^E = D_M f(n) \quad \dots (7.3)$$

pri čemu je:

- D_M^E efektivni koeficijent molekularne difuzije u poroznom mediju [L^2/T]
- $f(n)$ funkcija koja ovisi o karakteru porozne sredine [1]

Određivanje efektivne difuzije u stacionarnim uvjetima nije jednostavno zbog poteškoća pri mjerenju malih vrijednosti količine tvari koja se pronosi. Pokusi se češće provode u nestacionarnim uvjetima tako da se saturirani porozni uzorak ugradi između posude s čistom vodom, s jedne strane, i posude s otopinom konstantne koncentracije trase, s druge strane. Efektivna difuzija se određuje indirektno mjerenjem promjene koncentracije s obje strane uzorka u funkciji vremena (Dagan,1989).

Pronos uzrokovan difuzijom ovisi, osim o obliku i veličini pora, i o stupnju saturiranosti uzorka, temperaturi i o tvari koja se pronosi.



Slika 7.2. Uređaj za mjerenje difuzije

Primjer uređaja za mjerenje molekularne difuzije je prikazan na slici 7.2 U prikazanom uređaju se mjeri pronos tvari iz unutarnje u vanjsku posudu kao posljedica razlike u koncentraciji (Gjetvaj et.al,..)

U tablici 7.1 su prikazani izmjereni koeficijenti efektivne difuzije za glinu, kamenu prašinu i smjesu pijeska s aditivima pri raznim stupnjevima zbijenosti, te koeficijent za uzorak bentonitnog tepiha i za PEHD - foliju.

Iz prikazane tablice se može očitati da s povećanjem gustoće uzorka (bolje zbijeni uzorak) gline i kamene prašine opada koeficijent efektivne difuzije.

broj udaraca batom	D_M^E gline	D_M^E pijesak s aditivima	D_M^E kamena prašina	D_M^E - bentonit	D_M^E - PEHD
--------------------	---------------	-----------------------------	------------------------	--------------------	----------------

25	$2.06 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.64 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$3.22 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$6.06 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$5.1 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ $1.0 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$
40	$1.98 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.59 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.92 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$		
60	$1.78 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.60 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$	$2.38 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$		

Tablica 7.1. Usporedba koeficijenta efektivne difuzije za razne materijale i raznu zbijenost

Promjena koncentracije u unutarnjoj posudi tijekom vremena se može opisati drugim Fickovim zakonom:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \dots (7.4)$$

Disperzija

U svakoj točki promatrane pore se pronos zagađivala može prikazati kao zbroj pronosa od konvekcije i pronosa uzrokovanog difuzijom. (Pronos uzrokovan difuzijom se može opisati *Fick*-ovim zakonom.)

$$\vec{q} = \vec{q}_{konv} + \vec{q}_{diff} = \vec{u}c - D_m \vec{\nabla}c \quad \dots (7.5)$$

pri čemu je:

- \vec{u} vektor brzine u porama
- D_m koeficijent molekularne difuzije
- $\vec{\nabla}$ Hamiltonov operator *Nabla*

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Pri prelasku iz mikroskopskog u makroskopsko mjerilo treba brzinu tōka u porama izaziti na osnovu prosječne brzine u vodonosnom sloju. Prosječne vrijednosti brzina u porama se mogu izraziti na osnovu poznate Darcy-eve brzine i efektivne poroznosti:

$$\vec{u} = n_e \cdot \vec{v} \quad \dots (7.6)$$

pri čemu je:

- \vec{v} brzina tōka u sloju (Darcyeva brzina)
- \vec{u} srednja brzina u porama
- n_e efektivna poroznost

Pojedine veličine se mogu prikazati preko njihovim prosječnih vrijednosti i odstupanja.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \bar{\vec{u}} + \delta \vec{u} \\ c &= \bar{c} + \delta c \end{aligned} \quad \dots (7.7)$$

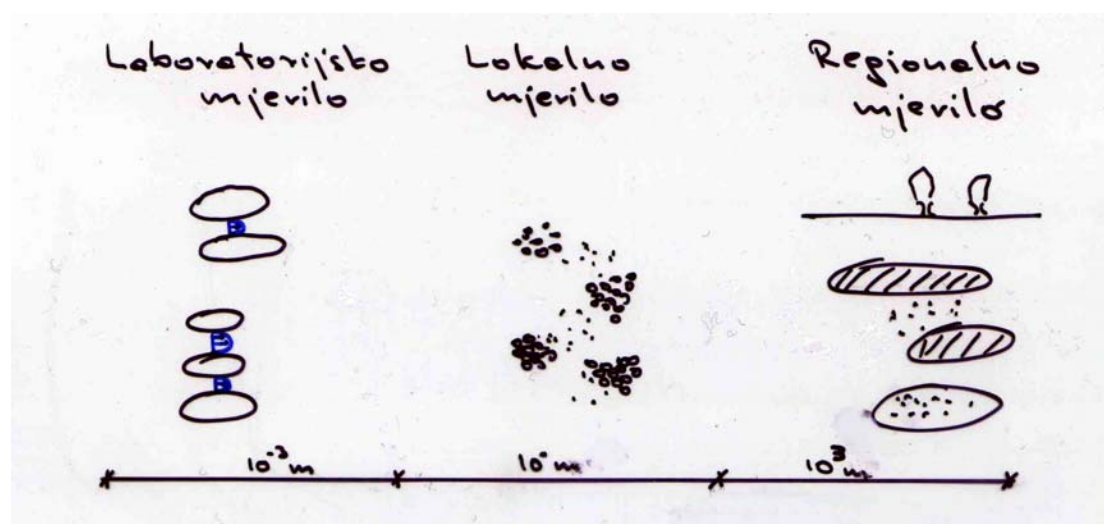
uvrštavanjem ovakvog zapisa u jednadžbu pronosa dobiva se jednadžba:

$$\bar{q} = n_e (\bar{u}\bar{c} - D_m \bar{\nabla}\bar{c} + \delta\bar{u}\delta\bar{c}) \quad \dots (7.8)$$

Svi ostali članovi isčezavaju. Prvi član na desnoj strani predstavlja pronos tvari osnovnim tîkom i naziva se konvekcija. Drugi član predstavlja pronos tvari uzrokovan difuzijom dok treći član predstavlja pronos tvari uzrokovan disperzijom. Posljednji član predstavlja pronos mase koji nastaje uslijed fluktuacije brzine oko srednje vrijednosti. Razlike u brzinama u odnosu na srednju brzinu ovise o veličini prostora koji se promatra.

Na razini pora postoje razlike u brzini između osi strujne cijevi i djela strujne cijevi uz česticu, uslijed različite veličine pojedinih pora te uslijed različitih puteva kojima čestice mogu putovati.

Povećavanjem prostora koji se promatra razlike u brzinama nastaju zbog nehomogenosti vodonosnog sloja, tj. zbog različitog sastava vodonosnog sloja. Daljnjim povećanjem prostora u kojem se odvija strujanje tj. kod regionalnih modela, se javljaju proslojci različitog geološkog sastava a karakteristike volumena u kojem se osrednjava strujanje se može u verikalnom smjeru bitno razlikovat na pojedinim djelovima vodonosnika.



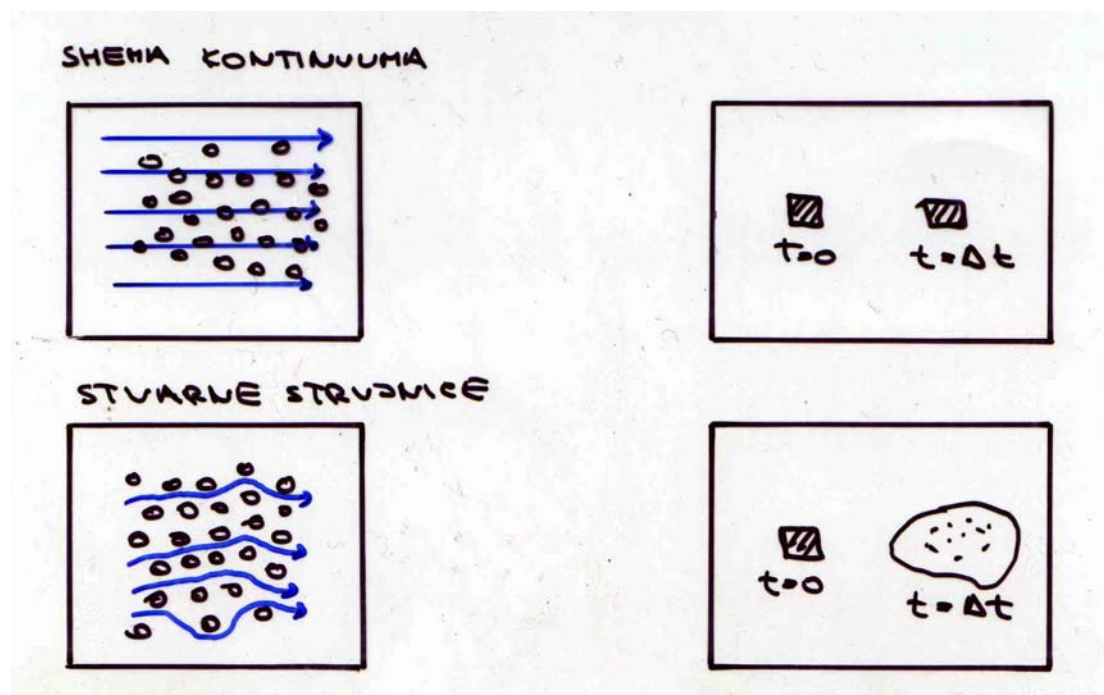
Slika 7.3 Uzroci neravnomjernosti polja brzina

Po analogiji sa opisivanjem difuzije se i disperzivnost može opisati Fick-ovim zakonom tj. vrijedi relacija:

$$\delta\bar{u}\delta\bar{c} = -D\bar{\nabla}\bar{c} \quad \dots (7.9)$$

pri čemu je D tenzor disperzije.

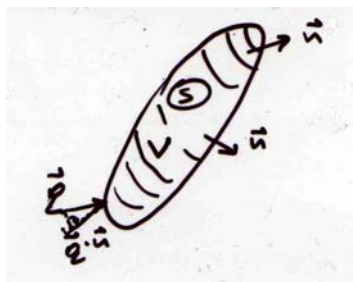
Utjecaj zrna na promjenu putanje pojedine čestice odnosno razlika između konvektivnog pronosa usvojenog po shemi kontinuuma i stvarnog pronosa idealnog trasera je prikazan na slici 7.4.



Slika 7.4 Kretanje čestica kroz poroznu sredinu

7.1.4 Jednadžba pronosa

Jednadžba pronosa se dobiva na osnovu jednadžbe kontinuiteta za promatrani elementarni volumen. Promatra se elementarni volumen V omeđen plohom S i sa unutarnjim izvorom ili ponorom (slika 7.5). Jednadžba kontinuiteta u jedinici vremena unutar promatranog volumena je opisana jednadžbom:



7.4 Elementarni volumen

Slika 7.5 Elementarni volumen

$$-\int_s \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_V \sigma dV = \int_V \frac{\partial(c n_e)}{\partial t} dV \quad \dots (7.10)$$

pri čemu je:

- \vec{n} vektor normale na plohu S (vanjska normala)
- σ jedinična produkcija zagađivala (nastajanje zagađivala u volumen se smatra pozitivnim)

Na osnovu Gaussovog teorema se površinski integral može pretvoriti u volumni:

$$\int_s \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad \dots (7.11)$$

Uvrštavanjem ove jednadžbe u jednadžbu kontinuiteta (jed. 7.10) (i uz uvjet da je suma članova u volumnim integralima jednaka nuli) dobiva se parcijalna diferencijalna jednadžba pronosa zagađivala:

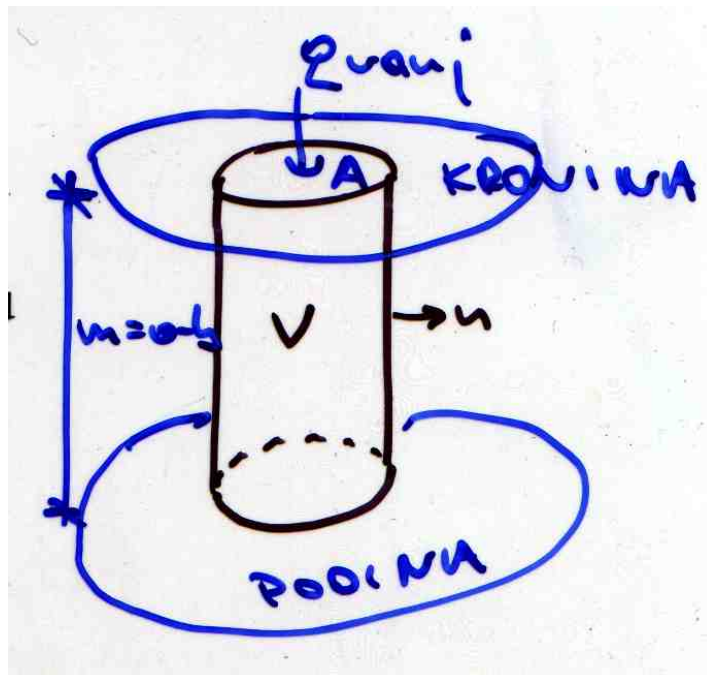
$$\frac{\partial(cn_e)}{\partial t} + \vec{\nabla}\bar{q} - \sigma = \frac{\partial(cn_e)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(n_e\bar{u}c) - \vec{\nabla}\cdot(n_e(D_m + D)\vec{\nabla}\bar{c}) - \sigma = 0 \quad \dots (7.12)$$

U nastavku će se promatrati primjena ove jednadžbe na dvodimenzionalno ravninsko strujanje. Usvojit će se da je raspored koncentracije po vertikali konstantan. Ovakav pristup je primjenjiv do određenog stupnja nehomogenosti u vertikalnom smjeru.

Ako se usvoji da vrijedi Fickov zakon koji se može pisati u obliku

$$\bar{q} = n_e\bar{u}\bar{c} - n_e(D_m + D)\vec{\nabla}\bar{c} \quad \dots (7.13)$$

Koeficijent molekularne difuzije D_m je u većini praktičnih problema zanemariv. Tensor disperzije D se sastoji od koeficijenata disperzije za karakteristične smjerove.



Slika 7.6 Kontrolni volumen za dvodimenzionalni model

U slučaju da u vodonosnom sloju postoje izvori i ponori zagađivala i njih treba uzeti u obzir. Infiltracija zagađivala (ili abstrakcija zagađene vode) se može opisati jednadžbom:

$$q_{vanj} = -q c_{in} \quad \dots(7.14)$$

pri čemu je

q količina vode koja se infiltrira u vertikalnom smjeru
 c_{in} koncentracija zagađivala u vodi koja se infiltrira

Jednadžba pronosa za dvodimensionalno strujanje u horizontalnoj ravnini se izvodi na osnovu zakona održanja u kontrolnom volumenu uz usvojenu pretpostavku da je koncentracija po vertikali konstantna. Horizontalni i vertikalni protoci kroz oplošje promatranog volumena moraju se izjednačiti sa količinama koje izvire i poniru i sa uskladištenim količinama. Može se usvojiti da je debljina vodonosnog sloja konstantna i da iznosi m pa jednadžba poprima oblik:

$$-\int_S \bar{q} \cdot \bar{n} dS - \int_A q_{vanj} dA + \int_A m \sigma dA = \int_A \frac{\partial(c n_e m)}{\partial t} dA \quad \dots(7.15)$$

pri čemu vektor \bar{n} nema komponentu u z smjeru. Plošni integrali se mogu pretvoriti u volumne integrale korištenjem Gaussovog teorema pa slijedi:

$$\int_S \bar{n} \cdot \bar{q} dS = \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{q} dV = \int_A \bar{\nabla} \cdot (m\bar{q}) dA \quad \dots(7.16)$$

Sređivanjem se dobiva Bear-ova jednadžba:

$$\frac{\partial(c n_e m)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (n_e m \bar{u} c) - \bar{\nabla} \cdot (n_e m (D_m + D) \bar{\nabla} c) - \sigma m - q c_{in} = 0 \quad \dots(7.17)$$

Uz usvajanje $m = h - b$ gornja jednadžba vrijedi i za vodonosne slojeve sa slobodnim vodnim licem.

U slučaju da se vektor brzine podudara sa jednom od koordinatnih osi, tenzor disperzije ima diagonalni oblik:

$$D = \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_T \end{pmatrix}$$

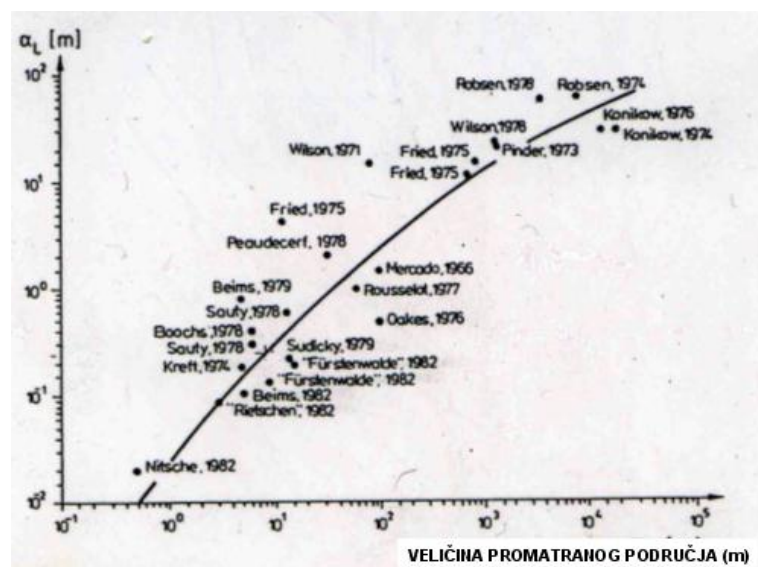
Koeficijenti disperzije mogu biti pisani kao produkti apsolutne vrijednosti brzine i i disperzivnosti koja predstavlja mjerilo duljina.

$$\begin{array}{ll} \text{Koeficijent longitudinalne disperzije} & D_L = \alpha_L u \\ \text{Koeficijent transverzalne disperzije} & D_T = \alpha_T u \end{array}$$

Vrijednost koeficijenta disperzivnosti α ovisi o veličini prostora u kojem se odvija strujanje. U laboratorijskim uvjetima je disperzivnost uzrokovana strujanjem između pojedinih zrna, a njena veličina ovisi o poroznosti, promjeru i obliku zrna, te vrijednost koeficijenta disperzivnosti varira od 0,01 do 10 cm.

Koeficijenti longitudinalne disperzivnosti određeni eksperimentima u prirodi su znatno veći od spomenutih vrijednosti. Razlog tome leži u nehomogenosti vodonosnog sloja. Još veći koeficijenti disperzivnosti su izmjereni kod modeliranja regionalnog pronosa zagađivala. Izmjerene vrijednosti koeficijenta longitudinalne

disperzivnosti u testovima traserom u regionalnim razmjerima se kreću od 0.1 m do 500 m.



Slika 7.7 Ovisnost koeficijenta disperzivnosti o veličini prostora u kojem se odvija pronos

Koeficijent transverzalne disperzivnosti je obično za (jedan) red veličine manji od longitudinalnog ($\alpha_T / \alpha_L = 0,1$).

U vodi, pri temperaturi 10°C , je koeficijent molekularne difuzije reda veličine $D_m = 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s}$ (ovisi i o zagađivalu) što je znatno manje od koeficijenta disperzije pa se difuzija u većini slučajeva u kojima postoji tok vode zanemaruje. Kod slučajeva u kojima voda miruje treba difuziju svakako uzeti u obzir.

Pecletov broj

Odnos između pronosa uzrokovanog konvekcijom i disperzijom je definiran Pecletovim brojem:

$$Pe = \frac{L u}{D_L} \quad \dots(7.18)$$

pri čemu je L tipična duljina u kojoj se odvija pronos. Veliki Pecletov broj znači da je dominantna konvekcija. Za Pecletove brojeve manje od 1 dominira disperzija (difuzija).

Dosad je opisivan pronos konzervativne tvari (npr. NaCl) tj. tvari čija masa se ne mijenja u vremenu. U prirodi često dolazi do reakcija između otopine i poroznog medija (npr. adsorpcija, radioaktivno raspadanje,...) te do procesa retardacije.

Reakcije se mogu uvrstiti u Bear-ovu jednadžbu uz usvajanje pretpostavke da je nestajanje tvari iz otopine proporcionalno sa koncentracijom:

$$\frac{d(cn_e)}{dt} = -\lambda c n_e = \sigma \quad \dots(7.19)$$

pri čemu je sa λ označena konstanta nestajanja (raspadanja). U slučaju da se tvar adsorbira (ili da se desorbira) na zrnima poroznog medija, u jednadžbi održanja mase treba osim količine otopljene koncentracije voditi računa i o količini adsorbirane tvari. Pri tome se koncentracija otopine obično mjeri kao masa zagađivala u jedinici volumena vode, a adsorbirana koncentracija se mjeri kao masa zagađivala na jedinicu mase poroznog materijala.

Dosad smo usvajali da su poroznost i efektivna poroznost identične po iznosu i da nema zagađivala koje se nalazi u dijelovima pora u kojima nema strujanja te nije dostupan konventivnom pronosu. U praksi razlika između geomehaničke (n) i efektivne poroznosti (n_e) može biti znatna. Zadržavanje zagađivala u porama u kojima nema protoka se može tretirati isto kao i procesi adsorpcije. Valja napomenuti da u poroznom mediju postoje i vrlo uske pore u kojima je brzina strujanja vrlo malena. Da bi se opisao proces retardacije uvodi se *koeficijent retardacije* R . Koeficijent retardacije je mjera kašnjenja neke tvari u odnosu na konvektivni tok podzemne vode.

Brzina strujanja u porama koju smo dosad usvajali da ima vrijednost u sa usvajanjem procesa retardacije poprima vrijednost u/R .

Uvrštavanjem retardacije i adsorpcije u Bearovu jednadžbu, jednadžba postaje složena pa se obično usvajaju pojednostavljenja. Najčešće se usvaja da je:

- strujanje stacionarno i jednodimenzionalno
- vodonosni sloj homogen
- konstantna vrijednosti retardacije, reakcije i disperzivnosti.

Uobičajeno se disperzija u dvodimenzionalnom strujanju u kojem se x -os podudara sa smjerom konstantne brzine opisuje jednadžbom:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D_L}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_T}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \lambda c \quad \dots(7.20)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} D_L &= \alpha_L u \\ D_T &= \alpha_T u \end{aligned}$$

Jednadžba pronosa je jednadžba drugog reda koja zahtijeva poznavanje početnih i rubnih uvjeta. Početni uvjeti su definirani distribucijom koncentracije $c_0(x,y,t_0)$ u početnom trenutku t_0 .

Kao i u jednadžbi toka postoje tri tipa rubnih uvjeta. *Dirichletov rubni uvjet* opisuje raspored koncentracije na rubu modeliranog područja.

Neumanov rubni uvjet opisuje gradijent koncentracije okomito na rub modeliranog područja, što zapravo znači da opisuje protok kroz granicu.

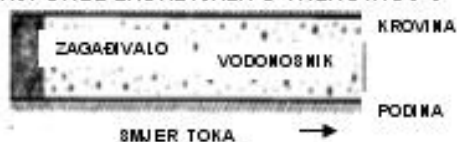
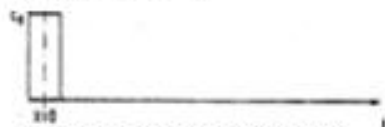
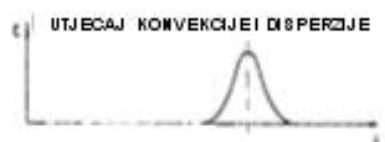
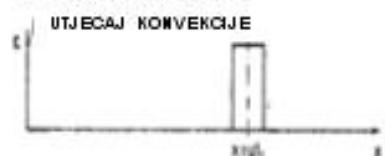
Cauchy-ev rubni uvijet definira ukupni protok kroz granicu tj. zbroj konvektivnog i disperzivnog protoka. Ukupni protok je linearna kombinacija koncentracije na rubu (c) i derivacije koncentracije na rubu $\partial c/\partial n$ i može se izraziti kao:

$$q_{ext} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{R} c - \bar{n} \cdot \frac{D}{R} \bar{\nabla} c \quad \dots(7.21)$$

U nastavku će se navesti primjer opisivanja Neumanovog i Dirichletovog rubnog uvjeta.

Na slici 7.8 je prikazano djelovanje konvekcije, difuzije i disperzije, degradacije (raspadanja) i retardacije na primjeru jednodimenzionalnog strujanja.

U početnom trenutku $t = 0$ je usvojena homogena distribucija zagađivala u području ishodišta ($x = 0$). Konvekcija uzrokuje pomak zagađene zone na udaljenosti $x = u t$. Difuzija i disperzija uzrokuju širenje zagađivala. Proces retardacije usporava napredovanje fronta zagađivala tako da je oblik fronta zagađivala ("zvono") istog oblika ali na drugom položaju. Reakcije imaju za posljedicu smanjenje koncentracije tj. dolazi do splošnjavanje krivulje kojom je definiran profil koncentracije.

RASPORED ZAGABIVALA U TRENUTKU $t=0$ KONCENTRACIJA C RASPORED KONCENTRACIJA ZAGABIVALA U $t_1 > 0$ 

Slika 7.8 Utjecaj konvekcije, disperzije, retardacije i razgradnje

7.1.5 Metode rješavanja jednadžbe pronosa

Jednadžba pronosa se u općem slučaju ne može analitički riješiti. Iz tog razloga se pristupa približnim rješenjima;

Koriste se

- analitičke jednadžbe
- rješenja bez disperzije
- metoda konačnih diferencija
- metoda konačnih elemenata
- metoda karakteristika
- metoda slučajnog pomaka (eng: *random walk*)

7.1.5.1 Analitičke jednadžbe

Za neke vrlo pojednostavljene uvijete pronosa je moguće naći rješenje jednadžbe pronosa analitičkim putem. Ta rješenja su od velike pomoći kod procjene širenja oblaka zagađivala. Zahtijevana pojednostavljenja se odnose na homogenost vodonosnog sloja, jednodimenzionalnost i stacionarnost strujanja, konstantnosti faktora retardacije, reakcije i disperzivnosti. Pretpostavlja se također da ulaz zagađivala ne mijenja homogeno polje brzina a da je molekularna difuzija zanemarivo mala u odnosu na disperziju.

U nastavku će biti prikazano nekoliko osnovnih jednadžbi bez izvoda a izvodi i detalji se mogu pronaći u literaturi (Bear, Kinzelbach,..)

Jednodimenzionalni pronos u slučaju trenutnog upuštanja

Za jednodimenzionalno strujanje se jednadžba pronosa može izraziti kao:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D_L}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \lambda c \quad \dots(7.22)$$

pri čemu je $D_L = \alpha_L u$ za $u > 0$

Kod izvoda analitičke jedandžbe se usvaja da je vodonosni sloj konstantne debljine m da se proteže u beskonačnost u pozitivnom i negativnom smjeru osi x . Pretpostavit će se da je u trenutku $t = 0$ na lokaciji $x = 0$ u sloj širine w i debljine m ubačena količina zagađivala ΔM . Ovaj tip početnog uvijeta se može opisati Dirac-ovom funkcijom.

$$c_\delta(x,0) = \frac{\Delta M}{n_e m w} \delta(x) \quad \dots(7.23)$$

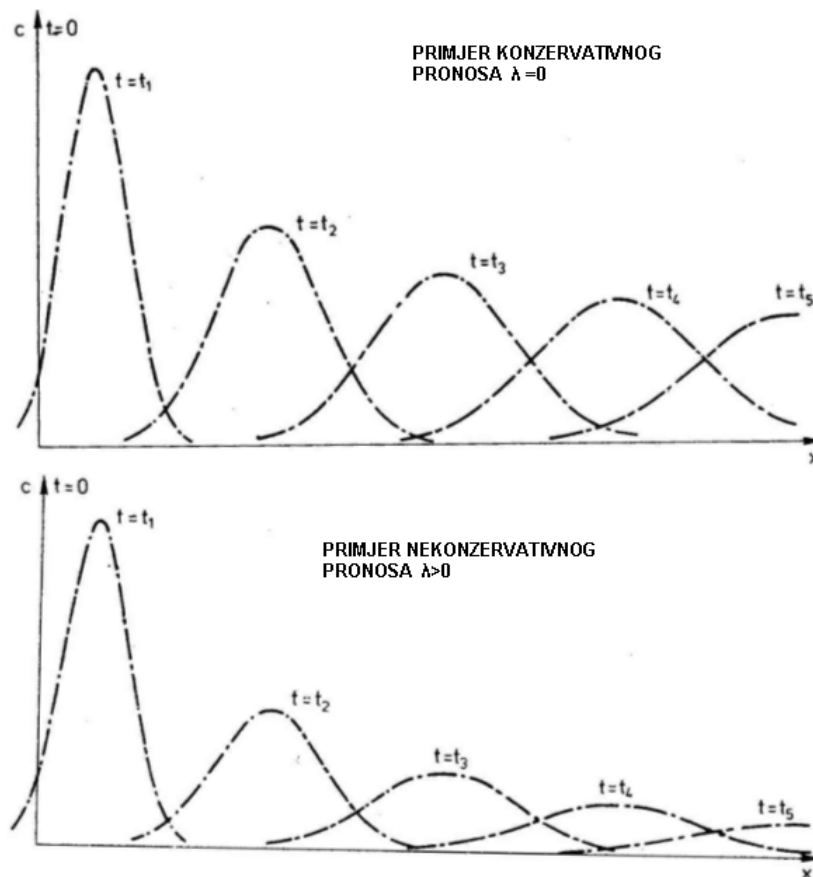
Da rubni uvjeti nebi utjecali na rješenje mora biti zadovoljen uvijet:

$$c(\pm\infty, t) = 0 \quad \dots(7.24)$$

Rješenje jednadžbe pronosa uz usvajanje početnih (7.23) i rubnih (7.24) uvijeta je poznata Gauss-ova funkcija:

$$c_\delta(x,t) = \frac{\Delta M}{2w m n_e R \sqrt{\frac{\pi \alpha_L u t}{R}}} e^{-\frac{(x-ut/R)^2}{4\alpha_L u t / R}} e^{-\lambda t} \quad \dots(7.25)$$

Ova funkcija je zvonolika sa maksimumom u $x = ut/R$ i sa širinom $\sqrt{\frac{2\alpha_L u t}{R}}$ koja se kreće brzinom u/R u pozitivnom x -smjeru. Zbog širenja “zvona” tokom vremena i zbog reakcija amplituda se tokom vremena smanjuje.



Slika 7.9 Oblak trasera za trenutno upuštanje

Jednodimenzionalni pronos u slučaju kontinuiranog upuštanja

U slučaju kontinuiranog upuštanja zagađivala kao što je npr. infiltracija iz kanala koji je okomit na smjer toka podzemne vode, front poremećaja kontinuirano napreduje od mjesta upuštanja. Uz pretpostavku da je izvor zagađenja u $x = 0$, da je masa zagađivala koja se upušta konstantna $M(t) = dm/dt = \text{const.}$ i da je započela u trenutku $t = 0$ te da nema retardacije ($R = 1$) i raspadanja $\lambda = 0$ tj. pod idealnim uvjetima jednačba širenja poprima oblik:

$$c(x,t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{\alpha_1 ut}} \right) \quad \dots (7.26)$$

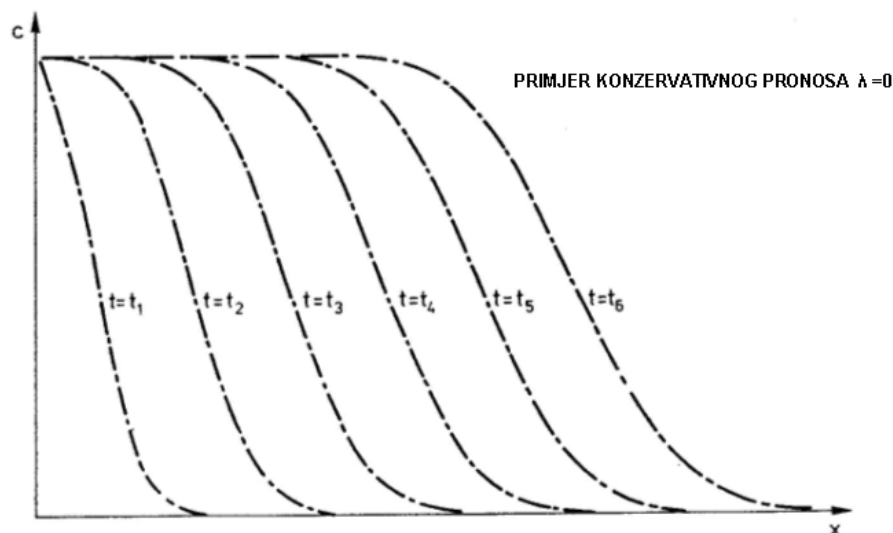
pri čemu je:

$$c_0 = \frac{M}{wmn_e u}$$

$$\operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

erf funkcija greške
erfc komplementarna funkcija greške
 ξ mjesto upuštanja zagađivala



Slika 7.10 Raspor koncentracije za kontinuirano upuštanje

Dvodimenzionalni pronos u slučaju trenutnog upuštanja

U slučaju dvodimenzionalnog strujanja i pod uvjetom da je x -os paralelna sa smjerom toka jednadžba pronosa pod idealiziranim uvjetima poprima oblik:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D_L}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_T}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \lambda c \quad \dots (7.27)$$

Za vodonosnik se pretpostavlja da je beskonačan u pozitivnom i negativnom smjeru x i y osi. Ponovno će se promatrati trenutno upuštanje mase ΔM idealnog trasera u trenutku $t = 0$ i u koordinatama $x = 0$ i $y = 0$. Početni uvjeti i odgovarajući rubni uvjeti se mogu definirati kao:

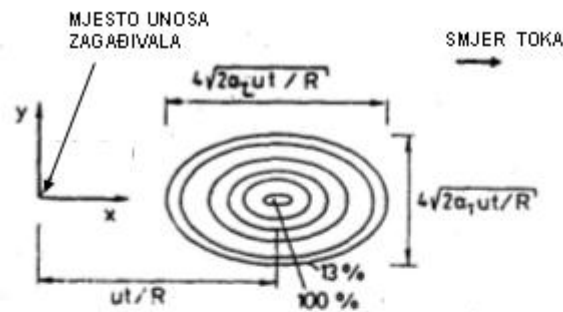
$$c_\delta(x, y, 0) = \frac{\Delta M}{n_e m R} \delta(x) \delta(y) \quad \dots (7.28)$$

$$c_\delta(\pm \infty, \pm \infty, t) = 0$$

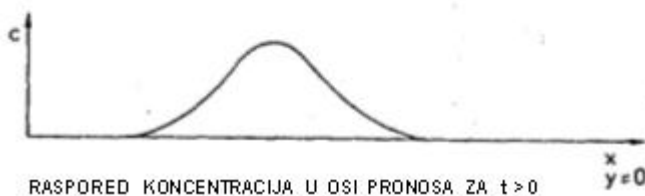
Rješenje jednadžbe pronosa pod spomenutim uvjetima ima oblik (Csanady, 1973):

$$c_\delta(x, y, t) = \frac{\Delta M}{4\pi n_e m u \sqrt{\alpha_L \alpha_T t}} e^{-\frac{(x-ut/R)^2}{4\alpha_L t/R} - \frac{y^2}{4\alpha_T t/R}} \cdot e^{-\lambda t} \quad \dots (7.29)$$

Ova jednadžba se često koristi za interpretaciju mjerenja disperzivnosti pomoću trasera.



LINJE JEDNAKIH KONCENTRACIJA ZA $t > 0$



RASPRED KONCENTRACIJA U OSI PRONOSA ZA $t > 0$

Slika 7.11 Raspored koncentracija za dvodimenzionalni pronos nakon trenutnog upuštanja

Dvodimenzionalni pronos u slučaju kontinuiranog upuštanja

Kao i u slučaju kontinuiranog upuštanja zagađivala u jednodimenzionalnom strujanju rješenje se dobiva integracijom od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = \tau$ u kojem se traži raspored koncentracije:

$$c(x, y, t) = \int_0^t \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{c\delta(x, y, t - \tau)}{\Delta\tau} d\tau \quad \dots (7.30)$$

Rješavanje ove jednačbe dovodi do Hantush-ove funkcije koja može biti aproksimirana analitičkim izrazom pa rješenje poprima oblik (Kinzelbach)

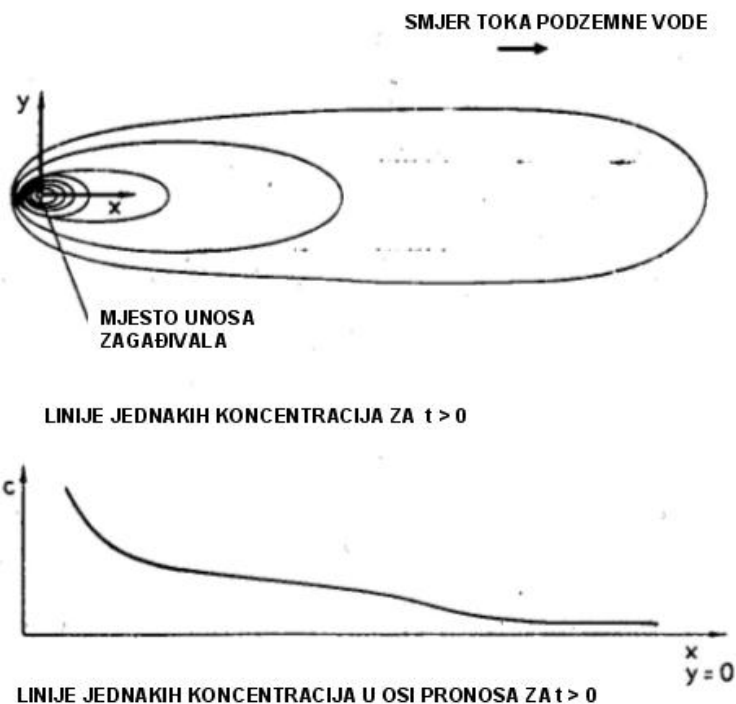
$$c(x, y, t) = \frac{\bar{c}_0}{4\sqrt{\pi\alpha_T}} e^{\frac{x-r\gamma}{2\alpha_L}} \frac{1}{\sqrt{r\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r - ut\gamma/R}{2\sqrt{\alpha_L ut/R}}\right) \quad \dots (7.31)$$

pri čemu je:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_T}\right)y^2$$

$$\gamma = \sqrt{1 + 4\alpha_L \lambda R / u}$$

$$\bar{c}_0 = \frac{M}{n_e mu}$$

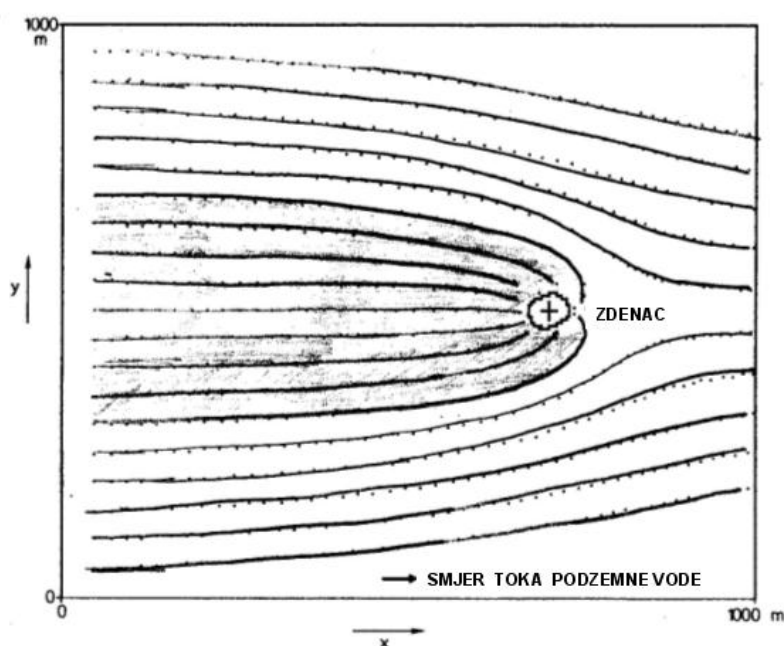


Slika 7.12 Dvodimenzionalni pronos za kontinuirano upuštanje

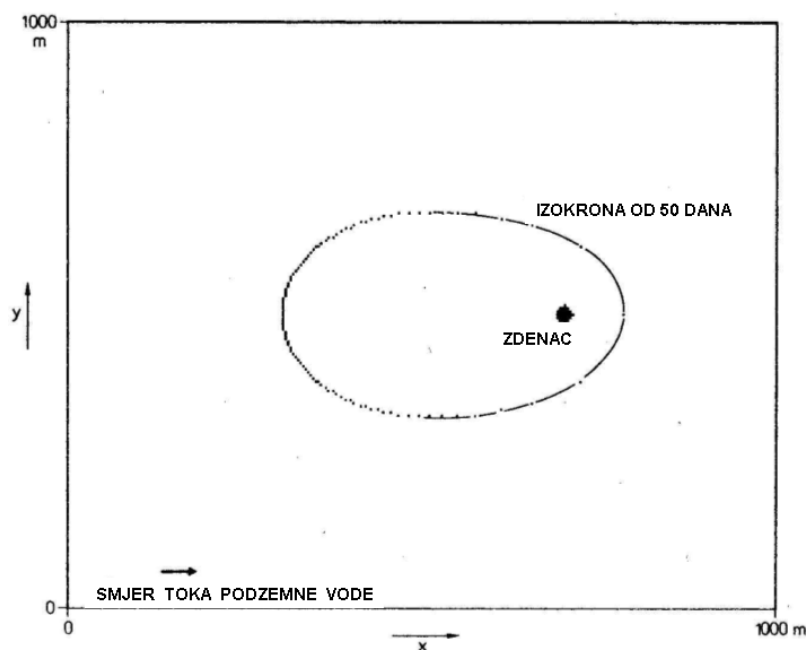
7.1.5.2 Rješenja koja ne uzimaju u obzir disperziju

Prilikom izrade analitičkih rješenja zanemarena je nehomogenost vodonosnog sloja. Daljnjim pojednostavljenjem se može zanemariti utjecaj disperzije. Proračuni zasnovani na toj pretpostavci mogu poslužiti za grubo određivanje smjera i brzine širenja zagađivala. Praktična primjena ovakvog pristupa je u određivanju zaštitnih zona i položaja zdenaca za sanaciju zagađenja.

Pristup se zasniva na iscrtavanju strujnica koje se mogu dobiti na više načina



Slika 7.13 Strujnice za zdenac u paralelnom toku



Slika 7.14 Primjer izokrone od 50 dana - za izradu zaštitnih zona

Pristup koji ne uzima u obzir disperziju se zbog svoje jednostavnosti često koristi i za modeliranje sanacije zagađenja. Jasno je da je najvažniji princip zaštite podzemnih voda u sprečavanju ulaska zagađivala u podzemnu vodu. U slučaju da ipak dođe do zagađenja, postavlja se pitanje koje su najefikasnije mjere za zaštititi zdenca pitke vode te po mogućnosti očistiti vodonosnik.

Sa hidrauličkog stanovišta za sanaciju zagađenja se najčešće koriste slijedeće mjere:

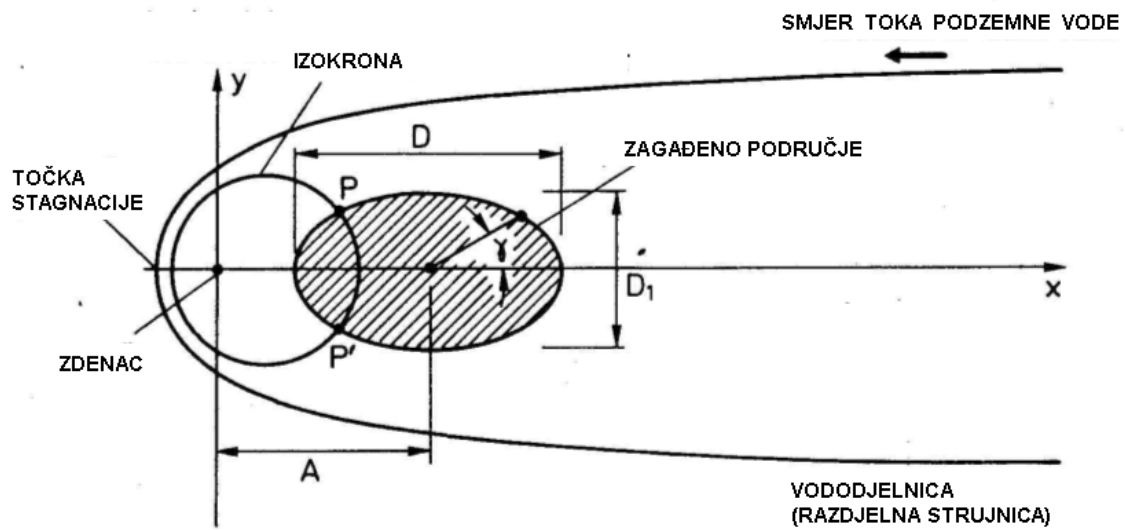
- mjere za zaštitu pojedinog dijela vodonosnika (npr. zaštita crpilišta) izmjenom oblika strujnica
- mjere za ograđivanje jako zagađenih dijelova vodonosnika – obično se koriste za zaštitu od razgradivih zagađivala
- mjere za uklanjanje zagađivala iz vodonosnika što se koristi uglavnom kod nerazgradivih zagađivala.

U okviru ovog tečaja se proučavaju samo hidraulički načini sanacije a oni se sastoje u izgradnji zdenca i/ili upojnih zdenaca. Cilj im je da se izmjeni prirodna strujna slika ili da se zagađivalo ukloni iz sloja.

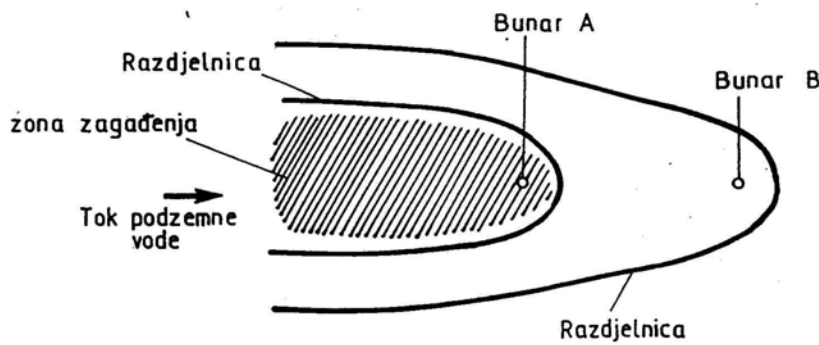
Koncept hidrauličke sanacije će se prikazati na najjednostavnijem primjeru koji pretpostavlja da se zagađena zona elipsoidnog oblika nalazi u paralelnom toku i da se sanira uz pomoć jednog (potpunog) zdenca. U općem slučaju istraživači u slučaju sanacije zagađenja mogu modelirajući varirati:

- broj zdenca
- izdašnost zdenca
- položaj zdenca
- položaj filtera u zdencima

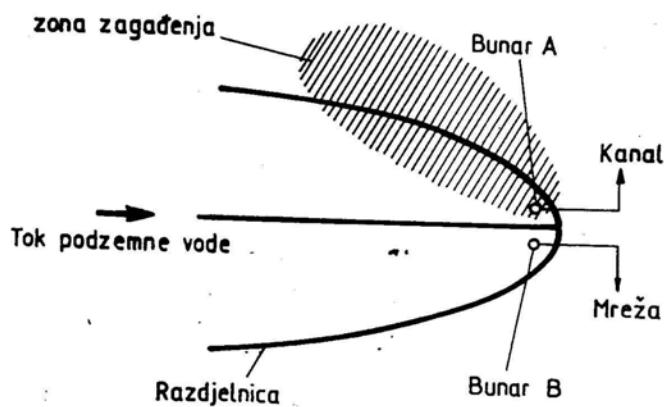
Jednadžbe kojima je opisano ovakvo strujanje su složene i nalaze se u literaturi.



Slika 7.15 Oblak zagađivala na putu prema zdencu



Slika 7.16 Sanacija crpilišta interventnim zdencom



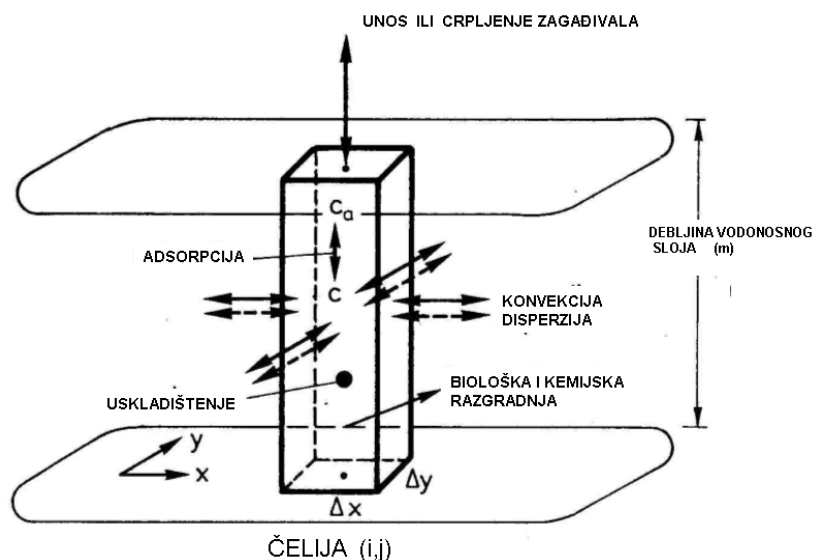
Slika 7.17 Sanacija crpilišta selektivnim crpljenjem

7.1.5.3 Numeričke metode

Metoda konačnih diferencija

Metoda konačnih diferencija se zasniva na diskretizaciji prostora i vremena. Postupak je sličan postupku modeliranja strujanja podzemnih voda. Zbog jednostavnosti se

obično usvaja da je mreža ekvidistantna a jednadžbe se postavljaju kao kod modeliranja toka podzemnih voda. Pristup formiranju jednadžbi može biti ili zamijenom derivacija konačnim diferencijama ili postavljanjem jednadžbe održanja mase zagađivala u jediničnom elementu. Zakon održanja mase zagađivala u svakoj ćeliji kaže da se u vremenskom intervalu $(t, t+\Delta t)$ razlika izlaza i ulaza uz usvajanje uskladištenja, advekcije, disperzije i reakcije jednaka nuli.



Slika 7.18 Skica bilansa tvari u promatranoj ćeliji

Prilikom modeliranja pronosa zagađivala je potrebno, kao što je već i prije objašnjeno, zadati početne i rubne uvijete. Problem u ovim modelima je na granicama kroz koje prolazi zagađivalo uz proces disperzije (Neumann-ov rubni uvijet) a da pri tome gradient koncentracije nije poznat. Ovaj problem se može riješiti izbjegavanjem tako da se modelira strujanje u području koje je znatno veće od “oblaka zagađivala” pa ne postoji potreba za modeliranje protoka kroz granicu. Drugi način rješavanja ovog problema je da se zanemari disperzija prilikom protoka kroz granicu jer je konvektivna komponenta znatno veća od disperzije. Treći način je usvajanje disperzivnog protoka kroz granicu na osnovu poznatog protoka u ćeliji prije zadnje ćelije u diskretizacionoj shemi.

Prilikom modeliranja pronosa zagađivala valja voditi računa da budu zadovoljeni uvijeti stabilnosti proračuna (Courant-ov, Neuman-ov,...) kako nebi došlo do numeričke disperzije.

Metoda konačnih elemenata

Modeliranje pronosa zagađivala metodom konačnih elemenata se obično zasniva na Galerkinovom pristupu i analogno je opisu modela za strujanje podzemnih voda. Problemi sa rubnim uvijetima Neumanovog tipa za metodu konačnih diferencija su i ovdje prisutni a najčešće se izbjegavaju postavljanjem ruba poznate koncentracije dovoljno daleko od “oblaka” zagađivala.

Generalno, metodom konačnih elemenata je superiorna nad metodom konačnih diferencija iz više razloga:

- elementima se može znatno bolje opisati geometrija modeliranog prostora

- postavljanjem stranica konačnog elementa paralelno sa tokom u znatnom mjeri se smanjuje numerička disperzija
- pristup opisivanja polja tenzorima se znatno uklapa u metodu konačnih elemenata nego u metodu konačnih diferencija
- rubni uvjeti se lakše opisuju

Opisane prednosti su plaćene nešto većim programom i duljim vremenom rada računala. Ova metoda zahtijeva i više memorijalnog prostora.

Metoda karakteristika

Da bi se izbjegla pojava numeričke disperzije koja se javlja kod MKE i MKD razvijene su metoda karakteristika i metoda čestica. Za dominantno konvektivni transport parcijalna diferencijalna jednačba pronosa zagađivala je slična hiperboličkoj jednačbi konvektivnog pronosa

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} c = 0 \quad \dots (7.32)$$

za koju se može primjeniti metoda karakteristika (metoda strujnica). Osnovna ideja je da se promjena koncentracije

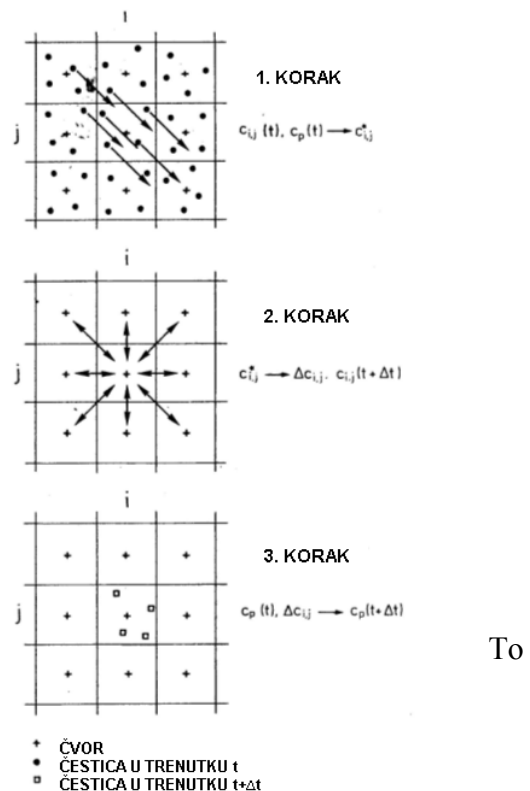
$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} c = \bar{\nabla} \cdot (d\bar{\nabla} c) + \frac{q}{n_e m} (c_{in} - c) - \lambda c + \frac{S_{int}}{n_e m} \quad \dots (7.33)$$

pri čemu je:

S_{int} površinski izvor zagađenja

prikaže kao promjena koncentracije u kontrolnom volumenu koji se kreće po strujnici (karakterističnoj liniji) $(x(t), y(t))$.

Konvektivni prenos je predstavljen pomicanjem trasera po karakterističnoj liniji. Svakoj čestici je pridružena početna koncentracija. Da bi se dobio raspored koncentracije po cijelom modeliranom prostoru čestice se na početku raspoređuju jednoliko. U nezagađenom dijelu vodonosnika koncentracija pridružena česticama je jednaka nuli. Promjena koncentracije čestice duž strujnice i tokom vremena se računa na osnovu srednje vrijednosti u čeliji diskretizacije mreže. zahtjeva izmjenu informacija o koncentracijama u čelijama diskretizacije sheme i svake pojedine čestice. Ovaj proračun se provodi u tri koraka.



Slika 7.19 Pomak čestica u metodi karakteristika

Prvi korak: čestice se pomiču nošene konvekcijom (umnožak brzine i proteklog vremena). U svakom čvoru se računaju čvorne vrijednosti kao prosječne vrijednosti koncentracija svih čestica koje su u čeliji.

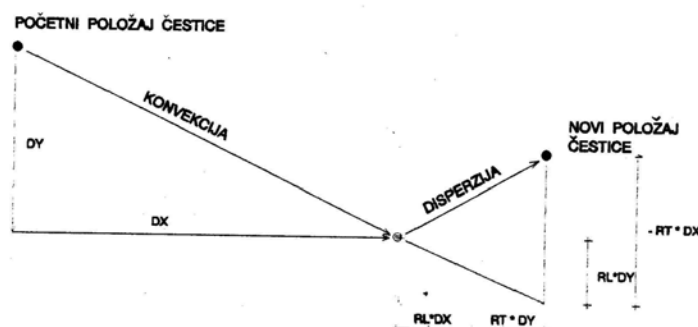
Drugi korak: računaju se promjene koncentracije u čeliji zbog pojave disperzije, ponora i reakcija.

Treći korak: novoizračunate koncentracije u čeliji se pridružuju čvorovima. To se radi tako da se svim čvorovima u čeliji pridruži vrijednost koncentracije u toj čeliji. Na taj način se gubi "oštrina" rezultata.

Točnost ove metode ovisi o broju čvorova u čeliji (preporuča se najmanje 4 do 9).

Metoda čestica

Metoda čestica se za modeliranje pronosa zagađivala koristi već dulje vrijeme. Kao i kod metode karakteristika zagađivalo se prikazuje nizom čestica. Modeliranje procesa disperzije se ipak bitno razlikuje. Dok metoda karakteristika koristi čestice (kontaminirane ili nekontaminirane) po cijelom modeliranom prostoru i svakoj je pridružena određena koncentracija, u metodi čestica se kreću samo čestice koje predstavljaju zagađivalo. Svaka čestica ima konstantnu masu a suma masa svih čestica je jednaka količini zagađivala koja je ušla u vodonosnik. Disperzija se modelira kao superpozicija konvektivnog pomaka (deterministički definiranog) i slučajnog pomaka koji ima statističke parametre iste kao i disperzni proces. Promatranjem pomaka niza čestica dobiva se slika o napredovanju zagađivala.



Slika 7.20 Pomak čestica kod modeliranja pronosa

Koncentracija se računa tako da se postavi mreža i da se izračuna broj čestica u pojedinoj čeliji.

Osnovni princip metode se može prikazati na najjednostavnijem – jednodimenzionalnom strujanju. Trenutno upuštanje mase ΔM idealnog traseru na lokaciji $x = 0$ uzrokuje raspored koncentracije opisan jednadžbom:

$$c(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi\alpha_L ut}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4\alpha_L ut}} \quad \dots (7.34)$$

pri čemu je $c_0 = \Delta M / (n_e m v)$ a brzina je u pozitivnom smjeru. U nekom trenutku t se raspored koncentracije može opisati normalnom distribucijom oko srednje vrijednosti $x = ut$ i sa standardnom derivacijom:

$$\sigma = \sqrt{2\alpha ut} \quad \dots (7.35)$$

Ova ista distribucija se može generirati i stohastički. Pretpostavimo postojanje N čestica zagađivala pri čemu je svaka od njih mase $\Delta M/N$ koje se u početnom trenutku $t = 0$ nalaze u ishodištu $x = 0$. Svaka čestica se pomiče u vremenskom intervalu Δt za udaljenost x na novu lokaciju.

$$x = ut + Z\sqrt{2\alpha_L ut} \quad \dots (7.36)$$

pri tome je:

Z variabla sa normalnom distribucijom, srednjom vrijednošću 0 i standardnom devijacijom 1

Ako se broj čestica u odabranom prostornom inkrimentu preračuna u koncentraciju tada se dobiva funkcija raspodjele koncentracije po prostoru u odabranom vremenskom inkrimentu. Rezultat je krivuljka sa srednjom vrijednosti u ut i standardnom devijacijom $\sqrt{2\alpha_L ut}$. Vidljivo da je za raspored frekvencije $f(x,t)$ dobiven pri $N \rightarrow \infty$ lako dakazati da odgovara funkciji distribucije koncentracije.

U slučaju da je porna brzina funkcija vremena i prostora slučajna putanja čestice P , $x_p(t)$ treba biti određena u diskretnim vremenskim koracima Δt .

Korištenjem Eulerove integracije se jednadžba pomaka čestice može izraziti kao

$$x_p(t + \Delta t) = x_p(t) + u(x_p(t), t)\Delta t + Z\sqrt{2\alpha_L |u(x_p(t), t)\Delta t|} \quad \dots (7.37)$$

Ova jednadžba je samo djelomično točna. Za točniju analizu treba pomak čestice tretirati Fokker-Planck-ovom jednadžbom (vidi npr. Kinzelbach) .

Pronos zagađivala u slučaju dvodimenzionalnog strujanja se može izraziti analogno jednadžbi za jednodimenzionalni pomak. U slučaju da je strujanje paralelno sa x -osi tada vrijede jednadžbe:

$$x_p(t + \Delta t) = x_p(t) + u_x(x_p(t), y_p(t), t)\Delta t + Z\sqrt{2\alpha_L |u(x_p(t), y_p(t), t)|} \Delta t \quad \dots (7.38)$$

$$y_p(t + \Delta t) = y_p(t) + u_y(x_p(t), y_p(t), t)\Delta t + Z'\sqrt{2\alpha_T |u(x_p(t), y_p(t), t)|} \Delta t \quad \dots (7.39)$$

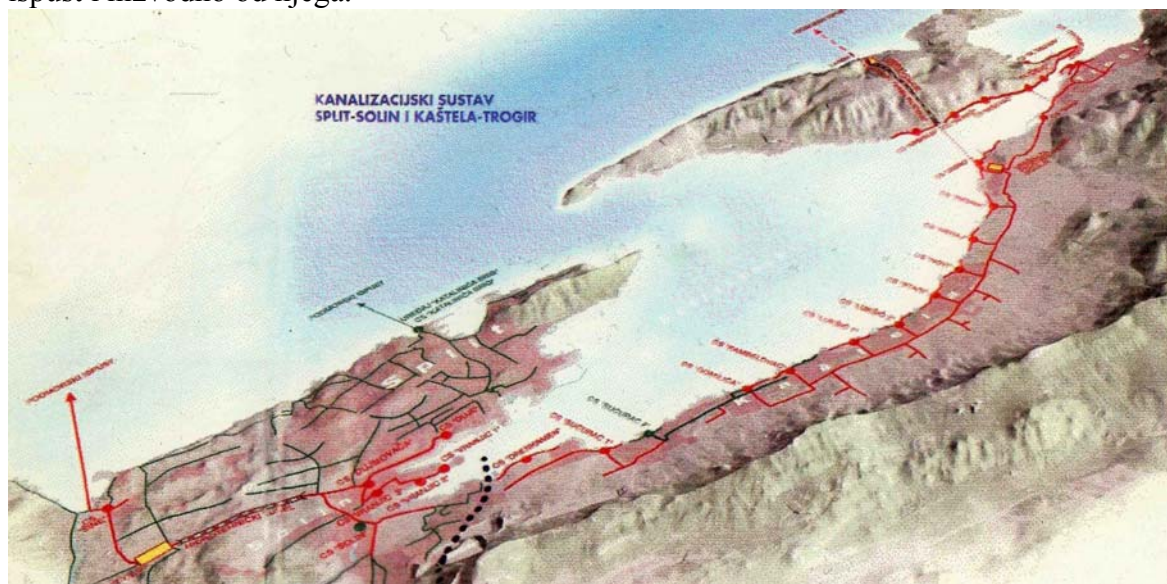
pri čemu je Z i Z' dvije vrijednosti normalno distribuirane varijable.

7.2 Podmorski ispusti

More je oduvijek bio jedan od krajnjih recipienata otpadnih voda. Efluent koji je vrlo razrijeđena mješavina organskog i drugog otpada, se prikuplja u kanalizacionom sustavu koji ga sprovodi do uređaja za pročišćavanje nakon čega se efluent ispušta u more.

Podmorski ispust se najčešće izvodi kao cjevovod položen na morsko dno na čijem kraju se ugrađuje difuzor kako bi se postiglo veliko početno razrijeđenje. Podmorski ispust se može izvesti i kao podmorski tunel sa odgovarajućim vertikalnim spojnim cijevima i difuzorima.

U slučajevima kad na modelu treba definirati polje koncentracija nizvodno od podmorskog ispusta, potrebno je ispravno uzeti u obzir i karakteristike ispusta i karakteristike recipienta (mora) te ispravno simulirati sile u pojedinim područjima uz ispust i nizvodno od njega.

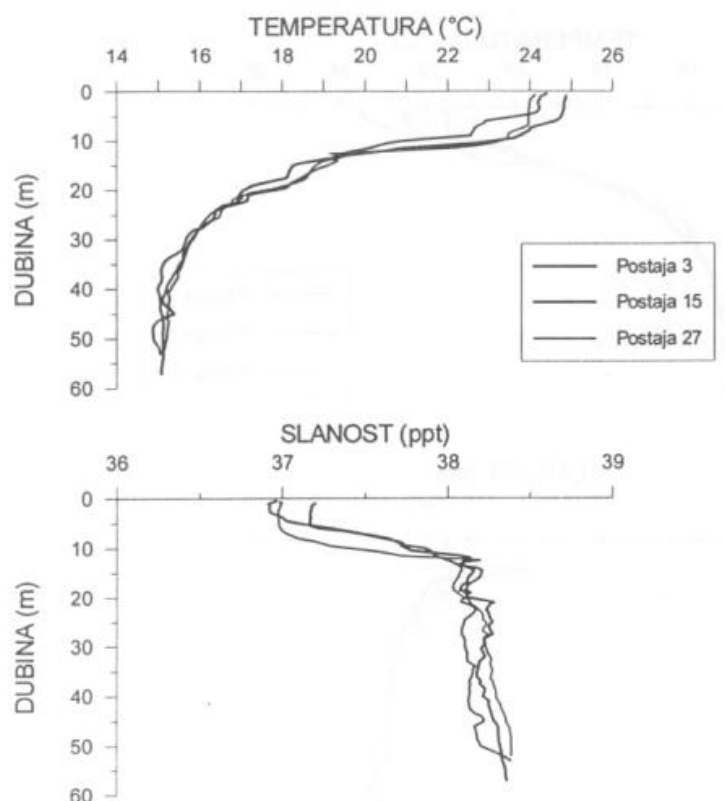


Sliku 7.21 Primjer Splitskog kanalizacionog sustava sa četiri podmorska ispusta (Duilovo nije ucrtano)

Efluent ima gustoću koja se ne razlikuje bitno od gustoće slatke vode pa se u morskoj vodi podiže prema vodnom licu i mješa sa okolnom morskom vodom i time postaje vrlo razrijeđena.

Prilikom modeliranja pronosa efluenta morskim strujama valja voditi računa o formiranju termokline u ljetnim mjesecima. Zbog razlika u temperaturi i slanosti (Slika 7.22) postoje i razlike u gustoći recipienta po dubini koje također bitno utiču na pronos efluenta.

U slučaju da je more stratificirano razrijeđeni efluent može uspostaviti neko ravnotežno stanje ispod razine mora. U takvom slučaju morske struje pronose efluent ispod površine koji se dalje uslijed turbulencije razređuje.



Slika 7.22 Promjena temperature i slanosti po dubini (ljetni period) u Splitskom akvatoriju

Pri hidrauličkoj analizi širenja efluenta mogu se razlikovati četiri zone.

Zona 1 možemo nazvati područje u kojoj se formira hidraulički mlaz. Sapnice na difuzoru uzrokuju istjecanje sa relativno velikim brzinama u odnosu na brzinu fluida u recipientu te se javljaju posmični naponi koji formiraju vrtloge (turbulentno strujanje) a time i intenzivno mješanje efluenta i recipienta. Opisano mješanje i relativno brzo razrijeđenje početne koncentracije. Zona hidrauličkog mlaza je područje neposredno iza sapnice koje se proteže do $10 D$ (pri čemu je sa D označen promjer sapnice). U ovom području su za širenje efluenta važni (dominantni) protok i geometrija prostora neposredno iza sapnice. Pri modeliranju strujanja u ovom području je važno da je $Re > Re_{KR}$ i da je zadovoljena Froudeova sličnost.

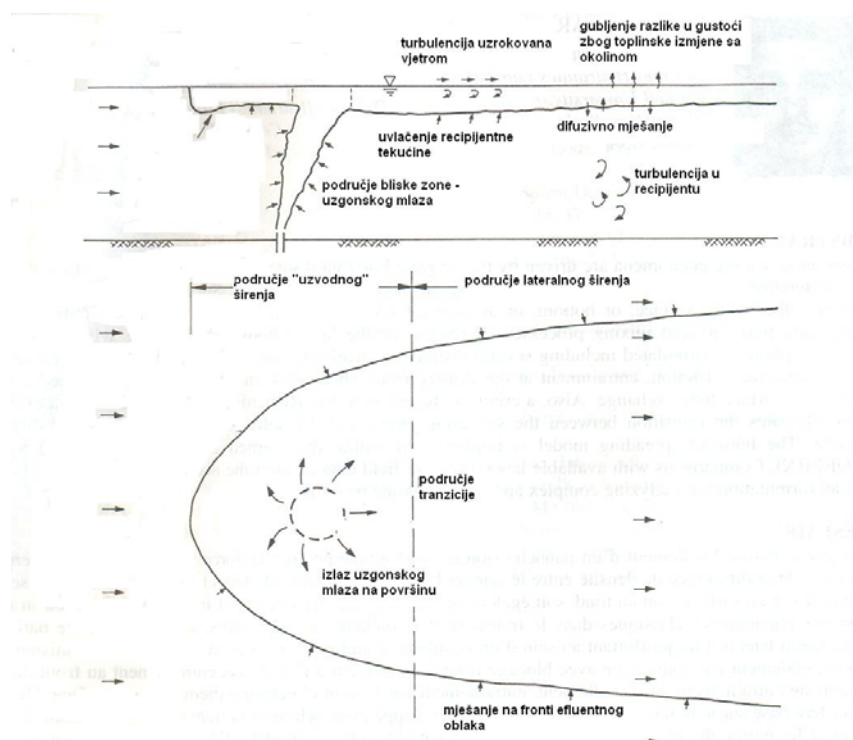
Zona 2 se može nazvati blisko polje koje se proteže od cca $10 D$ do $300 D$. U ovoj zoni su dominantne; a) inercijalne sile u mlazu i uzgonske sile koje se mogu javiti na kraju bliskog polja zbog razlike u gustoći efluenta i recipienta, b) dubina mora, c) brzine morskih struja i moguća prirodna stratificiranosti recipienta. Prilikom modeliranja pronosa u ovoj zoni mora osim Reynoldsovog broja kao u Zoni 1 biti zadovoljen i Froudeov broj koji uzima u obzir i razliku u gustoći (eng. Froude densimetric number)

Zona 3 se može tretirati kao daleko polje u kojem dominantnu ulogu u definiranju procesa miješanja ima hrapavost i konfiguracija dna te eventualno obalna linija. Parametri ispusta za ovaj slučaj definiraju samo početno stanje raspodjele trasera a pronos tvari je posljedica morskih struja. Modeliranje ovog procesa se provodi pod istim uvjetima koji vrijede i za otvoreno korito, pri čemu na modelu treba biti zadovoljen Froudeov zakon sličnosti a Reynoldsov broj treba biti iznad kritične vrijednosti ($Re > Re_{KR}$) te trebaju biti ispravno modelirani gubici uslijed hrapavosti.

Zona 4 je područje u kojem se odvija regionalno širenje zagađivala a na pronos dominantno utječu difuzija i disperzija zbog morskih struja, vjetra i drugog. Nasuprot intenzivnom mješanju u mlazovima zbog velike razlike u brzini fluida u mlazu i u recipientu, mješanje na većoj udaljenosti od sapnice se može nazvati pasivno. Ovo mješanje je posljedica turbulencije i formiranja sekundarnih vrtloga te trodimenzionalnog polja brzina.

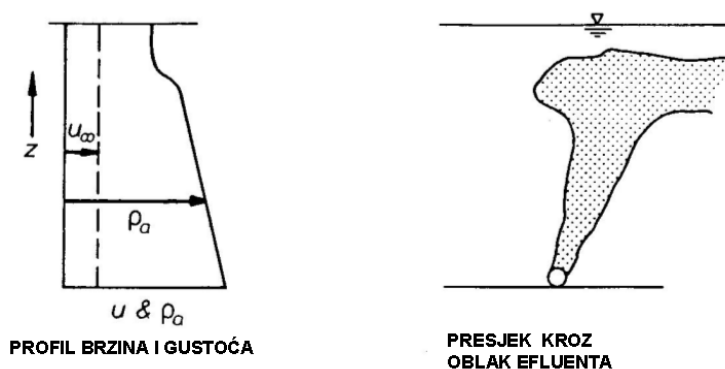
Kritična vrijednost Reynoldsovog broja za otvorena korita i akumulacije se može usvojiti sa $Re_{kr} \approx 3000$.

U pojedinim slučajevima treba uzeti u obzir i djelovanje vjetra te biološke i fizikalne procese koji uzrokuju smanjenje mase, odnosno koncentracije tvari.



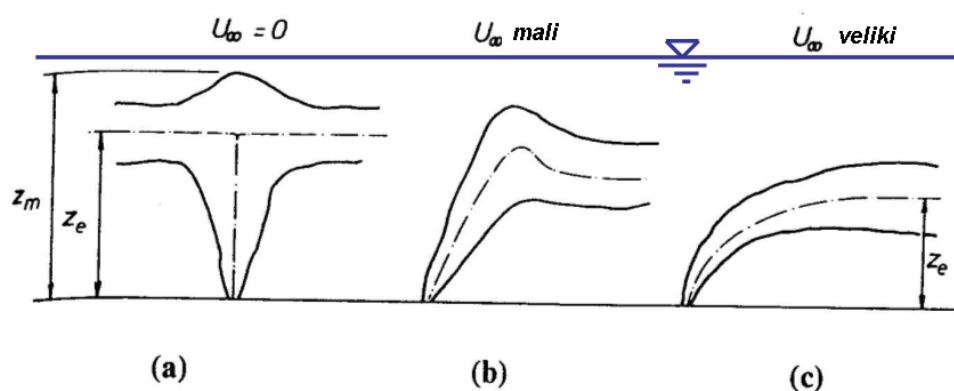
Slika 7.23 Karakteristične faze širenja efluenta te fizikalni procesi koji utječu na širenje (Lončar)

Na slici 7.23 je prikazano širenje oblaka efluenta čija je gustoća manja od gustoće recipienta. U prikazanom procesu pronosa utjeću osim inercijalnih sila i sila koje se javljaju usljed razlika u gustoći i miješanje usljed razlike brzina između oblaka efluenta i recipijentnih struja. Na nekoj nizvodnoj udaljenosti spomenuti utjecaji postaju zanemarivo mali u odnosu na turbulencije u recipijentu pa se govori o dominaciji pasivnog difuzivnog procesa.



Slika 7.24 Primjer stratifikacije

Prilikom pronosa oblaka efluenta mogu biti dominantne uzgonske i/ili inercijalne sile. U slučaju da su dominantne inercijalne sile pronos će se promatrat kao širenje *mlaza* a u slučaju da su dominantne uzgonske sile promatrat će se *oblak*. *Perjanicom* će se nazivati pronos u kojem se javljaju i uzgon i inercijalne sile.



Slika 7.25 Oblak efluenta za mlaz pod utjecajem uzgona u stratificiranom fluidu (Wood)

Na gornjoj slici je prikazan primjer oblaka koji postiže ravnotežni položaj u struji fluida koja ima izražen linearni gradijent gustoće. U takovim mjerenjima je cilj odrediti raspored gustoće i koncentracije po vertikali ali je najinteresantnije sagledati maksimalnu visinu (z_m) do koji se podiže oblak kao i visinu (dubinu) pri kojoj se uspostavlja ravnotežno stanje (z_e).

Pronos se može modelirati fizikalnim i matematičkim modelima. Rezultati dobiveni na fizikalnim modelima se obično dobro podudaraju sa izračunatim vrijednostima (Wright 1977)

7.2.1 Oblak efluenta u stacionarnoj uniformnoj sredini

Podmorski ispusti su najčešće cjevovodi duljine 1-3 km na čijem kraju je *difuzor*. Difuzor je dionica cjevovoda u koju su ugrađene sapnice kroz koje istječe efluent.

Početno razrijeđenje se postiže ulaskom morske vode u mlaz efluenta koji istječe iz sapnice. Na izlazu iz difuzora u recipient je razrijeđenje 100 puta. Daljnje razrijeđenje se postiže kad se oblak (perjanica) podiže od ispusta do ravnotežnog položaja ili do slobodnog vodnog lica.

U ovom prikazu će se biti prikazana jednadžba promjene karakteristika mlaza i oblaka. Na osnovu ovih dviju jednadžbi se može izvesti jednadžba za širenje uzgorskog mlaza koji je pod nekim kutem u odnosu na horizontalu.

Za sve slučajeve u kojima se promatra širenje mlaza se mogu usvojiti slijedeće pretpostavke:

- 1) Tok je nestišljiv i turbulentan
- 2) Promjene gustoće fluida duž toka su zanemarivo male u odnosu na referentnu gustoću. To znači da iako su razlike u gustoći značajne za analizu uzgona, njihova promjena može biti zanemarena u razmatranju inercijalnih sila. Referentna gustoća je gustoća mora na razini ispusta. U ovom poglavlju će se usvojiti da je gustoća mora konstantna.
- 3) Pretpostavit će se da je gustoća vode u lineranoj vezi sa temperaturom ili salinitetom. Ta pretpostavka je odgovarajuća u slučajevima uobičajenih raspona saliniteta ili temperature. Ova pretpostavka ne vrijedi u slučaju da se temperatura vode približi vrijednosti od 4°C pri kojoj je gustoća najveća.

7.2.2 Osnosimetričan mlaz

U slučaju da postoji mlaz u kojem nema uzgona već samo količina gibanja, na udaljenosti z od otvora će brzina u osi mlaza \bar{U} i radius mlaza b biti u funkciji

$$\bar{U}, b = \phi_1(U_0, A_0, z) \quad \dots (7.40)$$

pri čemu je :

U_0 brzina na sapnici (izlazu)

A_0 površina otvora sapnice kroz koji voda istječe

Uz usvajanje pretpostavke da je početni protok znatno manji od protoka koji se priključio mlazu te su tako \bar{U} i b neovisni o q_0 i nakon dimenzionalne analize se dobiva promjena brzine u osi mlaza na udaljenost z od sapnice (Wood, 1993):

$$\frac{\bar{U}}{U_0} = K_{ju} \left(\frac{\Pi}{4} \right)^{0.5} \frac{d_p}{z} \quad \dots (7.41)$$

i

$$\frac{b}{z} = K_{jb} \quad \dots (7.42)$$

Odnos koncentracije trasera (zagađivala) u osi mlaza na na izlazu iz sapnice (C_0) i na udaljenosti z se može izračunati pomoću jednadžbe (Wood):

$$\frac{\bar{C}}{C_0} = K_{je} \left(\frac{4}{\Pi} \right)^{0.5} \frac{d_p}{z} \quad \dots (7.43)$$

pri čemu je:

- d_p promjer otvora kroz koji se odvija istjecanje
- b radius mlaza na udaljenosti z
- \bar{C} koncentracija trasera u osi mlaza
- C_0 koncentracija trasera na mjestu istjecanja (otvor)
- K_{ju} konstanta definirana eksperimentalno (Papanicolaou 1984) ($K_{ju} = 7.57$)
- K_{jb} konstanta definirana eksperimentalno (Papanicolaou 1984) ($K_{jb} = 0.11$)
- K_{jc} konstanta definirana eksperimentalno (Papanicolaou 1984) ($K_{jc} = 6.06$)

7.2.3 Osnosimetrični oblak

Pretpostavit će se oblak koji nema početni volumen niti količinu gibanja a generiran je kontinuiranim izvorom tvari koja je rjeđa od fluida koji ga okružuje (recipienta) te se stoga javlja uzgon. Oblak može biti generiran konstantnim izvorom topline ili tvari koja ima različitu gustoću od okolnog medija.

Sila koja u ovom slučaju uzrokuje (uzgonsko) kretanje fluida (Δ_l) je relativna razlika gustoće ($\Delta\rho_l / \rho$). Pretpostavit će se da je gustoća okolnog fluida (ρ) konstantna (npr. mora) a sa $\Delta\rho_l$ je označeno odstupanje od te gustoće. Boussinesq-ova pretpostavka dozvoljava da se jednadžba održanja mase zamijeni jednadžbom kontinuiteta. Također se može definirati $q_{\Delta 0}$ kao protok uzrokovan uzgonskom silom Δ dok je Δ' prosječna vrijednost (u vremenu) lokalnih iznosa uzgonske sile (Δ_l). Može se definirat odnos:

$$\bar{U}, \Delta', b = \phi(q_{\Delta 0}, \nu, z) \quad \dots (7.44)$$

pri čemu je sa ν označen koeficijent kinematske viskoznosti fluida.

Sa udaljavanjem oblaka od izvora, tok će biti u potpunosti turbulentan i neovisan o viskoznosti ν te se nakon dimenzionalne analize dobiva brzina u osi oblaka:

$$\bar{U} = K_{pu} \left(\frac{q_{\Delta 0}^{0.33}}{z^{0.33}} \right) \quad \dots (7.45)$$

ili zapisano na uobičajeni način

$$\frac{\bar{U}}{U_0} = K_{pu} \left(\frac{\Pi}{4} \right)^{0.33} Fr_0^{-0.66} \left(\frac{z}{d_p} \right)^{-0.33} \quad \dots (7.46)$$

pri čemu je Fr_o Froudeov broj gustoće (eng. *densimetric Froude number* $Fr_o = (U_o / (\Delta_o d_p)^{0.5})$) u točki formiranja oblaka a Δ_o je uzgonska sila na ispustu.

Slično se može dobiti i odnos promjera oblaka (b) i udaljenosti oblaka od izvora (z)

$$\frac{b}{z} = K_{pb} \quad \dots (7.47)$$

Prosječna vrijednost uzgonske sile se može izraziti kao

$$\Delta' = K_{p\Delta} q_{\Delta_o}^{0.66} z^{-1.66} \quad \dots (7.48)$$

ili kao odnos (prosječne) vrijednosti uzgonske sile prema početnoj uzgonskoj sili

$$\frac{\Delta'}{\Delta_0} = K_{p\Delta} \left(\frac{\Pi}{4} \right)^{0.66} (Fr_o)^{0.66} \left(\frac{z}{d_p} \right)^{-1.66} \quad \dots (7.49)$$

Recipročna vrijednost gornjeg izraza je razrijeđenje u osi pronosa ($S = \Delta_o / \Delta'$). Na osnovu provedenih mjerenja su određene vrijednosti koeficijenta $K_{pu} = 3.85$, $K_{pb} = 0.105$ i $K_{p\Delta} = 11.1$.

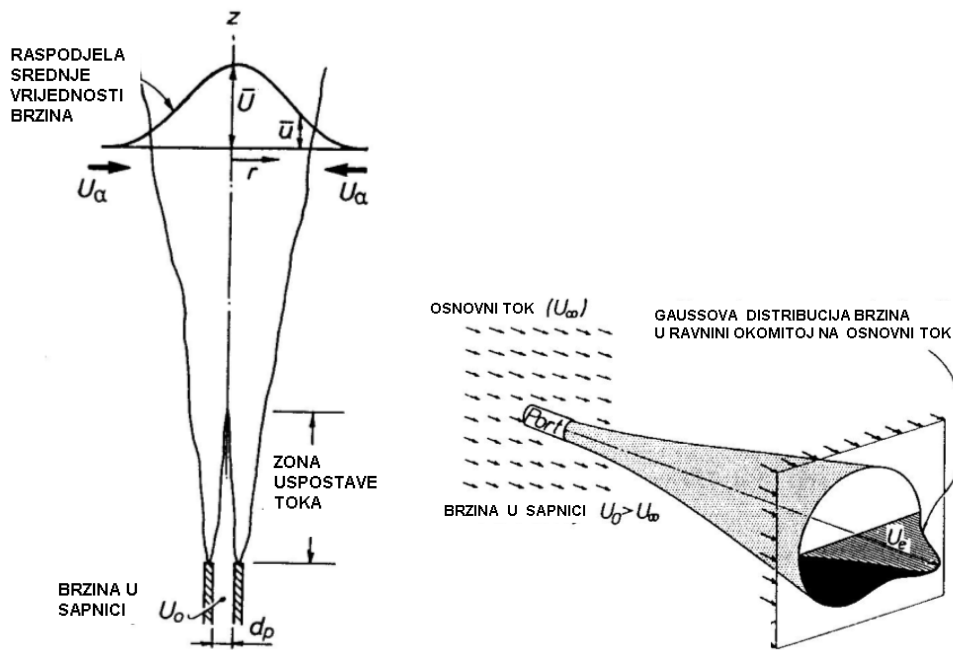
7.2.4 Perjanica

Pod perjanicom se podrazumijeva širenje efluenta u kojem djeluju i inercijalne sile i uzgonske sile usljed razlike u gustoći, dakle kombinacija mlaza i oblaka.

Mlaz koji ulazi u recipient pokazuje jedno nepravilno područje izrazito turbulentnog toka između relativno oštro (jasno) definiranih granica. Izvan tih granica tok je laminaran i irotacioni (potencijalan).

Promatrajući mlaz koji izlazi iz sapnice se zapaža:

- 1) Postoji početna zona u kojoj se profil brzina mijenja od profila koji je karakterističan za strujanje u cijevi do profila brzina koji je karakterističan za mlaz. Ova zona se naziva *zona uspostave toka* i proteže se u duljini od sedam promjera sapnice (Slika 7.26).

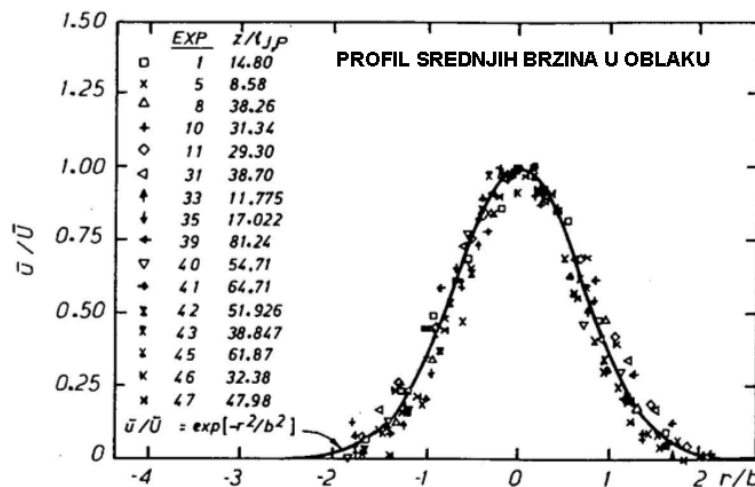


Slika 7.26 Formiranje mlaza

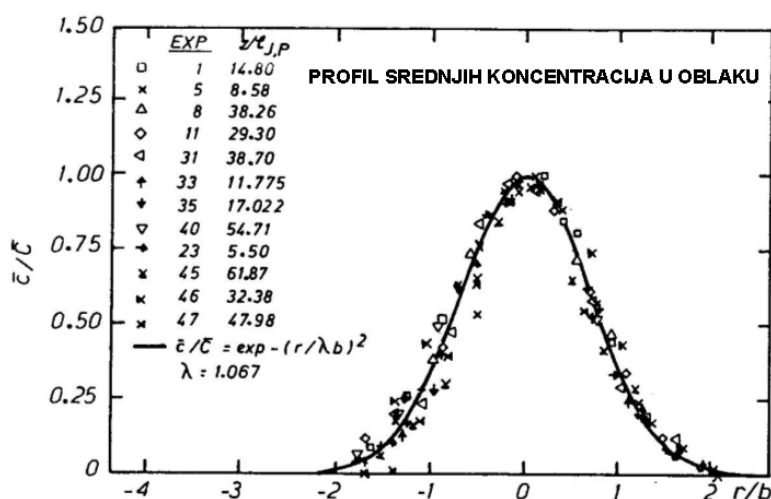
2) U drugoj zoni je tok u potpunosti turbulentan što znači da ne ovisi o vrijednosti Reynoldsovog broja, a brzina, koncentracija i gustoća se mogu prikazati kao zbroj srednje vrijednosti i odstupanja od nje (Reynoldsov pristup – vidi poglavlje 1.7.1).

3) u području izvan zone uspostave toka se uočava da je dominantno tečenje u smjeru vektora brzine a izrazito slabo u smjeru okomitom na njega. To ima za posljedicu da su promjene (koncentracije, gustoće, topline) u smjeru toka za red veličine manje nego promjene okomito na smjer toka.

Ova zapažanja su potvrđena rezultatima mjerenja (Papanicolaou 1984 prema Wood1993) te su prikazani na slikama 7.27, 7.28 i 7.29).

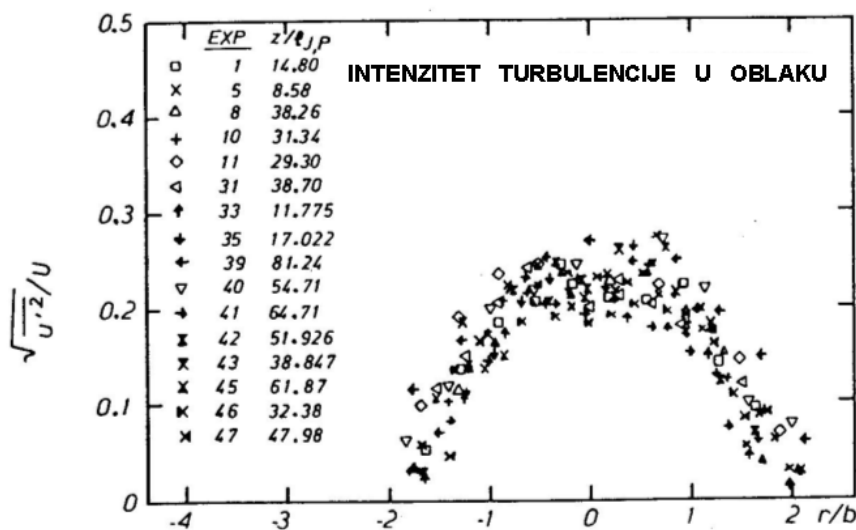


Slika 7.27 Bezdimenzionalni prikaz profila brzina (Papanicolaou 1984 prema Wood)



Slika 7.28 Bezdimenzionalni prikaz profila koncentracija (Papanicolaou 1984, prema Wood)

Na slici 7.27 je prikazan bezdimenzionalni raspored brzina za niz bezdimenzionalnih vertikalnih udaljenosti od ispusta. Na slici 7.28 je na isti način prikazan raspored koncentracija.



Slika 7.29 Bezdimenzionalni prikaz turbulencije (Papanicolaou 1984 prema Wood)

Profil brzina okomito na smjer toka se može izraziti jednadžbom

$$\frac{\bar{u}}{\bar{U}} = e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad \dots (7.50)$$

pri čemu je

- \bar{U} brzina u osi mlaza (srednja vrijednost)
- r udaljenost od osi mlaza
- b radius na kojem je srednja vrijednost brzine \bar{U}/e

Raspored srednje vrijednosti koncentracije okomito na smjer toka je opisan jednadžbom

$$\frac{\bar{c}}{C} = e^{-\frac{r^2}{\lambda^2 b^2}} \quad \dots (7.51)$$

pri čemu je:

- \bar{C} srednja vrijednosti koncentracije (vremenski osrednjena)
- λ mjera razlike u širenju brzine i koncentracije

Vrijednost koeficijenta λ se za oblak može usvojiti sa $\lambda = 1.067$ a za mlaz $\lambda = 1.275$.

7.2.5 Hidrodinamička disperzija u moru

Nakon početnog miješanja na mjestu izlaska efluenta u recipient, otpadne vode dolaze pod utjecaj prirodnih procesa miješanja u moru. Proces pronosa se može podijeliti na konvekciju (pri čemu je efluent nošen morskim strujama) i na disperziju (pri čemu se oblak miješa sa okolnom morskom vodom).

Sam proces pronosa efluenta je vrlo sličan pronosu zagađivala nošenog tokom podzemne vode opisanog u poglavlju 7.1. Razlike su u uzrocima pojave hidrodinamičke disperzije što je u podzemnim vodama neravnomjernost polja brzina (razlike u strujnim cijevima i raspored brzina u obliku rotacionog paraboloidea u svakoj strujnoj cijevi) dok je kod pronosa u moru dominantna turbulencija. Kod pronosa efluenta u moru nema retardacije. U nastavku će biti navedeni samo neki osnovni naglasci i pojedine razlike (npr. u vrijednosti koeficijenta disperzije).

U slučaju da voda miruje ili da je tok laminaran, miješanje efluenta i recipienta se odvija na nivou molekula i naziva se molekularna difuzija. Molekularna difuzija je proces pronosa iz područja veće prema području manje koncentracije i definiran je Fick ovim zakonom.

Fikov zakon se može zapisati u obliku (ovo je ista jednadžba samo s drugim oznakama kao i jednadžba 1.30 u poglavlju 1.6.1 *Molekularna difuzija* samo je u literaturi vezanoj za pronos u moru uobičajeno koristiti drugačije oznake):

$$q_c = -\varepsilon \frac{\partial c}{\partial x} \quad \dots (7.52)$$

pri čemu je:

- q_c protok mase tvari koncentracije c
- ε koeficijent difuzivnosti (ili koeficijent molekularne difuzije)

Ako se Fickov zakon uvrsti u jednadžbu kontinuiteta za dvodimenzionalno strujanje u xy ravnini dobiva se jednadžba pronosa

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad \dots (7.53)$$

u slučaju pronosa uzrokovanog molekularnom difuzijom, ε je konstantna te jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad \dots (7.54)$$

U slučaju da se u fluid koji se kreće u smjeru osi x konstantnom brzinom u te da se u takav tok trenutno upusti određena količina efluenta, jednadžba pronosa ima rješenje u obliku:

$$c = \frac{Q_c}{4\Pi\varepsilon t} e^{-\left(\frac{x^2}{4\varepsilon t} + \frac{y^2}{4\varepsilon t}\right)} \quad \dots (7.55)$$

pri čemu je Q_c intenzitet izvora tvari po jedinici dubine (prema Csanady 1973)

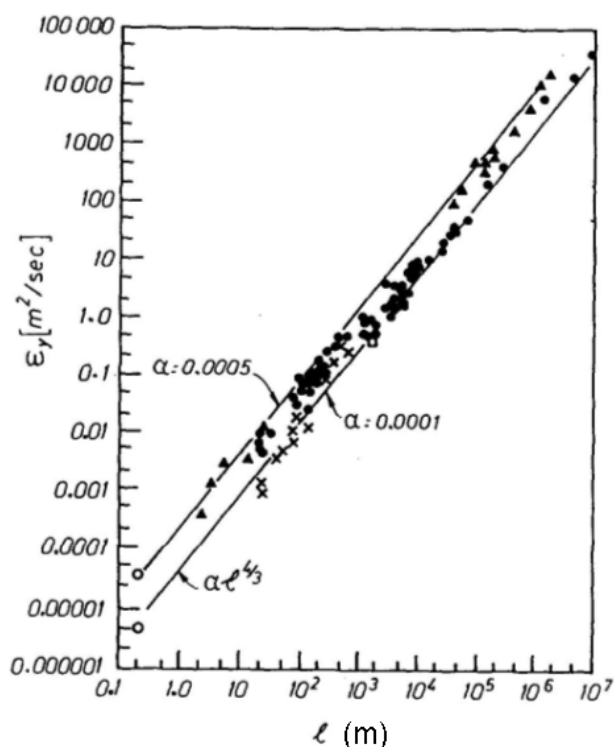
U turbulentnom i neuniformnom toku, proces širenja efluenta je mnogo izraženiji nego u laminarnom toku jer turbulencija pospješuje procese miješanja. Vrijednost difuzivnosti za turbulentnu difuziju u moru je stoga za nekoliko redova veličine veća od molekularne difuzije.

Promatrajući dvije čestice koje se nalaze relativno blizu, one će vjerojatno biti u istom vrtlogu i njihovo međusobno udaljšavanje vjerojatno neće biti značajno. Nošene dalje tokom vode, spomenute dvije čestice će se zbog nehomogenosti polja brzina (varijacije brzine) međusobno udaljšavati te će biti zahvaćene raznim vrtlozima te će se time i njihovo međusobno udaljšavanje povećati. Iz tog razloga je njihovo međusobno udaljšavanje u funkciji udaljšenosti među njima odnosno prevaljenog puta, te se može zaključiti da je disperzija funkcija mjerila toka. U priobalnim morima se procesi miješanja odvijaju na nizu razina od molekularnih dimenzija do velikih regionalnih vrtloga (morskih struja).

Niz mjerenja (Okubo 1974) je pokazalo da se koeficijent turbulentne difuzije (disperzije) izmjeren na područjima udaljšenim od morskih obala proporcionalni sa $l^{4/3}$ tako da se može definirati vrijednost horizontalnog koeficijent disperzije za otvoreno more:

$$\varepsilon_y = \alpha l^{4/3} \quad \dots (7.56)$$

pri čemu je $\alpha = 0.0001 \div 0.0005$.



Slika 7.30 Promjena horizontalne difuzivnosti (ϵ) u otvorenom moru u ovisnosti o mjerilu (Okubo 1974 prema Wood 1993)

U priobalnim vodama u kojima obala formira rubne efekte i tako smanjuje veličinu vrtloga u kojima se odvija mješanje, intenzitet mješanja je smanjen te je eksponent u gornjoj jednadžbi manji. Bowden (1983) preporuča da se eksponent u priobalnim morima usvoji sa vrijednošću između 0.5 i 1.0. Određivanje horizontalne difuzivnosti u istraživanom području se može obaviti mjerenjem.

Zbog relativne plitkoće mora difuzivnost u vertikalnom smjeru je manje izražena od horizontalne difuzije. Izmjerene vrijednosti ϵ_z se kreću u rasponu 0.0001 do 0.005 m^2/s . To je za nekoliko redova veličine manje od horizontalne difuzivnosti.

Biološku razgradnju odnosno odumiranje organizama koji predstavljaju indikatore zagađenja uobičajeno je opisivati procesom prvog reda. Gameson (1985) je ustvrdio da ultraviolettne zrake imaju najvažniju ulogu u procesu odumiranja bakterija.

7.2.6 Numerički modeli širenja oblaka efluenta

Za modeliranje širenja efluenta ispuštenog kroz podmorski ispust je potrebno prikupiti niz podataka koji se mogu grupirati u nekoliko skupina:

- 1) Geografske informacije. Potrebno je posjedovati detaljne informacije o batimetriji, o obalnoj liniji i o zonama u kojima se koristi morska voda (za npr. rekreaciju)
- 2) Podaci o izmjeni plime i oseke koji su potrebni za definiranje rubnih uvjeta kao i za kalibriranje modela.
- 3) Podaci o morskim strujama su također potrebni za definiranje rubnih uvjeta i za kalibraciju modela

4) Podaci o koeficijentu disperzije (difuzivnosti). Na osnovu mjerenja traserima se može odrediti horizontalni i vertikalni koeficijent difuzivnosti

5) Podaci o razgradnji pojedinih supstanci (podaci o odumiranju bakterija,)

6) Učestalost, intenzitet i smjer morskih struja i dominantnih vjetrova

Numerički modeli u prvom koraku određuju polje brzina rješavajući vladajuću jednadžbu uz zadovoljavanje poznatih (usvojenih) rubnih i početnih uvjeta. Jednadžba koja opisuje strujanje nestišljivog fluida je Navier-Stokesova jednadžba koja pretpostavlja približno horizontalno strujanje (vertikalna komponenta inercijalnih sila je zanemarivo mala) te može biti napisana u obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \Omega v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - \Omega u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (7.57)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

te vrijedi jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

pri čemu je:

- x, y Kartezijeve koordinate u horizontalnoj ravnini
- z Kartezijeva koordinata u vertikalnom smjeru (pozitivna u smjeru prema gore)
- u, v, w komponente vektora brzine u x, y i z smjeru
- t vrijeme
- Ω Koriolisov parametar
- p tlak
- ρ gustoća vode
- τ_{ij} komponenta tenzora naprezanja

Osim ovih jednadžbi potrebno je poznavati i početne i rubne uvijete. To su brzine, vjetar, temperatura,....

Nakon što se odredi polje brzina računa se pronos tvari koji je definiran jednadžbom u obliku:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + kc - S_s = 0$$

pri čemu je

- c koncentracija (srednja vrijednost)
- k koeficijent raspadanja za nekonzervativne supstance
- S_s izvor efluenta

Ove jednadžbe se rješavaju klasičnim metodama - metoda konačnih diferencija, metoda konačnih elemenata i metoda čestica.