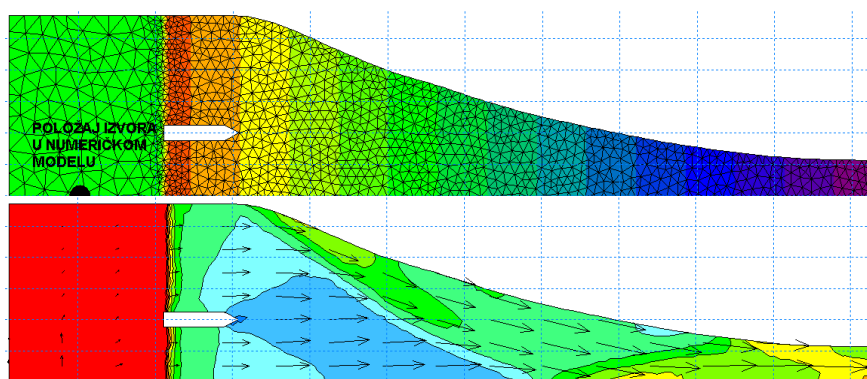
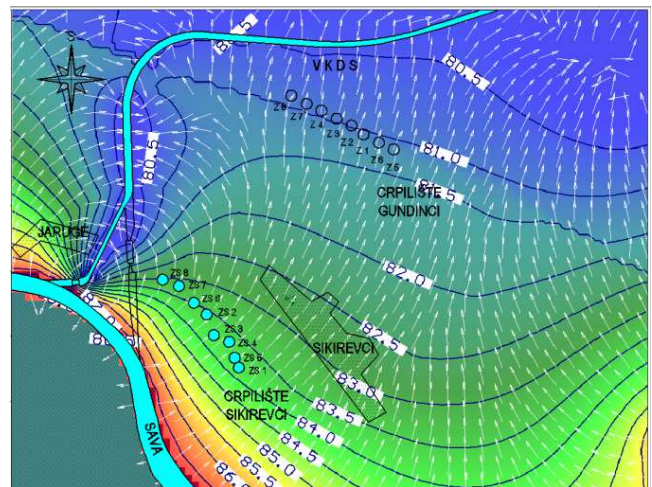
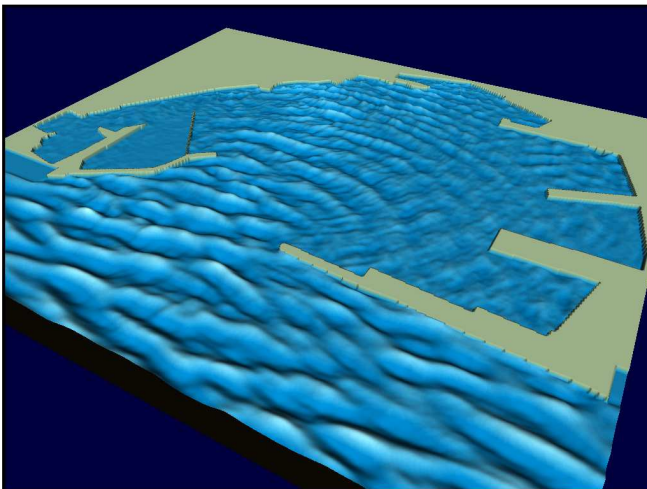


MODELIRANJE U HIDROTEHNICI



Goran Lončar

PREDGOVOR

Intencija ovog kolegija nije detaljna razrada numeričkih shema implementiranih u izvornicima programskih rješenja. Zbog toga se u ovoj skripti učestalo poziva na reference u kojima svi zainteresirani mogu naći iscrpna objašnjenja. Isto tako, veći dio referenci na raspolaganju je u pdf formatu a koje polaznici kolegija mogu dobiti od autora ove skripte.

Osnovna ideja kolegija je da se slušači upute u modelske jednadžbe procesa, upotrebu odgovarajućih početnih i rubnih uvjeta modela te da se skrene pažnja na pojednostavljenja, pretpostavke i prilagodbe korištene u uspostavi modela.

U svakom poglavlju ove skripte na početku se iznosi odgovarajuća teoretska podloga za nastavno uspostavljeni model, pogodan za daljnju numeričku implementaciju.

Na kraju skripte dani su ogledni riješeni zadaci, koji se u sličnoj formi zadaju i polaznicima kolegija za rješavanje u sklopu predviđenih vježbi. U svim zadacima predviđena je usporedba modelskih rezultata s rezultatima dobivenim mjerenjem ili teoretskim modelima.

Suplement ovoj skripti su i priložena 4 primjera s obradom tematskih jedinica iz skripte, no na složenijoj razini razrade. Primjeri trebaju poslužiti za uvid u mogućnosti modernih modelskih rutina.

Poželjno je da polaznici kolegija imaju solidno znanje iz svih prethodno odslušanih hidrotehničkih predmeta te iz matematike 3 u kojoj je provedbenim programom predviđena razrada numeričkih shema za obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe (hiperbolne, eliptičke i paraboličke).

Skripta je podijeljena u 4 cjeline: Prva cjelina se odnosi na modeliranje kontinuirane akvatičke sredine (mora, jezera rijeke). Druga cjelina obuhvaća modeliranje strujanja i pronosa u stijeni međuzrnske poroznosti. Treća cjelina rezervirana je za modeliranje procesa u eko sustavu, kao bitne sastavnice u modelima iz prve ili druge cjeline. U četvrtoj cjelini dana je razrada modela valnog generiranja uslijed djelovanja vjetra a u petoj cjelini opisane su osnove modeliranja za sustave pod tlakom.

SADRŽAJ:

A- MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U KONTINUIRANOJ AKVATIČKOJ SREDINI

- 1. OSNOVNE JEDNADŽBE STRUJANJA TEKUĆINE I TRANSFERA TOPLINE**
 - 1.1. Zakon očuvanja mase u tri dimenzije
 - 1.2. Jednadžba očuvanja količine gibanja u tri smjera
 - 1.3. Jednadžba očuvanja energije u tri smjera
 - 1.3.1. Jednadžbe stanja
- 2. NAVIER-STOKES JEDNADŽBA ZA NEWTON-OVU TEKUĆINU**
 - 2.1. Konzervativni oblik jednadžbi strujanja tekućine
- 3. DIFERENCIJALNA I INTEGRALNA FORMA OPĆE JEDNADŽBE PRONOSA**
- 4. KLASIFIKACIJA PO FIZIKALNIM KARAKTERISTIKAMA**
- 5. MODELI TURBULENCIJE**
 - 5.1. Reynolds-ovo osrednjavanje Navier-Stokes jednadžbi za nestišljive tekućine
 - 5.2. Proračun turbulentnih tokova
 - 5.3. „RANS mixing length“ model turbulencije
 - 5.4. „RANS k- ϵ “ model turbulencije
- 6. MODEL TRODIMEZIONALNOG STRUJANJA U OTVORENOM VODOTOKU**
- 7. MODEL DVODIMENZIONALNOG STRUJANJA U OTVORENOM VODOTOKU**
- 8. TOPLINSKA IZMJENA S ATMOSFEROM ZA 2D I 3D MODEL**

B- MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U STIJENI MEĐUZRNSKE POROZNOSTI

- 1. UVOD**
- 2. OSNOVNI ZAKONI I JEDNADŽBE PROCESA**
 - 2.1. Zakon očuvanja mase
 - 2.2. Komponente pronosa
 - 2.3. Generalizacija Fickovog zakona
 - 2.3.1. Difuzija
 - 2.3.2. Disperzija
 - 2.4. Jednadžba pronosa
 - 2.5. Početni i rubni uvjeti
- 3. REAKTIVNI PROCESI**
 - 3.1. Utjecaj odumiranja i razgradnje
 - 3.2. Izmjena tvari između krute i tekuće faze
 - 3.3. Retardacija
- 4. MODEL STRUJANJA I PRONOSA U STIJENAMA MEĐUZRNSKE POROZNOSTI**

C- MODELIRANJE PROCESA U EKO SUSTAVU

1. UVOD

2. POPULACIJSKI MODEL

3. MICHAELIS-MENTEN KINETIKA

4. MODEL EKOSUSTAVA

- 4.1. Ekosustav sa dva člana (predator – plijen)
- 4.2. Ekosustav sa tri člana (NPZ)
- 4.3. Ekosustav sa četiri člana (NPZD)
- 4.4. Poveznica s hidrodinamičkim modelom konvektivne disperzije

D- MODELIRANJE VALNOG GENERIRANJA

1. UVOD

2. FORMULACIJA PROBLEMA VALNOG GENERIRANJA

- 2.1. Mehanizam generiranja valova vjetrom
 - 2.1.1. *Teorije prijenosa energije vjetra na valove - Milesova teorija*
 - 2.1.2. *Modelska implementacija*
- 2.2. Nelinearno međudjelovanje valova
- 2.3. Spektralna disipacija u dubokovodnom području
 - 2.3.1. *Disipacija uslijed loma valova*
- 2.4. Nelinearno međudjelovanje u plitkovodnom području
 - 2.4.1. *Disipacija na dnu*

3. MODEL VALNOG GENERIRANJA

E- MODELIRANJE SUSTAVA POD TLAKOM

1. UVOD

Vježba 1 – 3D model strujanja u otvorenom vodotoku

Vježba 2 – 2D model strujanja u otvorenom vodotoku

Vježba 3 – 2 model strujanja u stijeni pukotinske poroznosti

Vježba 4 – model eko sustava s dvije varijable

Vježba 5 – model valnog generiranja

Vježba 6 – model sustava pod tlakom

Primjer 1 – 3D model strujanja i eko sustava u otvorenom vodotoku

Primjer 2 – 2D model strujanja u otvorenom vodotoku

Primjer 3 – 3D model strujanja u stijeni pukotinske poroznosti

Primjer 4 – model valnog generiranja

Numerički (matematički) modeli

Riječ model ima puno definicija koje opisuju njeno značenje i toliko je često u upotrebi da je ponekad teško razaznati njeno značenje. Model je možda najjednostavnije definirati kao približan prikaz stvarnog sustava ili procesa. Konceptualni model je hipotetski prikaz načina na koji neki sustav ili proces djeluju. Ta hipoteza kvantitativno se može prikazati kao matematički model. Matematički modeli na apstraktan način prikazuju procese kroz jednačbe, a fizička svojstva kroz konstante ili koeficijente. Karakterizacija stanja ili njihov potencijal u sustavu se predstavljaju kao varijable.

Većina matematičkih modela, koji su danas u upotrebi, su determinističkog karaktera. Deterministički modeli se temelje na zakonu očuvanja mase, količine gibanja i energije te prikazuju uzročno-posljedične veze. Temeljna pretpostavka je da postoji visoki stupanj razumijevanja o procesima koji djeluju u sustavu te je moguće unaprijed odrediti reakcije sustava na bilo koji skup djelovanja.

Deterministički modeli uglavnom trebaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Točna rješenja dobivaju se analitičkim rješavanjem no analitički modeli zahtijevaju visok stupanj idealizacije parametara i rubnih uvjeta. Heterogenost (prostorna raznolikost) svojstva realne sredine vodotoka ili vodonosnika predstavlja važnu značajku i osnovna je karakteristika svih realnih kontinuiranih akvatičkih ili geoloških sustava. Stoga je uobičajeno koristiti modele sa prostorno i/ ili vremenski varijabilnim parametrima koji omogućavaju vjerniji prikaz realne sredine. Numeričke metode rješavanja jednačbi procesa daju približna rješenja kroz prostornu i vremensku diskretizaciju. U okvirima promatrane modelske domene promjenjiva svojstva te granice i djelovanja vezana za promatrani sustav dane su kao pretpostavljene vrijednosti.

Broj i oblik jednačbi koje se rješavaju određuje se temeljem poznavanja dominantnih procesa. Koeficijenti u jednačbama su pokazatelji svojstva, rubnih uvjeta i djelovanja na promatrani sustav. Zavisne varijable u jednačbama su pokazatelji stanja sustava i matematički su određene rješenjem jednačbi. Kada se numerički algoritam prikazan u računalnom kodu upotrijebi za rješavanje jedne ili više parcijalnih diferencijalnih jednačbi, rezultirajući računalni kod može se smatrati generičkim modelom. Kada se dimenzije diskretizacije mreže, rubni uvjeti i koeficijenti filtracije odnose na određeno geografsko područje, tada se dobiva karakteristični model područja. Sposobnost generičkih modela za točno rješavanje jednačbi procesa se u pravilu verificira kroz primjenu na pojednostavljenim problemima. Ta sposobnost ne uvjetuje jednaku točnost kada se isti model primjeni na problem sa složenijom problematikom.

Korisnik mora biti svjestan zanemarenih detalja i usvojenih pretpostavki kako se ne bi pojavile značajnije nezamijećene greške.

U determinističkim modelima prisutna je kontrola nad svim parametrima i varijablama a ponašanje tih modela je unaprijed predvidivo. Varijable se odnose na koordinate prostora x , y , z i parametre vremena t . U većini modela, naročito u relativno jednostavnim primjerima, dovoljno je formulirati problem uzevši u obzir samo podskup te četiri varijable.

U ovisnosti o broju prostornih dimenzija, govori se o *0D*, *1D*, *2D* ili *3D* modelima. 0D modeli ovisni su o jednoj varijabli i to o vremenu t . 0D modeli podrazumijevaju homogenost sustava, tj. da je trenutno stanje po cijelome kontrolnom volumenu nepromjenjivo. Npr. trenutna koncentracija je u svakoj točki promatranog volumena jednaka. Kako je vrijeme t jedina nezavisna varijabla i u stacionarnom kontrolnom volumenu, analitičkom formulacijom dolazi se do *običnih diferencijalnih jednadžbi*, u kojima nepoznate funkcije ovise samo o jednoj nezavisnoj varijabli. Ako je nepoznata funkcija, funkcija više varijabli, takvu jednadžbu nazivamo *parcijalnom diferencijalnom jednadžbom*.

Modeli koji nisu ovisni o vremenu nazivaju se *stacionarni modeli*, a modeli ovisni o vremenu *nestacionarni modeli*. Do stacionarnog stanja dolazi se u idealiziranim modelima, a neophodan uvjet za stacionarno stanje je taj da su vanjski procesi ili parametri nepromjenjivi u vremenu.

1D modelima promatraju se npr. promjene u vertikalnom ili horizontalnom smjeru sustava, primjerice vertikalni ili horizontalni pronos zagađivala ili evaporacije prema površini. Također se procesi u rijekama (maksimalne razine vodostaja ili kretanje zagađivala nizvodno) mogu promatrati 1D modelima. Voda od površinskog vodotoka koja infiltrira u vodonosnik može se opisati 1D modelom, uz uvjete da su osnovni tok i dimenzije promatranog prostora konstantne. 1D modeli za stacionarno stanje opisuju se jednostavnim diferencijalnim jednadžbama. Modeli nestacionarnog stanja, uključujući barem jedan smjer u prostoru, opisuju se parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

2D modeli uključuju dvije prostorne varijable. Primjerice, *horizontalni dvodimenzionalni* modeli za opisivanje procesa pronosa u kojima je horizontalna dimenzija toka dominantno veća od dubine toka u otvorenim vodotocima ili debljine vodonosnog sloja.

3D modeli koriste se za praćenje promjena po cijelome promatranom volumenu, za sve tri prostorne varijable. 3D modeli su dosta kompleksni modeli i pogodni su za modeliranje pronosa u okolini izvora zagađivanja koji se pretpostavlja da je uglavnom točkasti. Kod izrade takvih modela pronosa u višedimenzionalnim stacionarnim ili nestacionarnim problemima, koriste se numerički algoritmi koji najčešće koriste metode konačnih razlika, konačnih volumena ili konačnih elemenata.

Uspostava modela provodi se kroz nekoliko koraka. Proces izrade od prirodnog sistema do odgovarajućeg modela sadrži različite korake, gdje svaki korak ovisi o dobro obavljenom

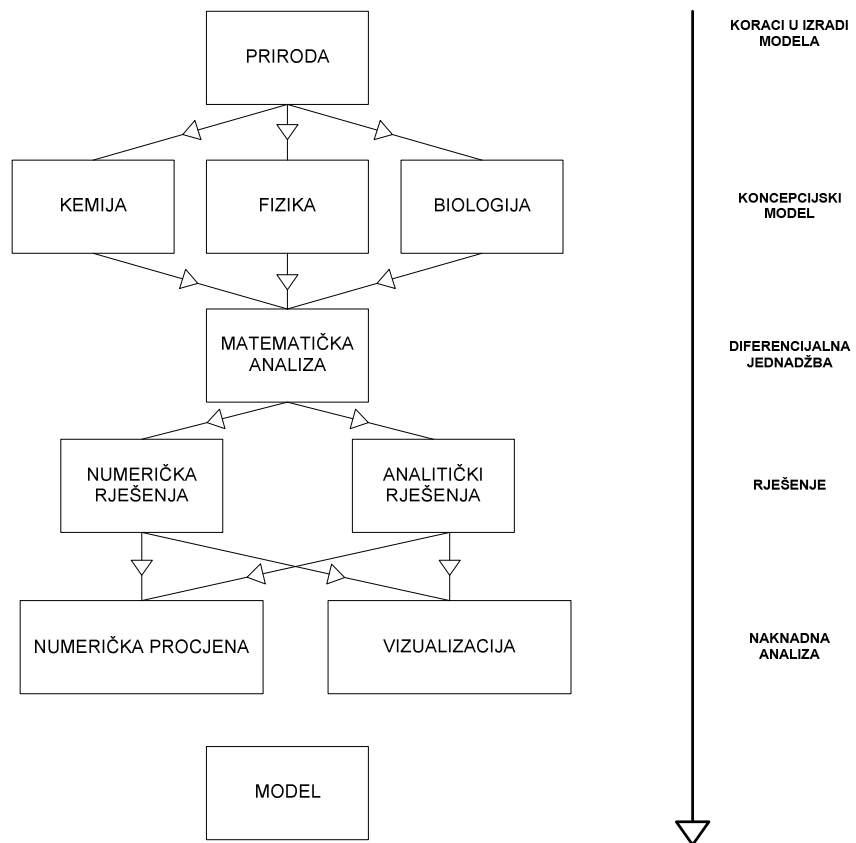
prethodnom koraku. Glavni cilj je da se izradi konceptualni model koji se može opisati matematičkom analizom i kojim se rješavaju diferencijalne jednačbe. Na slici 1 prikazani su koraci modeliranja. Prvi korak je formuliranje koncepta. Koncept se izrađuje iz poznatih ili raspoloživih znanstvenih podataka i ekspertiza, kao i iz podataka koji se dobiju promatranjem predmetnog sustava. Koncept sadrži sve procese koji su neophodni za procjenu dinamike sustava. Izrada konceptijskog modela ne sadrži numeričke podatke. Primjerice, kod modeliranja procesa u ekologiji, moraju se uključiti znanstvene discipline kao što su: kemija, fizika, biologija, geologija, ekologija, hidrologija i hidraulika.

Slijedeći korak je formulacija konceptualnog modela sa matematičkim izrazima. Funkcije varijabli i parametara vremena i prostora povezane su matematičkim izrazima. Kombinacijom i transformacijom tih izraza, te korištenjem teoretskih i empirijskih zakona i principa, dolazi se do diferencijalnih jednačbi. U jednostavnim primjerima dolazi se do jedne jednačbe, a općenito se dolazi do cijelog sustava jednačbi.

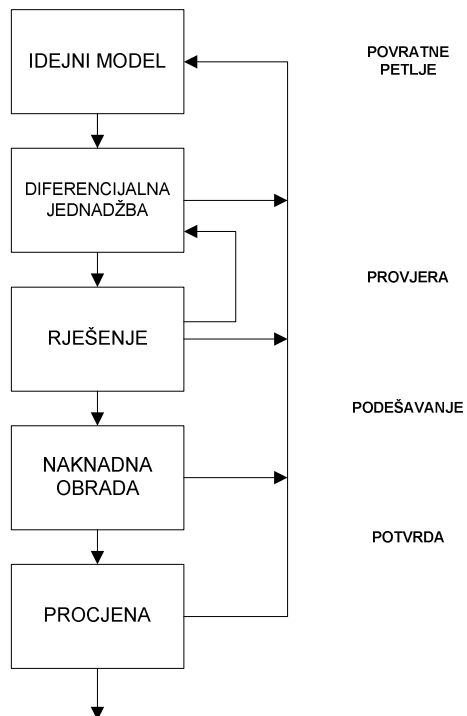
Slijedeći korak u modeliranju je rješavanje sustava jednačbi sa kojim se opisuje analizirani proces temeljem analitičkih izraza ili numeričke modelske implementacije.

Povratne petlje u uspostavi modela potrebne su da bi se poboljšali raniji koraci, da bi se ispravile greške i da bi se model prilagodio u pogledu izmjerenih podataka. Na slici 2 prikazane su povratne petlje u procesu uspostave modela koje se dijele na provjeru, podešavanje i potvrdu. Izraz *provjera* koristi se prilikom testiranja i razvoja proračunskog koda za modeliranje. Kako bi se provjerio pravilan rad proračunskog koda, testiraju se poznati slučajevi kako bi se vidjelo da model daje točan rezultat. Testiranja se mogu bazirati na jednostavnim naknadnim provjerama, na analitičkim rješenjima i usporedbom s rezultatima drugih modela.

Usporedba rezultata test primjera, naziva se *benchmarking* ili sustavno vrednovanje/ocjenjivanje. U koracima testiranja provjerava se da li proračunato rješenje donosi rezultat diferencijalnih jednačbi. Izraz kalibracija ili baždarenje modela koristi se za proceduru podešavanja parametra modela za specifičnu aplikaciju proračunskog koda. U slučaju da se rezultat provjere ili usporedbe pokaže kao nezadovoljavajući, podešavaju se parametri, rade se izmjene matematičkih jednačbi ili se podešava konceptualni model. Ako se rezultatom provjere dokaže da je model točan, tada se može reći da se model ponaša kao reprezentativni prirodni ili realni sustav. Mora se utvrditi koji se dijelovi realnog sustava prezentiraju numeričkim modelom. Kako model nije identičan reprezentativnom stvarnom sustavu, uvijek su prisutni i stvarni aspekti za koje model nije dostatan. Matematička formulacija mora biti bazirana na dobro koncipiranom modelu i mora biti potpuna.



Slika 1 Koraci izrade modela



Slika 2 Provjera, podešavanje i potvrda prikazane kao povratne petlje različitih razina izrade modela

A

MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U
KONTINUIRANOJ AKVATIČKOJ SREDINI

1. Osnovne jednadžbe strujanja tekućine i transfera topline

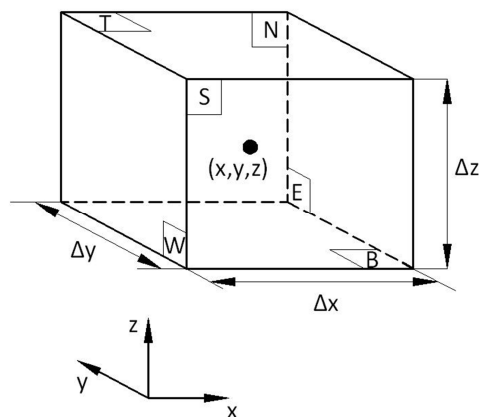
Osnovne jednadžbe strujanja tekućina predstavljene su matematičkim izrazima zakona očuvanja polja:

- Zakon očuvanja mase;
- Zakon očuvanja količine gibanja (drugi Newton-ov aksiom);
- Zakon očuvanja energije (prvi zakon termodinamike).

Usvojene pretpostavke:

- Tekućina se promatra kao kontinuum;
- U analizi tekućina na makroskopskoj skali ($1 \mu\text{m}$ i veće) molekularna struktura i molekularna gibanja se zanemaruju;
- Opisuje se ponašanje tekućine u smislu makroskopskih svojstava, poput brzine, tlaka, gustoće i temperature, te njihovih vremenskih i prostornih derivacija.

Promatramo djelić tekućine sa stranicama Δx , Δy i Δz :



Slika 1

Za stranice se primjenjuje se nomenklatura N , S , E , W , T i B , sa značenjem Sjever (North), Jug (South), Istok (East), Zapad (West), Vrh (Top) i Dno (Bottom). Težište elementa je locirano koordinatom (x, y, z) .

Proračun promjena mase, količine gibanja i energije elementa tekućine nastale strujanjem kroz njegove granice, te ukoliko postoje izvori, kroz djelovanje ponora i izvora unutar elementa, vodi do jednadžbi strujanja tekućine.

Sva svojstva tekućine su funkcija prostora i vremena pa bi striktnim poštivanjem matematičkoj formalizma bilo potrebno pisati $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $T(x, y, z, t)$ i $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ za gustoću, tlak, temperaturu i vektor brzina.

Promatrani element je dovoljno mali da se svojstva tekućine na površinama ("licima"-eng: faces) mogu zadovoljavajuće precizno izraziti s razvojem prva dva člana Taylor-ovog reda. Primjerice, tlak na W i E licima, koja su na udaljenostima $1/2 \delta x$ od težišta elementa, može se izraziti:

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \quad i \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x$$

1.1. Zakon očuvanja mase u tri dimenzije

Rata prirasta mase u elementu tekućine	=	sumarni protok mase (dotok) u element tekućine
--	---	--

Rata prirasta mase unutar elementa tekućine je:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.1)$$

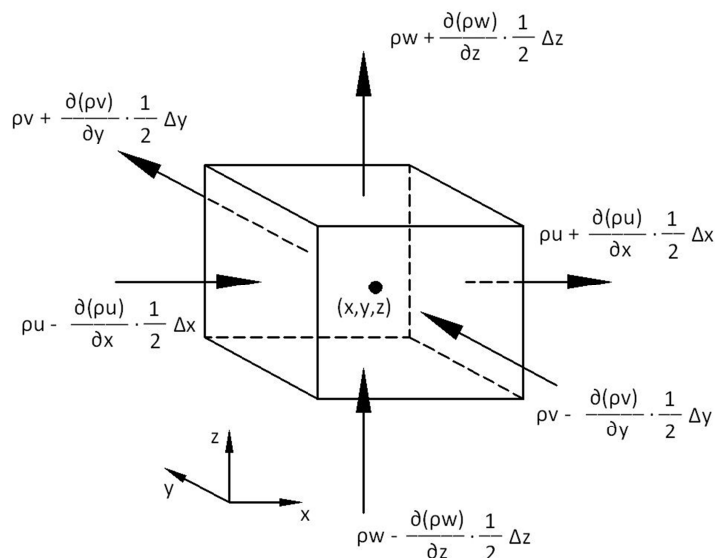
Protok mase kroz lice elementa je dan kao umnožak gustoće, površine i komponente brzine okomite na površinu lica. Sumarni protok mase (dotok) u element kroz njegove granice (lica) dan je izrazom :

$$\begin{aligned} & \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \\ & - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) \Delta x \Delta z + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Strujanje usmjereno u element uzrokuje povećanje mase u elementu i ima pozitivan predznak dok izlazno strujanje iz elementa poprima negativan predznak.

Rata promjene mase unutar elementa svedena je na sumarni protok mase kroz lica elementa (oplošje elementa).

Svi članovi rezultatne bilancne jednadžbe mase se postavljaju na lijevu stranu znaka jednakosti te se izraz dijeli sa volumenom elementa $\Delta x \Delta y \Delta z$. Time se dobiva trodimenzionalni nestacionarni oblik zakona očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta za točku stišljive tekućine:



Slika 2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2)$$

U slučaju nestišljive tekućine ρ je konstantna pa prethodni izraz prelazi u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ili} \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

1.2. Jednadžba očuvanja količine gibanja u tri smjera

<p>Rata prirasta količine gibanja elementa tekućine</p>	=	<p>Suma vanjskih sila na element tekućine</p>
---	---	---

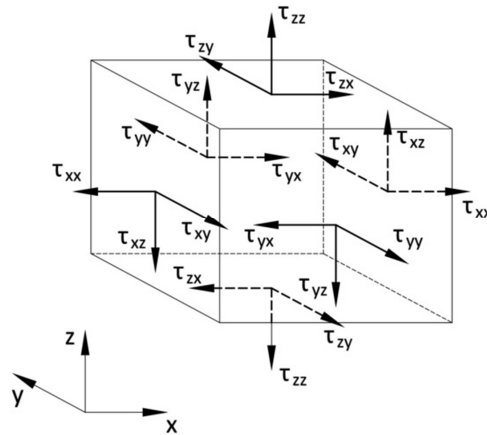
Rata prirasta količine gibanja u x , y i z smjeru po jedinici volumena djelića tekućine predstavlja se članovima:

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt}$$

Prisutne su dvije vrste sila na djelić tekućine: površinske (sila tlaka, sila viskoznosti), masene (centrifugalna sila, Coriolis-ova sila).

Učestala je praksa da se površinske sile separiraju sa zasebnim članovima dok se učešće masenih sila tretira kroz članove izvora/ponora.

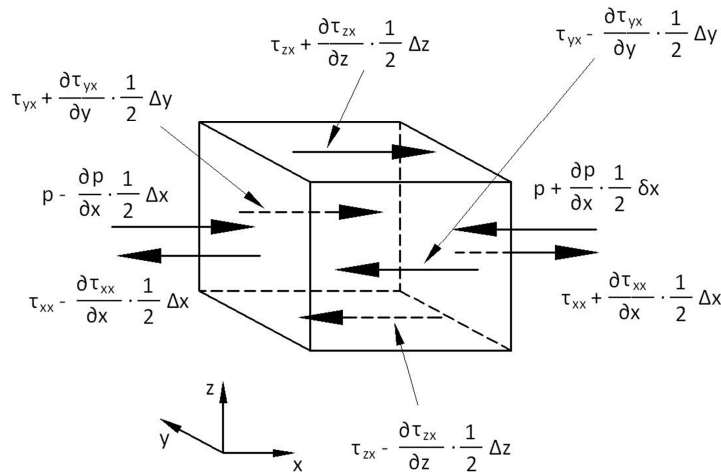
Stanje naprezanja elementa tekućine definira se članovima tlaka i devet komponenti viskoznog naprezanja. Tlak predstavlja normalno naprezanje, i notiran je sa p . Za viskozna naprezanja koristi se oznaka τ .



Slika 3

Uobičajena indeksna notacija τ_{ij} koristi se za indicaciju smjera djelovanja viskoznih naprezanja. Indeksi i te j u oznaci τ_{ij} ukazuju da komponenta naprezanja djeluje u j smjeru na površinu okomitu na i smjer.

Prvo analiziramo x -komponentu sile tlaka p i naprezanja τ_{xx} , τ_{yx} , τ_{zx} . Sile usmjerene u smjeru pozitivne orijentacije x osi poprimaju pozitivan predznak odnosno negativan predznak ukoliko su suprotnog smjera. Na lica E i W imamo:



Slika 4

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z = \left(- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.4)$$

Ukupna sila na parove lica N , S i T , B su:

$$-\left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y\right) \Delta x \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y\right) \Delta x \Delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.5)$$

$$-\left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z\right) \Delta x \Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z\right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.6)$$

Ukupna sila po jedinici volumena uzrokovana navedenim površinskim naprezanjima jednaka je njihovoj sumi dijeljenoj sa volumenom $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Bez detaljnijeg razmatranja masenih sila njihov utjecaj uzet je u obzir uvođenjem člana izvora S_{Mx} u odgovarajućoj jednadžbi količine gibanja za x smjer po jedinici volumena i u jediničnom vremenu.

Izraz za x komponentu zakona očuvanja količine gibanja dobiva se izjednačavanjem rate promjene količine gibanja djelića tekućine i ukupne sile u x smjeru od površinskih sila plus rata prirasta količine gibanja od djelovanja izvora (za y i z komponentu dobiva se analogno) :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (1.7a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (1.7b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz} \quad (1.7c)$$

1.3. Jednadžba očuvanja energije u tri smjera

Primjenom prvog zakona termodinamike:

Rata prirasta energije elementa tekućine	=	ukupna rata topline predane elementu tekućine	+	ukupna rata rada izvršenog na elementu tekućine
--	---	---	---	---

Izraz za ratu prirasta energije čestice tekućine po jediničnom volumenu ima oblik:

$$\rho \frac{DE}{Dt}$$

Rata rada izvršenog na česticu tekućine u promatranom elementu putem djelovanja površinskih sila jednaka je umnošku sile i komponente brzine u smjeru djelovanja sile. Rad sila koje djeluju u x smjeru dan je sa:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) - \left(\tau_{xx} u - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) + \left(\tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z \\ & + \left[- \left(\tau_{yx} u - \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) + \left(\tau_{yx} u + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) \right] \Delta x \Delta z \\ & + \left[- \left(\tau_{zx} u - \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) + \left(\tau_{zx} u + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) \right] \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Ukupna rata rada površinskih sila koje djeluju u x smjeru dan je izrazom:

$$\left[\frac{\partial(u(-p + \tau_{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

Komponente površinskog naprezanja u y i z smjeru također imaju učešće pri radu izvršenom na česticu tekućine. Dodatna rata rada koja je izvršena na česticu tekućine kroz izvršeni rad tih površinskih sila je:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v(-p + \tau_{yy}))}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \\ & \left[\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w(-p + \tau_{zz}))}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

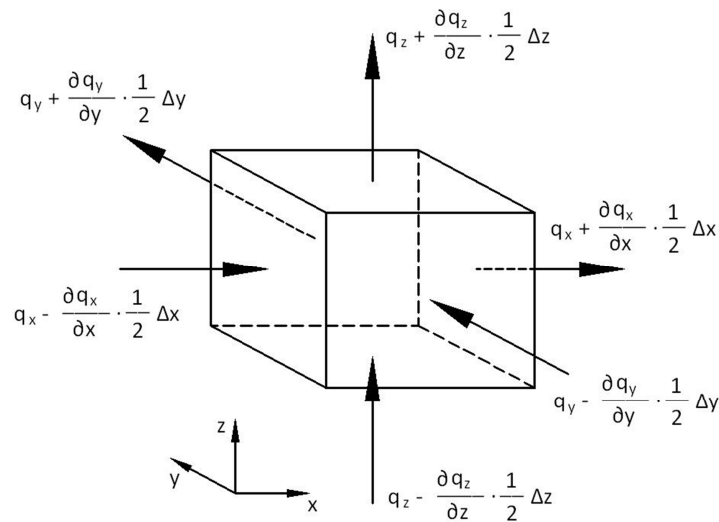
Ukupna rata rada izvršenog na česticu tekućine jediničnog volumena od strane svih površinskih sila je dobivena sumacijom te dijeljenjem sa volumenom $\Delta x \Delta y \Delta z$. Članovi koji sadrže tlak mogu se združiti i zapisati u kompaktnijoj vektorskoj formi:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\text{div}(\rho \mathbf{u}) \quad (1.8)$$

Time je dobiven sljedeći izraz za ukupnu ratu rada izvršenog na čestici tekućine putem površinskih naprezanja:

$$\begin{aligned} & [-\text{div}(\mathbf{p}\mathbf{u})] + \left(\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right) \\ & + \left(\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Vektor toplinskog toka \mathbf{q} ima tri komponente: q_x , q_y i q_z .



Slika 5

Ukupna rata toplinske izmjene na česticu tekućine putem toplinskog toka u x smjeru je dan kroz razliku rate unešene topline (kroz lice W) i rate iznešene topline (kroz lice E):

$$\left[\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.9)$$

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{u } y \text{ smjeru}) \quad -\frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{u } z \text{ smjeru})$$

Ukupna rata topline koja je dodana jediničnom volumenu čestice tekućine putem toplinskog toka kroz njegove granice (lica) je suma podijeljena sa $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div } \mathbf{q} \quad (1.10)$$

Fourier-ov zakon vođenja topline povezuje toplinski tok i lokalni gradijent temperature na način:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.11a,b,c)$$

Ili u vektorskoj formi:

$$\mathbf{q} = -k \text{grad} T \quad (1.12)$$

Konačna forma izraza za ratu prirasta topline za česticu tekućine putem vođenja topline kroz rubove (lica) elementa glasi:

$$-\text{div} \mathbf{q} = \text{div}(-k \text{grad} T) \quad (1.13)$$

Potrebno je definirati pojam specifične energije tekućine E . Uobičajena je praksa da se zbrajaju unutarnja (termalna) energija i , kinetička energija $\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$ i gravitaciona potencijalna energija. Takva definicija promatra element tekućine sa svojstvom sadržavanja gravitacione potencijalne energije.

Gravitacionu potencijalnu energiju može se promatrati kao masenu silu sa doprinosom radu na element tekućine pri njegovom kretanju kroz gravitaciono polje. U našem pristupu efekti promjene potencijalne energije uzeti su u obzir kao članovi izvora definirajući izvor energije S_E po jediničnom volumenu u jedinici vremena.

Očuvanje energije čestice tekućine uspostavlja se izjednačenjem rate promjene energije čestice tekućine sa sumom ukupne rate rada izvršenog na česticu tekućine, ukupne rate dodane topline tekućini te rati povećanja energije putem izvora.

Odgovarajuća energetska jednažba je:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} = & -\text{div}(\rho \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right) \\ & + \left(\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right) + \text{div}(-k \text{grad} T) + S_E \end{aligned} \quad (1.14)$$

gdje je:

$$E = i + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \quad (1.15)$$

Ekstrakcijom promjene (mehaničke) kinetičke energije dobiva se jednažba unutarnje energije i ili temperature T .

Dio energetske jednadžbe koji se odnosi na kinetičku energiju dobiva se množenjem jednadžbe količine gibanja u x smjeru sa komponentom brzine u i analogno za y i z smjer (množenje komponentnih jednadžbi količine gibanja sa odgovarajućim komponentama vektora brzina), te sumacijom rezultata. Time se dobiva jednadžba očuvanja kinetičke energije (2):

$$\rho \frac{D \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]}{Dt} = -\mathbf{u} \cdot \text{grad} p + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \cdot S_M \quad (1.16)$$

Oduzimanjem (1.16) od (1.15) i definiranjem novog člana izvora $S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot S_M$ dobiva se jednadžba unutrašnje energije (1.17):

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{div} \mathbf{u} + \text{div} (k \text{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (1.17)$$

U slučaju nestišljive tekućine imamo $i = cT$ (c - specifična toplina) te vrijedi: $\text{div} \mathbf{u} = 0$. To nam omogućuje reduciranje jednadžbe (1.17) na oblik temperaturne jednadžbe (1.18):

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \text{div} (k \text{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (1.18)$$

1.3.1. Jednadžbe stanja

Gibanje tekućine u tri smjera je opisano sustavom od pet parcijalnih diferencijalnih jednadžbi : očuvanja mase, x, y, z -očuvanja količine gibanja i jednadžbe energije. Među nepoznicama pojavljuju se četiri termodinamičke varijable: ρ, p, i te T .

Odnosi između termodinamičkih varijabli mogu se promatrati kroz pretpostavku termodinamičke ravnoteže. Za opis stanja supstance u termodinamičkoj ravnoteži potrebno je poznavati samo dvije varijable.

Jednadžbe stanja povezuju druge varijable sa poznatim varijablama. Ukoliko se primjerice koriste ρ i T kao varijable sa poznatim vrijednostima moguća je uspostava jednadžbi stanja za tlak p i specifičnu unutarnju energiju i :

$$p = p(\rho, T) \quad i = i(\rho, T) \quad (1.19a,b)$$

Za savršeni plin od koristi su poznate jednadžbe stanja:

$$p = \rho RT \quad i = C_V T \quad (1.20a,b)$$

Usvajanjem pretpostavke o termodinamičkoj ravnoteži eliminira se potreba za definiranjem izraza za sve pojedinačne varijable, osim dvije.

U strujanju stišljive tekućine jednadžbe stanja daju poveznicu između energetske jednadžbe s jedne strane i jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja s druge strane. Ta poveznica pojavljuje se zbog moguće varijacije gustoće uslijed varijacije tlaka i temperature u polju strujanja.

Kapljevine i plinovi koje struje s malim brzinama ponašaju se kao nestišljive tekućine. Bez varijacije gustoće ne postoji veza između energetske jednadžbe i jednadžbi očuvanja mase i količine gibanja. Tada je za rješavanje strujnog polja dovoljno razmatrati jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja. Energetska jednadžba uključuje se u analizirani sustav jednadžbi samo u slučaju prisustva izmjene topline.

2. Navier-Stokes jednadžba za Newton-ovu tekućinu

U osnovnim jednadžbama kao nepoznanice pojavljuju se i komponente viskoznog napreznja τ_{ij} . Zbog toga se uvodi odgovarajući model opisa viskoznih napreznja τ_{ij} . U mnogim tokovima viskozna napreznja mogu se opisati kao funkcije rate lokalne deformacije ili rate napreznja. U trodimenzionalnom strujanju lokalna rata deformacije je sadržana od rate linearne deformacije i volumne rate deformacije.

Svi plinovi i mnoge kapljevine su izotropni . U nastavku se usvaja pretpostavka izotropnosti promatrane tekućine.

Rata linearne deformacije elementa tekućine ima devet komponenata u tri dimenzije. Šest ih je neovisno u izotropnim tekućinama te je uobičajena primjena simbolnih oznaka s_{ij} . Tri linearne komponente deformacija u smjeru koordinatnih osi su:

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.1a,b,c)$$

Za šest linearnih komponenti posmičnih deformacija koriste se izrazi:

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad s_{xz} = s_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.2a,b,c)$$

Volumna deformacija je opisana sa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{u} \quad (2.3a,b,c)$$

U Newton-ovim tekućinama viskozna napreznja su tretirana kao proporcionalana ratama deformacija (brzinama deformacija). Trodimenzionalna forma Newton-ovog zakona viskoznosti za strujanje stišljive tekućine uvlači dvije konstante proporcionalnosti: dinamička viskoznost μ (poveznica napreznja i linearnih deformacija) i sekundarna viskoznost λ (poveznica napreznja i volumne deformacije). Devet komponenti viskoznih napreznja, od kojih je šest neovisno su:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.4a,b,c)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \quad (2.4d,e,f)$$

O sekundarnoj viskoznosti λ ne zna se puno zbog njezinog malog efekta u problemima praktične prirode. Pokazalo se da je u analizi strujanja plinova zadovoljavajuće točna aproksimacija definirana sa: $\lambda = (-2/3) \mu$.

Ukoliko se promatra slučaj nestišljive tekućine vrijedi $\text{div } \mathbf{u} = 0$, a viskozna naprezanja jednaka su dvostrukoj lokalnoj rati linearnih deformacija množenoj s dinamičkom viskoznosti. Supstitucijom posmičnih naprezanja u x, y, z komponentama jednadžbe očuvanja količine gibanja dobiva se sustav tzv. Navier–Stokes jednadžbi:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{My} \quad (2.5a,b,c) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + S_{Mz} \end{aligned}$$

Uobičajena je manipulacija viskoznih naprezanja na sljedeći način (y, z analogno):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \text{div } \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \text{div } \mathbf{u}) \right] \\ &= \text{div}(\mu \text{grad } \mathbf{u}) + [S_{Mx}] \quad (2.6) \end{aligned}$$

Kako bi se pojednostavili izrazi za očuvanje količine gibanja, članovi s manjim doprinosom (u uglatim zagradama) pripisuju se članovima viskoznog naprezanja u izvorima količine gibanja. Time se definira novi oblik izvora $S_M = S_M + [S_M]$ u Navier–Stokes jednadžbama. Prikazana forma pogodna je za primjenu metode konačnih volumena (detaljnije objašnjena u poglavljima koje slijede):

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My} \quad (2.7a,b,c) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz} \end{aligned}$$

Ukoliko se koristi Newton-ov model za viskozna naprezanja, jednadžba unutrašnje energije nakon nekoliko koraka sređivanja poprima oblik:

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i \quad (2.8)$$

Efekti koji nastaju uslijed viskoznih naprezanja opisani su disipacijskom funkcijom Φ u gornjoj jednadžbi unutarnje energije, koja nakon nekoliko koraka algebarske manipulacije, poprima sljedeći oblik:

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2$$

(2.9)

Disipacijska funkcija je uvijek pozitivna zbog kvadratnih članova te predstavlja izvor unutrašnje energije uslijed rada na deformaciji fluidne čestice. Taj rad je ekstrahiran iz mehaničke energije, koja uzrokuje gibanje, i konvertiran je u unutarnju energiju topline.

2.1. Konzervativni oblik jednadžbi strujanja tekućine

Konzervativna ili divergentna forma sustava jednadžbi kojom se opisuje vremenska ovisnost trodimenzionalnog strujanja tekućine i izmjene topline stišljive Newton-ove tekućine glasi:

$$1. \text{ očuvanje mase: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.10a)$$

$$2. \text{ očuvanje količine gibanja: } \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{MX} \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + S_{MY} \quad (2.10c)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + S_{MZ} \quad (2.10d)$$

$$3. \text{ očuvanje energije: } \frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho i \mathbf{u}) = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i \quad (2.10e)$$

$$4. \text{ jednadžbe stanja: } p = p(\rho, T) \quad ; \quad i = i(\rho, T) \quad (2.10f,g)$$

Potrebno je naglasiti da pretpostavka termodinamičke ravnoteže nadopunjuje pet parcijalnih diferencijalnih jednadžbi strujanja sa daljnje dvije algebarske jednadžbe. Uvođenje Newton-ovog modela za opis viskoznih naprezanja u vidu gradijenata komponenti vektora brzine rezultira sa sustavom od sedam jednadžbi i sedam nepoznanica.

Obzirom da je na raspolaganju dovoljan broj jednadžbi u odnosu na nepoznanice sustav je matematički zatvoren, odnosno moguće ga je riješiti uz primjenu odgovarajućih početnih i rubnih uvjeta.

3. Diferencijalna i integralna forma opće jednačbe pronosa

Primjećuju se određene sličnosti između različitih jednačbi očuvanja. Ukoliko se uvede opća varijabla ϕ , konzervativna forma svih jednačbi strujanja tekućine, uključujući jednačbe za skalarne veličine poput temperature ili koncentracije itd., može se pisati u slijedećoj formi (tzv. jednačbe pronosa za svojstvo tekućine ϕ):

Rata prirasta ϕ u elementu tekućine	+	ukupna rata protoka ϕ van iz elementa tekućine	=	rata povećanja ϕ uslijed difuzije	+	rata povećanja ϕ zbog djelovanja izvora
---	---	---	---	---	---	--

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

Član **rate promjene** i **konvektivni član** su sa lijeve strane dok su članovi **difuzije** (Γ = koeficijent difuzije) i **član izvora** na desnoj strani.

Postavljenjem ϕ jednakim 1, zatim jednakim u, v, w te jednakim i (ili T) i izborom odgovarajućih vrijednosti za koeficijent difuzije Γ i član izvora, dobiva se posebna forma jednačbi za svaku od pet PDJ za očuvanje mase, količine gibanja i energije.

Potrebno je naglasiti da integracija jednačbi pronosa za svojstvo ϕ (jednačba 3.1) preko trodimenzionalnog kontrolnog volumena (CV) predstavlja upravo ključni korak u metodi konačnih volumena:

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV \quad (3.1)$$

Volumni integral drugog člana lijeve strane (konvektivni član) i prvog člana desna strane (član difuzije) pisani su u formi integrala preko oplošnih površina (granica) kontrolnog volumena primjenom Gauss-ovog divergentnog teorema. Primjenom Gauss-ovog divergentnog teorema na vektor \mathbf{a} definirana je jednakost:

$$\int_{CV} \text{div}(\mathbf{a}) dV = \int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.3)$$

Fizikalna interpretacija člana n.a je ta da se promatra komponenta vektora \mathbf{a} u smjeru vektora vanjske normale \mathbf{n} na segment kontrolne površine dA . Prema tome, integral divergencije vektora \mathbf{a} po volumenu je jednak komponenti vektora \mathbf{a} u smjeru vanjske normale na element oplošja volumena sa integracijom po cijeloj oplošnoj površini A .

Primjenom Gauss-ovog divergentnog teorema, jednačba (1) može se zapisati na način :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A (\rho \phi \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_A (\Gamma \text{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (3.4)$$

Rata prirasta ϕ unutar kontrolnog volumena	+	Ukupna rata smanjenja ϕ uslijed konvekcije kroz oplošje kontrolnog volumena	=	Ukupna rata povećanja ϕ uslijed difuzije kroz oplošje kontrolnog volumena	+	Ukupna rata proizvodnje ϕ unutar kontrolnog volumena
---	---	---	---	---	---	--

Redosljed integracije i diferencijacije promijenjen je u slučaju prvog člana lijeve strane kako bi se ilustriralo njegovo fizikalno značenje (rata promjene ukupne količine svojstva tekućine ϕ u kontrolnom volumenu).

U stacionarnim problemima član rate promjene je jednak nuli, što vodi do integralne forme stacionarne jednačbe pronosa:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (3.5)$$

U nestacionarnim problemima također je potrebno provesti integraciju po vremenu t kroz mali vremena inkrement Δt , od t do $t + \Delta t$. Time se dobiva najopćenitija forma jednačbe pronosa:

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt = \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad} \phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\phi dV dt \quad (3.6)$$

4. Klasifikacija po fizikalnim karakteristikama

Koncentriramo pažnju na pitanja početnih i rubnih uvjeta koji su potrebni za iznalaženje matematičkog modela strujanja tekućina. Razlikujemo dvije principijalne kategorije fizikalnih karakteristika: situacije stacionarnog stanja (problemi ravnoteže) i nestacionarnog stanja (eng: marching problems).

Stacionarni problemi opisuju se **eliptičnim jednadžbama**. Tipičan primjer eliptične jednadžbe je Laplaceova jednadžba kojom se opisuje bezvrtložno strujanje nestišljive tekućine i stacionarna stanja pronosa mase. Za dvodimenzionalni problem jednadžba glasi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Jednostavan primjer problema ravnoteže je stacionarno stanje raspodjele koncentracije otopljene tvari (gdje je $\phi = c$) u izoliranoj cijevi uz odsustvo strujanja, koja na rubovima $x = 0$ i $x = L$ ima vremenski konstantne i međusobno različite koncentracije c_0 and c_L . Jednodimenzionalni problem opisan je jednadžbom:

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} = 0 \quad (4.2)$$

Uz poznavanje odgovarajućih rubnih uvjeta raspodjelu koncentracija u x smjeru biti će pravac (slika 4.1). Jedinstveno rješenje za taj i sve eliptičke probleme može se dobiti specifikacijom uvjeta za zavisnu varijablu (u ovom slučaju koncentracija ili derivacija toka mase otopljene tvari) na svim rubovima prostorne domene rješenja. Problemi koji zahtijevaju poznavanje podataka uzduž cjelokupnog ruba nazivaju se **problemi rubnih uvjeta**.

Važna karakteristika eliptičkih problema je ta da poremećaj unutar domene rješenja (npr. promjena koncentracije uslijed pojave izvora mase otopljene tvari sa odgovarajućom koncentracijom) izmjenjuje rješenje na cijelom području rješenja. Poremećajni signal se širi u svim smjerovima unutar domene rješenja. Posljedično, rješenja fizikalnih problema opisanih sa eliptičnim jednadžbama su uvijek glatka, čak i u slučaju prisustva diskontinuiteta na području rubnih uvjeta. Kako bi se osiguralo da se informacije šire u svim smjerovima, numeričke tehnike za rješavanje eliptičkih problema moraju dozvoliti da se događaj u svakoj proračunskoj točki nalazi pod utjecajem svih susjednih točaka.

Tranzijentna izmjena mase ili topline, sva nestacionarna strujanja i valna fenomenologija su opisane sa paraboličkim i hiperboličkim jednadžbama.

Paraboličkim jednadžbama opisuju se nestacionarni problemi koji uključuju značajniji doprinos difuzije. Primjeri su nestacionarno viskozno strujanje, nestacionarni pronos otopljene tvari ili nestacionarno vođenje topline uz odsustvo strujanja. Prototip parabolične jednadžbe je jednadžba difuzije:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

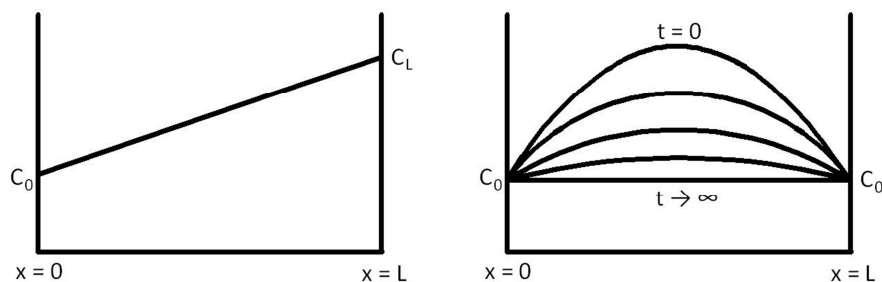
Za primjer se promatra tranzijentna promjena raspodjele koncentracija ($\phi = c$) uzduž izolirane cijevi. Inicijalna raspodjela koncentracija je usvojena kao parabola s maksimumom na polovici cijevi $x = L/2$ (momentalno nisu bitni razlozi takve inicijalne raspodjele). Ukoliko se nakon vremena $t = 0$ na rubovima cijevi $x = 0$ i $x = L$ zadržavanju jednake i konstantne koncentracije c_0 , adekvatan opis problema dan je difuznom jednadžbom:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Konačna stacionarna razdioba temperature je jednolika $c = c_0$ uzduž cijevi (slika 4.1).

Rješenje difuzne jednadžbe je eksponencijalno zamiranje inicijalne parabolične raspodjele koncentracije. Potrebni su početni uvjeti za cijelu cijev i uvjeti na svim rubovima za cjelokupni vremenski period $t > 0$. Takav tip problema se naziva **problem početnih i rubnih uvjeta**.

Poremećaj u točki unutar domene rješenja ($0 < x < L$ i vremena $t > 0$) može utjecati jedino na događaje u kasnijem periodu $t > t_1$ (rješenje se pomiče unaprijed u vremenu te se difuzno širi u prostoru).

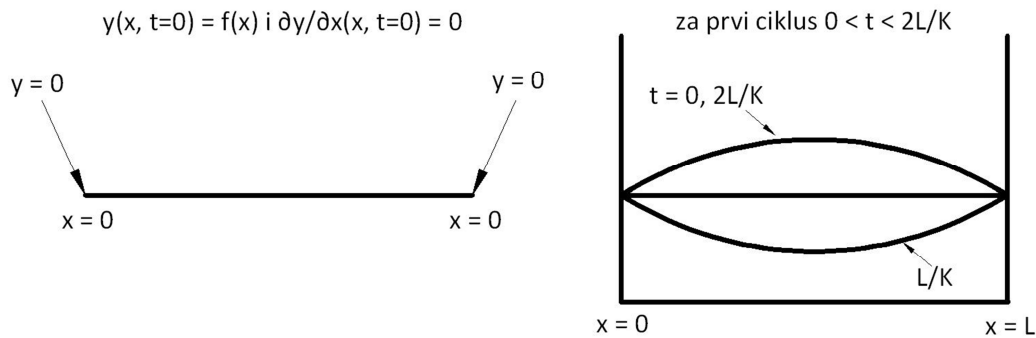


Slika 4.1 Stacionarni (lijevo) i tranzijentni (desno) slučaj raspodjele koncentracija otopljene tvari u cijevi uz zadane rubne uvjete (eliptični problem, lijevo) te početne i rubne uvjete (parabolički problem, desno)

Hiperbolne jednadžbe dominiraju u analizi problema oscilacija. Pojavljuju se u opisu nestacionarnih procesa sa zanemarivo malim utjecajem energetske disipacije. Tipična hiperbolna jednadžba je valna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.5)$$

Gornja forma jednačbe primjerice opisuje transferzalni pomak ($\phi = y$) napregnute žice tijekom oscilacija sa malim amplitudama ili akustičke oscilacije. Konstanta K u tom slučaju predstavlja brzinu vala (slika 4.2).



Slika 4.2 Transferzalni pomak napregnute žice u definiranju početnih i rubnih uvjeta (hiperbolni problem)

Rješenje valne jednačbe i drugih hiperbolnih jednačbi dobiva se specificiranjem dva početna uvjeta za pomak žice y te jednog rubnog uvjeta na svim rubovima (granicama) za vrijeme $t > 0$. Prema tome, hiperbolni problemi su također **problemi početnih i rubnih uvjeta**.

$$y(x, t) = a \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.6)$$

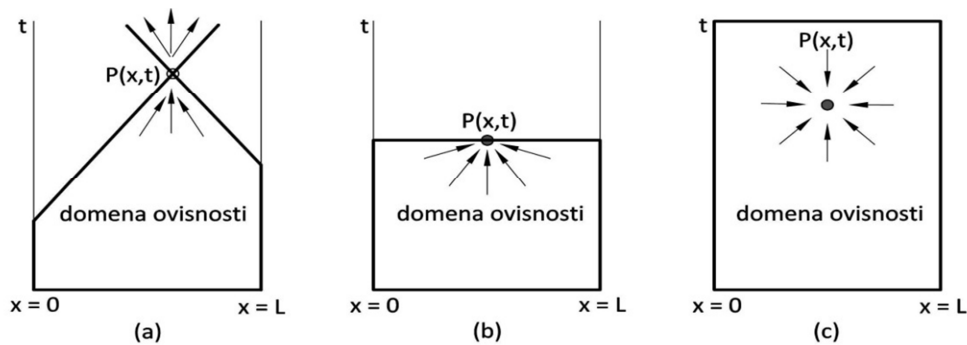
Rješenje ukazuje na konstantnost amplitude, odnosno nepostojenje sile prigušenja. Odsustvo prigušenja ima za posljedicu da se inicijalno prisutni diskontinuiteti zadržavaju tijekom vremena $t > 0$.

Poremećaj u točki utječe na rješenje samo u ograničenom dijelu prostora. Brzina propagacije poremećaja u hiperbolnim problemima je konačna i jednaka valnoj brzini K . Za usporedbu, u paraboličnim i eliptičnim problemima pretpostavlja se beskonačna brzina propagacije.

Za točke vrlo bliske x osi domena ovisnosti je zatvorena sa dvije karakteristike koje imaju izvorište u točki koja se nalazi na x osi (slika 4.3a). Karakteristike kroz točku P presijecaju rubove (granice) problema. Domena ovisnosti o P je zatvorena sa te dvije karakteristike te linijama $t = 0$, $x = 0$ i $x = L$.

Oblik domene ovisnosti u paraboličkim (slike 4.3b) i eliptičnim (slike 4.3c) problemima je različita zbog pretpostavke širenja informacija sa beskonačnom brzinom. Deblje linije (rubovi

pojedinih domena ovisnosti) definiraju područja za koja su potrebni početni i/ili rubni uvjeti da bi se omogućilo generiranje rješenja u točki $P(x,t)$.



Slika 4.2 Transferzalni pomak napregnute žice u definiranje početnih i rubnih uvjeta (hiperbolni problem)

Način na koji promjena u pojedinoj točki djeluje na druge točke ovisi o tome da li promatrani fizikalni problem predstavlja stacionarni ili tranzijentni fenomen te da li je brzina propagacije poremećaja konačna ili beskonačna.

Navedeno rezultira sa klasifikacijom fizikalnih karakteristika i podjelom PDJ u eliptične, parabolne ili hiperbolne.

Praktična metoda klasifikacije PDEs je izvedena za opći slučaj PDJ drugog reda u dvije dimenzije x and y :

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0 \quad (4.7)$$

Pretpostavlja se da je jednačba linearna sa koeficijentima a, b, c, d, e, f i g danim kao konstantama. Klasifikacija PDJ je provedena u smislu ponašanja derivacije najvišeg reda, pa shodno tome promatramo samo članove derivacije drugog reda. Klasa PDJ drugog reda može se identificirati putem iznalaženja mogućeg jednostavnog harmonijskog (valnog) rješenja. Ukoliko ona postoje radi se o hiperboličkoj jednačbi. Ukoliko ne, jednačba je parabolička ili eliptična.

Jednostavno valno rješenje pojavljuje se u slučaju da karakteristična jednačba ima dva realna korijena:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad (4.8)$$

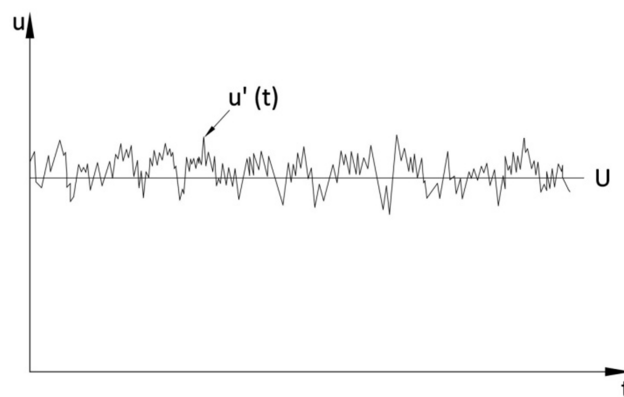
Postojanje i broj realnih rješenja karakteristične jednadžbe ovisi o vrijednosti diskriminante ($b^2 - 4ac$). Razlikujemo tri slučaja (tablica 4.1).

Tablica 4.1 karakterizacija jednadžbi prema broju realnih rješenja diskriminante ($b^2 - 4ac$)

$b^2 - 4ac$	Tip jednadžbe	Karakteristike
> 0	Hiperbolni	Dvije realne
$= 0$	Parabolni	Jedna realna
< 0	Eliptični	Nema karakteristika

5. Modeli turbulencije

Reynoldsov broj daje mjeru relativne važnosti inercionih sila (povezanih sa efektima konvekcije) i viskoznih sila. Ekperimentalnom djelatnosti pokazalo se da strujanje pri vrijednostima Reynoldsovog broja manjeg od tzv. kritičnog Re_{krit} ima odlike nemiješanja između međusobnih slojeva (lamina). Taj režim se naziva **laminaran**. Pri vrijednostima Reynolds-ovog broja iznad Re_{krit} pojavljuje se složeni niz događaja koji u načelu vodi do radikalne promjene karaktera strujanja. U konačnom stadiju strujanje se ponaša kao kaotično i slučajno. Takovo gibanje je u osnovi nestacionarno čak i u uvjetima uspostavljenih konstantnih rubnih uvjeta. Brzina i svi ostali parametri toka variraju na način koji je kaotičan i slučajan pa se takav režim strujanja naziva **turbulentnim**.



Slika 5.1 Primjer izmjerene vremenske serije brzina u točki turbulentnog strujnog polja

Slučajna priroda turbulentnog strujanja potrebuje neki “ekonomičan” opis gibanja tekućine svih čestica tekućine. Na slici je prikazana dekompozicija stvarne brzine $u(t)$ u nekom trenutku vremena na stacionarnu srednju vrijednost brzine U i fluktuirajuću komponentu $u'(t)$ te vrijedi: $u(t) = U + u'(t)$. Takav tretman naziva se **Reynolds –ova dekompozicija**. Svi parametri toka mogu se karakterizirati na isti način, u smislu srednjih vrijednosti (U, V, W, P itd.) i neke statističke karakteristike fluktuirajuće komponente (u', v', w', p' itd.).

Čak i u tokovima u kojima srednja brzina i tlakovi variraju samo u jednoj ili dvije dimenzije, turbulentne fluktuacije uvijek imaju 3D karakter. Vizualizacija turbulentnog strujanja potvrdila je rotacionu strukturu toka odnosno prisustvo turbulentnih vrtloga (eng: turbulent eddies), sa širokim rasponom mjerila duljina. Čestice koje su inicijalno prostorno separirane na relativno velikoj udaljenosti mogu se potpuno približiti sa vrtložnim gibanjem (i obratno). To upućuje na prisustvo vrlo efikasnog mehanizma izmjene topline, mase ili količine gibanja. Primjerice, unošenje boje u nekoj točki turbulentnog toka ukazuje na rapidno disperziranje i smanjenje inicijalnog intenziteta boje po cijelom području strujanja. Takvo efektivno miješanje upućuje na visoke vrijednosti koeficijenta difuzije za masu, količinu gibanja i toplinu.

Najveći turbulentni vrtlozi ekstrahiraju energiju iz “osrednjenog” toka kroz proces zvan **vtložno rastezanje (eng: vortex stretching)**. Prisustvo gradijenta u profilima brzina osrednjenog strujanja distordira rotirajuće turbulentne vrtloge odnosno vrtlozi se deformiraju zbog prisile na brže gibanje jednog dijela vrtloga od drugog.

Karakteristična brzina ϑ i karakteristična duljina većih vrtloga su istog reda veličine kao i mjera brzine U i mjera duljine L osrednjenog strujanja. Zbog toga Reynoldsov broj za “velike vrtloge” $Re = \vartheta/\nu$ (odnos mjerila vrtloga i kinematske viskoznosti) poprima velike vrijednosti u turbulentnim tokovima, slično kao i sam $Re = UL/\nu$. Time se ukazuje i na dominaciju inercionih efekata nad zanemarivim viskoznim efektima.

Prema tome, strujanje u zoni velikih vrtloga se zbog dominacije inercije i minornog utjecaja viskoznosti može shvatiti kao bezviskozno a količina momenta ostaje konzervirana u procesu rastezanja vrtloga. Nadalje, to uzrokuje povećanje rate rotacije i istovremeno smanjenje radijusa poprečnog presjeka vrtloga. Takvim procesom generira se gibanje na manjoj transferzalnoj prostornoj skali i manjoj vremenskoj skali. Pri rastezanju vrtloga rad izvršen od strane osrednjenog toka na velike vrtloge tijekom opisanog procesa osigurava energiju potrebnu za održavanje turbulencije.

Manji vrtlozi su dominantno deformirani (rastegnuti) od strane nešto većih vrtloga i manje intenzivno od strane osrednjenog strujanja. Na taj način se kinetička energija velikih vrtloga predaje na progresivno sve manje i manje vrtloge (tzv. **energetska kaskada**).

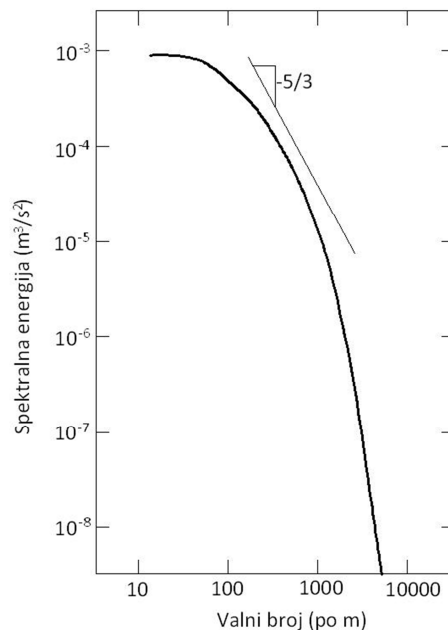
Sve fluktuirajuće komponente turbulentnog toka sadrže energiju u širokom rasponu frekvencija ili valnih brojeva ($= 2\pi f/U$ gdje je f oznaka za frekvenciju). Primjer energetskog spektra turbulencije za strujanje iza fine rešetke prikazan je na slici 5.2.

Spektralna energija $E(K)$ je funkcija valnog broja $K=2\pi/\lambda$ (λ je valna duljina vrtloga). Spektralna energija $E(K)$ je kinetička energija po jedinici mase za jedinični valni broj fluktuacija oko valnog broja k .

Dijagram ukazuje na prisustvo vršne vrijednosti u području malih valnih brojeva, odnosno na činjenicu da veliki vrtlozi sadrže najviše energije. Oni primaju energiju kroz snažnu interakciju sa osrednjenim strujanjem. Vrijednost $E(K)$ se rapidno smanjuje pri povećanju valnog broja pa najmanji vrtlozi imaju najmanji energetska sadržaj.

U tipičnim inženjerskim problemima najmanja mjera gibanja u turbulentnom toku imaju duljine reda veličine od 0.1 to 0.01 mm i frekvencije oko 10 kHz, pri čemu dominira viskoznost. Reynoldsov broj Re_η za najmanje vrtloge temelji se na njihovim karakterističnim brzinama ϑ i karakterističnim duljinama η te poprima vrijednost $Re_\eta = \vartheta\eta/\nu = 1$. Prema tome

najmanja mjerila prisutna u turbulentnim tokovima su ona u kojima i efekti inercije i efekti viskoznosti imaju važnost.



Slika 5.2 Energetski spektar turbulencije za stujanje iza fine rešetke

Ta mjerila nazivaju se Kolmogorov-a mikro mjerila, pri kojima se rad ulaže u svladavanje viskoznih naprezanja. Zaključno, energija vezana uz gibanje malih vrtloga je disipirana odnosno prenesena u termalnu unutrašnju energiju. Disipacija rezultira sa povećanim gubicima mehaničke energije u turbulentnim tokovima.

Najveći vrtlozi su izraženo anizotropni (fluktuacije su različite u različitim smjerovima) i nalaze se pod snažnim utjecajem rubnih uvjeta. Pri velikim Reynolds-ovim brojevima osrednjenog strujanja najmanji vrtlozi u turbulentnom toku su izotropni.

Kolmogorov je izveo univerzalnu spektralnu karakteristiku vrtloga srednjih veličina, koji su dovoljno veliki da doprinos viskoznosti ostaje zanemariv (kao i kod velikih vrtloga), ali istovremeno dovoljno mali da se detalji njihovog ponašanja mogu izraziti kao funkcija rate energetske disipacije ε (kao kod malih vrtloga). Odgovarajuće mjerilo duljina za te vrtloge je $1/k$, a njihova spektralna energija u tom inercionom podpodručju (eng: “inertial subrange”) može se izraziti s:

$$E(K) = \alpha k^{-5/3} \varepsilon^{2/3} \tag{5.1}$$

Mjerenja su pokazala da konstanta α poprima vrijednost ≈ 1.5 . Na dijagramu spektralne energije (slika 5.2) ucrtana je linija sa nagibom $-5/3$ a prema izmjerenim rezultatima je razvidno da separacija mjerila nije dostatna za “čisto” inerciono podpodručje. Preklapanje između velikih i malih vrtloga je locirano oko vrijednosti $K \approx 1000$.

Sve varijable strujanja (komponente brzine, tlak, temperatura, gustoća itd.) iskazuju se kao vremenski zavisne. Reynolds-ova dekompozicija $\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t)$ definira karakteristiku toka φ u točki kao sumu stacionarne osrednjene komponente Φ i vremenski promjenljive odnosno fluktuirajuće komponente $\varphi'(t)$ sa srednjom (osrednjenom) vrijednosti 0. Osrednjena vrijednost Φ karakteristike strujanja φ je definirana izrazom 5.2a a vremenski osrednjena vrijednost fluktuacija izrazom 3 (5.2b):

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt \quad ; \quad \Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt \quad (5.2s,b)$$

Pri stacionarnom osrednjenom strujanju granica vremenskog intervala Δt trebala bi težiti beskonačnosti, no proces opisan jednadžbom daje smislaone vremenski osrednjene vrijednosti i kada je Δt veći od mjerila vremena najsporije varijacije karakteristike φ kod najvećih vrtloga.

Najkompaktniji opis osnovnih karakteristika fluktuirajućih komponenti turbulentnog strujanja dan je u statističkom smislu. Opis primijenjen za odstupanje fluktuacije φ' oko osrednjene vrijednosti Φ su **varijanca** i **korijen srednjeg kvadrata odstupanja** (eng: root mean square - r.m.s.):

$$\overline{\varphi'^2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t)^2 dt \quad ; \quad \varphi_{rms} = \sqrt{\overline{\varphi'^2}} = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t)^2 dt \right]^{1/2} \quad (5.3s,b)$$

R.m.s. vrijednosti komponenti brzine su od posebnog značenja zbog njihovog relativno jednostavnog eksperimentalnog registriranja te značenja prosječnog (osrednjenog) intenziteta fluktuacije brzina. Varijance fluktuacije brzina koriste se u Navier-Stokes jednadžbi. One su proporcionalne protocima količine gibanja, induciranim sa turbulentnim vrtlozima. Time se uzrokuju dodatna normalna naprezanja.

Ukupna turbulentna kinetička energija po jedinici mase k u nekoj točki definira se izrazom:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (5.4)$$

Intenzitet turbulencije T_i je srednji r.m.s. brzine podijeljen sa referentnom srednjom brzinom strujanja U_{ref} te je vezan na turbulentnu kinetičku energiju k na slijedeći način:

$$T_i = \frac{\left(\frac{2}{3} k \right)^{1/2}}{U_{ref}} \quad (5.5)$$

Varijanca se također naziva drugi moment fluktuacija. Važan detalj strukture fluktuacija je sadržan u momentima sačinjenim od para različitih varijabli. Primjerice, promatramo karakteristike $\varphi = \Phi + \varphi'$ i $\psi = \Psi + \psi'$ sa $\overline{\varphi'} = \overline{\psi'} = 0$. Njihov **drugi moment** je definiran kao:

$$\overline{\varphi'\psi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'\psi' dt \quad (5.6)$$

Kada bi brzinske fluktuacije u različitim smjerovima bile neovisne i slučajne njihov drugi moment komponenti brzina $\overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$ bio bi jednak nuli. Turbulencija je povezana sa vrtložnom strukturom toka a inducirane brzinske komponente su kaotične, no ne i neovisne. Prema tome njihov drugi moment nije nula.

U vremenski osrednjenim Navier–Stokes jednadžbama članovi $\overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$ predstavljaju flukseve (protoke) turbulentnih količina gibanja koji su blisko povezani sa dodatnim posmičnim naprezanjima koja djeluju na element tekućine. Momenti tlaka i brzine $\overline{\rho'u'}, \overline{\rho'v'}$ itd. imaju ulogu u difuziji turbulentne energije.

Više detaljnih informacija o strukturi fluktuacija može se dobiti analizom odnosa između vrijednosti fluktuacija u različitim vremenskim terminima. **Autokorelacijska** funkcija $R_{\varphi\varphi}(\tau)$ definirana je izrazom:

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \overline{\varphi'(t)\varphi'(t+\tau)} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varphi'(t)\varphi'(t+\tau) dt \quad (5.7)$$

Slično tome, moguće je definirati daljnju **autokorelacijsku** funkciju $R_{\varphi\varphi}(\xi)$ temeljenu na dva mjerenje u istom terminu, na dvije pozicije sa određenim međusobnim razmakom:

$$R_{\varphi\varphi}(\xi) = \overline{\varphi'(\mathbf{x}, t)\varphi'(\mathbf{x} + \xi, t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varphi'(\mathbf{x}, t')\varphi'(\mathbf{x} + \xi, t') dt' \quad (5.8)$$

Kada je vremenski pomak τ (ili prostorni pomak ξ) nula, vrijednost $R_{\varphi\varphi}$ korespondira varijanci i poprima najveću moguću vrijednost. Ponašanje fluktuacija φ' je kaotično u turbulentnom strujanju pa se može očekivati da fluktuacije pojačano gube korelaciju s $\tau \rightarrow \infty$ (ili $|\xi| \rightarrow \infty$). Stoga, vremenska ili prostorna autokorelacija gravitira nuli.

Vrtlozi u turbulenciji generiraju lokalnu strukturu u toku, pa će postojati korelacija vrijednosti φ' u trenutku t i nakon kraćeg vremena odnosno na određenoj lokaciji x i na malo udaljenoj lokaciji. Proces smanjenja korelacije odvija se graduirano kroz period trajanja tipičnog vrtloga ili na udaljenosti koja odgovara duljini tipičnog vrtloga. Analogno tome definira se **cross-**

correlation funkcija $R_{\varphi'\psi'}(\tau)$ obzirom na vremenski pomak τ ili $R_{\varphi'\psi'}(\xi)$ obzirom na prostorni pomak za par različitih fluktuacija (zamjena drugog φ' sa ψ' u prethodnim jednadžbama autokorelacije).

Turbulencija je generirana i održavana sa gradijentom brzina u profilu osrednjenog strujanja. Na mjestima većih gradijenata intenzitet statističkih obilježja turbulencije (poput r.m.s. brzinskih fluktuacija) je veći. Raspodjela brzinskih fluktuacija je anizotropna, sa višom razinom fluktuacija u smjeru osrednjenog strujanja. Bez gradijenta brzina ili nekog alternativnog generatora turbulencije, turbulencija zamire i postaje više isotropna. U područjima blizu krute granice turbulentna struktura je dominantno pod utjecajem trenja sa granicom (stjenkom) a zamiranje turbulentnih brzinskih fluktuacija okomito je na tu granicu.

5.1. Reynolds-ovo osrednjavanje Navier-Stokes jednadžbi za nestišljive tekućine (RANS)

U nastavku analiziramo posljedice prisustva turbulentnih fluktuacija u jednadžbama osrednjenog strujanja nestišljive tekućine konstantne viskoznosti. Jednakosti koje se koriste u vremenskom osrednjavanju fluktuirajućih karakteristika $\varphi = \Phi + \varphi'$ i $\psi = \Psi + \psi'$ pri njihovom zbrajanju, deriviranju i integriranju su:

$$\overline{\varphi'} = \overline{\psi'} = 0 \quad ; \quad \overline{\Phi} = \Phi \quad ; \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad ; \quad \int \overline{\varphi} ds = \int \Phi ds \quad (5.9a,b,c,d)$$

$$\overline{\varphi' + \psi'} = \Phi + \Psi \quad ; \quad \overline{\varphi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'} \quad ; \quad \overline{\varphi\Psi} = \Phi\Psi \quad ; \quad \overline{\varphi'\Psi} = 0 \quad (5.10a,b,c,d)$$

$$\overline{\text{div } \mathbf{a}} = \text{div } \mathbf{A} \quad ; \quad \overline{\text{div}(\varphi \mathbf{a})} = \text{div}(\overline{\varphi \mathbf{a}}) = \text{div}(\Phi \mathbf{A}) + \text{div}(\overline{\varphi' \mathbf{a}'}) \quad ; \quad \overline{\text{div grad } \varphi} = \text{div grad } \Phi \quad (5.11a,b,c)$$

Razmatramo trenutne jednadžbe kontinuiteta (očuvanje mase) i Navier–Stokes jednadžbe (očuvanje količine gibanja) u kartezijevom koordinatnom sustavu. Vektor brzina \mathbf{u} ima komponente u, v, w u koordinatnim smjerovima x, y, z . Navedenim sustavom može se definirati svaki turbulentni tok.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(u))$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(v)) \quad (5.12a,b,c,d)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(w))$$

Analiziramo efekt fluktuacija na osrednjeno strujanje primjenom Reynoldsove dekompozicije te zamjenom varijabli strujanja \mathbf{u} (odnosno u, v, w) i p sumom osrednjene i fluktuirajuće komponente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' ; u = U + u' ; v = V + v' ; p = P + p' \quad (5.13a,b,c,d)$$

Razmatranjem jednadžbe kontinuiteta i primjenom pravila za vremensko osrednjavanje $\overline{\text{div} \mathbf{u}} = \text{div} \mathbf{U}$ dobiva se **jednadžba kontinuiteta osrednjenog strujanja**:

$$\text{div} \mathbf{U} = 0 \quad (5.14)$$

Sličan tretman provodi se na x komponenti jednadžbe očuvanja količine gibanja. Pojedini vremenski osrednjeni članovi u toj jednadžbi mogu se zapisati u formi:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t} ; \overline{\text{div}(\mathbf{u}\mathbf{u})} = \text{div}(\mathbf{U}\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \quad (5.15a,b)$$

$$-\overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} ; \overline{v \text{div}(\text{grad}(u))} = v \text{div}(\text{grad}(U)) \quad (5.15c,d)$$

Supstitucija tih rezultata daje **vremenski osrednjenu x komponentu jednadžbe očuvanja količine gibanja**. Ponavljanje iste procedure na jednadžbama za y i z smjer daje **vremenski osrednjene y i z komponente jednadžbe očuvanja količine gibanja**:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial U}{\partial t}} + \text{div}(\mathbf{U}\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \text{div}(\text{grad}(U)) \\ (I) + (II) + (III) &= (IV) + (V) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Članovi (I), (II), (IV) i (V) također se pojavljuju u "trenutnim" jednadžbama 5.12b,c,d i 15. Međutim, navedeni proces vremenskog osrednjavanja dovodi do uvođenja novog člana (III).

Član (III) sadrži umnožak fluktuirajućih brzina i povezan je sa konvektivnom izmjenom količine gibanja putem turbulentnih vrtloga. Uobičajena je praksa da se član (III) prenese na desnu stranu vremenski osrednjene jednadžbe u cilju naglašavanja njegove uloge kao dodatnih turbulentnih napreznja za osrednjene komponente U, V i W (jednadžbe 5.17a,b,c)

Članovi dodatnog napreznja rezultat su pojave tih dodatnih napreznja (tri normalne komponente napreznja izražene jednadžbama 5.18a,b,c i tri posmične komponente napreznja izražene jednadžbama 5.18c,d,e).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(U)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \right] \quad (5.17a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(U)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] \quad (5.17b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(W)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right]$$

(5.17c)

$$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2} \quad ; \quad \tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2} \quad ; \quad \tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2} \quad (5.18a,b,c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'} \quad (5.18c,d,e)$$

Navedena turbulentna naprezanja nazivaju se **Reynolds-ova naprezanja**. Normalna naprezanja su ustvari varijance x, y i z komponente brzinske fluktuacije, te su uvijek veće od nule zbog kvadrata.

Posmična naprezanja sadrže druge momente povezane s korelacijom između različitih komponenti brzina. Korelacija između parova različitih brzinskih komponenti kroz strukturu vrtloga osigurava da **turbulentna posmična naprezanja** također ne mogu iznositi nula, te da su u turbulentnom toku uobičajeno puno veća od viskoznih naprezanja.

5.2. Proračun turbulentnih tokova

Postojeće metode za opis efekata i utjecaja turbulencije mogu se grupirati u slijedeće tri kategorije:

a) Turbulentni modeli za RANS jednadžbe

Fokus je dan na osrednjeno strujanje i utjecaj turbulencije na njegove karakteristike. Dodatni članovi pojavljuju se u osrednjenim jednadžbama toka kroz interakciju različitih turbulentnih fluktuacija. Ti dodatni članovi su modelirani sa klasičnim modelima turbulencije od kojih je najpoznatiji "k-ε". Za većinu inženjerskih problema nije potrebno razlučiti sve detalje turbulentnih fluktuacija budući da su korisnici u osnovi upućeni na informacije o vremenski osrednjenim karakteristikama toka. Kako bi se proračunalo turbulentno strujanje s RANS jednadžbama, nužna je uspostava modela turbulencije za definiranje Reynolds-ovih naprezanja i članova pronosa skalarnih veličina te zatvaranje sustava jednadžbi osrednjenog strujanja (jednadžbe 5.14 i 5.17a,b,c).

RANS turbulentni modeli su klasificirani na bazi broja dodatnih jednadžbi pronosa, koje je potrebno riješiti zajedno sa RANS jednadžbama (tablica 5.1). Ti modeli formiraju bazu za standardnu proceduru proračuna turbulencije u modernim komercijalnim CFD kodovima. Od navedenih modela “mixing length” and “ $k-\epsilon$ ” modeli su do sada najšire korišteni i validirani.

Tablica 5.1 Klasifikacija RANS turbulentnih modela na bazi broja dodatnih jednadžbi pronosa, koje je potrebno riješiti zajedno sa RANS jednadžbama

Broj dodatnih jednadžbi pronosa	Ime modela
nula	Model duljine mješanja
dvije	$k-\epsilon$
sedam	Reynolds stress model

b) Large eddy simulation

Ova forma proračuna turbulencije prati ponašanje najvećih vrtloga. Metoda se zasniva na prostornom filtriranju nestacionarnih Navier–Stokes jednadžbi. Pri tome se “propuštaju” najveći vrtlozi te “odbacuju” odnosno “filtriraju” manji vrtlozi. Utjecaj isfiltriranih manjih vrtloga na razlučenu sliku strujanja (osrednjeno strujanje plus veliki vrtlozi) je obuhvaćen kroz primjenu tzv. “podinkrementalnog modela” (eng: sub-grid scale model).

c) Direct numerical simulation (DNS)

Ove simulacije proračunavaju osrednjeno strujanje i sve turbulentne (fluktuirajuće) komponente brzina. Nestacionarne Navier–Stokes jednadžbe su riješene na specijalnoj proračunskoj mreži koja je zadovoljavajuće gusta za razlučivanje efekata na Kolmogorov-ov skali duljina (na kojoj nastupa energetska disipacija) te sa vremenskim korakom proračuna koji je dovoljno mali da se razluči period najbrže fluktuacije.

Mixing length i $k-\epsilon$ modeli su bazirani na pretpostavci postojanja analogije između djelovanja viskoznih naprezanja i Reynoldsovih naprezanja na osrednjeno strujanje. Obje vrste naprezanja pojavljuju se na desnoj strani jednadžbi očuvanja količine gibanja, a u **Newton-ovom zakonu viskoznosti** viskozna naprezanja vsu definirana kao proporcionalna rati deformacija elementa tekućine. Za nestišljivu tekućinu navedeno vodi do izraza:

$$\tau_{ij} = \mu s_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.19)$$

Ako bi se pojednostavila notacija u zapisu jednadžbi, korištena je tzv. sufiks notacija (konvencija je i ili $j = 1$ odgovara x smjeru, i ili $j = 2$ y smjeru te i ili $j = 3$ z smjeru). Primjerice:

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5.20)$$

Turbulentna naprezanja se povećavaju s porastom i rate deformacija. **Boussinesq** je već 1877 predložio da se Reynolds-ova naprezanja izraze kao proporcionalna srednjim ratama deformacije:

$$\tau_{ij} = \overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad ; \quad k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (5.21a,b)$$

gdje je k oznaka za turbulentnu kinetičku energiju po jedinici mase.

Prvi član s desne strane je analogan jednadžbi 5.19 osim za novi član koji se naziva dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti μ_t (eng: eddy viscosity) sa jedinicom koja je istovjetna dinamičkom koeficijentu viskoznosti (Pa s). Učestala je primjena i kinematskog koeficijenta kinematske viskoznosti (eng: kinematic eddy viscosity) označenog sa $\nu_t = \mu_t / \rho$, sa jedinicom koja je istovjetna kinematskom koeficijentu viskoznosti (m²/s).

Drugi član na desnoj strani osigurava da formula daje korektni rezultat za normalna Reynolds-ova naprezanja ($i = j$):

$$\tau_{xx} = \overline{\rho u'^2} \quad ; \quad \tau_{yy} = \overline{\rho v'^2} \quad ; \quad \tau_{zz} = \overline{\rho w'^2} \quad (5.22a,b,c)$$

U bilo kojem toku suma normalnih naprezanja $-\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ je jednaka minus dvostruka turbulentna kinetička energija po jedinici volumena ($-2 \rho k$) a čime je jedna trećina alocirana na svaku pojedinu komponentu normalnog naprezanja. Time se osigurava da njihova suma uvijek ima fizikalno ispravnu vrijednost.

Turbulentni pronos mase, topline i drugih skalarnih veličina može se modelirati na sličan način obzirom da je pronos turbulencijom za količinu gibanja, masu i toplinu generiran istim mehanizmom – vrtložnim mješanjem (eng: eddy mixing).

Jednadžba 5.21 pokazuje da turbulentni pronos količine gibanja pretpostavlja proporcionalnost gradijentima osrednjenog strujanja. Analogno tome, turbulentni pronos skalarnih veličina je usvojen kao proporcionalan gradientima osrednjenih vrijednosti pronošenih veličina. U sufiks notaciji navedeno se može izraziti na sljedeći način:

$$-\overline{\rho u_i' \phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (5.23)$$

gdje je Γ_t koeficijent turbulentne difuzije (eng: eddy diffusivity).

5.3. „RANS mixing length“ model turbulencije

Pretpostavlja se da kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti ν_t može biti izražen umnoškom mjerila turbulentne brzine ϑ i turbulentnog mjerila duljina l_t . Dimenziona analiza pokazuje da je jedno mjerilo brzina i jedno mjerilo duljina dostatno za opis efekta turbulencije: $\nu_t = C \vartheta l_t$ gdje je C bezdimenzionalna konstanta proporcionalnosti. Dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti je dan sa: $\mu_t = \rho C \vartheta l_t$.

Najveći dio turbulentne kinetičke energije je sadržan u najvećim vrtlozima. Stoga se turbulentno mjerilo duljina l_t smatra karakteristikom tih vrtloga koji imaju intenzivnu interakciju sa osrednjenim strujanjem. Možemo povezati karakteristično mjerilo brzina vrtloga sa karakteristikama osrednjenog strujanja:

$$\vartheta = c l_t \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (5.24)$$

gdje je l_t je mjerilo duljina vrtloga a c konstanta.

Apsolutna vrijednost se koristi u svrhu osiguranja pozitivnosti mjerila brzina, neovisno o predznaku gradijenta brzina.

Kombinacijom jednadžbi za ϑ i ν_t , te zamjenom dviju konstanti C i c sa novim mjerilom duljina l_m dobiva se **Prandtlov model miješanja** (eng: Prandtl mixing length model):

$$\vartheta = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (5.25)$$

Korištenjem jednadžbe 5.21a te obzirom da je $\partial U/\partial y$ jedini značajan gradijent osrednjenih brzina, turbulentna Reynoldsova naprežanja su opisana sa:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5.26)$$

Turbulencija je funkcija strujanja. Ukoliko se ona mijenja nužno je osigurati i varijaciju l_m u modelu miješanja.

Za kategoriju manje složenih turbulentnih tokova (tokovi slobodne turbulencije i graničnog sloja u blizini krute stjenke) struktura turbulencije je dovoljno jednostavna da se l_m može

opisati putem jednostavnih algebarskih izraza (primjeri za dvodimenzionalno strujanje dani u tablici 5.2).

Tablica 5.2 Algebarski izrazi za duljinu mješanja u manje složenim 2D turbulentnim tokovima (D – promjer otvora cijevi na mjestu izlaza mlaza ; y – vertikalna udaljenost od krute stijenke; L - dubine toka u otvorenom kanalu ili promjer cijevi)

Strujanje	Duljina mješanja
Osnosimetričan mlaz	0,075 D
Cijevi i otvoreni kanali	$L (0.14-0.08(1-y/L)^2-0.06(1-y/L)^4)$

5.4. „RANS $k-\varepsilon$ “ model turbulencije

U dvodimenzionalnim tankim slojevima sa izraženijim gradijentima u profilu osrednjenih brzina promjene u smjeru strujanja su dovoljno spore da se turbulencija sama prilagođuje lokalnim uvjetima. U slučajevima kada konvekcija i difuzija uzrokuju značajnije razlike između produkcije i destrukcije turbulencije, npr. u strujanju sa recirkulacijom, kompaktna algebarska prezentacija duljine miješanja više nije održiva.

Daljnji korak je razmatranje je analiza same turbulencije. $k-\varepsilon$ model se fokusira na mehanizam koji utječe na turbulentnu kinetičku energiju. Trenutna kinetička energija turbulentnog strujanja $k(t) = K + k$ je suma kinetičke energije osrednjenog strujanja $K = \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + W^2)$ i turbulentne kinetičke energije $k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$.

Standardni $k-\varepsilon$ model sadrži dvije jednačbe, jednu za k i jednu za ε , bazirano na relevantnim procesima koji uzrokuju promjene tih varijabli. Koristimo k i ε da definiramo mjerilo brzina ϑ i mjerilo duljina l_t koja su reprezentativna za turbulenciju makro mjerila (eng: large-scale turbulence):

$$\vartheta = k^{1/2} \quad ; \quad l_t = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (5.27a,b)$$

Dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti definiran je na slijedeći način (C_μ je bezdimenzionalna konstanta):

$$\mu_t = C_\mu \rho \vartheta l_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.28)$$

Standardni $k-\varepsilon$ model koristi jednačbe pronosa za k i ε kako slijedi:

Rata promjene od k ili ε	+	Pronos od k ili ε sa konvekcijom	=	Pronos od k ili ε sa difuzijom	+	Rata proizvodnje od k ili ε	-	Rata destrukcije od k ili ε
---	---	--	---	--	---	---	---	---

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad} k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.30)$$

Jednadžbe sadrže pet konstanti: $C_\mu=0.09$, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$ i $C_{2\varepsilon} = 1.92$. U standardnom $k-\varepsilon$ modelu koriste se navedene vrijednosti usvojene iz bogatog eksperimentalnog istraživanja na širokom rasponu turbulentnih tokova.

Proizvodnja (produkcija) i destrukcija turbulentne kinetičke energije je uvijek blisko povezana. Rata disipacije ε je velika na mjestima intenzivne proizvodnje k . Modelska jednadžba za ε pretpostavlja proporcionalnost članova njene proizvodnje i destrukcije sa članovima proizvodnje i destrukcije iz k jednadžbe. Time se osigurava da ε rapidno raste sa rapidnim porastom k , te se smanjuje dovoljno brzo za izbjegavanje nastupa fizikalno nesmislenih negativnih vrijednosti turbulentne kinetičke energije pri smanjenju k .

Za proračun Reynoldsovih naprezanja koristi se već spomenuta Boussinesqova relacija izražena jednadžbom 5.21a.

6. Model trodimezionalnog strujanja u otvorenom vodotoku

U ovom poglavlju opisuje se modelski sustav pogodan za analizu trodimenzionalnog strujanja u kontinuiranoj akvatičkoj sredini poput mora, jezera i rijeka. U sklopu modela implementirane su 3D Reynoldsove jednadžbe uz Boussinesqovu pretpostavku o hidrostatskoj raspodjeli tlaka po vertikali stupca analizirane tekućine. U modelu jednadžba kontinuitete definirana je sljedećom jednadžbom:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = S \quad (6.1)$$

gdje je: u, v, w komponente brzina u x, y i z smjeru; S intenzitet ponora ili izvora.

Dvije horizontalne komponente zakona o očuvanju količine gibanja glase:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho}{\partial x} dz + F_u + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_{tv} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u_s S \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial z} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho}{\partial y} dz + F_v + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_{tv} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v_s S \quad (6.2b)$$

gdje je: h trenutna dubina tekućine ($=\eta+d$); d srednja normalna dubina; η trenutno nadvišenje razine vodnog lica iznad srednje normalne dubine; f Coriolisov parametar ($2\Omega \sin \phi$; ϕ - geografska latituda); v_{tv} kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti u vertikalnom smjeru; p_a atmosferski tlak; g gravitaciono ubrzanje; ρ gustoća tekućine; ρ_0 referentna gustoća tekućine; x, y prostorne koordinate; t vrijeme; u_s, v_s komponente brzine u x i y smjeru za ponor/izvor.

Članovi horizontalnog naprezanja su opisani putem odnosa gradijent-naprezanje uz pojednostavljenje na slijedeći oblik:

$$F_U = \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_{tH} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{tH} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (6.2)$$

$$F_V = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{tH} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v_{tH} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \quad (6.3)$$

gdje je: v_{tH} kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti za horizontalne x i y smjerove.

Rubni uvjeti na površini ($z = \eta$) i dnu ($z = -d$) za komponente brzina u, v, w su:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_0 v_t} (\tau_{sx}, \tau_{sy}) \quad (\text{na } z = \eta) \quad (6.4)$$

$$u \frac{\partial d}{\partial x} + v \frac{\partial d}{\partial y} + w = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_0 v_t} (\tau_{bx}, \tau_{by}) \quad (\text{na } z = -d) \quad (6.5)$$

gdje je: τ_{sx}, τ_{sy} komponente naprezanja na površini (uslijed djelovanja vjetra); τ_{bx}, τ_{by} komponente naprezanja na dnu.

Površinsko naprezanje pri dnu (trenje sa dnom) definirano je jednadžbama 6.6:

$$\tau_{bx} = \rho_0 c_f u_{bx} |u_{bx}| \quad ; \quad \tau_{by} = \rho_0 c_f u_{by} |u_{by}| \quad ; \quad c_f = 1 / \left(\frac{1}{\kappa \ln(\Delta z / z_0)} \right)^2 \quad (6.6a,b,c)$$

gdje je: u_{bx}, u_{by} pridnene brzine u x i y smjeru na vertikalnoj udaljenosti Δz od dna; c_f koeficijent trenja uz pretpostavku važenja logaritamskog profila brzina od dna do Δz ; z_0 karakteristična duljina za hrapavost dna; κ von Karmanova konstanta.

Površinsko naprezanje uzrokovano djelovanjem vjetra opisano je empiričkim jednad. 6.7:

$$\tau_{sx} = \rho_a C_D U_{wx} |U_{wx}| \quad ; \quad \tau_{sy} = \rho_a C_D U_{wy} |U_{wy}| \quad (6.7a,b)$$

gdje je: ρ_a gustoća zraka; C_D koeficijent povlačenja vjetra; U_{wx}, U_{wy} komponente brzine vjetra na 10m od površine.

Ukupna dubina h dobiva se iz kinematskog rubnog uvjeta na površini ukoliko je poznato polje brzina iz jednadžbi očuvanja količine gibanja i kontinuiteta a vertikalnom integracijom lokalne jednadžbe kontinuiteta dobiva se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = hS + \hat{P} - \hat{E} \quad (6.8)$$

gdje je: \hat{P} rata oborine; \hat{E} rata evaporacije; \bar{u} i \bar{v} vertikalno osrednjene horizontalne komponente brzina u x i y smjeru.

$$h \bar{u} = \int_{-d}^{\eta} u dz \quad ; \quad h \bar{v} = \int_{-d}^{\eta} v dz. \quad (6.9)$$

Tekućina se pretpostavlja kao nestišljiva zbog čega je gustoća ρ neovisna o tlaku i ovisna o temperaturi T i salinitetu S a što je izraženo sljedećom jednadžbom:

$$\rho = \rho(T, S) \quad (6.10)$$

Pronos unutrašnje energije i mase otopljene tvari definiran je generaliziranom transportnom difuznom jednadžbom:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} + \frac{\partial w T}{\partial z} = F_T \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{H} + T_S S \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial u S}{\partial x} + \frac{\partial v S}{\partial y} + \frac{\partial w S}{\partial z} = F_S + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial S}{\partial z} \right) + S_S S \quad (6.12)$$

$$(F_T, F_S) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (T, S) \quad (6.13)$$

$$D_h = \frac{v_{tH}}{\sigma_T} \quad ; \quad D_v = \frac{v_{tV}}{\sigma_T} \quad (6.14)$$

gdje je: D_h, D_v koeficijenti turbulentne difuzije za horizontalni i vertikalni smjer; \hat{H} član intenziteta izvora putem toplinske izmjene sa atmosferom; T_S, S_S temperatura i salinitet u izvoru; F_T, F_S članovi horizontalne turbulentne difuzije za skalarna polja T i S ; σ_T Prantlov broj (=0,9 empirijska konstanta $k-\varepsilon$ modela).

Rubni uvjet za temperaturu i salinitet na površini ($z = \eta$) i dnu ($z = -d$) definirani su kako slijedi:

$$D_h \frac{\partial T}{\partial z} = v \frac{Q_{UK}}{\rho_0 c_p} + T_p \hat{p} - T_e \hat{E} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (\text{za } z = \eta) \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad (6.16)$$

gdje je: Q_{UK} ukupni površinski tok topline; c_p specifični toplinski kapacitet vode (4217 J/kg 0 K).

Ukoliko se uključi toplinska izmjena sa atmosferom, član evaporacije poprima oblik:

$$\hat{E} = \begin{cases} \frac{q_E}{\rho_0 l_v} & q_E > 0 \\ 0 & q_E \leq 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

gdje je: q_E tok latentne topline; l_v latentna toplina prelaska vode u paru.

Jednadžba pronosa (kontinuiteta) za skalarna polja glasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = F_c + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial C}{\partial z} \right) - k_p C + C_s S \quad (6.18)$$

$$(F_c) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (C) \quad (6.19)$$

gdje je: C koncentracija skalarnog polja u pronosu; k_p linearnog rata odumiranja skalarnog polja; C_s koncentracija skalarnog polja u pronosu na poziciji izvora; F_c član horizontalne turbulentne difuzije za promatrano skalarno polje.

Model turbulencije je definiran na bazi koncepta vrtložne viskoznosti uz separaciju vertikalnog i horizontalnih smjerova. U vertikalnom smjeru primjenjuje se k - ε model sa sljedećim obilježjima:

$$v_{tv} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.20)$$

gdje je: $c_\mu (=0,09)$ empirijska konstanta k - ε modela.

Vrijednosti turbulentne kinetičke energije k i njezine disipacije ε dobivaju se iz pripadnih jednadžbi pronosa:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial uk}{\partial x} + \frac{\partial vk}{\partial y} + \frac{\partial wk}{\partial z} = F_k + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{tv}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + B - \varepsilon \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial w\varepsilon}{\partial z} = F_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{tv}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{1\varepsilon} P + c_{3\varepsilon} B - c_{2\varepsilon} \varepsilon) \quad (6.22)$$

$$P = \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial z} \approx v_{tv} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) \quad (6.23)$$

$$B = -\frac{v_{tv}}{\sigma_t} N^2 \quad (6.24)$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (6.25)$$

$$(F_k, F_\varepsilon) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (k, \varepsilon) ; \quad D_h = \frac{v_{tH}}{\sigma_k} ; \quad D_h = \frac{v_{tH}}{\sigma_\varepsilon} \quad (6.26)$$

gdje je: $\sigma_k (=1)$, $\sigma_\varepsilon (=1,3)$, $c_{1\varepsilon} (=1,44)$, $c_{2\varepsilon} (=1,92)$, $c_{3\varepsilon} (=0)$ empiričke konstante k - ε modela; P produkcija posmičnog naprezanja; B član produkcije uzgonskog djelovanja; N Brunt-Vaeisalae frekvencija; F_k , F_ε članovi horizontalne turbulentne difuzije.

Rubni uvjet za turbulentnu kinetičku energiju k i ratu njezine disipacije ε na slobodnoj površini ($z = \eta$) ovisi o površinskom naprežanju uslijed djelovanja vjetra $U_{\tau s}$:

$$k = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} U_{\tau s}^2 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{U_{\tau s}^2}{\kappa \Delta z_s} \quad \text{za} \quad U_{\tau s} > 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{(k \sqrt{c_\mu})^{3/2}}{a \kappa h} \quad \text{za} \quad U_{\tau s} = 0 \quad (6.28)$$

gdje je: $a (=0,07)$ empirička konstanta; Δz_s vertikalna udaljenost od površine na kojoj je primijenjen rubni uvjet.

Rubni uvjet za turbulentnu kinetičku energiju k i ratu njezine disipacije ε na dnu ($z = -d$) definiran je na sljedeći način:

$$k = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} U_{\tau b}^2 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{U_{\tau b}^2}{\kappa \Delta z_b} \quad (6.29)$$

gdje je: Δz_b vertikalna udaljenost od dna na kojoj je primijenjen rubni uvjet.

Kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti u horizontalnom smjeru ν_{tH} tretiran je Smagorinsky konceptom:

$$\nu_{tH} = c_s^2 l^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (6.30)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (6.31)$$

gdje je: c_s Smagorinsky konstanta; l karakteristična duljina; S_{ij} rata deformacije.

7. Model dvodimenzionalnog strujanja u otvorenom vodotoku

U ovom poglavlju opisuje se modelski sustav pogodan za analizu dvodimenzionalnog strujanja u kontinuiranoj akvatičkoj sredini poput mora, jezera i rijeka. Modelom se definiraju procesne jednadžbe za dvodimenzionalno (u horizontalnoj ravnini) stacionarno ili nestacionarno tečenje nestišljive tekućine te konvektivno disperzivni pronos otopljene ili suspendirane tvari u jednom vertikalnom homogenom sloju uz pretpostavku hidrostatske raspodjele tlaka. Sustav jednadžbi sadrži vertikalno integrirane jednadžbe kontinuiteta (7.1) i očuvanja količine gibanja (7.2, 7.3):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = hS \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = \\ & = f\bar{v}h - gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{gh^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho_0} - \frac{\tau_{bx}}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (hT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (hT_{xy}) \right] + hu_s S \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} = \\ & = -f\bar{u}h - gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{gh^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}}{\rho_0} - \frac{\tau_{by}}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (hT_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (hT_{yy}) \right] + hv_s S \end{aligned} \quad (7.3)$$

gdje je: τ_{sx}, τ_{sy} naprezanja na površini; τ_{bx}, τ_{by} naprezanja na dnu; T_{xx}, T_{xy}, T_{yy} lateralna naprezanja; S intenzitet ponora ili izvora; u_s, v_s komponente brzine u x i y smjeru na mjestu izvora; D_x, D_y koeficijenti disperzije u x i y smjeru.

Površinsko naprezanje pri djelovanju s dnom (trenje sa dnom) definirano je jednačbom 7.4:

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g \bar{u} |\bar{u}|}{C^2} \quad ; \quad \tau_{by} = \frac{\rho g \bar{v} |\bar{v}|}{C^2} \quad (7.4a,b)$$

gdje je: C Chezyjev koeficijent ($C = (1/M) h^{1/6}$; M -Manningov koeficijent hrapavosti);

Površinsko naprezanje uzrokovano djelovanjem vjetra opisano je empiričkim jednačbama 6.7.

Lateralnim naprezanjima T_{xx}, T_{xy}, T_{yy} u jednačbama količine gibanja obuhvaćeni su utjecaji turbulentne količine gibanja, usrednjavanja brzina po vertikali i fluktuacija na podinkrementalnom prostornom modelskom mjerilu temeljem formulacije efektivnog kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti E . Njime se omogućuje prigušenje oscilacija kratkih valova i reprodukcija efekata vezanih na podinkrementalno mjerilo.

$$T_{xx} = E \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad ; \quad T_{xy} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad ; \quad T_{yy} = E \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (7.6)$$

$$E = C_{sm}^2 l^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.7)$$

gdje je: l udaljenost između dva proračunska čvora modela a C_{sm} modelska konstanta korištene Smagorinski formulacije.

Jednadžba konvektivno-disperzivnog pronosa za salinitet i temperaturu definirane su sljedećim jednadžbama:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}h\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}h\bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot D_x \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot D_y \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) + h\hat{H} + hT_s S \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{S}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}h\bar{S}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}h\bar{S}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot D_x \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot D_y \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial y}\right) + hS_s S \quad (7.8)$$

gdje je: \bar{T} i \bar{S} vertikalno osrednjene temperature i salinitet; T_s i S_s temperatura i salinitet izvora.

8. Toplinska izmjena s atmosferom za 2D i 3D model

Toplinska izmjena sa atmosferom računana je na temelju četiri fizikalna procesa: konvektivni pronos topline (direktno vođenje topline), evaporacija (toplina isparavanja), ukupna radijacija dugih valova, ukupna radijacija kratkih valova.

Toplinski tok uslijed konvektivnog vođenja topline, evaporacije i radijacije dugih valova djeluje pretpostavljen je sa djelovanjem na slobodnu površinu. Absorpcijski profil toplinskog toka uslijed kratkovalnog zračenja usvojen je prema Beerovom zakonu prema kojem je smanjenje intenziteta svijetla kroz vodni stupac opisano jednadžbom:

$$I(d) = (1 - \beta) I_0 e^{-\lambda d} \quad (8.1)$$

gdje je: $I(d)$ intenzitet na dubini d ispod površine; I_0 intenzitet neposredno ispod vodene površine; β veličina kojom se uzima u obzir apsorpcija dijela svijetlosne energije (infracrvene) u blizini površine; λ koeficijent svijetlosnog prigušenja. Dio svijetlosne energije absorbirane u blizini površine je βI_0 .

Time je ukupni površinski tok topline definiran izrazom:

$$Q_{UK} = q_E + q_K + \beta q_{KV-UK} + \beta q_{DV-UK} \quad (8.2)$$

Gdje je: Q_{UK} ukupni prijenos topline kroz površinu; q_E toplina isparavanja (latentna toplina); q_K konvektivno vođenje topline; q_{KV-UK} ukupni tok topline kroz radijaciju kratkovalnog sunčevog zračenja; q_{DV-UK} ukupni tok topline kroz radijaciju dugovalnog sunčevog zračenja.

U modelu je član izvora \widehat{H} definiran jednadžbom 8.3 u slučaju trodimenzionalnog i 8.4 u slučaju dvodimenzionalnog modela:

$$\widehat{H} = \frac{q_{KV-UK} (1 - \beta) e^{-\lambda(\eta-z)}}{\rho_0 c_p} \quad (8.3)$$

$$\widehat{H} = \frac{q_E + q_K + \beta q_{KV-UK} + \beta q_{DV-UK}}{\rho_0 c_p} \quad (8.4)$$

Pri tretmanu *evaporacije* Dalton-ov zakon definira odnose za gubitak energije kroz vodenu paru a glasi:

$$q_E = LC_e (a_1 + b_1 W_{2m}) (\rho_{pare\ iznad\ površine} - \rho_{pare\ u\ atm}) \quad (8.5)$$

gdje je: L latentna toplina vodene pare ($2,5 \times 10^6$ J/kg); C_e koeficijent smjese vodene pare ($1,32 \times 10^3$); W_{2m} brzina vjetra 2m iznad površine (m/s); $\rho_{pare\ iznad\ površine}$ gustoća vodene pare u blizini površine vode (kg/m^3); $\rho_{pare\ u\ atm.}$ gustoća vodene pare u atmosferi (kg/m^3); a_1, b_1 koeficijenti.

Mjerenja $\rho_{pare\ iznad\ površine}$ i $\rho_{pare\ u\ atm.}$ ne ostvaruje se direktno, no definirana je relacija između gustoće vodene pare ρ_i i tlaka vodene pare e_i :

$$\rho_i = \frac{0,2167}{T_i} p_i \quad (8.6)$$

U kojoj indeks i označava gustoću vodene pare iznad vodne površine ili u atmosferi. Tlak vodene pare u blizini površine vode $\rho_{pare\ iznad\ površine}$ može se definirati uz pomoć temperature vode a usvajajući pretpostavku da je zrak u blizini površine vode saturiran, te da ima istu temperaturu kao i voda.

$$\rho_{pare\ iznad\ površine} = 6,11 \exp \left\{ K \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{vode}} \right) \right\} \quad (8.7)$$

gdje je: K konstanta ($5418 \text{ } ^\circ\text{K}$); T_k temperatura na $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ($273,15 \text{ } ^\circ\text{K}$)

Na sličan način tlak vodene pare u atmosferi može se definirati uz pomoć temperature zraka i relativne vlažnosti R :

$$P_{\text{pare u atmosferi}} = R 6,11 \exp \left\{ K \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{\text{zraka}}} \right) \right\} \quad (8.8)$$

Zamjenom $\rho_{\text{pare iznad površine}}$ i $\rho_{\text{pare u atm.}}$ sa gornjim izrazima dobivamo sljedeću jednakost za toplinu isparavanja:

$$q_E = P_v (a_1 + b_1 W_{2m}) \left(\frac{\exp \left\{ K \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{\text{vode}}} \right) \right\}}{T_{\text{vode}}} - \frac{R \exp \left\{ K \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{\text{zraka}}} \right) \right\}}{T_{\text{zraka}}} \right) \quad (8.9)$$

gdje su sve konstante uračunate u latentnu konstantu P_v ($4370 \text{ J}^0\text{K/m}^3\text{s}$).

Konvekcija (senzibilni toplinski tok) ovisi o tipu graničnog sloja između vodne površine i atmosfere. Generalno govoreći, granični sloj je turbulentan a što daje sljedeću jednakost:

$$q_k = \begin{cases} \rho_{\text{zraka}} C_{\text{zraka}} C_c W_{10m} (T_{\text{vode}} - T_{\text{zraka}}) & \text{za } T_{\text{zraka}} > T_{\text{vode}} \\ \rho_{\text{zraka}} C_{\text{vode}} C_c W_{10m} (T_{\text{vode}} - T_{\text{zraka}}) & \text{za } T_{\text{zraka}} \leq T_{\text{vode}} \end{cases} \quad (8.10)$$

gdje je: ρ_{zraka} gustoća zraka (kg/m^3); C_{zraka} specifična toplina zraka ($1007 \text{ J/kg}^0\text{K}$); C_{vode} specifična toplina vode ($4186 \text{ J/kg}^0\text{K}$); W_{10m} brzina vjetra 10m iznad površine (m/s); T_{vode} apsolutna temperatura vode (^0K); T_{zraka} apsolutna temperatura zraka (^0K); C_c koeficijent konvekcije ($1,41 \times 10^{-3}$).

Radijacija kratkih valova od sunca sadržana je u obliku elektromagnetskih valova duljine između 1000 i 30000 Å. Većina se absorbira u ozonskom omotaču kroz koji do zemljine površine prolazi samo dio cjelokupne valne energije. Budući da je većina infracrvenih i ultraljubičastih zraka absorbirana solarna radijacija na zemlju sadržana je od svjetlosti valnih duljina između 4000 i 9000 Å. Takvu radijaciju uobičajeno se naziva radijacija kratkih valova a njezin intenzitet ovisi o udaljenosti od sunca, upadnom kutu, latitudi, kozmičkom zračenju te oblačnosti i količini vodene pare u atmosferi.

Odnos između srednje udaljenosti, r_0 do sunca i trenutne udaljenosti r dan je kao:

$$E_0 = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = 1,000110 + 1,134221 \cos(\Gamma) + 0,001280 \sin(\Gamma) + 0,000719 \cos(2\Gamma) + 0,000077 \sin(2\Gamma) \quad (8.11)$$

$$\Gamma = \frac{2\pi(d_n - 1)}{365} \quad (8.12)$$

gdje je: d_n dan u kalendarskoj godini.

Dnevna rotacija zemlje oko polarnih osi doprinosi promjeni solarne radijacije. Sezonska radijacija definirana je putem solarnog upadnog kuta kao:

$$\begin{aligned} \delta = & 0,006918 - 0,399912 \cos(\Gamma) + 0,07257 \sin(\Gamma) \\ & - 0,006758 \cos(2\Gamma) + 0,000907 \sin(2\Gamma) \\ & - 0,002697 \cos(3\Gamma) + 0,00148 \sin(3\Gamma) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Duljina dana N_d varira sa δ . Za danu latitudu ϕ (pozitivnu na sjevernoj hemisferi) duljina dana je izračunava se na sljedeći način:

$$N_d = \frac{24}{\pi} \arccos\{-\tan(\phi)\tan(\delta)\} \quad (8.14)$$

Kut izlaza sunca, ω_{sr} je:

$$\omega_{sr} = \arccos\{-\tan(\phi)\tan(\delta)\} \quad (8.15)$$

Intenzitet radijacije kratkih valova na površinu paralelnu sa površinom zemlje mijenja se sa upadnim kutem. Najveći intenzitet je u zenitu a najniži za vrijeme zalaska i izlaska sunca. Integracijom preko cijelog dana intenzitet kozmičkog zračenja u radijaciji kratkih valova na površinu dobiva se kao:

$$H_0 = \frac{24}{\pi} q_{sc} E_0 \cos(\phi) \cos(\delta) (\sin(\omega_{sr}) - \omega_{sr} \cos(\omega_{sr})) \quad (8.16)$$

gdje je: q_{sc} solarna konstanta.

Dnevna radijacija uz oblačno nebo H definirana je sa sljedećim izrazom (Angstromov zakon):

$$\frac{H}{H_0} = a_2 + b_2 \frac{n}{N_d} \quad ; \quad a_2 = 0,1 + 0,24 \frac{\bar{n}}{N_d} \quad ; \quad b_2 = 0,38 + 0,08 \frac{\overline{N_d}}{n} \quad (8.17)$$

gdje je: n broj sunčanih sati. Crtica označava mjesečno osrednjene vrijednosti. Koeficijenti a_2 i b_2 su konstante Angstromovog zakona.

Prema tome, prosječna satna radijacija kratkovalnog zračenja q_{KV} može se pisati na sljedeći način:

$$q_{KV} = \left(\frac{H}{H_0} \right) q_0 (a_3 + b_3 \cos(\omega_t)) \quad (8.18)$$

gdje je:

$$a_3 = 0,4090 + 0,5016 \sin\left(\omega_{sr} - \frac{\pi}{3}\right) ; \quad b_3 = 0,6609 - 0,4767 \sin\left(\omega_{sr} - \frac{\pi}{3}\right) \quad (8.19)$$

Intenzitet kozmičkog zračenja q_0 i satni kut ω_t su dani kao:

$$q_0 = q_{sc} E_0 \left(\sin(\phi) \sin(\delta) + \frac{24}{\pi} \sin\left(\frac{24}{\pi}\right) \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(\omega_t) \right) \quad (8.20)$$

$$\omega_t = \frac{\pi}{12} (12 + \text{korekcija za ljetno vrijeme} - \frac{E_t}{60} \frac{4}{60} (L_s - L_e) - \text{lokalno vrijeme}) \quad (8.21)$$

Vremenski meridijan L_s je standardna longituda za vremensku zonu a L_e je lokalna latituda. E_t se naziva jednadžba vremena i varijabilna je tijekom godine i definira se na sljedeći način:

$$E_t = (0,000075 + 0,001868(\Gamma) - 0,032077 \sin(\Gamma) - 0,014615 \cos(2\Gamma) - 0,04089 \sin(2\Gamma)) \cdot 229,18 \quad (8.22)$$

Solarna radijacija koja djeluje na vodenu površinu ne penetrira u potpunosti već se jedan njezin dio reflektira odnosno gubi osim ukoliko ne dolazi do ponovnog reflektiranja od atmosfere ili okolne topografije. Takva refleksija solarne energije naziva se *albedo*. Količina energije koja se gubi kroz albedo ovisi o kutu upada i kutu refrakcije a za glatke vodne površine refleksija se može izraziti kao:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)} \right) \quad (8.23)$$

gdje je: i upadni kut ; r kut refrakcije ; α koeficijent refleksije (5-40%)

Prema tome ukupna radijacija kratkih valova prikazuje se kao:

$$q_{KV-UK} = (1 - \alpha) q_{KV} \frac{10^6}{3600} \quad (8.24)$$

Tijelo ili površine emitiraju elektromagnetsku energiju u svim valnim duljinama spektra. *Radijacija dugih valova* sadrži valne duljine između 9000 i 25000 Å. Radijacija u tom intervalu je infracrvena i emitirana je od atmosfere i vodene površine. Emisija od vodene površine prema atmosferi minus radijacija od atmosfere prema vodenoj površini daje ukupnu radijaciju dugih valova koja je ovisna o stupnju naoblake, temperaturi zraka, tlaku vodene pare u atmosferi, relativnoj vlazi.

U modelu izlazna radijacija dugih valova je dana u sljedećem obliku:

$$q_{DV-UK} = \sigma_{sb} T_{zraka}^4 \left(a - b \sqrt{10 \cdot p_d} \right) \left(c + d \frac{n}{N_d} \right) \quad (8.25)$$

gdje je: a , b , c , d konstante dane sa vrijednostima (0,56 ; 0,077 mb^{-1/2} ; 0,1 ; 0,9); p_d tlak vodene pare na temperaturi ukapljavanja mjeren u mb; n broj sunčanih sati ; N_d broj mogućih sunčanih sati; σ_{sb} Stefan-Boltzmann-ova konstanta (5,6697x10⁻⁸ W/m²K⁴); T_{zraka} temperatura zraka.

B

MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U
STIJENI MEĐUZRNSKE POROZNOSTI

1. Uvod

Za uspješnu eksploataciju podzemnih voda potrebno je poznavati tokove podzemnih voda i mehanizam pronosa u njima, uključujući reakcije tekućina i otopljenih tvari. Jedan od alata pomoću kojih se to može riješiti je uspostava modela kojim se simuliraju tokovi podzemnih voda te se analizira pronos otopljene ili suspendirane tvari. Numerički modeli razvijaju se od sredine 1960-ih. Razvoj modela za simuliranje toka podzemnih voda pomoću numeričkih modela odvija se usporedno sa razvojem i poboljšanjem performansi i mogućnosti računala.

U ovom poglavlju obrađuju se osnove modeliranja strujanja i pronosa kroz stijenu međuzrnske poroznosti sa naglaskom na nereaktivne otopljene tvari (bez fenomenologije pronosa višefaznih tekućina) temeljem determinističkog pristupa.

Procesi toka podzemnih voda se uglavnom opisuju jednačbama procesa opisanim Darcyevim zakonom i zakonom održanja mase (jednačba kontinuiteta). Međutim Darcyev zakon ima ograničenja koja se moraju uzeti u obzir kod modeliranja.

Cilj modela kojim se simulira pronos tvari podzemnim vodama je da se u konačnici može dobiti informacija o koncentraciji otopljenih tvari u sustavu podzemnih voda na bilo kojem mjestu u bilo kojem vremenskom trenutku. Teoretske postavke jednačbama kojima se opisuje pronos tvari vrlo su dobro opisane u literaturi. Promjene koncentracije u dinamičnim sustavima strujanja podzemnih voda očituju se kroz četiri procesa: *konvekcija*, (u kojoj se otopljena tvar pronosi samim strujanjem podzemne vode), *molekularna difuzija*, (u kojoj se otopljena tvar pronosi zbog razlike u koncentraciji otopljene tvari u mediju), *hidrodinamička disperzija* (kao mehanički proces širenja u mediju) i *reakcije* (određena otopljena tvar može se povećati ili smanjiti uslijed djelovanja kemijskih, bioloških i fizikalnih reakcija vode i u njoj otopljenih tvari).

Realnu okolinu u kojoj se odvija strujanje podzemnih voda sačinjava kompleksna, trodimenzionalna, heterogena hidrogeološka sredina. Takva varijabilnost uvelike utječe na tok podzemne vode, kao i na pronos tvari. Takva sredina se može točnije opisati samo kroz pažljiva hidrogeološka terenska ispitivanja. Bez obzira na količinu podataka kojom se raspolaže, uvijek postoji određena vjerojatnost uvođenja greške u opisu rubnih uvjeta i ostalih obilježja podzemnih sustava. Stohastički pristup u prikazu i opisu potpovršinskih stijenskih sustava pokazao je prednost u opisivanju njegovih heterogenih karakteristika.

2. Osnovni zakoni i jednađbe procesa

Matematička formulacija je bazirana na osnovnim principima i na empirijskim zakonima.

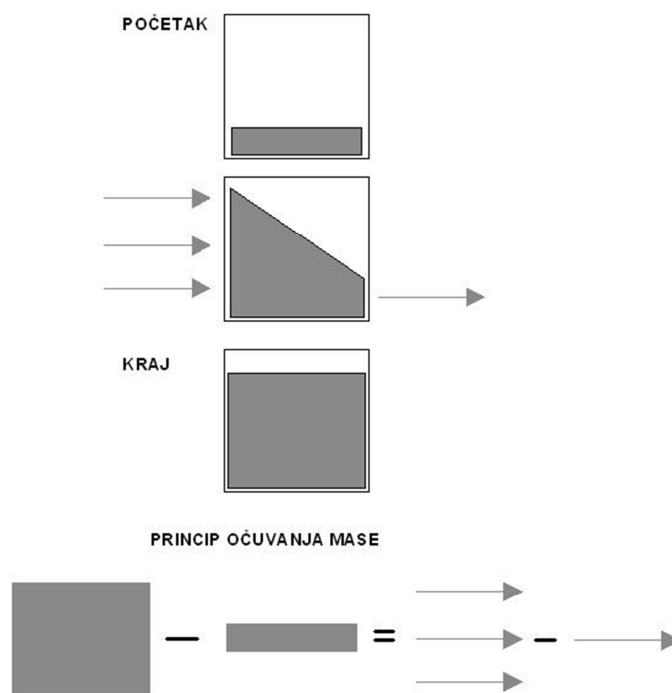
Najvažniji su zakoni očuvanja:

- zakon očuvanja mase
- zakon očuvanja količine gibanja
- zakon očuvanja energije

2.1. *Zakon očuvanja mase*

Budući da se masa ne stvara niti uništava mora vrijediti: masa u kontrolnom volumenu u trenutku $t+\Delta t$ jednaka je zbroju mase u kontrolnom volumenu u trenutku t i mase koja je tijekom vremena Δt ušla u kontrolni volumen minus masa koja je tijekom vremena Δt izašla iz kontrolnog volumena preko rubova kontrolnog volumena Δx , Δy i Δz . Prema tome, promjena mase u kontrolnom volumenu tijekom odabranog vremenskog perioda jednaka je razlici unešene mase u kontrolni volumen i iznešene mase iz kontrolnog volumena tijekom odabranog vremenskog perioda.

Na slici 2.1 prikazana je promjena mase u kontrolnom volumenu za jednodimezionalnu situaciju. Prvo polje sadrži količinu mase na početku vremenskog perioda, a treće polje količinu mase na kraju vremenskog perioda. Tijekom vremenskog perioda „jači“ tok mase ulazi preko lijevog ruba, a izlazni „slabiji“ tok mase preko desnog ruba.



Slika 2.1 Grafičko objašnjenje jednađbe očuvanja mase

Masa na početku i na kraju perioda t i $t+\Delta t$ dobiva se izrazom:

$$\theta \cdot c(x,t) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{i} \quad \theta \cdot c(x,t+\Delta t) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

gdje je θ volumni postotak analizirane faze u kontrolnom volumenu (poroznost ukoliko se promatra tekuća faza u saturiranom vodonosniku); Δx , Δy , Δz rubovi kontrolnog volumena; c koncentracija izražena kao odnos masa promatrane tvari/volumen.

Promjena mase u kontrolnom volumenu u vremenu Δt izražena je s:

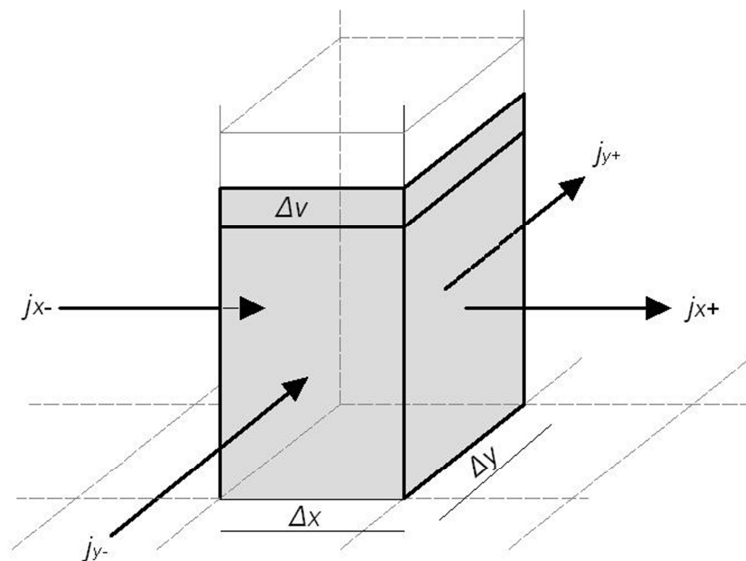
$$\theta \cdot \frac{c(x,t+\Delta t) - c(x,t)}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Protoci u x -smjeru dani su preko rubova kontrolnog volumena izrazom:

$$\theta j_x(x,t) \Delta y \Delta z \quad \text{i} \quad \theta j_{x+}(x,t) \Delta y \Delta z$$

gdje je: j_x protok mase kroz površinu lijevog ruba kontrolnog volumena u „negativnom“ smjeru $-x$; j_{x+} protok mase kroz površinu desnog ruba kontrolnog volumena u „pozitivnom“ smjeru $+x$.

U općem slučaju protoci mogu biti promjenjivi u vremenu i prostoru. Protoci su pozitivni ako unose masu u kontrolni volumen i negativni ako iznose masu iz kontrolnog volumena. Fizikalna jedinica za protok mase je $[M/(L^2 \cdot T)]$. Umnožak $\theta \Delta y \Delta z$ označeva proticajnu površinu.



Slika 2.2 Kontrolni volumen za primjer dvodimenzionalnog toka

Bilanca protoka izražena je razlikom protoka na ulazu (lijeva strana) i izlazu (desna strana):

$$\theta (j_{x-}(x,t) - j_{x+}(x,t)) \Delta y \Delta z$$

U jednodimenzionalnom slučaju protoci kroz ostala četiri ruba kontrolnog volumena se zanemaruju. Promjena mase u kontrolnom volumenu u vremenu Δt dobiva se iz sljedeće jednakosti:

$$\theta \frac{c(x,t+\Delta t) - c(x,t)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z = \theta (j_{x-}(x,t) - j_{x+}(x,t)) \Delta x \Delta z \quad (2.1)$$

Dijeljenjem s $\Delta x \Delta y \Delta z$ i θ dobiva se izraz:

$$\frac{c(x,t+\Delta t) - c(x,t)}{\Delta t} = - \frac{j_{x+}(x,t) - j_{x-}(x,t)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

Odgovarajuća diferencijalna jednačba dobiva se prelaskom prostornog i vremenskog inkrementa u obliku konačnih diferencija Δx i Δt na infinitezimalne:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} j_x \quad (2.3)$$

Dobivena je diferencijalna jednačba očuvanja mase i vrijedi za jednodimenzionalno strujanje uz pretpostavku odsustva izvora ili ponora. Mjesta unutar kontrolnog volumena na kojima tekućina ulazi nazivaju se izvori, a mjesta na kojima tekućina izlazi iz kontrolnog volumena ponori. Prikazani diferencijalni oblik jednačbe očuvanja mase služi kao podloga za razvoj matematičkih modela.

Ukoliko su prisutan izvor ili ponor potrebno je definirati i njegovu izdašnost $q(x,t)$ s jedinicom $[M/(L^3 \cdot T)]$. Izdašnost izvora q je volumen tekućine koji u jedinici vremena uđe u kontrolni volumen. Kako se u općem slučaju izdašnost može mijenjati u prostoru i vremenu, u jednačbu očuvanja potrebno je dodati odgovarajući integral:

$$\iint_{\Delta x \Delta t} q(x,t) dt dx$$

Iznos je pozitivan ako se masa dodaje (izvor) i negativan ako se masa ekstrahira (ponor). Dodavanjem člana izvor/ponor u izraz (2.3) dolazi se sljedeća jednakost:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \theta j_x + q \quad (2.4)$$

Za trodimenzionalni slučaj potrebno je uzeti u obzir i doprinose komponente protoka u y i z smjeru: j_y , j_z i j_z a čime se dobiva jednakost:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta j_x + \frac{\partial}{\partial y} \theta j_y + \frac{\partial}{\partial z} \theta j_z \right) + q \quad (2.5)$$

Jednadžba 2.5 je opća jednadžba kontinuiteta (očuvanja mase) za trodimenzionalni slučaj. Primjenom operatora ∇ (nabla):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ u 3D, } = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ u 2D, } = \frac{\partial}{\partial x} \text{ u 1D} \quad (2.6)$$

Jednadžba 2.5 može se izraziti u skraćenom obliku:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot \theta \mathbf{j} + q \quad (2.7)$$

Na desnoj strani ∇ operator se množi sa vektorom protoka $\theta \mathbf{j} = \theta \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ u vidu vektorskog

produkta. Broj komponenti u vektoru protoka i u ∇ operatoru jednak je broju prostornih dimenzija. U dvodimenzionalnom prostoru, kako je prikazano na slici 2, vektor protoka ima dvije komponente. Kako je gustoća nestišljive tekućine konstantna, promjena mase tekućine u kontrolnom volumenu rezultira promjenom volumena ΔV .

Protok mase može se izraziti produktom koncentracije i brzine. U trodimenzionalnom strujnom polju postoje tri komponente vektora brzine a što rezultira sa tri komponente protoka mase:

$$J_x = v_x c \quad j_y = v_y c \quad j_z = v_z c \quad (2.8)$$

Koristeći vektorsku notaciju dobiva se:

$$\mathbf{j} = c \mathbf{v} \quad (2.9)$$

Na desnoj strani (2.9) nalazi se skalarni produkt skalara koncentracije c i vektora brzine \mathbf{v} .

2.2. Komponente pronosa

Pronos je općenit naziv za procese u kojima se utvrđuje raspodjela biokemijskih elemenata ili topline u prirodnom okolišu. U ovom poglavlju pronos se shvaća u užem smislu kao međudjelovanje fizikalnih procesa i njihovo djelovanje na pojedine komponente ili na toplinu. Drugi procesi kao što su sorpcija, razgradnja, raspadanje i različite vrste reakcija, nisu koncipirani kao procesi pronosa te su detaljnije objašnjeni u nastavku.

Procesi pronosa važan su dio svih prirodnih sustava. Termin pronosa nije striktno vezan za određeni dio prirodnih procesa. Pronos topline ili mase učestali su fenomeni koji se mogu naći u hidrosferi, atmosferi, u površinskim vodama, jezerima i oceanima, u sedimentima, u podzemnoj vodi, u tlu, te u višefaznim kao i u jednofaznim sustavima.

Postoje dvije vrste komponente procesa pronosa u užem smislu: *konvekcija i difuzija/disperzija*. Konvekcija označava prijenos u najužem smislu: čestica se pomaknula sa jednog mjesta na drugo sa strujnim poljem. Konvekcija je pronos tvari uzrokovan postojanjem polja strujanja a pomak čestice promatrane tvari je po iznosu jednak umnošku brzine i vremena. Difuzija i disperzija su procesi koji su vezani uz razlike koncentracija tvari u promatranom prostoru. U svim sustavima postoji tendencija za izjednačavanjem koncentracije na način da se inducira pronos s mjesta većih koncentracija prema mjestu manjih koncentracija. Pri tome se jednačba pronosa dobiva temeljem primjene jednačbe kontinuiteta na promatranom elementarnom volumenu.

Uzimajući u obzir pronos topline nastaje diferencijalna jednačba sa temperaturom T kao zavisnom varijablom. Jednačba se izvodi iz zakona očuvanja energije i Fourierovog zakona. S matematičkog stajališta to je jednaka diferencijalna jednačba jednačbi pronosa tvari, samo sa drugim značenjima koeficijenata.

Osnova zakona očuvanja je izražena općenitom jednačbom kontinuiteta. Slijedeći korak je generalizacija jednačbe očuvanja mase. Očuvanje varijable B , koja može predstavljati masu, količinu gibanja ili energiju i koja je ovisna o vremenu t i tri prostorne dimenzije x , y i z , izražava se diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{\partial}{\partial t} B = \frac{\partial}{\partial x} j_{BX} + \frac{\partial}{\partial y} j_{BY} + \frac{\partial}{\partial z} j_{BZ} + Q \quad (2.10)$$

gdje varijable j_{BX} , j_{BY} i j_{BZ} predstavljaju protoke u trodimenzionalnom prostoru. Protoci, kao i drugi izrazi u jednačbi kontinuiteta, ovise o nezavisnim varijablama prostora x, y, z i o vremenu t . Varijabla Q predstavlja izdašnosti izvora i ponora. Ako je iznos $Q(x, y, z, t)$ pozitivan, radi se o *izvoru* u vremenu t i na koordinatama $r=(x, y, z)$, a ako je iznos $Q(x, y, z, t)$ negativan radi se o *ponoru*.

Jednadžba kontinuiteta govori da je promjena mase u kontrolnom volumenu u jedinici vremena jednaka razlici protoka mase koji je ušao i izašao iz kontrolnog volumena u jedinici vremena. Jednadžba kontinuiteta je dobivena na infinitezimalno malom kontrolnom volumenu sa rubovima Δx , Δy i Δz (u 3D).

U infinitezimalno malom ali konačnom vremenskom intervalu Δt , količina varijable B po jedinici volumena mijenja se iz $B(x,y,z,t)$ u $B(x,y,z,t+\Delta t)$. Prema tome, ukupna promjena količine B u kontrolnom volumenu $\Delta x\Delta y\Delta z$, u vremenskom periodu Δt , iznosi $(B(x,y,z,t+\Delta t)-B(x,y,z,t))\Delta x\Delta y\Delta z$. S druge strane, ukupna promjena količine B u kontrolnom volumenu $\Delta x\Delta y\Delta z$, u vremenskom periodu Δt , može se izraziti i temeljem protoka/ponora/izvora. U svakoj prostornoj dimenziji nalaze se po dvije površine, preko kojih se ovisno o odgovarajućoj komponenti protoka ostvaruju ulazi ili izlazi mase, količine gibanja ili energije. U x -smjeru razlika protoka kroz dva ruba je $j_{Bx}(x+\Delta x/2,y,z,t) - j_{Bx}(x-\Delta x/2,y,z,t)$ a množenjem s pripadnom površinom kontrolnog volumena $\Delta y\Delta z$ i vremenom Δt dobiva se x komponenta promjene količine B u kontrolnom volumenu $\Delta x\Delta y\Delta z$ kroz period Δt . Pri tome je usvojena i pretpostavka da je vremenski period Δt mali, pa se promjene protoka/izvora/ponora u tom vremenskom periodu mogu zanemariti.

Ukupne promjene varijable B u kontrolnom volumenu $\Delta x\Delta y\Delta z$, u vremenskom periodu Δt moraju biti jednake što rezultira sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} (B(x,y,z,t+\Delta t) - B(x,y,z,t)) \Delta x\Delta y\Delta z = & (j_{Bx}(x+\Delta x/2,y,z,t) - j_{Bx}(x-\Delta x/2,y,z,t))\Delta y\Delta z\Delta t \\ & + (j_{By}(x,y+\Delta y/2,z,t) - j_{By}(x,y-\Delta y/2,z,t))\Delta x\Delta z\Delta t \\ & + (j_{Bz}(x,y,z+\Delta z/2,t) - j_{Bz}(x,y,z-\Delta z/2,t))\Delta x\Delta y\Delta t + Q \Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Odgovarajuća jednadžba za 2D slučaj i odsustvo izvora/ponora je:

$$\Delta V = (j_{x+} - j_{x-})\Delta y\Delta t + (j_{y+} - j_{y-})\Delta x\Delta t.$$

Jednadžba 2.11 može se pojednostaviti dijeljenjem s $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ a čime se dobiva jednadžba 2.12:

$$\begin{aligned} \frac{B(x,y,z,t+\Delta t) - B(x,y,z,t)}{\Delta t} = & \frac{j_{Bx}(x+\Delta x/2,y,z,t) - j_{Bx}(x-\Delta x/2,y,z,t)}{\Delta x} \\ & + \frac{j_{By}(x,y+\Delta y/2,z,t) - j_{By}(x,y-\Delta y/2,z,t)}{\Delta y} \\ & + \frac{j_{Bz}(x,y,z+\Delta z/2,t) - j_{Bz}(x,y,z-\Delta z/2,t)}{\Delta z} + Q \end{aligned} \quad (2.12)$$

Prelaskom s konačnih razlika u infinitezimalne veličine $\Delta x \rightarrow dx$, $\Delta y \rightarrow dy$, $\Delta z \rightarrow dz$, $\Delta t \rightarrow dt$ i prema diferencijalnoj jednačbi 2.10 dobiva se sljedeća vektorska jednačba:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \cdot j_B + Q \quad (2.13)$$

Jednačbom 2.13 opisana je komponenta konvektivnog pronosa dok se difuzijska i disperzivna komponenta pronosa tretiraju u nastavku (Fickov zakon).

2.3. Generalizacija Fickovog zakona

2.3.1. Difuzija

Difuzija je pronos uzrokovan posljedicama razlike u koncentraciji promatrane tvari u otopini na molekularnoj razini. Kada u sustavu postoji područje veće koncentracije i područje manje koncentracije, nastaje difuzijski protok neke komponente s mjesta veće koncentracije prema mjestu manje koncentracije. Na molekularnoj razini, difuzija je proces nasumičnog kretanja molekula u svim smjerovima. U sustavima bez razlika u koncentracijama, zajedničkim nasumičnim kretanjem molekula zadržava se jednaka razina koncentracije u svim točkama tog sustava.

Sustav koji ima početnu razliku u koncentracijama, difuzijom će nakon određenog vremenskog perioda postići konstantnu koncentraciju u svim točkama, ako nijedan drugi proces (poput konvekcije – strujanja) nije prisutan. Drugi procesi mogu stabilizirati koncentracijski gradijent pri čemu se difuzivni pronos uravnotežava procesima koji održavaju konstantan ulazni i izlazni tok.

Pronos promatrane tvari unutar neke otopine uzrokovan difuzijom može se opisati prvim Fick-ovim zakonom izraženom za fazu tekućine:

$$j = -D \nabla c \quad (2.14)$$

gdje je: D koeficijent molekularne difuzije ili difuzivnost s jedinicom [površina/vrijeme] ovisan o karakteristikama tekućine u kojoj se difuzija odvija, tvari koja se unosi u tekućinu, temperaturi, tlaku a ponekad i o samoj koncentraciji. Proizlazi da je difuzijski pronos proporcionalan negativnom koncentracijskom gradijentu. Negativan predznak koeficijenta D znači da proces difuzije teče iz područja veće prema području manje koncentracije tvari.

Izraz 2.14, vrijedi za tekućine i plinove a u slučaju trodimenzionalnog problema vrijedi:

$$\nabla c = \begin{pmatrix} \partial c / \partial x \\ \partial c / \partial y \\ \partial c / \partial z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

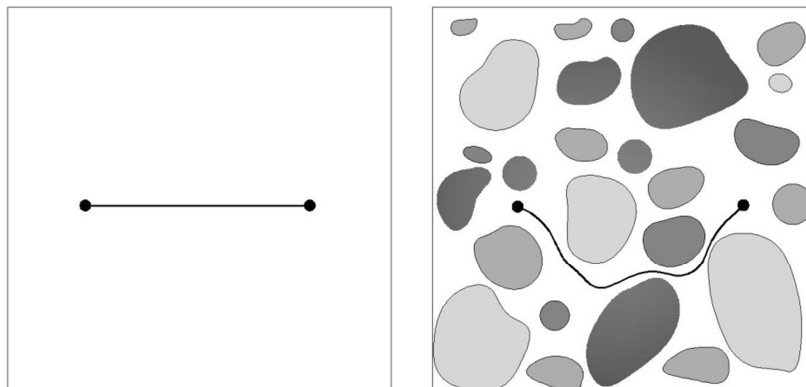
Molekularna difuzija je dominantan proces u slučajevima kad su brzine toka podzemne vode vrlo male ili odsutne, odnosno kad nema konvekcije (npr. kod pronosa zagađivala kroz brtvene slojeve na sanitarnim deponijama). Uobičajeno je označavanje koeficijenta molekularne difuzije s oznakom D_{mol} dok oznake D za poopćeni slučaj difuzije.

U stijenama međuzrnske poroznosti pronos tvari uzrokovan molekularnom difuzijom je sporiji nego u samoj otopini. To je posljedica proticajne površine sačinjene od tekuće i krute faze, pri čemu se pronos odvija samo kroz zakrivljene strujne cijevi s povećanom duljinom puta.

Kako bi se izrazio Fickov zakon za višefazne sustave, kao npr. u poroznim sredinama, moraju se napraviti dvije izmjene. U prvoj izmjeni mora se uzeti u obzir da je površina kroz koju se ostvaruje difuzijski pronos tvari samo dio ukupne površine kroz koju se ostvaruje pronos. Općenito se usvaja smanjenje protjecajne površine s koeficijentom poroznosti koji se najčešće definira kao odnos volumena šupljina u uzorku tla prema ukupnom volumenu uzorka. Poroznost θ kod procesa pronosa definira se kao onaj dio šupljina/pora kroz koji se odvija tok podzemne vode pa je uobičajeno i uvođenje pojma efektivne poroznosti θ_{ef} .

U drugoj izmjeni uzimaju se u obzir dužine puta pronosa tvari uzrokovanog difuzijom, koji je u višefaznim sustavima dulji nego u homogenim jednofaznim sustavima. Na slici 2.3 prikazan je slučaj jednofaznog sustava u kojem je put pronosa kraći nego u višefaznom, budući da ne postoje „prepreke“ kroz koje je onemogućeno protjecanje tekućine. Produljenje puta u pronosu opisuje se faktorom produljenja ϑ :

$$j = -\frac{1}{\vartheta^2} D_{mol} \nabla c \quad (2.16)$$



Slika 2.3 Usporedba dužina puta pronosa u jednofaznim i višefaznim sistemima

Neki autori koristi termin faktor *krivudavosti* τ (eng. *tortuosity*) umjesto faktora ϑ s međusobnom vezom faktora $\tau = 1/\vartheta^2$. Time izraz 21.16 prelazi u sljedeći oblik:

$$\mathbf{j} = -\tau D_{mol} \nabla c \quad (2.17)$$

Time je definirana i *efektivna difuzivnost* :

$$D_{ef} = \theta \tau D_{mol} \quad (2.18)$$

Zaključno koeficijent efektivna difuzije D_{ef} (efektivna difuzivnost) koristi se u slučaju višefaznog sustava, dok je koeficijent molekularne difuzije D_{mol} (molekularna difuzivnost) vezan uz jednofazni sustav. protjecanje. jednofazna difuzivnost se često naziva i *molekularna difuzivnost* koja se označava sa D_{mol} .

2.3.2. Disperzija

Ako je u sustavu prisutna konvekcija (pronos osnovnim tokom), potrebna je drugačija generalizacija Fickovog zakona izražena jednadžbom 2.14. Razmatra se tekućina koja protječe kroz homogenu poroznu sredinu, difuzivnost je proporcionalna gradientu koncentracija i nije konstanta nego ovisi o brzini toka (strujanja). Takav proces se naziva *disperzija*. Disperzija je posljedica fluktuacije brzina strujanja u odnosu na prosječnu brzinu kod realnog profila brzina u pojedinoj strujnoj cijevi te lokalnih nehomogenosti strukture pora (mehanička disperzija). Intenzitet disperzije bitno ovisi i o dimenzijama prostora u kojem se pronos ostvaruje. Za 1D slučaj dobiva se:

$$D = \tau D_{mol} + \alpha_L v \quad (2.20)$$

Efektivna disperzivnost, koja se koristi u Fickovom zakonu, sastoji se od dva dijela. Jedan dio dobiva se iz molekularne difuzije, a drugi iz toka kroz poroznu sredinu. Faktor proporcionalnosti između disperzije i srednje brzine toka v dan je koeficijentom longitudinalne disperzivnosti α_L s jedinicom duljine.

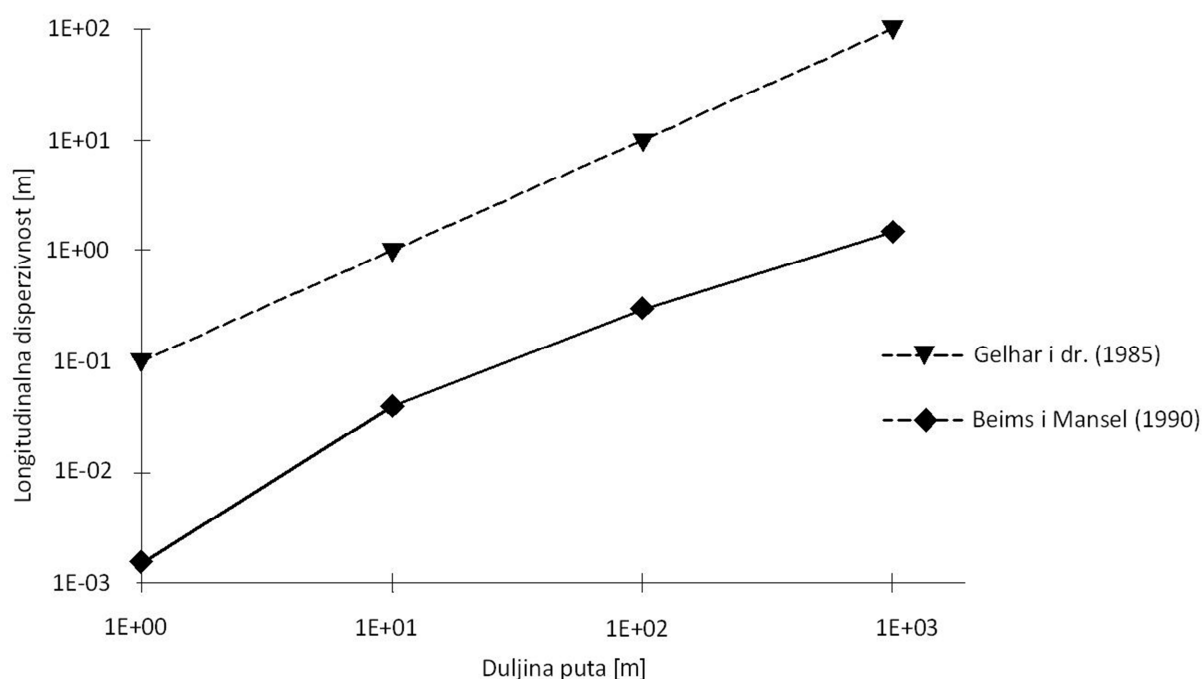
U 2D i 3D problemima koncept disperzije se generalizira. Kod transverzalne putanje u odnosu na smjer toka, osim koeficijenta α_L uvodi se i koeficijent transverzalne disperzivnosti α_T . Koeficijent transverzalne disperzivnosti je obično za (jedan) red veličine manji od longitudinalnog ($\alpha_T/\alpha_L = 0,1$). Time se dobiva znatno složenija formulacija, budući da se skalarni koeficijent D_{ef} zamjenjuje tenzorom disperzije \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = (\tau D_{mol} + \alpha_T v) \mathbf{I} + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{v} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.21)$$

Elementi matrice $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ sadrže produkt komponenti brzina (vektorski produkt vektora stupca i vektora retka daju matricu). Uzima se u obzir da konstante u smjeru brzine imaju različite vrijednosti od konstanti u transverzalnom smjeru te da je vektor brzine \mathbf{v} promjenjiv u prostoru i vremenu. Primjenom tenzora disperzije dobiva se konačan izraz za pronos:

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D}\nabla c \quad (2.22)$$

Vrijednost koeficijenta transferzalne disperzivnosti uobičajeno je manja od longitudinalne disperzivnosti. Obje vrijednosti bitno ovisi o veličini promatranog prostora u kojem se odvija pronos. Na slici 2.4 prikazana je ovisnost longitudinalne disperzivnosti o karakterističnoj duljini promatranog područja pronosa.



Slika 2.4 Ovisnost o mjerilu longitudinalne disperzije u proznoj sredini, promatrano od strane različitih autora

2.4. Jednadžba pronosa

Uzimajući u obzir konvekcija i difuziju/disperziju, protok (pronos) u x-smjeru poprima oblik:

$$j_x = -D \frac{\partial c}{\partial x} + vc \quad (2.23)$$

U koeficijentu D sadržani su utjecaji molekularne difuzije, zakrivljenosti strujnica i disperzije na regionalnom mjerilu. Analogno za y i z smjer te sumarno za sve smjerove u vektorskom zapisu:

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{v}c \quad (2.24)$$

Izraz 2.24 koristi se za zamjenu termina protoka u jednadžbi očuvanja mase 2.4, pa se za jednodimenzionalni slučaj dobiva:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} - \mathbf{v}c \right) + q \quad (2.25)$$

U slučaju konstantnih brzina dobiva se uobičajeni oblik jednadžba pronosa:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \theta v \frac{\partial c}{\partial x} + q \quad (2.26)$$

U slučaju kada je D konstanta odgovarajući izraz glasi:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \theta D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \theta v \frac{\partial c}{\partial x} + q \quad (2.27)$$

Za višedimenzionalne probleme koristiti se operator ∇ pa za opći slučaj vrijedni jednadžba:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c - \mathbf{v}c) + q \quad (2.28)$$

Izraz 2.28 predstavlja *jednadžbu pronosa mase tvari*, koja je važeća za razne biokemijske tvari. Jednadžba je diferencijalna jednadžba drugog reda u prostoru i prvog reda u vremenu, te pripada grupi parabolčkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U slučaju konstantnih koeficijenata to je linearna jednadžba. Pojednostavljenje izvedeno za 1D jednadžbu može se upotrijebiti i za višedimenzionalne slučajeve:

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\theta \mathbf{D}\nabla c) - \theta \mathbf{v} \cdot \nabla c + q \quad (2.29)$$

Uobičajeno usvojena pojednostavljenja u analizama strujanja kroz saturiranu zonu vodonosnika u porznoj sredini stijene međuzrnske poroznosti su: Nestišljivost protjecajne tekućine, homogenost vodonosnog sloja, jednodimenzionalnost ili dvodimenzionalnost i stacionarnost strujanja, konstantnost koeficijenta retardacije, reakcije i disperzivnosti. Također se pretpostavlja da unešeno onečišćenje ne mijenja homogeno polje brzina, te da je molekularna difuzija zanemarivo mala u odnosu na disperziju.

2.5. Početni i rubni uvjeti

Prethodno su objašnjeni osnovni teorijski i empirijski zakoni i kako se isti kombiniraju u cilju izvođenja diferencijalnih jednadžbi pronosa. Za većinu diferencijalnih jednadžbi može se naći više funkcija koje zadovoljavaju rješenje jednadžbe. Rješenje diferencijalne jednadžbe $du/ds=-u(s)$ definirano je analitičkim izrazom $u(s)=Cexp(-s)$ za sve vrijednosti varijable C . Takva rješenja zovu se *opća rješenja* i sadrže jednu ili više integracijskih konstanti (C u primjeru). Kako bi se ograničila domena rješenja, potrebno je definirati odgovarajuće početne i/ili rubne uvjete. Broj uvjeta, potrebnih da se dobije jedinstveno (partikularno) rješenje, uglavnom je određen redom diferencijalne jednadžbe. Za jednadžbe prvog reda potreban je jedan uvjet, dok jednadžbe drugog reda zahtijevaju poznavanje dva uvjeta.

Izraz početni uvjet obično se odnosi na varijablu vremena t i uvjet kada je $t=0$. Početni uvjeti primjerice predstavlja raspored potencijala u početnom trenutku. Početne uvjete je potrebno definirati ako je strujanje nestacionarno. Primjerice, početnim uvjetom $c(x,t=0)$ izražava se početna vrijednost koncentracije u vremenu $t=0$ za svaku točku promatranog područja.

Rubni uvjet vezan je uz prostorne varijable x, y ili z po rubu modeliranog područja. Njime se opisuju značajke granica koje omeđuju promatrani prostor i njihov utjecaj na promatrani tok. Rubni uvjet $c(x=0,t)=c_0$ pri $t>t_0$ izražava situaciju u kojoj je koncentracija konstantna na rubu modeliranog područja tijekom vremena t i nakon vremena t_0 .

Osnovna podjela rubnih uvjeta prikazana je u tablici 2.1. Prvi tip rubnih uvjeta naziva se *Dirichletov rubni uvjet* s kojim se definira vrijednost nepoznate varijable na rubovima poput raspodjele potencijala ili razina podzemne vode.

Tablica 2.1. Klasifikacija rubnih uvjeta

Naziv rubnog uvjeta	stanje za varijablu $u(s)$
Dirichlet	$u = u_1$
Neumann	$\partial u / \partial s$
Cauchy / Robin	$\alpha_0 u + \alpha_1 (\partial u / \partial s) = j$

Neumannov rubni uvjet opisuje gradijent koncentracije okomito na rub modeliranog područja, odnosno protok kroz taj rub (granicu). Kako je taj gradijent proporcionalan difuznom toku, Neumanovi rubni uvjeti se mogu opisati kao specifični difuzni tok.

Treći tip je *Cauchy / Robin* rubni uvjet s kojim se definira ukupni protok kroz granicu tj. zbroj konvektivnog i disperzivnog protoka. Ukupni protok je linearna kombinacija koncentracije c na rubu i promjene koncentracije na rubu $\partial c / \partial n$ te se može izraziti jednadžbama:

$$\alpha_0 c + \alpha_1 \frac{\partial c}{\partial n} = j \quad \text{za pronos mase ili} \quad (2.31a)$$

$$\alpha_0 T + \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial n} = j_T \quad \text{za pronos topline} \quad (2.31b)$$

gdje je: α_0 , α_1 zadani koeficijenti; j , j_T zadani tok mase ili topline. U zadaćama vezanim uz analizu pronosa kroz porozne sredine vodonosnika, rubni uvjeti Cauchy/Robin tipa izražavaju vrijednosti hidrauličkog potencijala, tlaka, piezometarskog potencijala ili strujne funkciji.

Rubnih uvjeti mogu se opisati s konstantnim (stacionarnim) ili promjenljivim (nestacionarnim) vrijednostima u vremenu.

3. Reaktivni procesi

3.1. *Utjecaj odumiranja i razgradnje*

Organske tvari i sastojci podložni su procesima *razgradnje*, a ti procesi razgradnje posredovani su bakterijama. Proces razgradnje su kompleksni procesi i ovise o uvjetima okoliša, primarno o temperaturi i u manjoj mjeri o tlaku. Jedan od glavnih uvjeta je i prisutnost kisika. U aerobnom okolišu dominiraju bakterije koje troše kisik odvojeno od organske tvari a produkti takvih procesa uvijek sadrže ugljični dioksid. U anaerobnom okolišu, kada se potroši postojeći kisik, druge vrste bakterije preuzimaju glavnu ulogu u razgradnji organskih tvari.

Izrazi *odumiranje i razgradnja* koristi se za fizikalne ili kemijske procese koji uzrokuju nestanak tvari ili biološku razgradnju tvari. Izrazi su u vezi s pojmom *radioaktivnog odumiranja*, a to je proces pretvorbe radionukleotida u srodne tvari. Kao posljedica kemijskih reakcija i raspadanja, u pravilu se javlja smanjenje ukupne mase tvari prilikom pronosa kroz sustav. Također je potrebno i uvesti pojam idealnog trasera koji prati gibanje vodnih čestica bez promjene (razgradnje) mase tokom vremena.

Pri opisu odumiranja i razgradnje uobičajeno se koristi izraz za gubitke q koji su proporcionalni gradijentu koncentracije c :

$$q = -\lambda c^n \quad (3.1)$$

gdje je: n eksponent (red razgradnje); λ konstanta razgradnje koja ovisi o uvjetima u okolišu promatranog sustava.

Fizikalna jedinica za λ ovisi o eksponentu n a za slučaj $n=1$ odgovarajuća jedinica za λ je $[1/T]$. Diferencijalne jednačbe 2.28 i 2.29 i izraz 3.1 imaju istu fizikalnu jedinicu $[M/T/L^3]$, pa se proširenjem tih izraza dobiva:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla c - \nabla \cdot \mathbf{v} c - \lambda c^n \quad (3.2)$$

Na taj način razgradnja je uključuje u jednačbu pronosa. U slučaju odsustva konvekcije i difuzije proces razgradnje je izoliran pa se dobiva sljedeća jednačba:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda c^n \quad (3.3)$$

To je obična diferencijalna jednačba a obzirom da je najutjecajni prvi red razgradnje ($n=1$) brzina procesa razgradnje je proporcionalna trenutnoj koncentraciji. Rješenje diferencijalne jednačbe 3.3 poprima oblik:

$$c = c_0 e^{-\lambda t} \quad (3.4)$$

uz početni uvjet $c(t = 0) = c_0$.

Eksponecijalna funkcija je dakle rješenje za razgradnju tvari s linearnim zakonom odumiranja. Vrijeme poluraspada $t_{1/2}$, predstavlja vremenski period u kojem se početna koncentracija (masa) neke tvari smanjuje na polovicu početne vrijednosti a primjenom izraza 3.4 dobiva se odnos između konstante razgradnje i vremena poluraspada $t_{1/2} = \ln(2)/\lambda$.

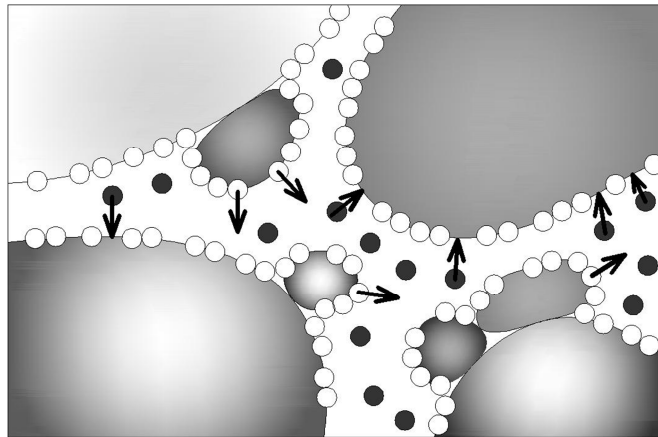
3.2. Izmjena tvari između krute i tekuće faze

Porozna sredina se sastoji od čvrste faze i barem jedne tekuće ili plinovite faze, a često sve tri zajedno. Čvrsta se faza može u mnogim situacijama promatrati kao kruta, dok se u nekim slučajevima uzima u obzir i njena deformacija. Proces izmjene tvari između faza važan je u svim prostornim sustavima, dok se procesi konvekcije, difuzije i disperzije izražavaju posebno sa krutu i posebno za tekuću fazu.

Pod određenim uvjetima, površina poroznog medija privlači čestice određenim kemijskim procesima. Takvi procesi, kao što su električna privlačnost i odbijanje te razne kemijske reakcije, mogu se razlučiti detaljnijim proučavanjem i izraziti općenitim izrazom *sorpcija*.

Izraz *adsorpcija* (eng: *adsorption*) je izraz za akumulacija tvari (čestica) na površinu čvrste (krute) ili tekuće faze (slika 2.5). Obrnuti proces oslobađanja tvari iz krute faze naziva se *desorpcija* (eng: *desorption*). Kada brzina adsorpcije postane jednaka brzini desorpcije nastupa adsorpcijska ravnoteža. Izraz *mobilizacija* za čestice efluenata je izraz za česticu koja je čvrsto vezana na površini krute faze na početku analiziranog vremenskog perioda, a koja se može mobilizirati (ponovno pokrenuti) i osloboditi za procese disperzije i konvekcije u slijedećem vremenskom periodu.

Važna relacija je odnos brzine procesa koji upravlja izmjenom tvari između krute i tekuće faze, sa procesom pronosa. Prema toj relaciji govori se o *brzoj adsorpciji*, ako je adsorpcija brža od procesa pronosa i o *sporjoj adsorpciji*, ako je adsorpcija sporija od pronosa. Prema tome karakterizacija adsorpcije ovisi o specifičnim situacijama između faza.



Slika 2.5 Prikaz procesa adsorpcije i desorpcije

Koncentraciju tekuće faze označavamo sa c , a sa c_s koncentraciju krute faze. Visoke ili niske koncentracije u jednoj fazi su obično povezane sa visokim ili niskim koncentracijama u drugoj fazi. Takva veza može se izraziti funkcionalom $c_s(c)$ u kojem je koncentracija krute faze dana u ovisnosti o koncentraciji tekuće faze. Koncentracije u jednoj fazi se prilagođava promjenama koncentracije u drugoj fazi. Ravnoteža koncentracija prikazuje se *adsorpcijskim izotermama*. Najjednostavniji primjer je *linearna izoterma*:

$$c_s = K_d c \quad (3.5)$$

gdje je: K_d koeficijent raspodjele kojim se određuje odnos između koncentracija krute i tekuće faze.

Komponente s jakom adsorpcijom imaju visok K_d i obratno. K_d ovisi i o tekućoj i o krutoj fazi. U glinama se primjerice može očekivati visoka adsorpcija zbog velikog omjera površine po volumenu i zbog visokog električnog potencijala. Minerali glina imaju višak različitih negativnih naboja pa pogoduju adsorpciji kationa. Vrijednosti K_d istraživane su za različite kemijske komponente, za anorganske i organske tvari te različite vrste efluenta a njihove vrijednosti se pružaju preko više redova veličina.

Adsorpcija i desorpcija se ne dešavaju direktno na površini krute faze nego na organskim materijalima koji su vezani uz nju.

Općenita jednačba za brzu adsorpciju je *Freundlichova* izoterma izražena sljedećom jednačbom:

$$c_s = \alpha_{F1} c^{\alpha_{F2}} \quad (3.6)$$

gdje je: α_{F1} , α_{F2} koeficijenti (α_{F1} je obično manji od 1).

Pri $\alpha_{F2} = 1$ dobiva se linearna povezanost koncentracija u obje faze.

U jednadžbu jednodimenzionalnog toka 2.4, adsorpcija se može uključiti uvođenjem zamjenskih izraza. Uzimajući u obzir pronos tvari uzrokovan konvekcijom i difuzijom, uz linearnu razgradnju (prvog reda) i odsustvo izvora/ponore, dobiva se izraz za ravnotežu u obje faze:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\theta c) &= -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \theta \lambda c - e_{fs} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b c_s) &= -\nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) - \rho_b \lambda_s c_s - e_{sf}\end{aligned}\tag{3.7a,b}$$

Gdje je: c , c_s koncentracije, θ poroznost, e_{fs} , e_{sf} koeficijenti izmjene adsorpcije.

Član izmjene sa indeksom fs označava gubitak odnosno prelazak iz pokretne (mobilne) u nepokretnu fazu, a indeksna oznaka sf upućuje na obrnuti slučaj. Jednadžba 4.10b opisuje bilancu mase za krutu fazu porozne sredine. Obzirom da je koncentracija tvari na površini krute faze izražena kao dio mase, član ρ_b se mora uzeti u obzir s ciljem zadovoljenja bilance mase tvari. ρ_b [kg/m³] predstavlja volumnu gustoću porozne sredine definiranu s izrazom:

$$\rho_b = (1 - \theta) \rho_s \tag{3.8}$$

gdje je: ρ_s gustoća čvrste faze porozne sredine bez pora.

Na desnoj strani jednadžbe 4.10b \mathbf{j}_s označava protoke u području krute faze. U poroznoj sredini vodonosnika konvektivni ili difuzijski protoci u krutoj fazi mogu se zanemariti. Kako izraz 3.7 označava ukupnu bilancu mase, izmjene moraju biti jednake pa u dvofaznim sredinama ponori jedne faze predstavljaju izvore za drugu fazu. Prema tome, sve što je dobiveno kroz proces adsorpcije u jednoj fazi mora se izgubiti u drugoj fazi pa vrijedi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\theta c) &= -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \theta \lambda c - e_{fs} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b c_s) &= -\nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) - \rho_b \lambda_s c_s + e_{fs}\end{aligned}\tag{3.9a,b}$$

3.3. Retardacija

U slučaju brze adsorpcije izrazi 3.9a,b teško se mogu kvantificirati i promjenjivi su u vremenu i prostoru. Za analizu procesa pronosa prikladno je koristiti matematičku formulaciju kojom se brišu članovi e_{fs} i e_{sf} . Ako se zanemari odumiranje i razgradnja, zbrajanjem izraza 3.9a,b dobiva se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta c + \rho_b c_s) = -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) \quad (3.10)$$

Zbrajanjem je također eliminirana i nepoznata varijabla c_s . U slučaju brze adsorpcije koristi se relacija za izotermu 3.5 a jednačba 3.10 se izražava u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\theta c) = -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) \quad ; \quad R = 1 + \frac{\rho_b c_s}{\theta c} \quad (3.11)$$

gdje je: R koeficijent retardacije. Koeficijent retardacije je mjera kašnjenja neke tvari u odnosu na konvektivni tok podzemne vode. Postoje i alternativne jednačbe važeće za vodonosnike s konstantnom poroznosti, kada se koeficijent retardacije može izlučiti izvan parcijalne derivacije po vremenu:

$$R\theta \frac{\partial}{\partial t} c = -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) \quad ; \quad R = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} \frac{\partial c_s}{\partial c} \quad (3.12)$$

U jednačbi 3.12 pretpostavljena je konstantnost parametara θ i ρ_b u vremenu. Ukoliko je $R=1$, retardacija ne utječe na pronos, dok za $R>1$ utječe.

U slučaju linearne izoterme $c_s/c=K_d$, nema razlike u koeficijentu R koji se pojavljuje u izrazima 3.11 i 3.12:

$$R = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} K_d \quad (3.13)$$

Pri konstantnoj poroznosti θ koeficijent retardacije je također konstantan. Vrijednosti koeficijentata retardacije se u praktičnim slučajevima pojavljuju u širokom rasponu vrijednosti, od 1 pa sve do 10^7 .

U općem slučaju koeficijent retardacije R ovisi o koncentraciji c i poroznosti θ , te je promjenjiva veličina u vremenu i prostoru. Za jednačbu izoterme tipa Freundlich dobiva se:

$$R = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} \alpha_{F1} \alpha_{F2}(c)^{\alpha_{F2}-1} \quad (3.14)$$

U sustavima sa prisustvom jedne stacionarne faze, kao u slučaju podzemnih vodonosnika, izrazi 3.10 i 3.11 imaju prednost u usporedbi sa izrazom 3.9a,b. Ukoliko je kruta faza fiksirana u prostoru (stacionarna), a procesi konvekcije i difuzije nisu prisutni ($\mathbf{j}_s=0$), dobiva se sljedeća diferencijalna jednačba za nepoznatu varijablu koncentracije c :

$$R\theta \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\theta \mathbf{D} \nabla c) - \theta \mathbf{v} \cdot \nabla c \quad (3.15)$$

Na desnoj strani jednadžbe nalaze se izrazi za difuziju, disperziju i konvekciju u tekućoj fazi, ali nema izraza za krutu fazu. Kada se nađe rješenje jednadžbe 3.15, prostorne i vremenske promjene druge nepoznate varijable c_s mogu se izračunati uz pomoć izoterme. Dijeljenjem s θ jednadžba 3.15 poprima oblik:

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) - \mathbf{v} \cdot \nabla c \quad (3.16)$$

U daljnjoj interpretaciji izraz 3.15 se uspoređuje s izrazom 2.29. Kako se može uočiti, koeficijent retardacije R u jednadžbi 3.15 ustvari „produljuje vremensku skalu“ odnosno kao da usporava protjecanje vrijeme u procesu pronosa. Matematički to se može zapisati u obliku $R \cdot \partial/\partial t = \partial/\partial(t/R)$. Koristeći novu vremensku skalu $\bar{t} = tR$, može se reći da je prostorni raspored koncentracije „retardirane“ tvari u vremenu \bar{t} jednak prostornoj raspodjeli koncentracije trasera u vremenu t .

U slučaju retardacije, adsorpcija nema utjecaj na stacionarni raspored koncentracije. To se može vidjeti i iz izraza 3.15 i 3.16, gdje lijeva strana nestaje a koncentracija c se definira temeljem rješenja preostalih članova jednadžbe na desnoj strani na kojoj nema koeficijenta retardacije.

U jednadžbe se može uključiti i član odgovoran za razgradnju. Time jednadžbe 3.10 i 3.11 prelaze u jednadžbe 3.17 i 3.18:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta c + \rho_b c_s) = -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \theta \lambda c - \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) - \rho_b \lambda_s c_s \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\theta c) = -\nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) - \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{j}_s) - \tilde{R} \theta \lambda c \quad ; \quad \tilde{R} = 1 + \frac{\rho_b \lambda_s c_s}{\theta \lambda c} \quad (3.18)$$

Ako je konstanta linearne razgradnje u obje faze ista (što je slučaj kod radioaktivnog raspadanja), oba R koeficijenta su jednaka, odnosno $\tilde{R} = R$. Za slučaj stacionarne krute faze porozne sredine jednadžba 3.16 transformira se u sljedeći izraz:

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) - \mathbf{v} \cdot \nabla c - R \lambda c \quad (3.19)$$

4. Model strujanja i pronosa u stijenama međuzrnske poroznosti

Matematičke jednadžbe kojima se opisuje tok podzemnih voda, kao i procesi pronosa izvode se iz temeljnih zakona o održanju mase uz usvajanje koncepta reprezentativnog elementarnog volumena (REV) porozne sredine. Zakon o održanju mase (jednadžba kontinuiteta) kombinirati se s drugim matematičkim izrazima procesa za potrebe dobivanja diferencijalnih jednadžba toka podzemnih voda i pronosa u njima.

Strujanje vode kroz poroznu sredinu (sa međuzrnskom poroznošću) povezano je sa svojstvima vode, svojstvima porozne sredine i razlikom potencijala, što se može prikazati Darcyevim zakonom:

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (4.1)$$

gdje je: q_i specifični protok; K_{ij} tenzor (drugog reda) koeficijenta filtracije porozne sredine; h potencijal (piezometarska razina); x_j koordinate u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Opći oblik jednadžbe koja opisuje tok blago stišljivog fluida u nehomogenom anizotropnom vodonosniku može se dobiti kombiniranjem Darcyevog zakona sa jednadžbom kontinuiteta. Opći oblik jednadžbe strujanja napisan u obliku Kartezijevog tenzora glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + W^* \quad (4.2)$$

gdje je: S_s koeficijent specifičnog uskladištenja; t vrijeme; W^* volumetrijski protok po jedinici volumena (pozitivan za iznošenje, negativan za unos).

Jednadžba 4.2 općenito se može primijeniti ukoliko prevladavaju izotermalni uvjeti, ako se porozna sredina deformira samo u vertikalnom smjeru, ako volumen pojedinih čestica sredine ostaje konstantan tokom deformacije, ako se može primijeniti Darcyev zakon (razlika u potencijalima je jedina pokretačka sila) te ako su karakteristike fluida (gustoća i viskoznost) homogene i konstantne veličine. Karakteristike vodonosnika mogu prostorno varirati, a volumetrijski protok (W^*) može varirati u vremenu i prostoru.

Ako je vodonosnik relativno tanak u odnosu na lateralno (horizontalno) prostiranje, moguće je pretpostaviti da se strujanje odvija u dvije dimenzije (Dupuitova hipoteza). Ova pretpostavka omogućava da se trodimenzionalna jednadžba toka zamijeni na dvodimenzionalno prostorno strujanje, za koje je moguće uvesti niz pojednostavljenja.

Jednadžba kojom se opisuje dvodimenzionalno prostorno strujanje homogene tekućine (kapljevine) u vodonosniku pod tlakom slična je jednadžbi 4.2 i glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{T}_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + W \quad (4.3)$$

gdje je: S koeficijent uskladištenja; \mathbf{T}_{ij} tenzor transmisivnosti; $T_{ij}=K_{ij}b$; b debljina saturiranog vodonosnog sloja; $W= W*b$ volumenski protok po jedinici površine.

Kada se jednadžba 4.3 primjeni na vodonosnik s slobodnim vodnim licem, podrazumijeva se usvajanje Dupouitove pretpostavke: tečenje je u horizontalnom sloju, ekvipotencijale su vertikalne linije, horizontalni hidraulički gradijent je jednak nagibu vodnog lica. Treba napomenuti da se u vodonosniku sa slobodnim vodnim licem debljina zasićenog sloja mijenja sa promjenom razine slobodnog vodnog lica. Stoga se i transmisivnost može mijenjati u prostoru i vremenu (npr., $T_{ij}= K_{ij}b$, gdje je $b(x,y,t)= h-h_b$, h_b je geodetska razina dna vodonosnika).

Članovi vektorskog produkta tenzora koeficijenata filtracije nestaju kada se koordinatne osi poklope sa glavnim koordinatnim osima tenzora. To znači da je $K_{ij}= 0$ kada je $i \neq j$. Prema tome, jedini članovi tenzora koeficijenta filtracije koji imaju vrijednost različitu od nule su K_{xx} i K_{yy} . Pod ovom pretpostavkom, jednadžba 4.3 se pojednostavljuje u oblik koji odgovara dvodimenzionalnom toku:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + W \quad (4.4)$$

U nekim slučajevima, svojstva tekućine, kao što su gustoća i viskoznost, mogu značajno varirati u vremenu i/ili prostoru. Varijacije se mogu očekivati na mjestima značajne promjene temperature ili koncentracije otopljene tvari. Kada tekućina ima heterogena svojstva poveznice između razine vodnog lica, hidrauličkih tlakova i brzina toka, nisu toliko jasne. U takvim slučajevima jednadžbu toka nije moguće rješavati temeljem potencijala (piezometarske razine), već je jednadžbu toka potrebno referencirati na tlak tekućine, gustoću tekućine i propusnost porozne sredine kao:

$$(\rho S_{0p}) \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial \omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{k_{ij} \rho}{\mu} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \right] = Q_p \quad (4.5)$$

gdje je S_0 specifično tlačno uskladištenje; ρ gustoća tekućine; p tlak tekućine; Q_p maseni ponor ili izvor; k_{ij} propusnost unutar porozne sredine (tenzor drugog reda); μ dinamička

viskoznost tekućine; g gravitaciono ubrzanje; ω udio utopljene tvari. Specifično uskladištenje pod tlakom povezano je sa specifičnim koeficijentom uskladištenja temeljem izraza: $S_s = \rho|g|S_{0p}$.

Strujanje podzemnih voda glavni je uzrok transporta i miješanja tvari otopljenih u podzemnoj vodi. Specifični protok izračunat u jednadžbi 4.1 naziva se Darcy-eva brzina. Takav naziv može navesti na krivi trag, budući da q_i ne predstavlja stvarnu brzinu gibanja vode nego volumetrijski protok po jedinici površine poprečnog presjeka. Da bi se izračunala stvarna brzina procjeđivanja potrebno je specifični protok q_i podijeliti sa efektivnom poroznošću karakterističnom za promatranu poroznu sredinu θ .

$$V_i = \frac{q_i}{\theta} = -\frac{K_{ij}}{\theta} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

gdje je: V_i stvarna brzina procjeđivanja.

Za protok tekućina različitih gustoća, stvarna brzina je dana kao:

$$V_i = -\left(\frac{k_{ij} \theta \rho}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x_j}\right) \quad (4.7)$$

Jednadžba koja opisuje pronos otopljenih tvari u toku podzemnih voda može se dobiti iz jednadžbe kontinuiteta uzimanjem u obzir svih utjecaja u i na reprezentativni elementarni volumen. Poopćeni izraz jednadžbe pronosa uz obuhvat reakcijskih procesa otopljene tvari glasi:

$$\frac{\partial(\theta c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta \mathbf{D}_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta c V_i) - c^* W^* + REAK \quad (4.8)$$

gdje je: c volumetrijska koncentracija (masa otopljene tvari po jedinici volumena tekućine); \mathbf{D}_{ij} tenzor koeficijenta hidrodinamičke disperzije; c^* koncentracija otopljene tvari u izvoru; $REAK$ reakcijski proces (u slučaju linearne razgradnje $REAK = \lambda \theta c$).

Koeficijent hidrodinamičke disperzije D_{ij} definiran je kao suma mehaničke disperzije i molekularne difuzije:

$$D_{ij} = \alpha_{ijmn} \frac{V_m V_n}{|V|} + D_{ef} \quad i, j, m, n = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

gdje je: α_{ijmn} disperzivnost porozne sredine (u općem slučaju tenzor četvrtog reda); V_m, V_n komponente stvarne brzine u m i n smjerovima; D_{ef} efektivni koeficijent molekularne difuzije; $|V|$ apsolutna vrijednost vektora brzine strujanja $|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$).

Mehaničku disperziju treba gledati kao funkciju unutarnjih obilježja porozne sredine, kao na primjer, heterogenost koeficijenta filtracije i poroznosti. Izotropnost porozne sredine obuhvaća se konstantama longitudinalne i transverzalne disperzivnosti α_L i α_T koje su linearno povezane s koeficijentom longitudinalne i transverzalne disperzije odnosima: $D_L = \alpha_L |V|$ i $D_T = \alpha_T |V|$.

C

MODELIRANJE PROCESA U EKO SUSTAVU

1. Uvod

Oko 1 500 000 vrsta obitava na zemaljskoj kugli i sve su međusobno povezane. To zasigurno zahtijeva sustavno modeliranje. Ipak postoje karakteristični ekološki sustavi u kojem životne zajednice imaju neki oblik autonomije od vrsta koje obilježavaju neki drugi ekološki sustava. Primjerice vrste koje obitavaju na kopnu i u vodi. Potonje možemo podijeliti na fitoplanktone (biljke) i zooplanktoni. Dalje zooplanktone koji su herbivori ili karnivori itd... Definiranjem interakcijskih odnosa između takovih, većih cjelovitih grupa, kao i njihove odnose sa okolinom predstavlja okosnicu ekološkog modeliranja.

2. Populacijski model

Ekološki sustav obuhvaća međusobno povezane životinje, biljke, nutrijente i metaboličke produkte. Najjednostavniji ekološki model opisuje samo jednu varijablu-vrstu i to temeljem jedne jednačbe poput:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (2.1)$$

gdje je: r , K konstante; P populacija (broj jedinki) analizirane varijable odnosno vrste.

Gore navedena jednačba zove se „logistička“ u kojoj konstanta r predstavlja brojevni kvantifikator kojim se definira brzinu prirasta od P a konstanta K je potencijalni kapacitet vrste odnosno maksimalni broj jedinki vrste P koji se može razviti. Ukoliko K poprimi vrijednost P dolazi do trenutnog prekida rasta i stacioniranja procesa koji se u realnosti ustvari nikada ne ostvaruje.

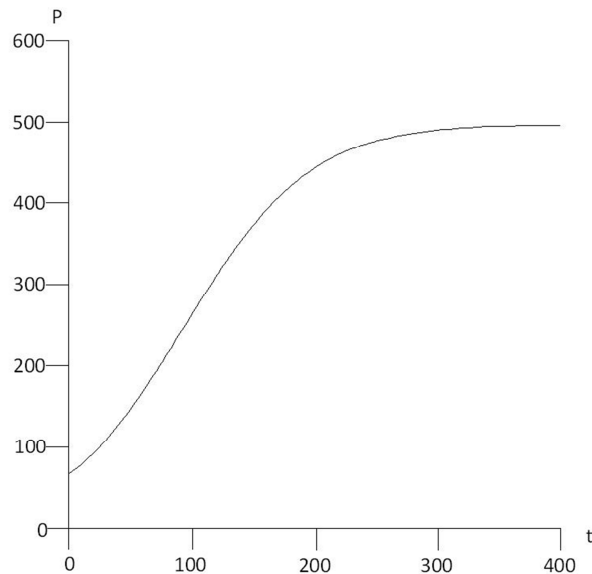
Primjer rezultata korištenja jednačbe 1 u slučaju povećanja broja stanovnika u SAD dana je u tablici 2.1. te na slici 2.1. Očigledno je da bliskost sa logističkom jednačbom predviđenog i izmjerenog broja stanovništava ima zahvaliti „dobrom“ izboru konstanti r i K . Vrijednosti tih konstanti dobiveno je temeljem baždarenja temeljem većeg niza podataka o broju stanovnika iz prethodnih godina.

Ukoliko se primjerice usvoji vrlo velika vrijednost za konstantu K jednačba 2.1 poprima oblik

$$P = P_0 e^{-rt} \quad (2.2)$$

gdje je: P_0 broj jedinki u trenutku t_0 .

Očigledno je da će vrijednost P nakon velikog broja godina t poprimiti vrlo veliku i intuitivno nerealnu vrijednost. Prema tome koeficijentom K uzet je u obzir cijeli niz čimbenika koji su zasigurno utjecali na razvoj P kroz analizirani period, poput svjetskih ratova, otkrića kontracepcijskih pilula itd. Nemogućnost opisivanja, a u realnosti postojećeg, velikog broja interakcijskih veza unutar realnog ekološkog sustava, otvara vrata upravo ovakvom jednostavnom matematičkom modeliranju.



Slika 2.1 – rezultati korištenja logističke jednadžbe 2.1 u analizi povećanja broja stanovnika u SAD

Tablica 2.1 - rezultata korištenja jednadžbe 1 u analizi povećanja broja stanovnika u SAD

Godina	t	P(t)- model	P(t) - mjereno
1900	0	76.1	76.1
1910	10	89	92.4
1920	20	103.64	106.5
1930	30	120.97	123.1
1940	40	138.21	132.6
1950	50	159.32	152.3
1960	60	179.96	180.7
1970	70	203	104.9
1980	80	227.12	226.5
1990	90	251.9	259.6
2000	100	276.9	281.4
2010	110	301.6	?
2020	120	325.6	?

Očigledno je da će vrijednost P nakon velikog broja godina t poprimiti vrlo veliku i intuitivno nerealnu vrijednost. Prema tome koeficijentom K uzet je u obzir cijeli niz čimbenika koji su zasigurno utjecali na razvoj P kroz analizirani period, poput svjetskih ratova, otkrića kontracepcijskih pilula itd. Nemogućnost opisivanja, a u realnosti postojećeg, velikog broja interakcijskih veza unutar realnog ekološkog sustava, otvara vrata upravo ovakvom jednostavnom matematičkom modeliranju. Logistička jednadžba 2.1 rješava se separacijom varijabli sa konačnim rješenjem

$$P(t) = \frac{P_0}{\frac{P_0}{K} + e^{-rt}} \quad (2.3)$$

Mogući su i složeniji oblici logističke jednadžbe koji su „opterećeni“ sa još više konstanti sa kojima se omogućuje dodatno poboljšanje u koreliranju izmjerenih i upotrebom jednadžbe dobivenih vrijednosti. Primjerice:

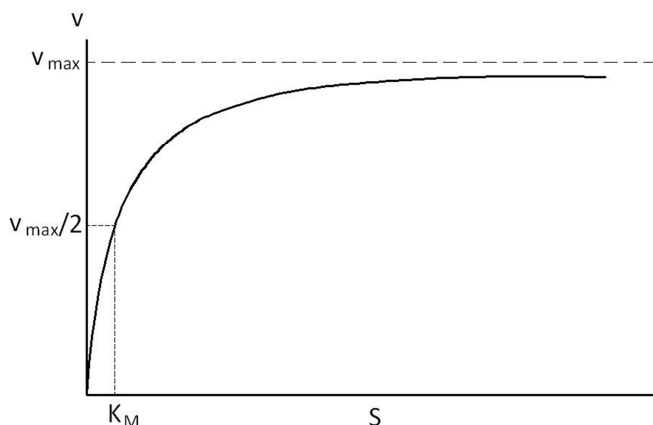
$$\frac{dP}{dt} = -rP + P(t-T) \left(\alpha + \beta \left[1 - \left(\frac{P(t-T)}{K} \right)^\gamma \right] \right) \quad (2.4)$$

gdje je: r rata odumiranja; α , β , γ koeficijenti modela.

U numeričkoj implementaciji jednadžbe 2.4 potrebno je paziti na eksplicitne uvjete nepostojanja negativne vrijednosti jedinka te da se nakon postizanja vrijednosti $P = 0$ ta vrijednost mora zadržati.

3. Michaelis-menten kinetika

Michaliss-Mentenov izraz kojim se izvorno opisuje kinetika enzimske reakcije vrlo je raširene primjene u ekološkim modelima zbog čega se na nju skreći i posebna pažnja. Autori su došli do spoznaje da se krivulja rate inicijalne reakcije nasuprot molekularne koncentracije poprima uvijek jedan te isti oblik. U njihovom eksperiment količina enzima je držana konstantnom a koncentracija supstrata (određeni set molekula) je graduirano povećavana. Rezultati eksperimenta su pokazivali povećanje brzine reakcije sve do asimptotskog postizanja maksimuma (slika 2.2).



Slika 2.2 Michaelis-Menton-ov izraz u njegovoj originalnoj formi (apscisna os označava koncentraciju supstrata a ordinatna os brzinu reakcije)

Izvod Michaelis-Mentenovog izraza u duhu biokemije ima slijedeći smisao. Proizvodnja produkta P iz supstrata S uz pomoć enzima E ostvaruje se tek nakon fizičkog kontakta između E i S te formiranja enzimsko-supstratnog kompleksa ES :



gdje je: k_1 , k_{-1} , k_2 konstante za asocijaciju enzima i supstrata, disocijaciju neizmijenjenog supstrata od enzima te disocijacija produkta (izmijenjeni supstrat) od enzima.

Opća reakcijska rata (v) je limitirana sa korakom reakcije iz ES u $E+P$ a ovisi o vrijednosti k_2 te o koncentraciji enzima koji ima već vezani supstrat $[ES]$. Uglate zagrade imaju značenje koncentracije. Prema tome moguće je napisati jednostavan izraz:

$$v = k_2 [ES] \quad (3.2)$$

Potrebno je ukazati na dvije pretpostavke izložene metodologije. Beskonačne zalihe supstrata, $[S] \gg [E]$ i stacionarnost koncentracije $[ES]$ uslijed jednake brzine razgradnje i formiranja $[ES]$. Formiranje $[ES]$ ovisi o konstanti k_1 te o raspoloživosti $[E]$ i $[S]$. Razgradnja $[ES]$ može se odvijati u dva koraka, kao konverzijom supstrata S do produkta P ili nereaktivnom disocijacijom supstrata S iz kompleksa ES . U oba slučaja $[ES]$ je vrlo bitan. Zbog toga se za slučaj stacionarnog (ravnotežnog) stanja može i pisati izraz:

$$k_1[E][S] = k_{-1}[ES] + k_2[ES] = (k_{-1} + k_2) [ES] \quad (3.3)$$

odnosno,

$$\frac{k[E][S]}{k_{-1} + k_2} = [ES]$$

Pri čemu se sve tri konstante k_1 , k_2 i k_3 pojavljuju sa iste strane izraza. Njihovim združivanjem u samo jednu konstantu, tzv. Michaelis-Mentenovu konstantu k_m :

$$\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} = k_m \quad (3.4)$$

Čime se nakon njezinog uvrštavanja dobiva izraz.

$$\frac{[E][S]}{k_m} = [ES] \quad (3.5)$$

Ukoliko se ukupni-totalni enzim označi sa E_0 tada vrijedni jednakost:

$$[E_0] = [E] + [ES] \quad (3.6)$$

odnosno

$$[E] = [E_0] - [ES] \quad (3.7)$$

i supstitucijom za $[E]$ u gornjem izrazu dobiva se :

$$\frac{[E_0][S]}{S + k_m} = [ES] \quad (3.8)$$

Daljnjom supstitucijom $[ES]$ u jednadžbu za v dobiva se:

$$v = k_2 \frac{[E_0][S]}{[S] + k_m} \quad (3.9)$$

Maksimalna rata koju možemo označiti sa v_m postignuti će se kada sve enzimске molekule imaju vezani supstrat. Uz zadovoljenje pretpostavke u kojoj je $[S]$ puno veći od $[E]$ razumna je i pretpostavka da će se sav raspoloživi E naći u formi ES te da će vrijediti jednakost $[E_0] = [ES]$. Zamjenom v_m za v te $[E_0]$ za $[ES]$ u izrazu $v = k_2 [ES]$ dobiva se $v_m = k_2 [E_0]$. Eliminacijom $[E_0]$ dobiva se i izvorni oblik Michaelis-Mentenove jednadžbe :

$$v = \frac{v_m [S]}{[S] + k_m} \quad (3.10)$$

Ukoliko se za vrijednost v usvoji vrijednost polovice maksimalne rate $v_m/2$ gornja jednadžbe će dati izraz:

$$k_m = [S] \quad (3.11)$$

Time se pokazalo da je konstanta k_m nekog enzima ustvari supstratna koncentracija pri kojoj se reakcija odvija sa intenzitetom jednakim polovici maksimalne rate. U smislu promatranja enzimске reakcije, k_m je indikator afiniteta enzima prema reakcijskom supstratu a samim tim i stabilnosti enzimsko-supstratnog kompleksa.

Pri malom [S] raspoloživost supstrata predstavlja ograničavajući faktor rasta. Prema tome, što se dodaje više supstrata povećava se i inicijalni rast intenziteta reakcije (brza konverzija zaključno do produkta). Pri rati od $k_m = [S]$ veza sa supstratom je ostvarena na 50% raspoloživih pozicija. Pri povećanju [S] teoretski se postiže i točka u kojoj svi raspoloživi enzimi imaju vezani supstrat a daljnje povećanje koncentracije neće uzrokovati i daljnje povećanje reakcijske rate (postizanje asimptotskog režima).

U širem kontekstu promatranja ekološke fenomenologije a vezano za proizvoljni nutrijent N Michaelis-Mentenova jednadžba poprima oblik

$$\text{konzumacija nutrijenata} = \frac{\alpha N}{k + N} \quad (3.12)$$

u kojem je maksimalni intenzitet konzumacije nutrijenata dan putem vrijednosti α koja ne može biti prekoračena. Primjerice, što se više apsorbira raspoloživi nutrijent od strane fitoplanktona, to se više povećava gustoća njegova populacije, no istovremeno se i smanjuje intenzitet penetrirane svjetlosti kroz morski stupac a čime se usporava daljnji rast populacije.

Dakako da primjena Michaelis-Mentonove kinetike ima punu primjenu na globalnim relacijama kojima se obuhvaća ukupni nutrijentski sadržaj a na lokalnoj razini vrijede složeniji relacijski odnosi karakteristični upravo za tu dubinu.

Prema tome, ukoliko se dosegne određena količina nutrijentata, limitirajući efekt interpretiran putem Michaelis-Mentenovog izraza dominirati će cijelim procesom.

Michaelis-Mentenov izraz sadrži dva parametra, α (maksimalna održiva rata konzumacije koja korespondira vrijednosti v_m za enzime) i k (količina nutrijenta pri kojoj konzumacija dosiže polovicu maksimuma - odgovara konstanti k_m) koja korespondira vrijednosti konstanti enzimske rate k_m .

4. Model ekosustava

Razlikovne karakteristike u modeliranju ekosustava naspram modeliranja klasičnog fizikalnog sustava. Bitna karakteristika do sada prikazanog pristupa je raspisivanje jednadžbi balansa koji je uobičajen i u formulaciji fizikalnih zakona poput zakona o očuvanju količine gibanja, mase itd... No u ekologiji ne postoje tako čvrsti zakoni – aksiomi, već se u njima pokušava što bolje opisati tok energije, nutrijenata ili kemijskih varijabli poput nitrata. U posljednje vrijeme došlo se do spoznaje da modeliranje koje se bazira isključivo na analizi toka energije

ne daje zadovoljavajuće rezultate. Isto tako pokazalo se da je za opis ponašanja pojedine komponente ekosustava potrebno definirati efekte zaslužne za rast odnosno odumiranje te komponente. Direktne veze sa drugim članovima odnosno komponentama istog sustava te ponori i/ili izvori također je uobičajeno uzeti u obzir. Pri takvom pristupu svaka komponenta ima svoju jednadžbu kojom se opisuje sam proces promjene njene „koncentracije“ u vremenu, generalno sa slijedećom strukturom:

$$\begin{aligned} \text{Rata rasta komponente } X &= \\ &= (\text{pozitivna konstanta}) * X + (\text{negativna konstanta}) * X + \text{izvori} + \text{interakcije} \end{aligned}$$

Prvi član predstavlja faktor rasta (kroz hranjenje i rast putem konzumacije i internog metabolizma nutrijenata). Drugi član predstavlja faktor odumiranja - razgradnje (kroz prirodnu smrt, podlijeganje predatorima, disipacija kroz interni metabolizam. Izvori se pojavljuju uslijed mobilnosti od X koji može migrirati u područje analiziranog problema ili se kreirati putem bio-kemijskih reakcija. Zadnjim članom se opisuje činjenica da ono što se dešava drugim komponentama ekološkog sustava može imati utjecaj i na komponentu X .

Primjerice jednadžba 2.1 je jedna populacijska nula-dimenzionalna jednadžba (model) sa jednom varijablom kojom se može opisati bujanje fitoplanktona uz istovremeno smanjenje penetracije svijetlosti kroz morski stupac (samozasjenjivanje). Mnogi modeli ne analiziraju prostornu migraciju analiziranih ekoloških varijabli i nazivaju se točkasti modeli ili nuladimenzionalni modeli.

U navedenoj matematičkoj formulaciji pojavljuju se i konstante za koje je potrebno odrediti vrijednosti, primjerice putem mjerenja u naravi.

4.1. Ekosustav sa dva člana (predator – plijen)

Populacija pojedine vrste može se razvijati na tri načina: bez ograničenja, periodički ili se asimptotski približavati nekoj vrijednosti. Logističko ponašanje prezentirano u prethodnom poglavlju primjer je asimptotskog približavanja maksimalnoj konačnoj vrijednosti.

Najjednostavniji biološki populacijski model koji sadrži dva člana zove se predator-plijen model a matematička formulacija dana je slijedećim izrazima:

$$\text{rata promjene } X = \frac{dX}{dt} = aX - cXY \quad (4.1)$$

$$\text{rata promjene } Y = \frac{dY}{dt} = -bY + dXY \quad (4.2)$$

Matematičko rješenje ove dvije jednačbe u zatvorenoj formi je (osim trivijalnog rješenja) :

$$a \ln Y + b \ln X - cY - dX = \text{konst.} \quad (4.3)$$

Vrijednosti omjera $b/d=X$ i $a/c=Y$ dobivaju se u slučaju da je rast plijena i predatora jednak 0.

Za ilustraciju daje se kvantitativan komentar na razvoj biomase ili broja jedinki analiziranih varijabli-komponenti (predator, plijen): X (plijen) se razvija kroz konzumaciju nutrijenata koji nisu eksplicitno uvučeni u prikazane jednačbe. Rata rasta definirana je konstantom a . S druge strane, Y (predator) hrani se sa X i to dinamikom koja je kvantificirana sa konstantom c . Ukupna rata (brzina) rasta X je vođena kroz ta dva kompetitivna efekta. Y (predator) odumire sa ratom koja je kvantificirana konstantom b a razvija se temeljem hranjenja sa X i to sa ratom kvantificiranom konstantom d . Važno je primijetiti da iako se c i d odnose na isti proces (Y se hrani sa X), razlikuje u tom da c predstavlja efekt na plijen, a d na predator.

Ukoliko je broj jedinki predatora Y malen, broj jedinki plijena X će se razvijati sa „povećanom“ ratom. Paralelno sa povećanjem X , koji predstavlja hranu za Y , povećavati će se i Y pa će doći do stagnacije rasta X i postizanja asimptotske vrijednosti X_{max} . Obzirom na još uvijek prisutan razvoj Y i dalje će se smanjivati X a što opet dovodi da redukcije raspoložive hrane za Y . Zbog smanjenja raspoložive hrane, Y će početi stagnirati u rastu, te će nakon postizanja svog maksimuma Y_{max} nastaviti s padom vrijednosti Y , a što opet omogućava regeneriranje i razvoj populacije X . Očigledno je da time ciklus ponavlja ispočetka.

Dodatnim članovima na desnoj strani jednačbi moguć je i sofisticiraniji opis kompleksnih relacijskih odnosa između predatora i plijena.

Nakon određenog perioda vremena moguće je postizanje ravnotežnog stanja u kojem plijen i predator zadržavaju konstantan broj jedinki ali i stabilna ili nestabilna oscilatorna stanja.

4.2. Ekosustav sa tri člana (NPZ)

Oznake i njihovo značenje koje je uvriježeno u ekološkom modeliranju akvatičkih sredina su: N – nutrijenti ; P – fitoplankton ; Z – zooplankton. Predpostavlja se logistički tip jednačbe sa kojom se opisuje populacijska dinamika fitoplanktona (P), koja sadrži i efekt samozasjenjivanja (jednačba 2.1).

Ukoliko se dodaje varijabla Z potrebno je uvesti i odgovarajuću jednačbu:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \alpha_h PZ \quad (4.4)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha_h PZ - \delta_h Z \quad (4.5)$$

Ove jednadžbe su jednadžbe prethodno prezentiranog predator – plijen modela u kojem je plijen opisan sa logističkom a predator sa linearnom varijacijom. Ovakvim modelom moguće je postizanje dva ravnotežna-stacionirana stanja. Jedno je $Z = 0$ i $P = K$ odnosno fitoplankton na maksimumu. Drugi nije trivijalan i postiže se pri vrijednostima:

$$(P, Z) = \left(\frac{\delta_h}{\alpha_h}, \frac{r}{\alpha_h} \left(1 - \frac{\delta_h}{\alpha_h K} \right) \right).$$

Ukoliko se gornji sustav proširi za još jednu varijablu, primjerice karnivore (mesojede) koji se hrane isključivo zooplanktonom :

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \alpha_h PZ \quad (4.6)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha_h PZ - \delta_h Z - \alpha_c ZC \quad (4.7)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha_c CZ - \delta_c C \quad (4.8)$$

Moguće je dobiti tri ravnotežna stanja, od kojih je jedno isto kao i u prethodnom primjeru ($P=K, Z=C=0$) i druga dva koja su jednaka primarnoj produkciji:

$$C = 0, P = \frac{\delta_h}{\alpha_h}, Z = \frac{r}{\alpha_h} \left(1 - \frac{\delta_h}{\alpha_h K} \right) \text{ sa nula karnivorima (mesojedima)} \quad (4.9)$$

$$C = \frac{\delta_h}{\alpha_h}, P = P^* = K \left(1 - \frac{\delta_h}{\alpha_h K} \right), C = \frac{1}{\delta_c} \left[rP^* \left(1 - \frac{P^*}{K} - \frac{\delta_h \delta_c}{\alpha_c} \right) \right] \quad (4.10)$$

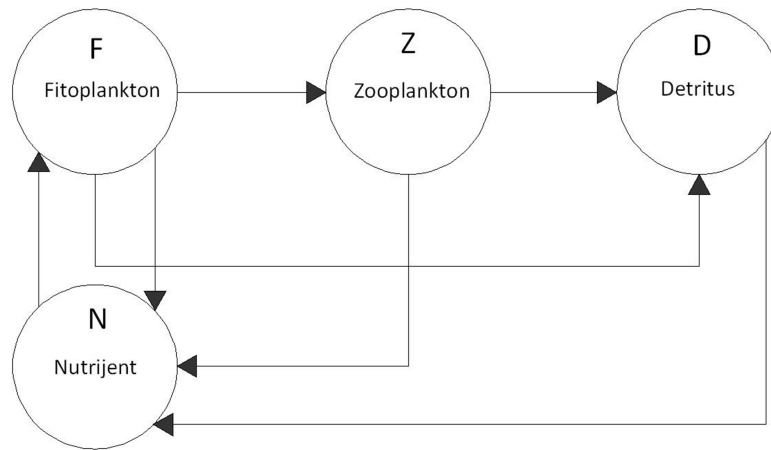
Alternativna navedenoj modelskoj strategiji sa pretpostavljenim linearnim funkcijama „odgovora“ u Z i C je pretpostavljanje samolimitirajuće relacije (Michaelis-Menten) zbog nekog kritičnog kriterija (prenapučenost, nedostatak hrane, itd.). Time jednadžbe za model sa dvije varijable P, Z poprimaju oblik:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \frac{\alpha_h PZ}{P + P_0} \quad (4.11)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha_h PZ}{P + P_0} - \delta_h Z \quad (4.12)$$

Ekosustav sa četiri člana (NPZD)

Uvodi se nova oznake sa značenjem: D – detritus. Dijagram kojim se definiraju interakcijske veze unutar prehrambenog lanca dane su na slici 4.1.



Slika 4.1 – tok nutrijenata u NPZD modelu

Strelice pokazuju procese koji se opisuju sa članovima na desnoj strani jednadžbi procesa. U slučaju NPZD modela postoje 4 varijable odnosno 4 jednadžbe procesa. Kako se sa slike 4.1 može vidjeti, zooplankton će dobivati na masi hraneći se sa fitoplanktonom i konzumacijom detritusa a gubiti će masu kroz metaboličku aktivnost i odumiranje a ta masa se dalje pronosi ili kao nutrijent ili kao detritus. Fitoplankton se razvija kroz apsorpciju nutrijenata i kroz proces fotosinteze, a gubi masu kroz respiraciju do nutrijenata, kroz odumiranje do detritusa i kroz izloženost kao plijen prema zooplanktonu. Jedina strelica koja je još ostala neobjašnjena je remineralizacija od detritusa do nutrijenata. Obzirom da taj biokemijski proces može biti vrlo kompleksan, potrebno ga je pojednostavljeno interpretirati u jednadžbama modela. Primjerice NPZD model prema Edwardsu (2001) sadrži slijedeće jednadžbe:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{e+N} \frac{aP}{b+cP} + \frac{\beta\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2} + \gamma dZ^2 + \phi D + k(N_0 - N) \quad (4.13)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{N}{e+N} \frac{aP}{b+cP} - rP - \frac{\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2} + (s+k)P \quad (4.14)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2} - dZ^2 \quad (4.15)$$

$$\frac{dD}{dt} = rP + \frac{(1-\alpha-\beta)\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2} - (\phi + \psi + k)D \quad (4.16)$$

Prvi članovi sa desne strane jednadžbi procesa za varijable N i P predstavljaju konzumaciju za potrebe respiracije i rasta. Članovi imaju spomenutu Michaelis-Mentenovu formu sa dodatnim konstantama a, b, c u dijelu koji se odnosi na fitoplankton. Konstantama se

kvantificira utjecaj zamiranja intenziteta svijetlosti kroz „čisti“ morski stupac (b) i kroz morski stupac sa smanjenom prozirnošću uslijed povećane koncentracije fitoplanktona (c). Odnosom a/b definirana je maksimalna dnevna rata rasta. Funkcija $\lambda P^2 / (\mu^2 - P^2)$ naziva se Holling tip III predatorska funkcija i uobičajena je u ekološkim modelima.

Iz gornjih izraza važno je uočiti da član $\frac{\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2}$ predstavlja ratu smanjenja fitoplanktonske populacije uslijed prisustva zooplanktona kao predatora. Međutim, samo frakcija α sudjeluje u direktnoj izgradnji populacije zooplanktona, dok je frakcija β izlučena (metabolička aktivnost) od strane zooplanktona i trenutno regenerirana u jednadžbi procesa za nutrijente. Ostatak ($1 - \alpha - \beta$) predstavlja zooplanktonski fekaliju koji je regenerativan član u jednadžbi procesa za detritus. Član rP je generalni član odumiranja fitoplanktona kojim su uključeni faktori respiracije i prirodne smrtnosti.

Odumiranje zooplanktona u jednadžbi procesa opisano je kvadratnim zakonom dZ^2 . Dio odumrlog zooplanktona γdZ^2 (frakcija γ) nastaje metaboličke aktivnosti viših članova hranidbenog lanca pa u jednadžbu procesa za N dolazi sa pozitivnim predznakom (regeneriranje). Preostala frakcija ($1 - \gamma$) predstavlja hranu za više članove prehrambenog lanca koji u ovom NPZD modelu nisu obuhvaćeni sa posebnom jednadžbom procesa.

Konzumacija detritusa D od strane zooplanktona Z nije inkorporirana u prikazanom modelu. Ukoliko se želi matematički prezentirati i taj proces potrebno je uvođenje novog člana no ne samo u jednadžbama procesa za Z i D već i za N i P . Primjerice, uvođenjem novog kvadratnog člana u jednadžbu procesa za Z u formi ωD^2 prethodni sustav jednadžbi poprima sljedeći oblik:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{e + N} \frac{aP}{b + cP} + \frac{\beta \lambda (P^2 + \omega D^2) Z}{\mu^2 + P^2 + \omega D^2} + \gamma dZ^2 + \phi D + k(N_0 - N) \quad (4.17)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{N}{e + N} \frac{aP}{b + cP} - rP - \frac{\lambda P^2 Z}{\mu^2 + P^2 + \omega D^2} + (s + k)P \quad (4.18)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha \lambda (P^2 + \omega D^2) Z}{\mu^2 + P^2 + \omega D^2} - dZ^2 \quad (4.19)$$

$$\frac{dD}{dt} = rP + \frac{[(1 - \alpha - \beta)P^2 - (\alpha + \beta)\omega D^2] \lambda Z}{\mu^2 + P^2 + \omega D^2} - (\phi + \psi + k)D \quad (4.20)$$

Ovakvi modeli uobičajeno se upotrebljavaju za analizu jednog sloja u vertikalnom smjeru (po dubini). Dio detritusa koji potone na dno (ψD) može se tretirati kao ponor a remineralizacija je modelirana kao tok komponente D kojim se ostvaruje konverzija detritusa u nutrijente.

4.3. Poveznica s hidrodinamičkim modelom konvektivne disperzije

U prethodnim poglavljima prezentirana je metodologija koja može poslužiti kao osnov za uspostavu generičkog modela eko-sustava (naš primarni interes je akvatički eko sustav). Očigledno je da se sa sličnim matematičkim izrazima može simulirati i vremenska dinamika proizvoljno odabrane otopljene/suspendirane tvari ili čestica žive/odumrle materije odnosno ekološki procesi s interakcijskim vezama između pojedinih procesnih varijabli. U analizi odabrane procesne varijable mogu biti prostorno prijenosne kroz vezu (link) sa konvektivno-disperzivnom komponentom hidrodinamičkog modela ili fiksirane u prostoru, primjerice za dno.

U matematičkim izrazima s kojima se opisuju pojedini *proces* nalaze se i *procesne varijable*, *konstante*, *parametri prisile*, *pomoćne varijable*.

Procesne varijable su one koje daju najbolji uvid u stanje nekog eko-sustava a modelator ih treba sam odabrati na način da se praćenjem njihove dinamike mogu predvidjeti i buduća stanja promatranog sustava.

Konstante se koriste kao argumenti u matematičkim izrazima procesa i ne mijenjaju se u vremenu, no mogu biti prostorno varijabilne.

Parametri prisile koriste se kao argumenti u matematičkim izrazima kojima se opisuju procesi i mogu biti prostorno i vremenski varijabilni. Predstavljaju varijable kojima su obuhvaćeni vanjski utjecaji koji djeluju na eko-sustav poput temperature, solarne radijacije i vjetera.

Pomoćne varijable su također argumenti u formiranim i korištenim matematičkim-numeričkim izrazima procesa u eko-sustavu a neki puta se koriste samo za direktnu specifikaciju rezultata. Tipični primjeri pomoćnih varijabli su faktori solarne radijacije za dnevnu varijaciju ili relativna duljina dana.

Procesi daju matematički opis transformacije procesne varijable a što znači da su procesi korišteni kao argumenti u diferencijalnim jednadžbama koje se rješavaju modelom u svrhu određivanja stanja procesne varijable.

Opis procesnih varijabli ekosustavu je formuliran putem sustava diferencijalnih jednadžbi s kojima se proračunava brzina promjene koncentracije svake procesne varijable i bazirana je na procesima koji se odvijaju unutar promatranog ekosustava.

U numeričkoj modelskoj implementaciji moguća je upotreba takozvanih COM objekata. Jednadžbe definirane od strane modelatora prvo se transformiraju u listu instrukcija kojima se omogućava da objekt evaluiraju sve definirane izraze. Za vrijeme numeričke analize model

kroz jedan vremenski korak integrira pronos procesne varijable na bazi rješenja modela hidrodinamike (konvektivna disperzija). Tada se početna ili nova koncentracija zajedno sa deklariranim koeficijentima i konstantama unosi u numerički "objekt" koji provodi evaluaciju svih definiranih izraza te ih integrira kroz jedan vremenski modelski korak. Potom se nova vrijednost koncentracije vraća u model hidrodinamike koji ostvaruje slijedeći vremenski korak.

U općem slučaju za svaku procesnu varijablu specificira se odgovarajuća diferencijalna jednačba kojom se obuhvaćaju procesi bitni za promjene koncentracije specificirane procesne varijable. Ukoliko pojedini proces obuhvaća više od jedne procesne varijable ili ukoliko postoje interakcijska djelovanja više procesnih varijabli, jednačbe su međusobno ovisne.

Proces koji se interpretiraju putem matematičkih izraza koriste argumente poput brojeva, konstanti, sila prisile i procesnih varijabli a uvijek opisuju brzinu promjene. U tom kontekstu konstante su stacionarne dok sile prisile mogu imati i nestacionarni karakter.

$$P_c = \frac{dc}{dt} = \sum_{i=1}^n proces_i \quad (5.1)$$

gdje je: c koncentracija procesne varijable; n broj procesa koji je od značenja za pojedinu procesnu varijablu.

Sile prisile poput temperature mogu biti specificirane na više načina, kako konstante u prostoru i vremenu, konstantne samo u prostoru ili varijabilne u prostoru i vremenu. Za vrijeme provedbe numeričkih analiza sve informacije se mogu novelirati kroz spregu sa hidrodinamičkim modulom.

Dinamika pronosa procesnih varijabli izražava se transportnom konvektivno disperzivnom jednačbom, koja u nekonzervativnoj formi poprima oblik:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \sum S_c + \sum P_c \quad (5.2)$$

gdje je S_c oznaka za ponore i izvore a P_c oznaka za analizirani proces.

D

MODELIRANJE VALNOG GENERIRANJA

1. Uvod

Općenito razvoj modeliranja valova može se podijeliti na tri ere, prvu eru – eru čisto empirijski temeljenih metoda, drugu eru – eru poluempirijskih spektralnih modela i treću, još uvijek aktualnu, eru numeričkog modeliranja. Početak prve ere označio je Stevenson, za kojeg bi se moglo reći da je prvi modelirao valove generirane vjetrom kada je definirao najvišu valnu visinu koja će se dostići tijekom oluje ovisno o duljini privjetrišta. Također postoji još nekoliko empirijskih formula korištenih prije 40-tih godina 20.-tog stoljeća.

Sverdrup i Munk (1946.) su napravili početni korak u realnijem modeliranju valova generiranih vjetrom ispitujući razvoj valova na temelju proučavanja energije, privjetrišta i trajanja puhanja vjetra, te uvođenjem pojma značajne valne visine. Bretschneider (1952., 1958.) je proširio njihova nastojanja dodatnim podacima i razvio općepoznatu SMB (Sverdrup, Munk i Bretschneider) metodu.

Druga era započela je uvođenjem spektralne analize u proučavanjem valova ranih 50-tih i formuliranjem Neumannovog spektra, Pierson i dr. 1955 razvijaju prognozu valova temeljenu na spektralnoj analizi, PNJ (Pierson, Neumann i James) metodu. Konačno, okvir za numeričko modeliranje valova generiranih vjetrom postavio je Hasselmann (1963.) kada je postavio zakon očuvanja energije valnog spektra koji je predstavljao bazu moguće točne teorije dinamike valnog spektra.

Donelan (1977.) je primijetio da na stanje mora utječe trenje vjetra na površinu te je povezoao fiziku valova s naprezanjem vjetra na površini. Razvio je jednostavan model prognoze valova temeljen na konceptu lokalne ravnoteže količine gibanja, a ne na ravnoteži energije. Prvi je uveo u analizu i kut otklona između smjera puhanja vjetra i smjera propagacije valova.

Proces generiranja, disipacije i međudjelovanja valova u dubokoj vodi prikazan je kroz tri generacije formulacije problema ovisno o stupnju parametrizacije procesa.

Schwab (1984.) je unaprijedio dotadašnji numerički okvir kako bi formulirao poluempirijski parametarski model, model prve generacije, u kojem je nelinearno međudjelovanje u potpunosti zanemareno. Predstavnici druge generacije modela su SHALWV (shallow-water wave) i DWAVE (deep-water wave) modeli (1981. i 1986.) koji su svojom strukturom vrlo slični WAM modelu – modelu treće generacije. Međusobno se razlikuju u tome što DWAVE ne uključuje trenje s dnom. Ono što ova dva modela opisuje kao modele druge, a ne treće generacije je njihov pristup parametrizaciji nelinearnog međudjelovanja koji je strogo ovisan o unaprijed definiranom spektralnom obliku.

Prema velikoj studiji usporedbe prve i druge generacije valnih modela objavljenoj 1985. od tima stručnjaka okupljenih pod imenom SWAMP group (Ocean wave modelling) u oba modela postojala su neka osnovna pojednostavljenja kojima su modeli gubili na realnosti u ekstremnim uvjetima (osobito kod nagle promjene polja vjetra).

Spomenutom studijom započela je treća era, era numeričkog modeliranja koju je označio razvoj treće generacije valnih modela u kojima je četverostruko međudjelovanje valova izraženo eksplicitno. Prototip modela treće generacije je WAM model generiranja oceanskih valova WAMDI grupe (1988.).

2. Formulacija problema valnog generiranja

U ovom poglavlju prikazana je općenito prihvaćena formulacija problema modeliranja generiranja gravitacionih vjetrovnih valova.

Za opis valnog modela u proizvoljnom slučaju, pretpostavlja se izdizanje površine kao zbroj velikog broja nezavisnih linearnih valnih komponenti. Time se valna prognoza temelji na prognozi svake od tih nezavisnih komponenti zasebno, odnosno energije spektra $E(f, \delta)$ svake komponente, pri čemu je f valna frekvencija i δ proizvoljni smjer svake pojedine komponente. Budući je energija spektra promjenjiva u vremenu, t i prostoru, (x,y) , korektan je zapis u obliku $E(f, \delta) = E(f, \delta; x, y, t)$.

Razvoj energije svake valne komponente (f, δ) može se odrediti integracijom jednadžbe razvoja energije uslijed napredovanja brzinom grupe u smjeru vala:

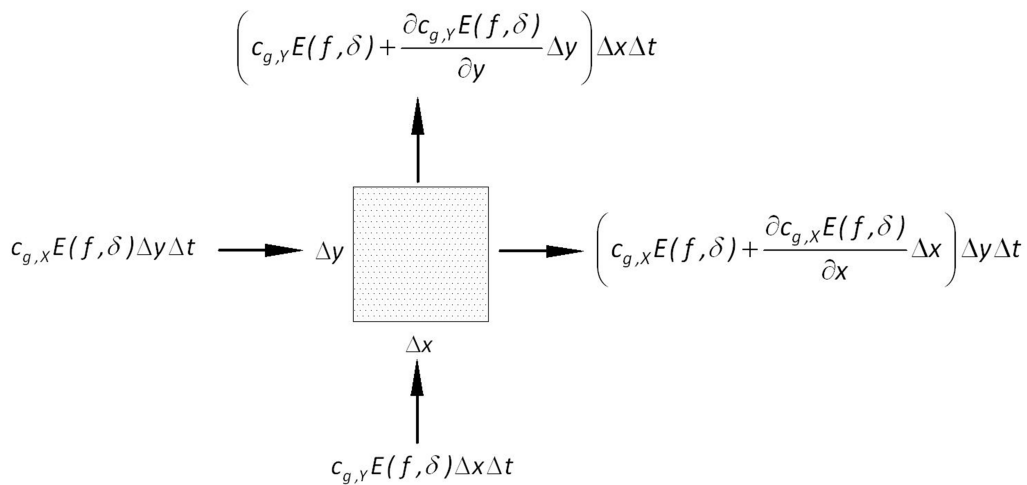
$$\frac{dE(f, \delta; x, y, t)}{dt} = S(f, \delta; x, y, t) \quad (2.1)$$

gdje je lijeva strana jednadžbe brzina promjene energije valnog spektra, a desna strana jednadžbe predstavlja superpoziciju funkcija koje opisuju različite fizikalne fenomene obuhvaćene analizom, u obliku $S = S_W + S_{NL} + S_{DS} + S_B + S_S$ (predstavlja izvore i ponore). Pritom S_W predstavlja snagu koja u sustav dolazi od vjetra, S_{NL} opisuje nelinearni prijenos energije (snage) između samih valova (ovisno o plitkovodnom ili dubokovodnom području), S_{DS} disipaciju energije (snage) uslijed površinskog loma valova, S_B disipaciju energije (snage) uslijed trenja s dnom i S_S disipaciju valne energije (snage) uslijed loma valova uzrokovanog promjenom dubine.

Širenje valova, opisano lijevom stranom jednadžbe (2.1), uzima u obzir poznate utjecaje refrakcije, plićine, difrakcije i refleksije koji dominiraju promjenom valnog polja. Konceptualno gledano, izraz (2.1) predstavlja Lagrangeov pristup. Prelaskom na Eulerovu

formulaciju spektra se ne određuje samo u jednoj predikcijskoj točki nego u velikom broju točaka simultano s jednadžbom energetske ravnoteže postavljenom za svaku od tih točaka. Pri određivanju bilance energije u točkama prema Eulerovom pristupu, uspostavlja se proračunska mreža s reprezentativnim ćelijama veličine Δx u x smjeru i Δy u y smjeru. Odgovarajuća jednadžba bilance energije za promatranu prostorno fiksnu ćeliju glasi:

*promjena energije u fiksnoj ćeliji u jedinici vremena =
sumarni tok energije kroz ćeliju + lokalno generirana energija na području ćelije u jedinici vremena*



Slika 2.1

Razlika energije na kraju i na početku vremenskog intervala Δt , može se pisati u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t &= \\ &= \left(E(f, \delta; x, y, t) \Delta x \Delta y + \frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \right) - E(f, \delta; x, y, t) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ukupni unos energije u ćeliju tijekom intervala Δt u x smjeru odgovara ulasku energije s lijeve strane ćelije (s brzinom $c_{g,x} = c \cos \delta$ po širini Δy) umanjeno za veličinu energije koja izlazi iz ćelije na desnoj strani (s veličinom koja se razvila na duljini Δx):

$$\begin{aligned} - \frac{\partial c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t &= \\ &= c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t) \Delta y \Delta t - \left(c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t) + \frac{\partial c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (2.3)$$

Isto tako, unos energije u y -smjeru može se pisati u obliku:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta t = \\
& = c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t) \Delta x \Delta t - \left(c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t) + \frac{\partial c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta t \quad (2.4)
\end{aligned}$$

gdje je: $c_{g,x} = dx/dt$, $c_{g,y} = dy/dt$ komponente brzine grupe valova u x i y smjeru pri konstantnoj frekvenciji i smjeru u dubokovodnom području.

Lokalno generirana energija na području ćelije s površinom $\Delta x \Delta y$ tijekom vremenskog intervala Δt je $S(f, \delta; x, y, t) \Delta x \Delta y \Delta t$ a članom izvora/ponora $S(f, \delta; x, y, t)$ obuhvaćaju se svi efekti generiranja valova vjetrom, nelinearnog međudjelovanja valova te disipacije valne energije u jedinici vremena i prostora.

Prema tome ukupna promjena energije za ćeliju $\Delta x \Delta y$ u vremenu Δt definirana je izrazom:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta t = \\
& = S(f, \delta; x, y, t) \Delta x \Delta y \Delta t \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Dijeljenjem izraza 2.5 sa $\Delta x \Delta y \Delta t$ dobiva se Eulerova jednadžba očuvanja spektralne energije za svaku valnu komponentu i svaku ćeliju u svakom trenutku:

$$\frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial c_{g,x} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial c_{g,y} E(f, \delta; x, y, t)}{\partial y} = S(f, \delta; x, y, t) \quad (2.6)$$

U dubokovodnom području brzina širenja vala ne ovisi o x i y, pa slijedi:

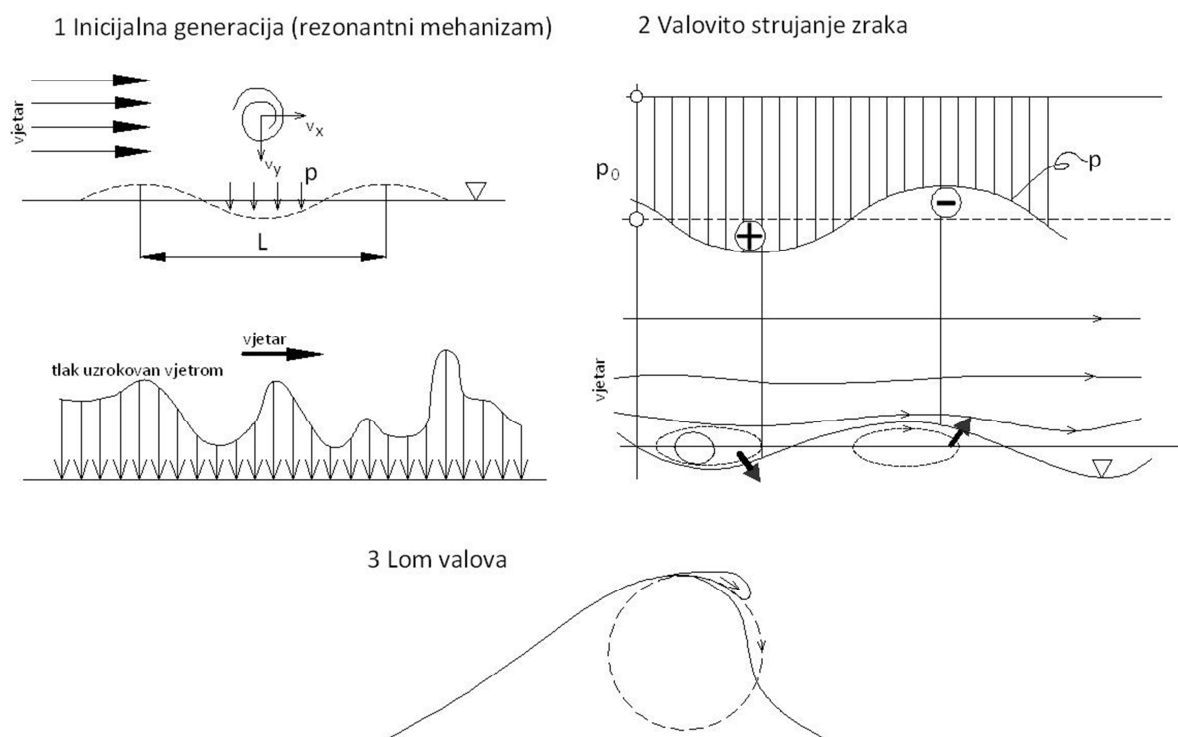
$$\frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial t} + c_{g,x} \frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial x} + c_{g,y} \frac{\partial E(f, \delta; x, y, t)}{\partial y} = S(f, \delta; x, y, t) \quad (2.7)$$

Eulerov pristup modeliranju valova zapravo se svodi na jednu jednadžbu očuvanja energije 2.7. Integracija ove jednadžbe u prostoru i vremenu uključuje veliki broj točaka u prostoru i vremenu, te veliki broj valnih komponenti a jednadžbu je potrebno riješiti za svaku kombinaciju tih točaka i komponenti.

Mjerenja iz 1970-ih i teoretski radovi koji opisuju mehanizam generiranja valove unutar graničnog sloja rezultirali su parametrizacijom funkcije izvora valne energije od djelovanja vjetra. Zajedno s prikazom velikog broja komponenti valnog spektra parametrizacija ima potencijal da dovede do željenog opisa prijenosa energije s vjetra na valove u približno realnim odnosima.

2.1. Mehanizam generiranja valova vjetrom

Općenito, vjetrovni valovi generiraju se kroz tri faze. U trenutku kada vjetar počinje puhati nad morem, kontaktna površina je ravna i mirna. U prvoj fazi, fazi početne (inicijalne) generacije javlja se rezonantni mehanizam kad turbulentno strujanje zraka inducira pulsirajući tlak na morsku površinu. Uslijed toga nastaju valovi na površini mora iste frekvencije kakvu imaju i pulzacije tlaka, pa nabori zbog rezonancije i dalje rastu (slika 2.1). Zatim slijedi druga faza, faza valovitog strujanja zraka nad valnim profilom bez odvajanja strujnice. Energija vjetra se na valove prenosi preko vrtloga zraka u dolu vala i preko rezultirajućeg polja tlaka koje uzrokuje porast valne visine (slika 2.2). U posljednjoj fazi dolazi do lomljenja valova, kad se valovi malih valnih dužina lome na grebenima dugih valova. U zadnjoj (trećoj) fazi nastaju i najveći valovi. Kratki val koji se slomi na dugom valu dodaje impuls od svoje prebačene mase kinetičkoj energiji orbitalnog gibanja vodnih čestica dugog vala. Povećanjem energije dugog vala raste mu i valna visina, pa se tako valna energija prenosi s kratkih na duge valove (slika 2.2).



Slika 2.2 Osnovne faze mehanizma generiranja vjetrovnih valova (1-Inicijalna generacija, 2-Valovito strujanje zraka, 3-Lom valova)

Razumijevanje razvoja vjetrovnih valova vrlo je zahtjevan zadatak. S teoretskog stajališta potrebno je uočiti da se radi o izuzetno teškom problemu koji uključuje modeliranje turbulentnog strujanja zraka iznad površine mora koja se mijenja u prostoru i vremenu.

2.1.1. Teorije prijenosa energije vjetra na valove - Milesova teorija

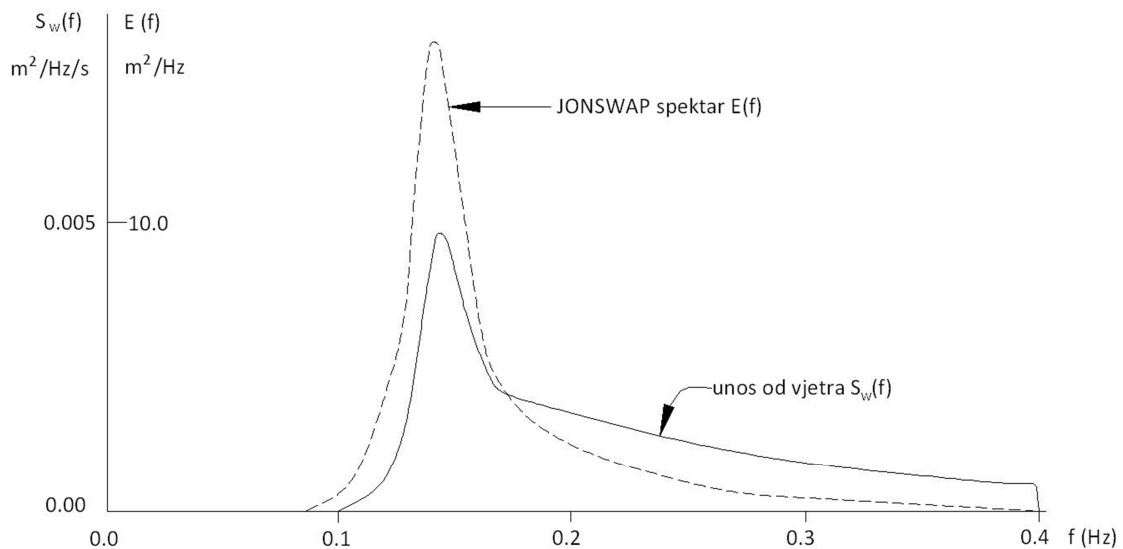
U toku generiranja valova, profil brzina vjetra iznad površine mora se mijenjati. Brzina vjetra na bregovima nastalih valova je veća, dok je u dolovima manja. To rezultira povećanjem pritiska na brijegu valova, a smanjenjem u dolu te dolazi do porasta valova. Na određenom mjestu vertikalne raspodjele brzine, brzina će biti jednaka nuli. Udaljenost od mirne površine mora do te točke je visina kritičnog sloja unutar kojeg će brzina vjetra biti reverzibilna, odnosno smjer kretanja čestica vjetra će biti suprotan u odnosu na smjer širenja vala. Kao posljedica toga stvara se vrtlog (eng: vortex koji ekstrahira energiju iz vjetra i predaje ju valnom polju). Phillips je razmatrao rezonanciju kontaktne površine i turbulentnog strujanja zraka, dok je Miles razmatrao rezonanciju između valova uzrokovanih poljem tlaka iznad slobodne površine. Ova dva mehanizma mogu se nadopunjavati. U prvoj fazi generiranja valova dominira rezonantno valno generiranje s linearnim porastom energije prema Philipsovoj teoriji, dok u kasnijim fazama međudjelovanje vjetra i valova generira eksponencijalni porast energije s fizikom procesa objašnjenom u Milesovoj teoriji. Osnovni razlog za kontroverze u Milesovoj teoriji bilo je pojednostavljenje stvarnog problema kroz usvajanje pretpostavki o linearnosti procesa te kvazilaminarnom strujanju zraka (bezviskozno i bez utjecaja turbulencije izvan graničnog sloja). Provedeni eksperimenti u ranijem periodu osmatranja valnog generiranja (Dobson, 1971.) pokazali su da je prijenos energije sa vjetra na valove reda veličine veće od pretpostavljenog prema Milesovoj teoriji. S druge strane, novija mjerenja (Hasselmann i Bosenberg, 1991.) pokazala su slaganje reda veličine s Milesovom teorijom, iako teorija i dalje predviđa manji prijenos energije od mjerenih vrijednosti. Razlika Milesove teorije i mjerenja je bila posebno izražena kod niskofrekventnih valova s faznom brzinom približno jednakom brzini vjetra na visini 10 m iznad površine. U toku generiranja valova, profil brzina vjetra iznad površine mora se mijenjati. Brzina vjetra na bregovima nastalih valova bit će veća, a u dolovima manja što će rezultirati povećanjem pritiska na dolu valova i smanjenjem na brijegu. Time je vremenski razvoj valnih visina brz i prati eksponencijalni zakon prirasta. Na određenom mjestu u vertikalnom profilu brzine vjetra, brzina će biti jednaka nuli. Udaljenost od mirne površine mora do te točke je tzv. visina kritičnog sloja unutar kojeg su brzine vjetra suprotnog smjera od smjera propagacije valova. Posljedica toga je formiranje sloja u kome se ekstrahira energija vjetra i predaje postojećem valnom polju. Belcher i Hunt (1993.) otkrili su dva sloja u strujanju zraka nad valovima. Turbulencija u sloju bližem površini (eng: inner region) u ravnoteži je s lokalnim gradijentom brzine. Iznad tog sloja formira se drugi sloj (eng: outer region) u kojem se turbulencija nije uravnotežena. Kretanje valova pri manjim brzinama vjetra je sporije od same brzine vjetra. S druge strane, povećanje brzine vjetra osim povećanja valnih visina uzrokuje i povećanje valnih duljina odnosno brzina. Potrebno je napomenuti da se s modelima primarno želi istražiti valna fenomenologija vezana uz „najviše“ i „najduže“ valove odnosno one s brzinom istog reda veličine brzini vjetra. Nažalost, za njih prethodno navedena teorija ne vrijedi. Daljnje unapređenje teorije valnog generiranja dao je Mastenbroek (1996.) kroz model turbulencije zraka prema teoriji drugog reda.

2.1.2. Modelska implementacija

Član izvora energije S_W (2.1) definiran je rezultatima istraživanja u kojima se pokazalo da intenzitet valnog generiranja ovisi o vremenu proteklom od inicijalizacije vala prema zakonu:

$$S_W(f, \delta) = \gamma E(f, \delta) \omega \quad (2.8)$$

gdje je: $f = \omega / 2\pi$ valna frekvencija, γ intenzitet valnog generiranja.



Slika 2.2 Utjecaj člana izvora S_W (vjetra) u formiranju JONSWAP spektra u dubokom (definirano pomoću formulacije inicijalne generacije prema Cavaleri i Malanotte-Rizzoli, 1981., i modelom Miles-a, 1957., za $H_{m0}=3,5\text{m}$, $T_p=7\text{s}$ i $U_{10}=20\text{m/s}$)

Intenzitet valnog generiranja definiran je izrazom predloženim od Janssena:

$$\gamma = \omega \frac{\rho_z}{\rho_v} \left(\frac{1,2}{\kappa^2} \mu \ln^4 \mu \right) \left[\frac{u_*}{c} \cos(\delta - \delta_w) \right]^2 \quad (2.9)$$

gdje je: ρ_z , ρ_v gustoća zraka i vode, κ Karmanova konstanta, δ_w smjer vjetra, δ smjer vala, u_* brzinsko trenje od vjetra, $c = \omega/k$ fazna brzina vala, μ bezdimenzionalna kritična visina vala definirana izrazom $\mu = k z_0 \exp(\kappa/m)$, z_0 hrapavost morske površine inducirana djelovanjem vjetra definiran odnosom:

$$z_0 = \frac{Z_{\text{CHARNOCK}} u_*^2}{g} \left(1 - \frac{\tau_v}{\rho_z u_*^2} \right)^{-1/2} \quad (2.10)$$

gdje je: τ_w naprezanje na morskoj površini inducirano djelovanjem vjetra, Z_{CHARNOCK} modelska konstanta.

2.2. Nelinearno međudjelovanje valova

Nelinearno valno međudjelovanje najlakše je opisati ako se zamisli veliki bazen konstantne dubine u kojem se iz dva različita ugla generiraju valovi različitih frekvencija i smjerova. Na taj način formira se sustav koji ima svoj smjer, duljinu i brzinu, pa samim time i svoj valni broj k . Ako na ta dva vala naiđe treći val iste duljine, brzine i smjera kao rezultatni od prethodna dva doći će do njihovog međudjelovanja koje se naziva triada (eng: triad wave-wave interaction). Pri tome dolazi do preraspodjele energije između valova, ali ukupna energija sve tri komponente u svakoj točki ostaje ista. Opisana situacija javlja se samo u plitkom području.

U dubokom može doći do međudjelovanja između dva para valova ako se poklope valni brojevi i frekvencije njihovih rezultanti. Tada dolazi do prijenosa energije sa jednog para na drugi i to međudjelovanje zovemo quadruplet (eng: quadruplet wave-wave interaction). Treba naglasiti da se uslijed quadrupleta spektralna energija samo preraspodjeljuje, ne gubi se niti u sustav ulazi nova energija. Osnovna jednačba koja opisuje ovaj proces je Boltzmanov integral (Hasselmann, 1962.; Zakharov, 1968.).

Hasselmann je ustanovio da skup od 4 vala (quadruplet) razmjenjuje energiju kada su zadovoljeni sljedeći uvjeti rezonancije $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ i $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ pri čemu je ω_i kutna frekvencija, a \mathbf{k}_i vektor valnog broja. Linearna disperzija dana je izrazom $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ što u dubokovodnom području prelazi u oblik $\omega^2 = gk$, pri čemu je g oznaka za gravitaciono ubrzanje a h dubina.

Član S_{NL} koji u numeričkim modelima opisuje prijenos energije između valova egzaktno je određen Boltzmannovim izrazom (Hasselmann, 1962.)

$$S_{NL-4}(\mathbf{k}_4) = \int_{dk_2} \int_{dk_2} T_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) E(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{k}_2) E(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) dk_1 dk_2 - E(\mathbf{k}_4) \int_{dk_2} \int_{dk_2} T_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) E(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{k}_2) dk_1 dk_2 \quad (2.11)$$

gdje su T_1 i T_2 koeficijenti prijenosa izraženi složenim funkcijama ovisnim o vektorima valnih brojeva. Pri tome u gornjem izrazu prvi integral predstavlja „pasivni“ dio međudjelovanja (nezavisan o gustoći energije $E(\mathbf{k}_4)$), dok drugi integral predstavlja „aktivni“ dio međudjelovanja. Energija valne komponente \mathbf{k}_4 ovisno o odnosu aktivnog i pasivnog dijela raste ili pada. Prema tome val opisan valnim brojem \mathbf{k}_4 ekstrahira energiju iz sustava kroz pasivni dio, a predaje ga sustavu kroz aktivni dio.

Od kada je izveden Boltzmannov integral napravljen je veliki napredak u razumijevanju uloge četverostrukog valnog međudjelovanja u razvoju vjetrovnih valova.

Boltzmannov integral originalno je izveden za duboku vodu uz pretpostavku homogenog i stacionarnog stanja mora i uz točno definiranu rezonanciju između spektralnih komponenti. Ovaj osnovni koncept proširen je uključivanjem utjecaja plitkog područja i pretpostavkom ravnog dna. Valjanost Boltzmannovog integrala može se provjeriti samo korištenjem numeričke simulacije nelinearnog razvoja slobodnih površinskih gravitacijskih valova. U tijeku je niz istraživanja koja bi trebala potvrditi valjanost Boltzmannovog integrala za primjenu neovisno o obliku spektra i za plitku vodu s nagnutim dnom. Razvijene su razne egzaktno numeričke tehnike za izračun Boltzmannovog integrala s velikom točnosti.

Mnogi eksperimenti, započevši s JONSWAP mjerenjima, potvrdili su ulogu nelinearnog četverostrukog međudjelovanja na razvoj valova u uvjetima ograničenog privjetrišta. Time se razjasnio i mehanizam spuštanja spektralnog vrha, stabilizacije spektra i direkcijske distribuciju spektra u ovisnosti o frekvenciji. Interesantna je i uloga tog međudjelovanja u plitkovodnom području te njegov utjecaj u odnosu na druge fizikalne procese kao što su trostruko valno međudjelovanje (triada) i lom valova uslijed promjene dubine.

2.3. Spektralna disipacija u dubokovodnom području

Disipacija energije u dubokovodnom području najslabije je shvaćen dio fizike potrebne za modeliranje valova. Postoji opći dogovor da je najveći dio te disipacije posljedica loma valova, ali fizika procesa loma, posebno kod spektralnih valova, nije potpuno razjašnjena. Ostaju otvorena pitanja o tome koliko se energije gubi površinskim lomom valova u kojem djelu spektra te što uzrokuje lom valova i prestanak loma. Kao drugi bitan gubitak energije pretpostavlja se disipacija uslijed međudjelovanja valova i turbulencije. Postoji i niz drugih mehanizama uslijed kojih dolazi do gubitka energije u uvjetima međudjelovanja vjetra i valova. Jednostavno, može se reći da je fizika spektralne disipacije još uvijek nerazlučena, a teoretska i eksperimentalna istraživanja u ovom području su rijetka s često kontradiktornim rezultatima. U nastavku se komentira samo uobičajeno dominantni izvor disipacije energije: disipacija uslijed površinskog loma valova.

2.3.1. Disipacija uslijed loma valova

Članom S_{DS} u jednadžbi (1-2) obuhvaća se disipacijski proces izazvan površinskim lomovima valova (engl.: *whitcapping*) Ovdje je prikazan oblik koji se koristi u trećoj generaciji valnih modela. Formulacija člana S_{DS} izražena je sljedećom jednadžbom:

$$S_{SD}(f, \delta) = -C_{dis} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{PM}} \right)^m \left((1 - \xi) \left(\frac{k}{k} \right)^2 \right) \overline{\omega E(f, \delta)} \quad (2.12)$$

gdje je: C_{dis} , ξ , m empirijske konstante; α strmost valnog polja; α_{PM} strmost valnog polja u Pierson-Moskowitz valnom spektru; $\bar{\omega}$ srednja kutna frekvencija; \bar{k} srednji valni broj.

Matematički najrazvijeniji i najčešće korišteni disipacijski model je Hasselmannov model (1974.). Ovaj model spada u grupu modela koji analiziraju problem nakon loma valova. Prema tom modelu, jednom kada se uspostavi slučajna raspodjela površinskog loma valova, razlog samog loma vala nije više bitan. Rezultat takvog shvaćanja je linearna disipacija.

2.4. Nelinearno međudjelovanje u plitkovodnom području

Analogno kao i kod uvjeta rezonancije za četiri valne komponente, uvjet rezonancije za tri valne komponente zahtjeva da zbroj frekvencija i vektora valnih brojeva dva slobodna vala bude jednak frekvenciji i vektoru valnog broja trećeg vala $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ i $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

Ovaj zahtjev za rezonancijom nije u skladu s disperzijskim izrazom linearne valne teorije u dubokovodnom području, tako da se ovaj problem javlja samo u plitkovodnom području. U prijelaznom području ovaj uvjet može biti približno ispunjen, pa se javlja približno rezonantno stanje.

Povijesno gledano modeli u plitkom temelje se na klasičnoj Boussinesqovoj jednadžbi i Korteg i de Vries teoriji konstantne dubine s kraja 19. stoljeća, proširenoj na promjenjivu dubinu (Peregrine, 1967.). U toj teoriji pretpostavlja se Stokesov (ili Ursellov) broj reda $O(1)$, tj. nelinearnost i disperzija su pretpostavljene kao istog reda. Originalna Boussinesqova aproksimacija je prihvatljiva za slučaj slabe disperzije i nelinearnosti, što ograničava njenu primjenu na jako plitko područje. Novijim napretkom obuhvaćena je puna nelinearnost (Wei i sur., 1995.) i utjecaj disperzije višeg reda (Madsen i sur., 2003.), čime je podržana uspostava modela za prijelazno područje.

Hasselmannova teorija međudjelovanja četiri rezonantna vala, koja predstavlja temelj većine dubokovodnih prognostičkih modela, ograničena je na duboko i prijelazno područje gdje je Stokesov broj ≤ 1 (Zakharov, 1999.). Isto tako, poznato je da međudjelovanje tri vala (triada) nije rezonantno u dubokom i prijelaznom području. No, uslijed napredovanja površinskih valova iz dubokog prema plitkom, triadno djelovanje preuzima dominantnu ulogu u dinamici promatranog problema.

Ovaj prijelaz sa četverostrukog na trostruko međudjelovanje je rezultat promjene u disperzijskoj jednadžbi iz disperzivnog dubokovodnog režima koji ne podržava triadu (Phillips, 1960.) do nedisperzivnog plitkovodnog režima u kojem sve valne komponente napreduju istom brzinom. Iako je triada egzaktno rezonantna samo za monodirekcijske

valove u plitkom, međudjelovanja blizu rezonancije isto tako mogu imati značajnu ulogu u razvoju valova kroz plitkovodno priobalno područje.

2.4.1. Disipacija na dnu

Jednadžba energetske ravnoteže vala eksplicitno sadrži član za disipaciju uslijed površinskog loma u dubokovodnom području. Kako valovi stižu u plitkovodno područje, počinju „osjećati“ dno.

Trenje s dnom je složeni proces u relativno tankom (u usporedbi s dubinom) i pretežito turbulentnom sloju uz dno. Ono nastaje uslijed gibanja vodnih čestica uzrokovano površinskim valovima. U osnovi to je prijenos energije s orbitalnog gibanja čestica neposredno iznad tog sloja na turbulentna gibanja u samom sloju. Stoga taj prijenos ovisi o samom valnom polju i o karakteristikama dna.

Razvijena su dva tipa modela za rješavanje ovog problema. U viskozno-vrtložnom modelu disipativni karakter turbulentnog sloja definiran je u ovisnosti o parametrima dna (Madsen i sur., 1988.; Weber, 1991.). S druge strane, jednostavna, ali često korištena alternativa navedenim modelima je Hasselmannov pristup (Hasselmann i sur., 1973.) kojim se definiraju osnovni parametri neovisno o konkretnim svojstvima u pojedinom problemu. Ovaj pristup se primjenjuje u većini operativnih modela i daje razumnu točnost.

3. Model valnog generiranja

U nastavku opisanim modelom omogućava se simulacija generiranja i zamiranja gravitacijskih vjetrovnih valova i valova mrtvog mora u području otvorenog mora i priobalja.

Osnovna jednadžba analiziranog procesa je jednadžba očuvanja valnog djelovanja $N(x,y,\omega,\delta)=E(x,y,\omega,\delta)/\omega$, definiranog omjerom gustoće energije valnog spektra E i kutne frekvencije ω .

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (cN) = \frac{(I+P)}{\omega} \quad (3.1)$$

gdje je: t vrijeme; x,y kartezijeve koordinate; $c=(c_x,c_y,c_\omega,c_\delta)$ brzina valne grupe u 4-dimenzionalnoj (x,y,ω,δ) domeni ($c_x = dx/dt$, $c_y = dy/dt$, $c_\omega = d\omega/dt$, $c_\delta = d\delta/dt$); I, P članovi izvora i ponora, ∇ diferencijalni operator u 4-dimenzionalnoj (x,y,ω,δ) domeni; δ smjer propagacije vala; ω kutna frekvencija izražena jednadžbom linearne valne disperzije $\omega = \sqrt{gk \tanh(kd)}$; $k = 2\pi/L$ valni broj, L duljina vala, d dubina vode.

Član izvora I definiran je jednažbama 2.8, 2.9. i 2.10. Članom ponora P obuhvaća se disipacijski proces izazvan površinskim lomovima valova (eng: whitecapping) koji je u modelu inkorporiran temeljem jednažbe 2.12.

E

MODELIRANJE SUSTAV POD TLAKOM

1. Uvod

Modelom sustava pod tlakom uobičajeno se rješavaju problemi vezani uz vodoopskrbu. Modelom se u osnovi proračunavaju vrijednosti varijabli primarnog interesa, protoci u cijevima sustava i tlakovi u čvorovima na koje su cijevi priključene. Osim cijevi, modelima se uobičajeno simulira i utjecaj otvorenosti pojedinih ventila i zatvarača u mreži te utjecaj stanja njihove otvorenosti na konačnu raspodjelu protoka i tlakova u sustavu. Isto tako, vodospreme, pumpe i turbine, kao važni elementi svakog realnog sustava vodoopskrbe, jednostavno se uključuju u odgovarajući čvor sustava. Za spomenute elemente sustava, korisnik modela u većoj ili manjoj mjeri definira njihova karakteristična stanja, dok samo model mora omogućavati detekciju eventualno unešenih „konflikata“, odnosno nelogičnosti.

Modelima se najčešće provode analize stacionarnog stanja u režimu maksimalne opterećenosti sustava. Osnovni uvjeti postavljaju se od strane projektanta, koji ponuđenim rješenjem treba osigurati dobavu zahtijevanih količina vode uz istovremeno zadovoljenje uvjeta postavljenih na minimalne/maksimalne dozvoljene tlakove. Mnogi dostupni modeli današnjice omogućavaju provedbu proračuna za kvazi-nestacionarni režim rada. Pod tim se misli na mogućnost proračuna niza sukcesivnih stanja vodovodnog sustava s uobičajenim vremenskim korakom od 1 sat. Time se realna i izrazito složena dinamika sustava aproksimira s nizom stacionarnih stanja koja variraju od sata do sata.

Pune analize sa širim obuhvatom nestacionarnosti i nejednolikosti strujanja, poput proračuna vodnog udara u dijelovima ili cijelom sustavu pod tlakom, uobičajeno se rješavaju van osnovnih modela vodovodnih sustava. Najsofisticiraniji modeli vodoopskrbnih sustava današnjice ipak omogućuju i proračun tranzijentnih stanja tlakova/protoka u osnovnoj modelskoj rutini, doduše samo u okviru jednodimenzionalnog opisa pojave.

Ukoliko se želi opisati lokalno polje strujanja u okvirima nestacionarnosti i nejednolikosti, u realnijoj 3D formulaciji, potrebna je primjena puno složenijih modela s inkorporiranim modelima turbulencije. O takvim modelima u ovom poglavlju neće biti riječ, te se u nastavku navode podaci relevantni samo za jednostavni model stacionarnog stanja.

2. Proračun vodovodnog sustava pod tlakom primjenom gradijentne metode

Opisuje se *gradijentna metoda* proračuna stacionarnog strujanja u vodoopskrbnom sustavu pod tlakom (Todini i Pilati; 1987). Simultano se rješavaju jednačbe kontinuiteta i Bernullijeve jednačbe za cjevovodni sustav pod tlakom, sačinjen od N veznih čvorova i NF čvorova s fiksnim vrijednostima (npr. vodosprema)

Odnos protoka u cijevi i razina energetske linije između dvije krajnje točke cijevi na međusobnoj udaljenosti L_{ij} (duljina cijevi) može se izraziti jednačbom:

$$E_i - E_j = \Delta E_{ij} = RQ_{ij}^N + mQ_{ij}^2 \quad (1a)$$

gdje je: E_i, E_j energetske razine u čvorovima na početku (i) i na kraju cijevi (j) kroz koju protiče protok Q_{ij} ; ΔE_{ij} = gubitak mehaničke energije (pad energetske linije) od čvora i do čvora j ; R koeficijent otpora za linijske gubitke; N = eksponent strujanja; m koeficijent otpora za lokalne gubitke.

Doprinos pumpe, kao izvor mehaničke energije, može se interpretirati i kao negativni gubitak energije temeljem sljedeće zakonitosti:

$$\Delta E_{ij} = -\omega^2 \left[H_0 - r(Q_{ij} / \omega)^n \right] \quad (1b)$$

gdje je: H_0 energetska razina prekida rada pumpe; ω relativna brzina; r, n koeficijenti radne linije pumpe.

Ukoliko se koristi Darcy - Weisbachov izraz za proračun gubitka energije, koeficijent otpora $R = \lambda(L/d)$ određuje se ovisno o Reynoldsovom broju Re . Za slučaj $Re < 2000$ koristi se izraz za laminarne otpore $\lambda = 64/Re$, dok se za slučaj $Re > 4000$ primjenjuje Swamee i Jain aproksimacija Colebrook-White jednačbi:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (2a)$$

gdje je ε apsolutna hrapavost; d promjer cijevi.

U prelaznom području $2000 < Re < 4000$ primjenjuje se kupna interpolacija iz Moodyjevog dijagrama:

$$y_0 = \frac{Re}{2000} \quad (2b)$$

$$y_1 = \frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \quad (2c)$$

$$y_2 = -0,86859 \ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{5,74}{4000^{0,9}} \right) \quad (2d)$$

$$y_3 = y_2^{-2} \left(2 - \frac{0,00514215}{y_1 y_2} \right) \quad (2e)$$

$$y_4 = 7y_2^{-2} - y_3 \quad (2f)$$

$$y_5 = 0,128 - 17y_2^{-2} + 25y_3 \quad (2g)$$

$$y_6 = -0,128 + 17y_2^{-2} - 2y_3 \quad (2h)$$

$$y_7 = y_0 (0,032 - 3y_2^{-2} + 0,5y_3) \quad (2i)$$

$$\lambda = y_4 + y_0 (y_5 + y_0 (y_6 + y_7)) \quad (2j)$$

Koeficijenti lokalnih gubitaka ξ_{lok} standardno su referencirani na kinetičku energiju srednje brzine strujanja u cijevi. U programskim rješenjima uobičajena je transformacija u kojoj se koeficijent lokalnog gubitka veže uz protok. Međusobni odnos tih koeficijenta definiran je izrazom:

$$m = \frac{0,002517 \xi_{lok}}{d^4} \quad (3)$$

Nadalje, sustav jednadžbi kontinuiteta mora biti zadovoljen za sve čvorove analiziranog sustava:

$$\sum_j Q_{ij} - D_i = 0 \quad (4)$$

gdje je: D_i zahtjevani protok potrošnje u čvoru i (po dogovoru protok u čvor predstavlja dotok te mu se dodjeljuje pozitivan predznak).

Nakon definiranja vrijednosti energija za fiksne čvorove (vremenski nepromjenjive vrijednosti), proračunavaju se energetske razine E_i za sve preostale čvorove sustava, zajedno s odgovarajućim protocima Q_{ij} u svim cijevima sustava.

Metoda rješavanja započinje s inicijalnom „procjenom“ protoka u svakoj pojedinoj cijevi bez nužnog uvjeta zadovoljenja jednadžbe kontinuiteta. Iterativnom procedurom proračunavaju se vrijednosti energija u čvorovima na način da se rješava matrična jednadžba:

$$\mathbf{AH} = \mathbf{F} \quad (6)$$

gdje je: \mathbf{A} ($N \times N$) Jacobianova matrica; \mathbf{H} ($N \times 1$) vektor nepoznatih energija u čvorovima; \mathbf{F} ($N \times 1$) vektor članova desne strane.

Dijagonalni i elementi Jacobianove matrice su:

$$A_{ii} = \sum_j p_{ij} \quad (7a)$$

Preostali članovi Jacobianove matrice mogu se zapisati:

$$A_{ij} = -p_{ij} \quad (7b)$$

gdje je: p_{ij} inverzna derivacija energetske gubitka na potezu od čvora i do čvora j temeljem protoka Q_{ij} proračunatog na način:

$$p_{ij} = \frac{1}{NR|Q_{ij}|^{N-1} + 2m|Q_{ij}|} \quad (8a)$$

odnosno za slučaj pumpe:

$$p_{ij} = \frac{1}{n\omega^2 r (Q_{ij} / \omega)^{n-1}} \quad (8b)$$

Svaki član desne strane sadrži ukupni „neizbalansirani“ protok za pojedini čvor plus korekcijski faktor protoka:

$$F_i = \left(\sum_j Q_{ij} - D_i \right) + \sum_j y_{ij} + \sum_f p_{if} H_f \quad (9)$$

Zadnji član prethodnog izraza primjenjuje se za članove koji povezuju „slobodni“ čvor i s čvorom za koji je poznata (definirana) vrijednost energije (npr, vodosprema). Faktor korekcije y_{ij} izražava se sljedećim jednadžbama za cijevi i pumpe ($\text{sgn} = 1$ za $x > 0$ i -1 za ostalo; Q_{ij} je uvijek pozitivan za pumpu):

$$y_{ij} = p_{ij} \left(R(Q_{ij})^N + m(Q_{ij})^2 \right) \text{sgn}(Q_{ij}) \quad (10a)$$

$$y_{ij} = -p_{ij} \omega^2 \left[H_0 - r(Q_{ij} / \omega)^n \right] \quad (10b)$$

Nakon proračuna (rješavanja) sustava 6 dobivaju se nove vrijednosti protoka u cijevima temeljem izraza:

$$Q_{ij-NOVO} = Q_{ij-STARO} - (y_{ij} - p_{ij} (E_i - E_j)) \quad (11)$$

Ukoliko je suma apsolutnih promjena protoka veća od sumarnog protoka kroz sve priključene cijevi za neku definiranu vrijednost tolerancije (npr. 0,001) jednadžbe 6 i 11 se rješavaju ponovno. Potrebno je napomenuti da rezultat proračuna jednadžbe 11 već u prvoj iteraciji uvijek zadovoljava uvjet kontinuiteta za svaki pojedini čvor.

Ventili i drugi armaturni elementi sustav mogu se opisivati do željenog stupnja detaljnosti. Za ventile se uobičajeno koristi obrazac u kojem se otvorenom ventilu pripisuje lokalni gubitak u iznosu $\xi_{V-OT} = 0,04$, dok se u slučaju potpune zatvorenosti lokalno postavlja vrlo visoka vrijednost energetskog gubitka (npr. $10^8 Q$).

Pri uspostavi modela određenu pažnju potrebno je posvetiti i pumpama, kontrolnim ventilima i vodospremama. Tijekom provedbe proračuna provodi se kontrola stanja tih elemenata sustava, s ciljem onemogućenja pojave reverznog toka kroz pumpe i kontrolne ventile te prekida istjecanja iz vodospreme nakon njenog pražnjenja (nakon postizanja definirane minimalne razine vode u vodospremi).

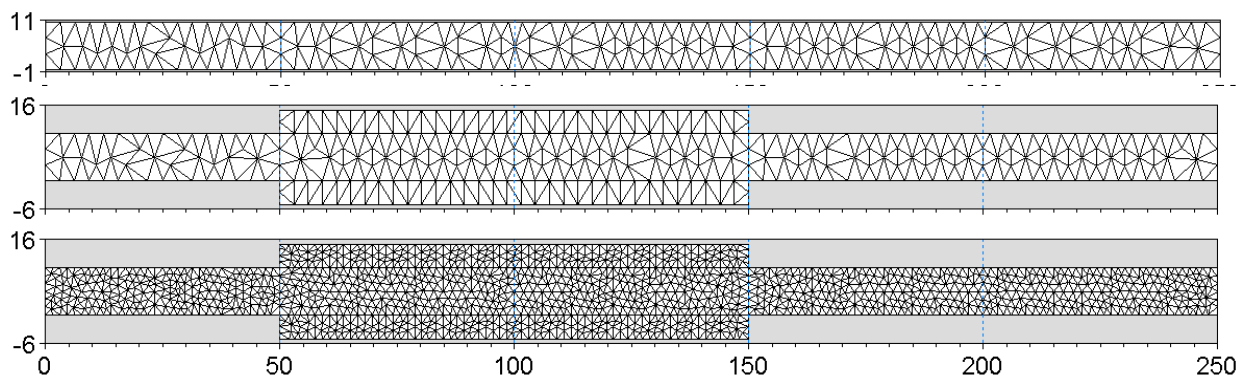
VJEŽBA 1

1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava dvodimenzionalnog numeričkog modela stacionarnog i nejednolikog strujanja uslijed promjene geometrije proticajnog korita. Kanali su pravokutnog proticajnog profila i horizontalnog dna. Tečenje je u mirnom režimu. Analiziraju se slučajevi naglog proširenje i suženja korita te naglog produbljenja i uzdignuća korita. Rubni uvjeti definirani su sa protokom $Q=20\text{m}^3/\text{s}$ na ulaznoj (lijevoj) otvorenoj granici i konstantnim razinama vodnog lica na nizvodnoj (desnoj) otvorenoj granici. Početni uvjet definiran je horizontalnim vodnim licem na cijeloj analiziranoj dionici. Protok na ulaznoj otvorenoj granici se linearno povećava od inicijalne vrijednosti $0\text{m}^3/\text{s}$ do konačne vrijednosti $20\text{m}^3/\text{s}$ tijekom perioda „zagrijavanja“ modela od 1800s. Nadalje, varirana je horizontalna rezolucija modelske domene. Nakon postizanja stacionarnog polja strujanja i denivelacije vodnog lica, proračunavaju se lokalni gubici uslijed nejednolikosti toka a modelski rezultati se uspoređuju s proračunatim vrijednostima dobivenim iz teoretske razrade problema.

2. Prostorna domena problema i provedeni pokusi

Modelske domene s prostornom diskretizacijom u vidu nestrukturirane mreže prikazane su na slici 2.1. Horizontalni prostorni korak između težišta diskretizacijskih trokutnih ćelija (proračunskih čvorova) je od $\approx 3\text{m}$ u slučaju grublje rezolucije i $\approx 1\text{m}$ u slučaju finije prostorne rezolucije. Nomenklatura provedenih analiza, zajedno s karakterističnim modelskim obilježjima prikazana je u tablici 2.1.



Slika 2.1 Modelske domene s prostornom diskretizacijom u vidu nestrukturirane mreže (gore – kanal jednolike širine 10m s naglim produbljenjem dna od -2m na -4m ($x=50\text{m}$) te naglim uzdignućem od -4m na -2m ($x=150\text{m}$); sredina - kanal s jednolikom kotom dna na -4m te naglim proširenjem sa širine 10m na 20m ($x=50\text{m}$) i naglim suženjem sa širine 20m na 10m ($x=150\text{m}$); dolje – isto kao i sredina ali proračunska mreža sa finijom prostornom rezolucijom)

U parametrizaciji modela korištene su iste vrijednosti konstanti za sve provedene analize. Hrapavost i Smagorinsky koeficijent u modelu su usvojeni kao prostorno homogeni s vrijednostima 0,031 (Manningovog koeficijenta hrapavosti) i 0,28.

Tablica 2.1 Nomenklatura provedenih analiza s karakterističnim modelskim obilježjima

analiza	hor. rez. (m)	dubina (m)	širina (m)
1	3	2/4/2	10
2	3	2	10/20/10
3	1	2	10/20/10

3. Teorijski model

Energetska razina bilo koje točke uzduž strujnice kojom se aproksimira otvoreni vodotok, promatran kao jednodimenzionalan, može se izraziti sumom Bernoulli-jevih članova izraženih u visinskom obliku:

$$E = \frac{V^2}{2g} + y + z \quad (3.1)$$

gdje je: y vertikalna udaljenost od promatrane točke do horizontalne ravnine vodnog lica; z vertikalna udaljenost promatrane točke od referentne geodetske ravnine; V srednja brzina u poprečnom presjeku u uzdužnom smjeru; E ukupna mehanička energija promatrane točke u poprečnom presjeku.

Pri strujanju realne tekućine gubi se energija u longitudinalnom smjeru pri čemu dolazi do pada energetske linije. Nagib linije energije mjera je energetske gubitaka koji su formirani na infinitezimalnoj dionici toka. Diferenciranjem izraza 3.1 dobiva se:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(V^2/2g)}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \quad (3.2)$$

Član lijeve strane izraza 3.2 predstavlja pad energetske uzduž vodotoka a član desne strane dz/dx predstavlja promjenu geodetske kote dna kanala u vertikalnom smjeru na dionici dx . Uobičajena je upotreba zamjenskih simbolnih oznaka:

$$\frac{dE}{dx} = -I_E \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = -I_0 \quad (3.3a,b)$$

Prvi član sa desne strane izraza 3.2 predstavlja udio kinetičke energije u ukupnoj energiji točke poprečnog presjeka vodotoka. Uvođenjem oznaka protoka Q i Froude-ovog broja Fr definiranih jednakostima $Q=V*A$ i $Fr^2=(Q^2/gA^3)*dA/dy$ dobiva se slijedeća jednakost: (te $dA/dy=B$;

$$\frac{d(V^2/2g)}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{Q^2 B}{gA^3} \frac{dy}{dx} = -Fr^2 \frac{dy}{dx} \quad (3.4)$$

gdje je: $dA/dy=B$ širina presjeka vodotoka na vodnom licu.

Uvrštavanjem izraza 3.3 i 3.4 u jednadžbu 3.2 dobiva se jednakost:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_0 - I_E}{1 - Fr^2} \quad (3.5)$$

kojom je opisana varijacija dubine odnosno razine vodnog lica otvorenog vodotoka proizvoljnog poprečnog presjeka u kome se odvija stacionarno tečenje.

Razmatranje jednadžbe 3.5 može se izvesti u smislu promatranja idealne tekućine, odnosno slučaja u kome je član $dE/dx = I_E = 0$. Pojednostavljenje uvida u dio pojave od primarnog interesa dobiva se analizom kanala sa konstantnim geometrijama poprečnog presjeka (pravokutni poprečni presjek konstantne širine):

U tom slučaju izraz 3.5 se pojednostavljuje u oblik :

$$(1 - Fr^2) \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0 \quad (3.6)$$

Prema jednadžbi 3.6 zadovoljenje jednakosti moguće je u sljedećim slučajevima:

- a) $dz/dx > 0$ i $Fr < 1$; tada je $(1 - Fr^2) > 0$ i $dy/dx < 0$ pad razine vodnog lica u smjeru toka.
- b) $dz/dx > 0$ i $Fr > 1$; tada je $(1 - Fr^2) < 0$ i $dy/dx > 0$ rast razine vodnog lica u smjeru toka.
- c) $dz/dx < 0$ i $Fr < 1$; tada je $(1 - Fr^2) > 0$ i $dy/dx > 0$ rast razine vodnog lica u smjeru toka.
- d) $dz/dx < 0$ i $Fr > 1$; tada je $(1 - Fr^2) < 0$ i $dy/dx < 0$ pad razine vodnog lica u smjeru toka.

Posebno interesantan slučaj jednadžbe 3.6 je slučaj $dz/dx=0$ pri čemu izraz 3.6 daje:

$$(1 - Fr^2) dy/dx = 0 \quad (3.7)$$

Gornja jednakost biti će zadovoljena u slučaju kada je $dy/dx=0$ i/ili $Fr^2=1$, odnosno pri pojavi kritične dubine (primjerice na preljevima i širokim pragovima). Ovo zadnje saznanje koristi se u mjeriteljstvu pri izvedbi mjernih kanala za mjerenje protoka (strukture poznatih geometrija) u kojima se formira kritična dubina ($Fr^2=1 \Rightarrow h=h_{kr}$) a putem koje je i jednoznačno definiran protok.

Ukoliko se analizira utjecaj promjene širine proticajnog profila ($db/dx \neq 0$) uz pretpostavku horizontalnog dna ($dz/dx=l_0=0$) energetska jednadžba 3.1 poprima naredni oblik:

$$E = y + z + \frac{[q(x)]^2}{2gy^2} \quad (3.8)$$

gdje je: $q(x)$ specifičan protok ($m^3/s/m'$). Budući da je $q(x)/dx \neq 0$ (zbog $db/dx \neq 0$) diferenciranjem gornjeg izraza dobiva se sljedeći izraz:

$$\frac{dE}{dx} = 0 = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} - \frac{[q(x)]^2}{gy^3} \frac{dy}{dx} + \frac{q(x)}{gy^2} \frac{d[q(x)]}{dx} \quad (3.9)$$

Usvajanjem pretpostavke o konzervativnom tečenju uzduž promatrane dionice vodotoka ($Q=qb = konst.$) jednadžba 3.9 može se pisati i u narednoj notaciji:

$$b \frac{d[q(x)]}{dx} = -q(x) \frac{db}{dx} \quad (3.10)$$

Daljnijim uvrštavanjem jednadžbe 3.9 u jednadžbu 3.10 dobiva se:

$$(1 - Fr^2) \frac{dy}{dx} - Fr^2 \frac{y}{b} \frac{db}{dx} = 0 \quad (3.11)$$

Jednadžba 3.11 ukazuje na četiri interesantna slučaja sa komentarom u nastavku.

- $db/dx > 0$ i $Fr < 1$, tada $(1 - Fr^2) > 0$ i $dy/dx > 0$rast razine vodnog lica u smjeru toka
- $db/dx > 0$ i $Fr > 1$, tada $(1 - Fr^2) < 0$ i $dy/dx < 0$pad razine vodnog lica u smjeru toka
- $db/dx < 0$ i $Fr < 1$, tada $(1 - Fr^2) > 0$ i $dy/dx < 0$pad razine vodnog lica u smjeru toka
- $db/dx < 0$ i $Fr > 1$, tada $(1 - Fr^2) < 0$ i $dy/dx > 0$rast razine vodnog lica u smjeru toka

Dosadašnja analiza jednadžbe 3.1 bazirala se na pretpostavci odsustva energetske gubitaka ($dE/dx \neq 0$). U nastavku se analizira jednadžba 3.1 za slučaja prisustva energetske gubitaka uzduž toka $dE/dx \neq 0$ a uz usvajanje sljedećih pretpostavki:

- a) gubitak energije uzduž konačnog dijela dionice jednak je onom gubitku koji bi se postignuo u slučaju jednolikog tečenja sa srednjim brzinama V i hidrauličkim radijusom R na dužini promatrane dionice:

$$I_E = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \quad (3.12)$$

- b) Nagib dna kanala je relativno blag pa su dubine mjerene kao vertikalne udaljenosti od dna do vodnog lica približno jednake udaljenostima od dna kanala do vodnog lica mjerenim okomito na dno kanala
- c) Nema znatnijeg uvlačenja zraka
- d) Distribucija brzina je konstantna čime postizemo konstantnost korekcijskog koeficienta kinetičke energije
- e) Koeficient gubitaka je neovisan o dubini toka i predstavlja konstantu za analizirani raspon.

Odgovarajuća klasifikacija nejednolikih tokova dobiva se slijedećom analizom jednadžbe 3.5.

Pri određenom protoku Q formira se pripadna dubina y . Pri povećanju y dolazi do smanjenja Fr i I_E . Usvajanjem pretpostavke $I_E=I_0$ pri tečenju sa normalnom dubinom ($y=y_N$) za anлізу ostaju sljedeći slučajevi nejednakosti:

$$I_E > \text{ ili } < I_0 \text{ ovisno o } y > \text{ ili } < y_N \quad (3.13)$$

$$Fr > \text{ ili } < 1 \text{ ovisno o } y > \text{ ili } < y_k \text{ (} y_k \text{ oznaka kritične dubine)} \quad (3.14)$$

Prema gore navedenim nejednakostima provodi se klasifikacija u tri grupe:

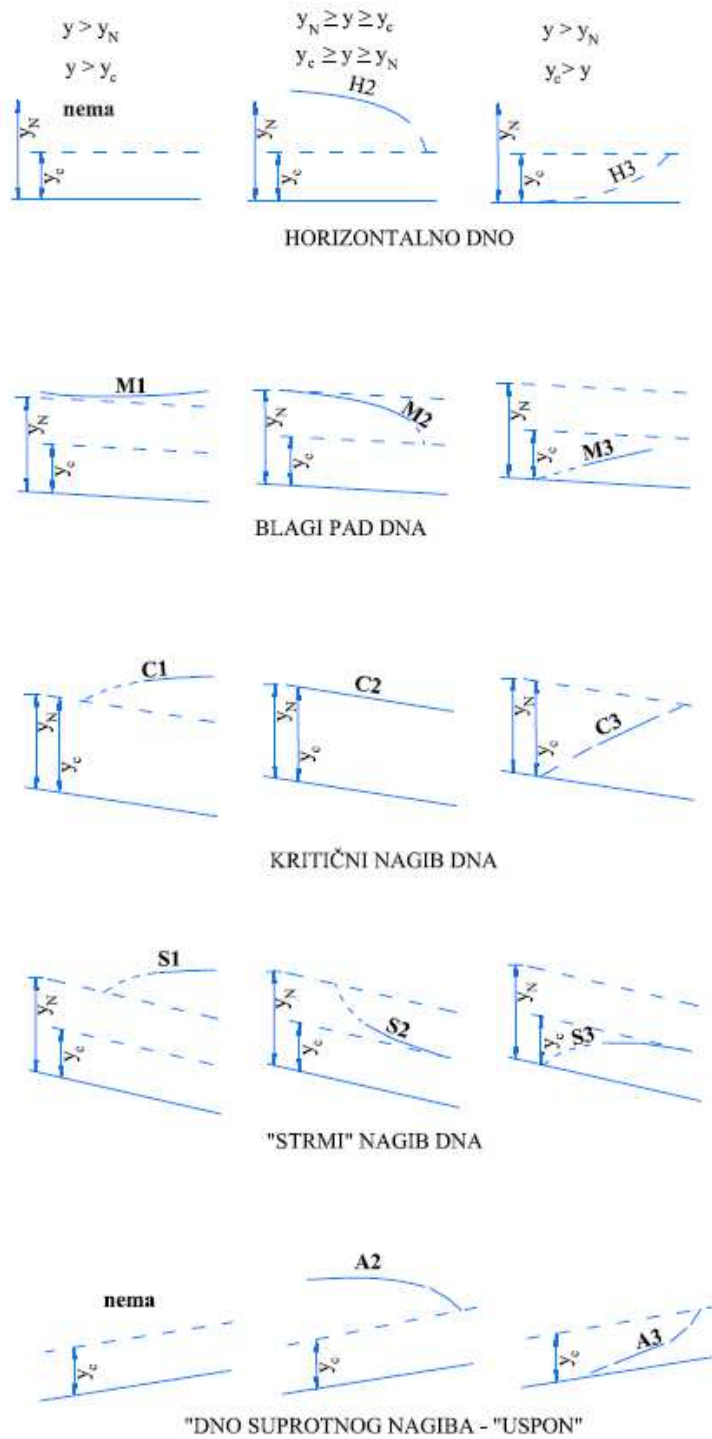
- a) $y > y_N > y_c$; $S_0 > S_f$; $Fr < 1 \Rightarrow dy/dx > 0$
- b) $y_n > y > y_c$; $S_0 < S_f$; $Fr < 1 \Rightarrow dy/dx < 0$
- c) $y_n > y_c > y$; $S_0 < S_f$; $Fr > 1 \Rightarrow dy/dx > 0$

Prema navedenoj klasifikaciji tokova daje se grafički i tablični pregled mogućih pojava oblika vodnog lica na području nejednolikosti (slika 3.1 i tablica 3.1).

Provedena analiza upućuje na sljedeće zaključake :

- a) Predznak od dy/dx određuje se iz 3.13 i 3.14.
- b) Približavanje vodne površine normalnoj dubini asimptotskog je karaktera
- c) Približavanje vodnog lica kritičnoj dubini dešava se pod "velikim" kutem
- d) Ako je tok u nailasku na "kontrolnu strukturu" miran onda kritična dubina koja se postiže na kontrolnoj strukturi predstavlja rubni uvjet pri određivanju svih uzvodnih profila.
- e) Svaki od navedenih nejednolikih tokova potvrđuje generalni princip, da je tok u mirnom režimu definiran i kontroliran sa nizvodnim "kontrolnim profilom", dok je tok u silovitom režimu defniran uzvodnim "stanjem" toka.

- f) U kanalima sa horizontalnim dnom ili dnom suprotnog nagiba ($S_0 > 0$) pojmovi "normalne" dubine nemaju smisla budući je u prvom slučaju normalna dubina imaginarna veličina a u drugom slučaju normalna dubina poprima negativnu vrijednost.



Slika 3.1 Krivulje vodnih lica na području nejednolikosti

Nagib kanala	Zona 1	Zona 2	Zona 3	međusobni odnosi y, Y_N, Y_C
Blago $0 < I_0 < I_C$	M1			$y > Y_N > Y_C$
		M2		$Y_N > y > Y_C$
			M3	$Y_N > Y_C > y$
Kritično $I_0 = I_C > 0$	C1			$y > Y_C = Y_N$
		C2		$Y_C = y = Y_N$
			C3	$Y_C = Y_N > y$
Strmo $I_0 > I_C > 0$	S1			$y > Y_C > Y_N$
		S2		$Y_C > y > Y_N$
			S3	$Y_C > Y_N > y$
Horizontalno dno $I_0 = 0$	Nema			
		H2		$Y_N > y > Y_C$
			H3	$Y_N > Y_C > y$
"Uspon" $I_0 < 0$	Nema			
		A2		$Y_N^* > y > Y_C$
			A3	$Y_N^* > Y_C > y$

Tablica 3.1 Pregled mogućih pojava oblika krivulja vodnog lica na području nejednolikosti

3.1. Nagle promjene širine i denivelacije dna kanala

U slučaju naglih promjena geometrije kanala u otvorenim vodotocima dolazi do pojave lokalnih gubitaka. Iako postoji analogija sa pojavom lokalnih gubitaka pri proširenju ili suženju u strujanju kroz cijevi pod tlakom, u slučaju postojanja slobodne površine ovaj fenomen je izraženiji. Kako bi se odredili gubici energije izazvani naglim proširenjem i suženjem te produbljenjem i uzdignućem dna koristi se jednadžba kontinuiteta, zakon očuvanja količine gibanja i Bernoullijeva jednadžba. Za slučaj naglog uzdignuća dna pri jednolikoj širini kanala b zakon očuvanja količine gibanja uz pretpostavku zanemarenja linijskih gubitaka između dva promatrana presjeka može se napisati na sljedeći način:

$$\rho Q V_1 + \frac{1}{2} \rho g b h_1^2 = \rho Q V_2 + \frac{1}{2} \rho g b h_2^2 + F_{Up} \quad (3.15)$$

gdje je: Q protok kroz kanal; V_1 srednja brzina u profilu prije uzdignuća; V_2 srednja brzina u profilu poslije uzdignuća; h_1 dubina u profilu prije uzdignuća; h_2 dubina u profilu poslije uzdignuća; F_{Up} sila tlaka dobivena integracijom po površini stepenice uzdignuća (pri naglom produbljenju predznak se mijenja u „-“)

Jednadžba kontinuiteta daje jednakost:

$$2 \frac{v_1^2}{g} h_1 \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right) = h_2^2 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) + \frac{2F_{UP}}{\rho g b} \quad (3.16)$$

Usvajanjem empirijske relacije za silu tlaka koja djeluje na stepenicu uzdignuća putem uvođenja korekcijskog koeficijenta KOR :

$$F_{UP} = \frac{1}{2} KOR \rho g b s [(h_1 - h_2)] ; Fr = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} \quad (3.17)$$

Nakon nekoliko koraka sređivanja dobiva se i kvadratna jednadžba važeća i za oba slučaja uzdignuća i produbljenja:

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} + \left(1 - KOR \frac{s}{h_1} \right) \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1^2 = 0 \quad (3.18)$$

Rješenje gornje jednadžbe je:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{8Fr_1^2 + \left(1 - KOR \frac{s}{h_1} \right)^2} - \left(1 - KOR \frac{s}{h_1} \right) \right] \quad (3.19)$$

Skreće se pažnja na sličnost prethodno izvedene jednadžbe sa jednadžbom odnosa dviju spregnutih dubina u vodnom skoku.

Točnu vrijednost koeficijenta KOR moguće je dobiti samo temeljem eksperimenta. Ipak moguća je i jednostavna procjena ukoliko se razluče komponenta hidrostatskog tlaka (vezanog na dubinu h_1) i hidrodinamičkog tlaka koji otpada samo na površinu stepenice uzdignuća ili produbljenja te ukoliko se tok aproksimira sa jednom strujnicom:

$$F_{UP} \approx \frac{1}{2} \rho g b s (\pm 2h_1 - s) \quad (3.20)$$

$$KOR \approx \frac{\pm 2 - s/h_1}{1 - h_2/h_1} \text{ („+“ za uzdignuće, „-“ za produbljenje s)} \quad (3.21)$$

Za određivanje vrijednosti lokalnog gubitka ΔE i pripadnog koeficijenta lokalnog gubitka $\xi_{UP} = 2g\Delta E/v_2^2$ potrebno je upotrijebiti Bernoullijevu jednadžbu:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + h_1 - h_2 \mp s \quad (3.22)$$

Ponovnom primjenom jednadžbe kontinuiteta $v_1 h_1 = v_2 h_2$ te prethodno definiranog odnosa h_2/h_1 dobiva se jednadžba odnosa lokalnog gubitka energije ΔE i dubine h_1 :

$$\frac{\Delta E}{h_1} = \mp \frac{s}{h_1} - \frac{h_2}{h_1} - \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{1 - h_2^2/h_1^2}{h_2^2/h_1^2} \quad (,,-" za uzdignuće, „+,, za produbljenje s) \quad (3.23)$$

a svođenjem gornje jednadžbe u formu $\xi_{UP} = 2g\Delta E/v_2^2$ i konačni izraz:

$$\xi_{UP} = \frac{h_2^2}{h_1^2} \left[1 + 2 \frac{1 - \frac{h_2}{h_1} \mp \frac{s}{h_1}}{Fr_1^2} \right] - 1 \quad (,,-" za uzdignuće, „+,, za produbljenje s) \quad (3.24)$$

Slijed izvođenje jednadžbi za slučaj naglog suženja ili proširenja sličan je prethodno provedenom izvođenju, počevši sa jednadžbom očuvanja količine gibanja:

$$\rho Q V_1 + \frac{1}{2} \rho g b_1 h_1^2 = \rho Q V_2 + \frac{1}{2} \rho g b_2 h_2^2 + F_{SP} \quad (3.25)$$

$$F_{SP} = \frac{1}{2} \rho g h_1 [(b_1 h_1 - b_2 h_2)] \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 2 \frac{b_1}{b_2} Fr_1^2 \frac{h_2}{h_1} + 2 \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 Fr_1^2 = 0 ; KOR = \frac{b_1}{b_2} \frac{Fr_1^2}{h_2/h_1 - 1} \quad (3.27)$$

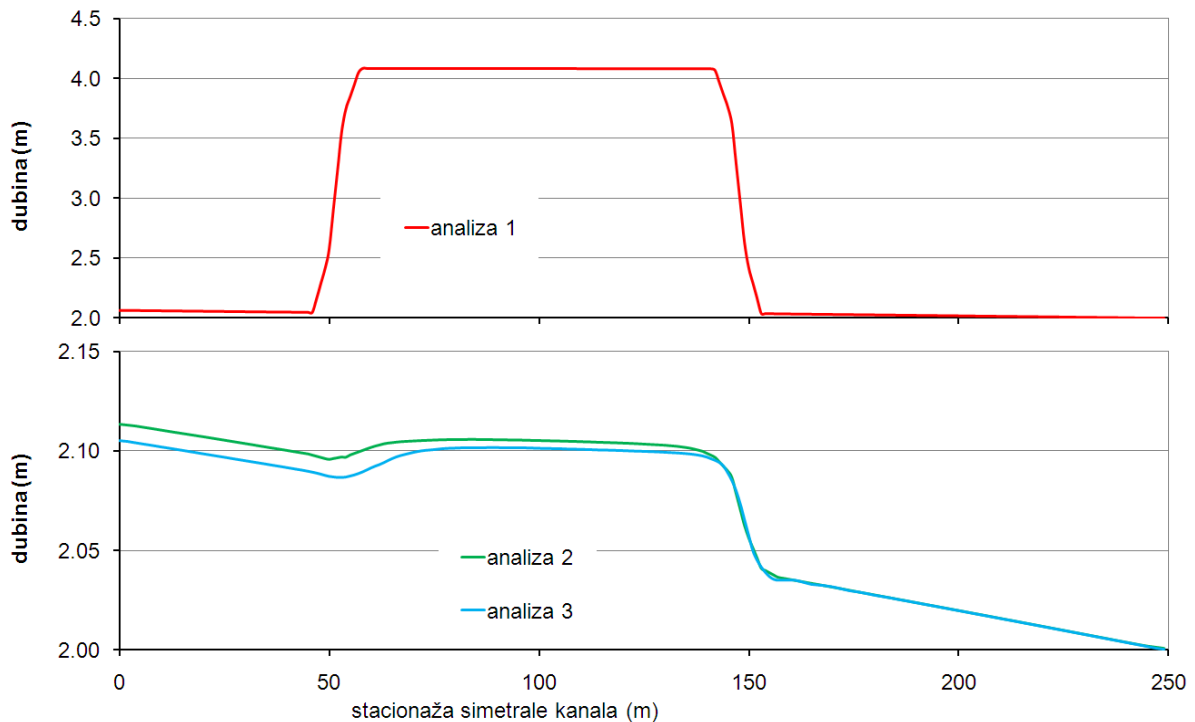
$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 2KOR \frac{h_2}{h_1} + 2KOR \frac{b_1}{b_2} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\Delta E}{h_1} = 1 - \frac{h_2}{h_1} - \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{b_1^2/b_2^2 - h_2^2/h_1^2}{h_2^2/h_1^2} \quad (3.29)$$

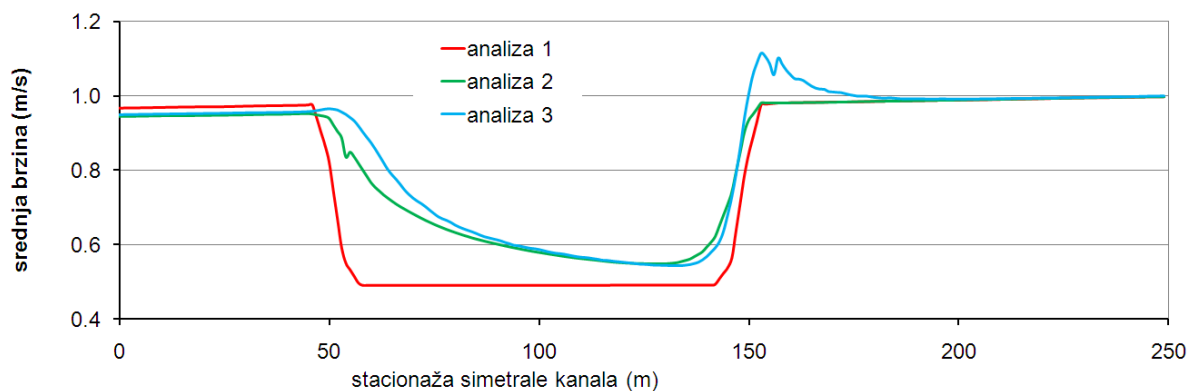
$$\xi_{SP} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left[1 + 2 \frac{1 - \frac{h_2}{h_1}}{Fr_1^2} \right] - 1 \quad (3.30)$$

4. Rezultati provedenih analiza

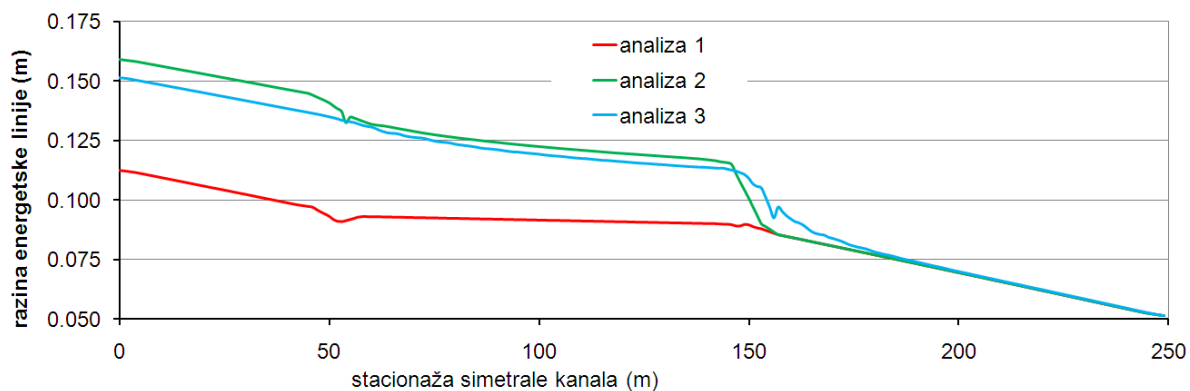
Rezultati provedenih numeričkih modelskih analiza uspoređuju se s rezultatima teoretskog proračuna. Prvotno se ekstrahiraju modelom proračunate dubine, srednje brzine (u vertikali), energetske razine (točke energetske linije) i denivelacije vodnog lica uzduž simetrale kanala. Rezultati su prikazani na slikama 4.1-4.4.



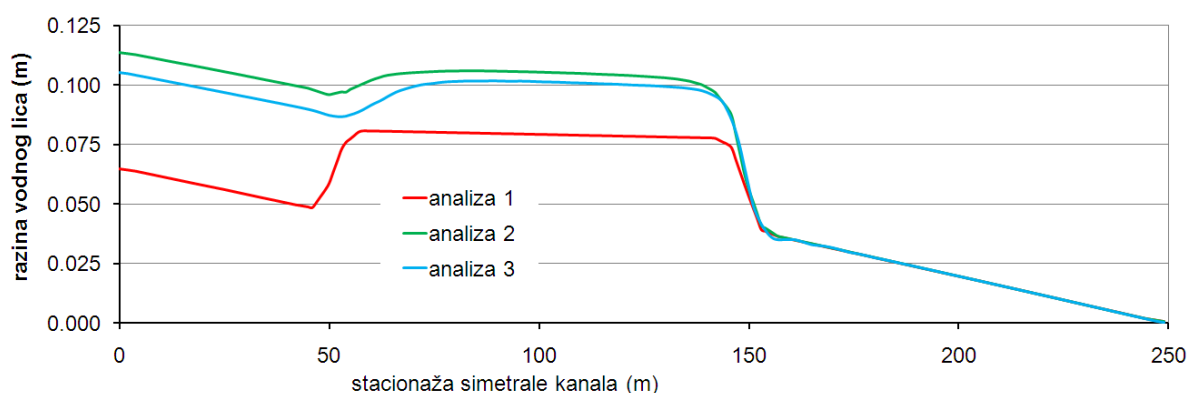
Slika 4.1 Modelom proračunate dubine uzduž simetrale kanala



Slika 4.2 Modelom proračunate brzine (vertikano usrednjene) uzduž simetrale kanala



Slika 4.3 Modelom proračunata energetska linija uzduž simetrane kanala



Slika 4.4 Modelom proračunate denivelacije vodnog lica uzduž simetrane kanala

Nakon toga se proračunaju koeficijent lokalnih gubitaka (ξ_{PD} - naglo produbljenje dna, ξ_{UZ} - naglo uzvišenje dna, ξ_{PR} - naglo proširenje korita, ξ_{SU} - naglo suženje korita) temeljem predloženih teorijskih obrazaca. Kako bi se to učinilo usvajaju se odgovarajuće vrijednosti dubina i brzina h_1, v_1, h_2, v_2 iz rezultata numeričkog modela. Pri tome se za dubinu h_1 i brzinu v_1 (prije poremećaja) usvajaju vrijednosti sa stacionaže 45m, a za dubinu h_2 i brzinu v_2 (poslije poremećaja) sa stacionaže 75m. Na sličan način tretira se i nizvodna promjena geometrije proticajnog korita, pri čemu se za dubinu h_1 i brzinu v_1 (prije poremećaja) usvajaju vrijednosti sa stacionaže 135m, a za dubinu h_2 i brzinu v_2 (poslije poremećaja) sa stacionaže 165m.

U tablici 4.1 prikazane su vrijednosti h_1, v_1, h_2, v_2 , usvojene iz rezultata numeričkog modela, te proračunate vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka temeljem teoretskih izraza:

Nakon toga su proračunate vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka direktnom primjenom modelskih rezultata na način da se očitaju razlike razina energetske linije prije i poslije poremećaja toka odnosno na istim stacionažama kao i u slučaju prethodno provedenog proračuna. Prema tome za „uzvodni“ poremećaj korištene su stacionaže 45m (prije promjene) i

75m (nakon promjene) a za „nizvodni“ poremećaj stacionaže 135m (prije promjene) i 165m (nakon promjene). Koeficijenti lokalnih gubitaka proračunati su korištenjem izraza:

$$\xi_i = \frac{\Delta E 2g}{v_2^2} \quad (3.31)$$

Zaključno, usporedba vrijednosti koeficijenta ξ_{PD} , ξ_{UZ} , ξ_{PR} , ξ_{SU} , dobivenih na dva prethodno opisana načina, prikazana je na slici 4.5.

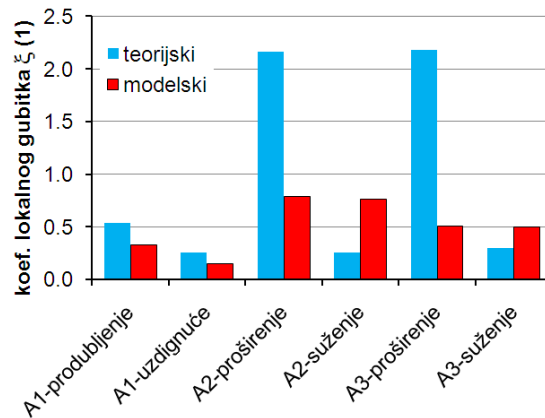
Kako se sa slike 4.5 može uočiti modelske vrijednosti koeficijenta lokalnih gubitaka su manje za slučaj naglog produbljenja, uzdignuća i proširenja. U slučaju naglog suženja situacija je obratna, pa su teorijski dobivene vrijednosti koeficijenta manje od modelskih.

Tablica 4.1 Usvojene vrijednosti dubina i srednjih brzina h_1, v_1, h_2, v_2 , iz rezultata numeričkog modela i proračunate vrijednosti koeficijenta lokalnih gubitaka temeljem teoretskih izraza

Analiza 1 - produbljenje						
h1	h2	V1	V2	Fr1		
2.05	4.08	0.98	0.49	0.219		
$\xi_{PD} =$			0.53			
Analiza 1 - uzdignuće						
h1	h2	V1	V2	Fr1		
4.08	2.03	0.49	0.98	0.077		
$\xi_{UZ} =$			0.26			

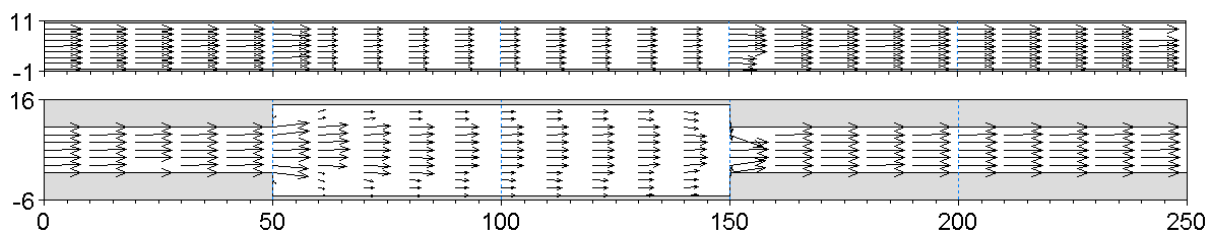
Analiza 2 - proširenje						
h1	h2	V1	V2	Fr1	b1	b2
2.1	2.11	0.95	0.65	0.209	10	20
$\xi_{PR} =$			2.16			
Analiza 2 - suženje						
h1	h2	V1	V2	Fr1	b1	b2
2.1	2.03	0.56	0.98	0.123	20	10
$\xi_{SU} =$			0.26			

Analiza 3 - proširenje						
h1	h2	V1	V2	Fr1	b1	b2
2.09	2.1	0.96	0.68	0.212	10	20
$\xi_{PR} =$			2.18			
Analiza 3 - suženje						
h1	h2	V1	V2	Fr1	b1	b2
2.1	2.03	0.55	1.03	0.121	20	10
$\xi_{SU} =$			0.29			



Slika 4.5 Usporedba vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka ξ_{PD} , ξ_{UZ} , ξ_{PR} , ξ_{SU} , dobivenih temeljem provedenih teorijskih i modelskih analiza

Na slici 4.6 prikazana su polja vertikalno usrednjenih brzina dobivena provedbom analiza 1 i 2.



Slika 4.6 Polja vertikalno usrednjenih brzina dobivena provedbom analiza 1 (gore) i 2 (dolje)

5. Korišteni numerički model

Numeričkim modelom Mike 21fm (www.dhigroup.com) rješava se dvodimenzionalno (u horizontalnoj ravnini) strujanje nestlačive tekućine u jednom vertikalnom homogenom sloju uz pretpostavku hidrostatske razdiobe tlaka. Sustav jednadžbi plitkog fluida sadrži vertikalno integrirane jednadžbe kontinuiteta i očuvanja količine gibanja (vidi poglavlje A7 i primjer 2). Za prostornu diskretizaciju model koristi kontinuirane i nepreklopljene trokutaste elemente (konačne volumene) čime je modelska prostorna domena pokrivena nestructuriranom mrežom. Horizontalni konvektivni članovi su proračunati korištenjem Riemann-ovog solvera s Roe-ovom aproksimacijom.

VJEŽBA 2

1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava trodimenzionalnog numeričkog modela strujanja za pravokutne bazene s duljinom 5000m, širinama 500m i 5000m te s dubinama 10m i 20m. Strujanje je inducirano homogenim poljem vjetra s brzinama vjetra od 10m/s i 20m/s. Vjetar se linearno pojačava od inicijalne vrijednosti 0m/s do konačne vrijednosti tijekom perioda „zagrijavanja“ modela od 3600s. Nadalje, varirana je horizontalna i vertikalna rezolucija modelske domene. Nakon postizanja stacionarnog polja strujanja i denivelacije vodnog lica, uspoređuju se vertikalni profili brzine strujanja i kinematskog koeficijent turbulente viskoznosti dobiveni modelom i proračunati temeljem analitičkih (teoretskih) izraza.

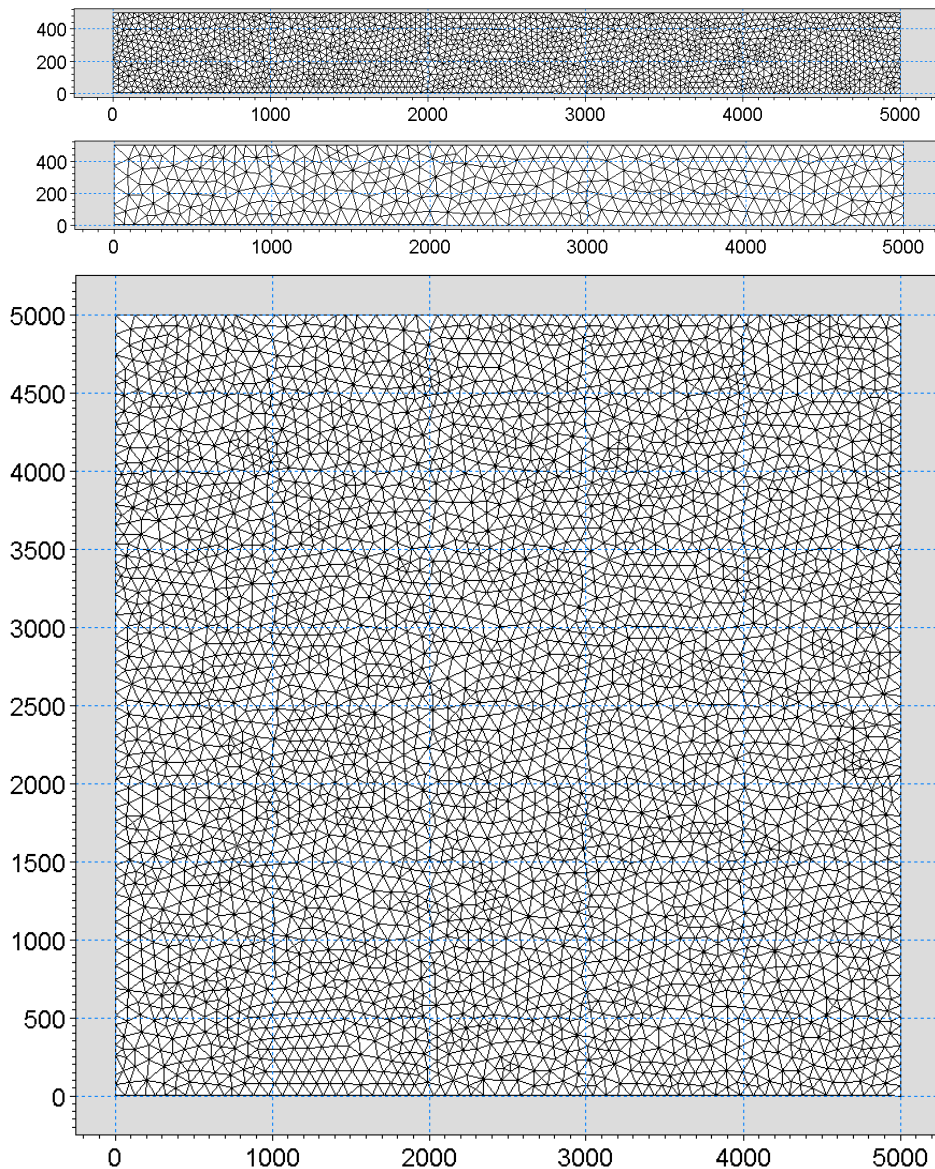
2. Prostorna domena problema i provedeni pokusi

Modelske domene s prostornom diskretizacijom u vidu nestrukturirane mreže prikazane su na slici 2.1. Horizontalni prostorni korak između težišta diskretizacijskih trokutnih ćelija (proračunskih čvorova) je od 50-80m u slučaju grublje rezolucije i 20-30m u slučaju finije prostorne rezolucije. U vertikalnom smjeru korišteno je 10 i 20 vertikalnih slojeva s ekvidistantnim debljinama slojeva. Gustoća tekućine je homogena u vertikalnom i horizontalnom smjeru. Nomenklatura provedenih analiza, zajedno s karakterističnim modelskim obilježjima prikazana je u tablici 2.1.

Tablica 2.1 Nomenklatura provedenih analiza s karakterističnim modelskim obilježjima

analiza	hor. rez. (m)	vert. rez. (slojevi)	dubina (m)	širina (m)	brzina vjetra (m/s)
1	50-80	10	10	500	10
2	50-80	10	10	500	20
3	50-80	20	10	500	10
4	50-80	20	10	500	20
5	50-80	20	20	500	10
6	50-80	20	20	500	20
7	20-30	10	10	500	10
8	20-30	10	10	500	20
9	50-80	10	10	5000	10
10	50-80	10	10	5000	20
11	50-80	20	20	5000	10
12	50-80	20	20	5000	20
13	20-30	10	10	5000	10
14	20-30	10	10	5000	20

U svima analizama vjetar puše s lijeve na desnu stranu modelske domene.



Slika 2.1 Modelске domene s prostornom diskretizacijom u vidu nestrukturirane mreže (gore – finija proračunska mreža s prostornm korakom 50-80m između težišta diskretizacijskih trokutnih ćelija; sredina i dolje – grublja proračunska mreža s prostornm korakom 20-30m između težišta diskretizacijskih trokutnih ćelija)

U parametrizaciji modela korištene su iste vrijednosti konstanti za sve provedene analize. Faktori proporcionalnosti za polja turbulentne kinetičke energije (TKE) i disipacije (ϵ) usvojeni su s vrijednostima 1 (TKE) i 1.3 (ϵ) u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Hrapavost i Smagorinsky koeficijent u modelu su usvojeni kao prostorno homogeni s vrijednostima 0.01m i 0.28. Koeficijent trenja (povlačenja) vjetra usvojen je s vrijednosti 0.002425.

3. Teorijski model

Vjetar uzrokuje površinsko naprezanje τ_s s intenzitetom:

$$\tau_w = \rho_a C_D U_w |U_w| \quad (2.1)$$

gdje je: ρ_a gustoća zraka ($1,23\text{kg/m}^3$); C_D koeficijent povlačenja vjetra (0.002425); U_w brzine vjetra na 10m od površine. Uz pretpostavku da je dubina bez djelovanja vjetra d znatno veća od denivelacije vodnog lica Δh uzduž simetrale bazena duljine L (uslijed djelovanja vjetra; eng: wind set-up) ravnoteža sila može se napisati u obliku:

$$\rho_0 g d \frac{\Delta h}{L} = \tau_w \quad (2.2)$$

Na određenoj udaljenosti L od lijevog ruba bazena, uzduž simetrale bazena, očekuje se izdizanje Δh u odnosu na najnižu kotu vodnog lica koja se pojavljuje na lijevom rubu bazena:

$$\Delta h = \frac{\tau_w L}{\rho_0 g d} \quad (2.3)$$

Uslijed djelovanja vjetra formirati će se tzv. baroklini vertikalni profil brzina karakteriziran s površinskim strujama koje prate smjer djelovanja vjetra i kompenzacijskim strujama u dubljim slojevima koje su suprotnog smjera. Profil brzina na određenoj udaljenosti od početka kanala po teoretskom modelu opisan je logaritamskim zakonom:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(1 + \ln \frac{-z}{h} \right) \quad (2.3)$$

gdje je: u brzina strujanja na dubini z (gledano od površine); h dubina na poziciji promatranog vertikalnog profila; κ Karmanova konstanta (0,41); $u_* = \max(u_{*W}, u_{*B})$ brzinsko naprezanje na površini i dnu $u_{*W} = \sqrt{\tau_w / \rho_0}$; $u_{*B} = \sqrt{\tau_B / \rho_0}$.

Usvajanjem logaritamskog profila brzina moguće je odrediti i vrijednosti kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti temeljem izraza:

$$v_T = u_* \kappa h \frac{-z}{h} \left(1 - \frac{-z}{h} \right) \quad (2.4)$$

4. Rezultati provedenih analiza

Rezultati provedenih numeričkih modelskih analiza uspoređuju se s rezultatima teoretskog proračuna. Kontrolna točka KT za koju se provodi usporedba definirana je koordinatom ($x=2500\text{m}$, $y=250\text{m}$) u slučaju užeg bazena i ($x=2500\text{m}$, $y=2500\text{m}$) u slučaju šireg bazena.

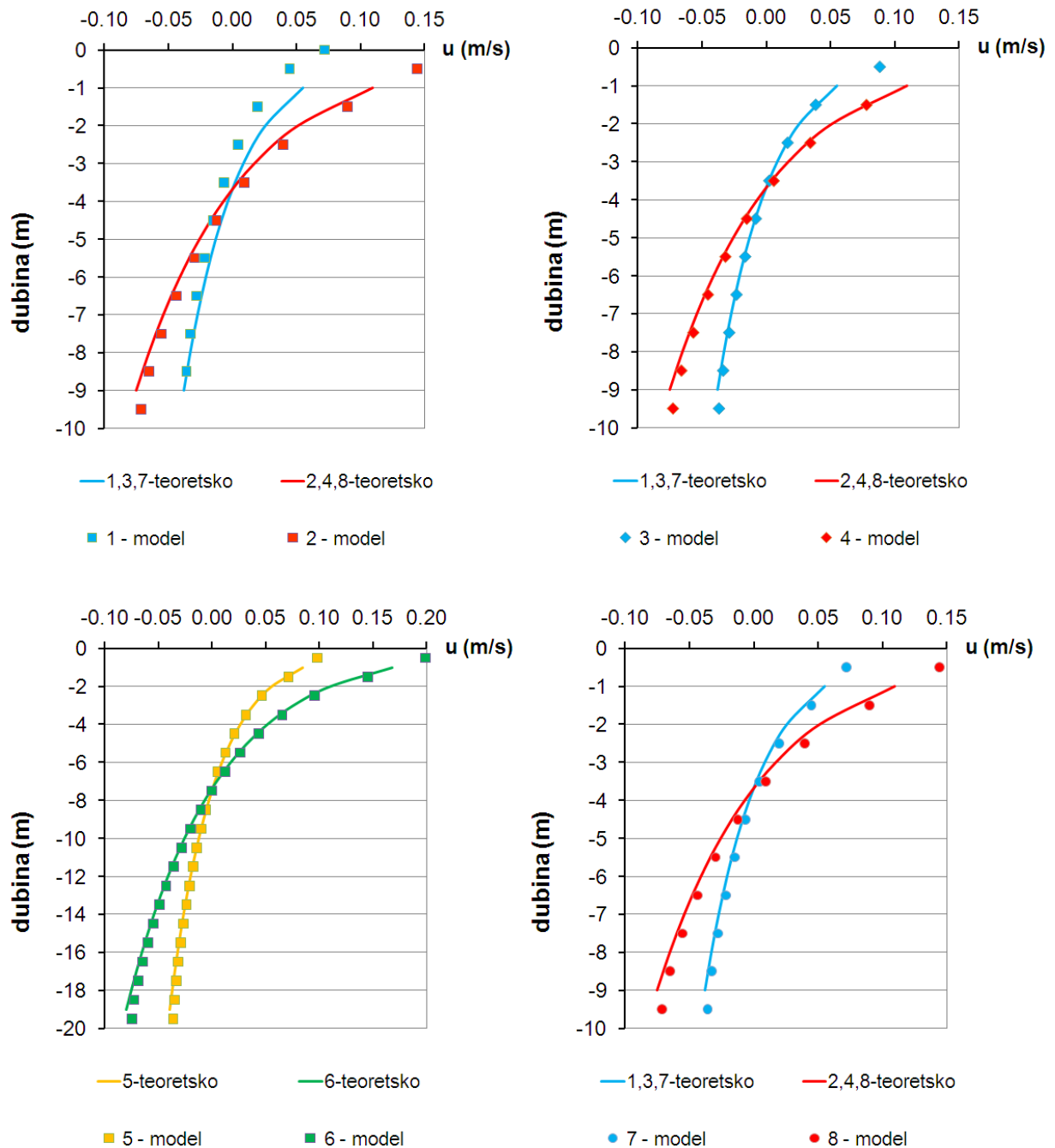
Prvo se uspoređuju denivelacije površine Δh za poziciju kontrolne točke KT. U tablici 4.1 prikazani su rezultati.

analiza	dubina (m)	ρ_a (kg/m ³)	C_D (1)	U_w (m/s)	Δh (m) – teor.	Δh (m) – model
1	10	1,23	0,002425	10	0,008	0,008
2	10	1,23	0,002425	20	0,030	0,032
3	10	1,23	0,002425	10	0,008	0,008
4	10	1,23	0,002425	20	0,030	0,032
5	20	1,23	0,002425	10	0,004	0,004
6	20	1,23	0,002425	20	0,015	0,016
7	10	1,23	0,002425	10	0,008	0,008
8	10	1,23	0,002425	20	0,030	0,032
9	10	1,23	0,002425	10	0,008	0,008
10	10	1,23	0,002425	20	0,030	0,032
11	20	1,23	0,002425	10	0,004	0,004
12	20	1,23	0,002425	20	0,015	0,016
13	10	1,23	0,002425	10	0,008	0,008
14	10	1,23	0,002425	20	0,030	0,032

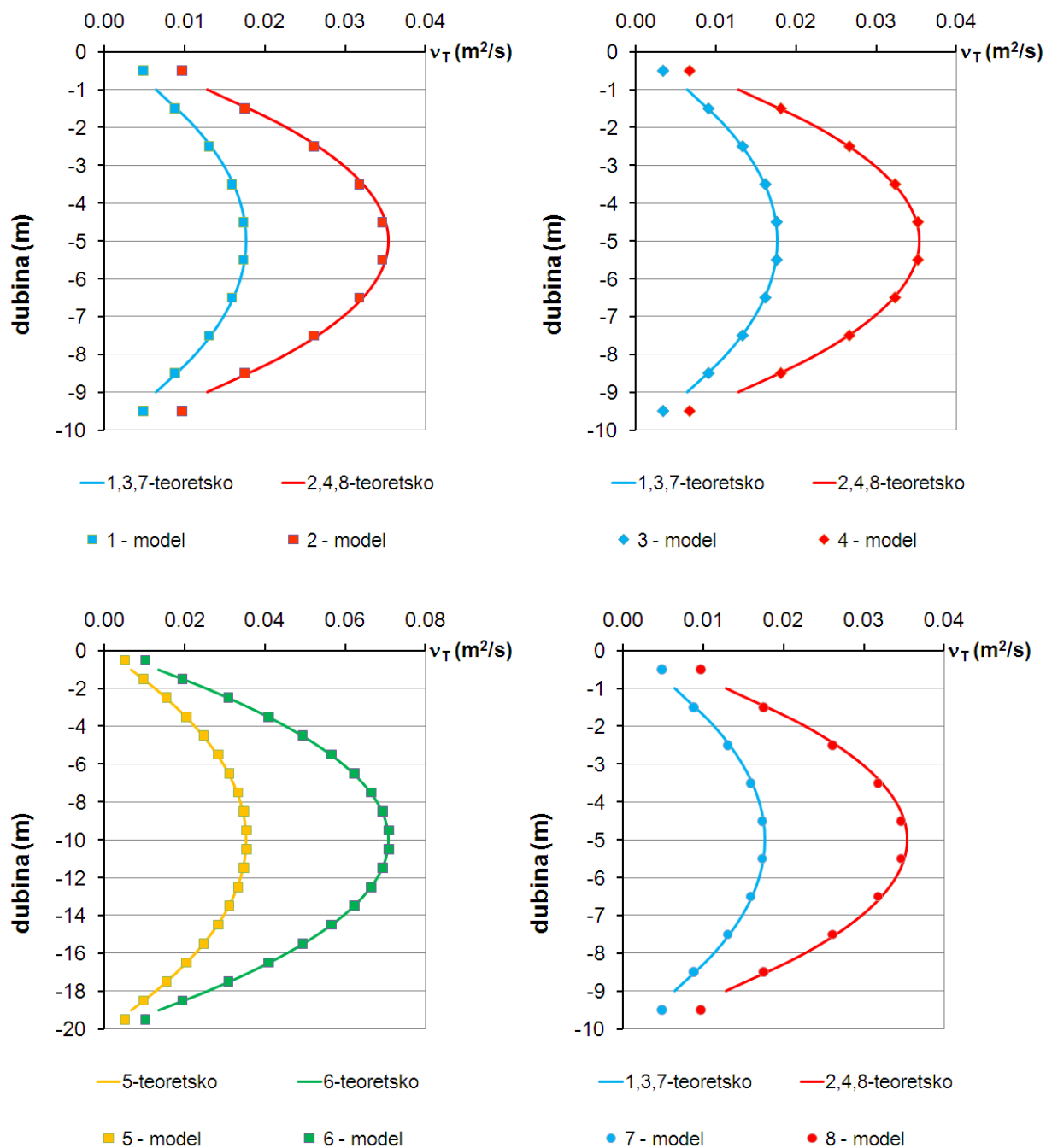
Na slici 4.1 prikazana je usporedba vertikalnih profila brzina za poziciju kontrolne točke, dobivenih modelom i teoretskim jednadžbama. Na slici 4.2 prikazana je usporedba vertikalnih profila kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti za poziciju kontrolne točke, dobivenih modelom i teoretskim jednadžbama. Prikazanim rezultatima obuhvaćene su analize 1,2,3,4,5,6,7,8 (vidi tablicu 2.1).

Rezultati modelskih analiza i teoretskih proračuna su vrlo bliski. Promjena dubine nije utjecala na odstupanje modelskih i teorijskih rezultata, kao ni promjena brzine vjetera. Promjena širine analiziranog bazena također nije utjecala na rezultate. Jedino izraženije odstupanje pojavljuje se u površinskom djelu profila brzina iz analiza 1 i 2 (dubina bazena $d=10\text{m}$), u kojima se koristi grublja proračunska mreža u horizontalnom smjeru i 10 slojeva u vertikalnom smjeru (slika 4.1 gore lijevo). Povećanjem vertikalne modelske rezolucije na 20 slojeva (analize 3,4) ili horizontalne rezolucije proračunske mreže na 20-30m (analize 7,8) smanjeno je odstupanje rezultata modelskih i teoretskih proračuna.

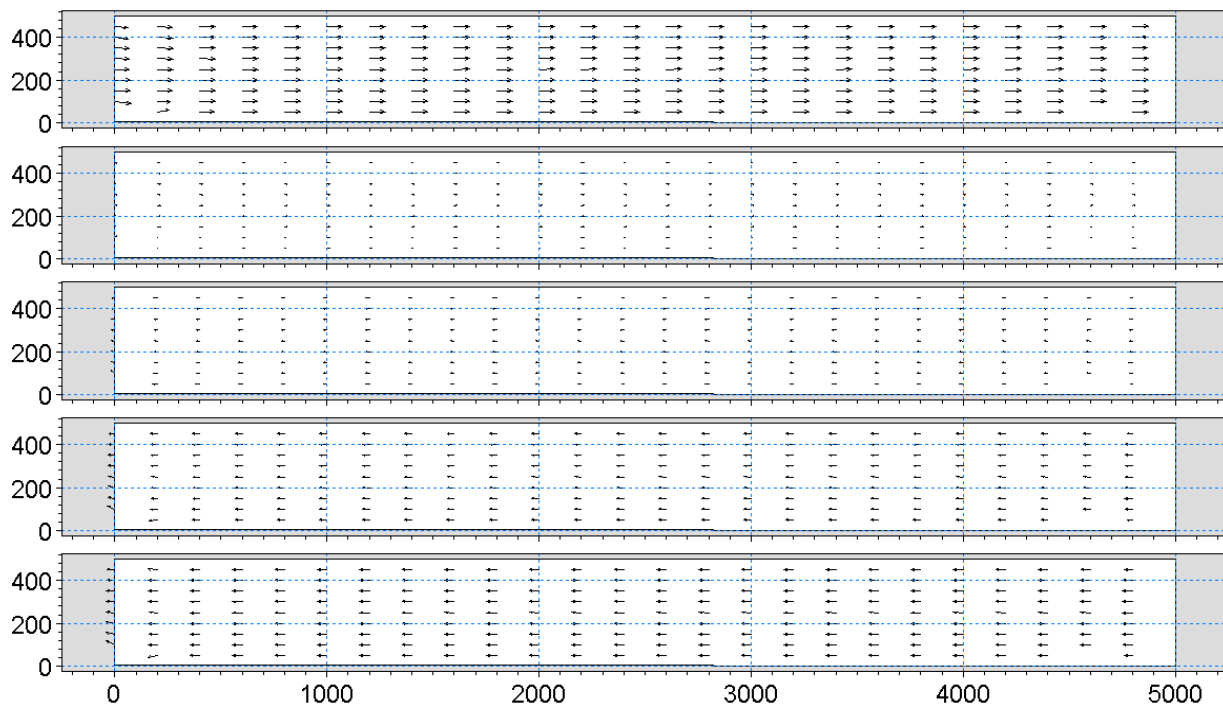
Na slikama 4.3 i 4.4 prikazana su polja brzina za dubine 1, 3, 5, 7 i 9m, dobivena provedbom analiza 3 i 4.



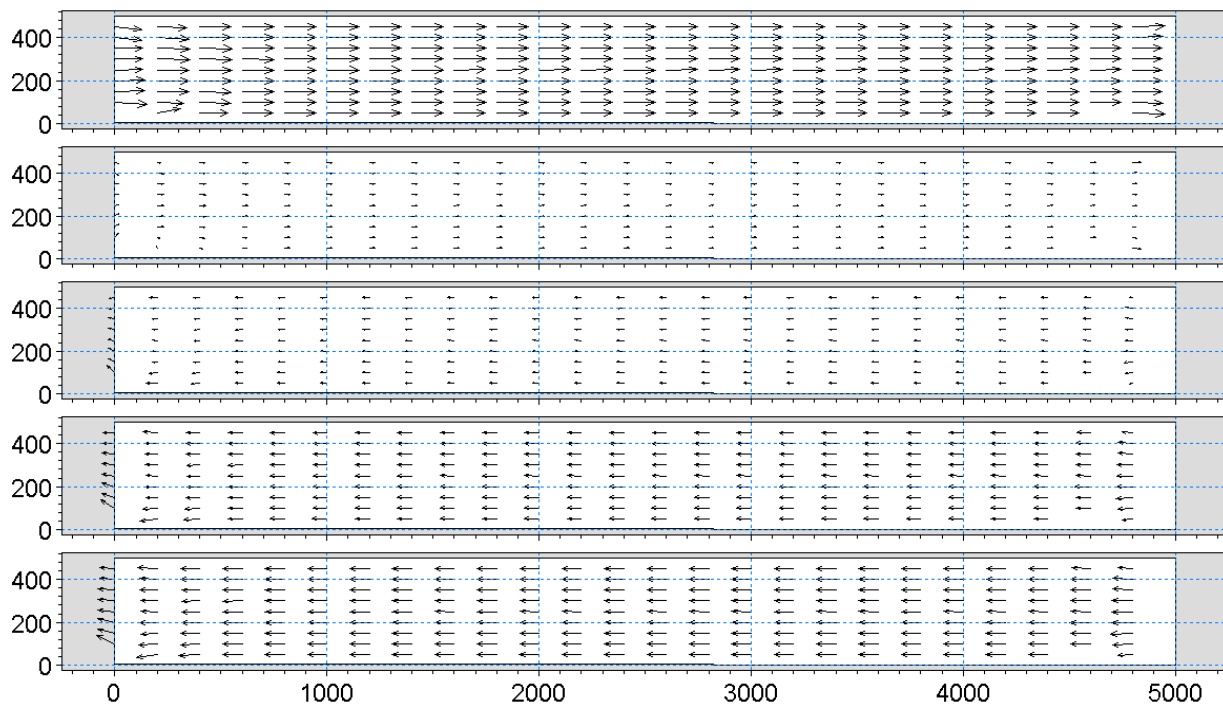
Slika 4.1 Usporedba vertikalnih profila brzina za poziciju kontrolne točke, dobivenih modelom i teoretskim jednadžbama (analize 1,2,3,4,5,6,7,8)



Slika 4.2 Usporedba vertikalnih profila kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti za poziciju kontrolne točke, dobivenih modelom i teoretskim jednadžbama (analize 1,2,3,4,5,6,7,8)



Slika 4.3 Polja brzina za dubine 1, 3, 5, 7 i 9m dobivena analizom 3 (dubina 10m ; brzina vjetra 10m/s)



Slika 4.4 Polja brzina za dubine 1, 3, 5, 7 i 9m dobivena analizom 4 (dubina 10m ; brzina vjetra 20m/s)

5. Korišteni numerički model

Numerički model Mike 3fm (www.dhigroup.com) temelji se na fleksibilnom diskretizacijskom pristupu a njegov hidrodinamički modul numerički rješava 3D Reynolds-ove jednadžbe uz usvajanje Boussinesqove pretpostavke o hidrostatskoj razdiobi tlaka u vertikalnom smjeru. Morska razina uzima se preko sigma-koordinatnog pristupa. Za diskretizaciju jednadžbi se koristi metoda konačnih volumena, bazirana na jednoj ćeliji i podjeli kontinuuma s nepreklapajućim elementima. U horizontalnom smjeru korištena je nestrukturirana a u vertikalnom smjeru strukturirana diskretizacija. Za izračunavanje konvektivnog toka koristi se približni Riemann-ov solver čime je omogućeno računanje i u slučajevima diskontinuiranih rješenja. Za vremensku integraciju se koristi polu implicitni pristup, gdje se horizontalni parametri tretiraju eksplicitno a vertikalni implicitno. Modul turbulencije koristi k-ε formulaciju u vertikalnom smjeru i Smagorinsky koncept u horizontalnom smjeru (vidi poglavlje A6 i primjer 1).

VJEŽBA 3

1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava numeričkog modela procjeđivanja ispod brane, kroz stijenu međuzrnske poroznosti. U varijantnim rješenjima hipotetske prostorne domene zadržavaju se konstantni rubni i početni uvjeti te se promatra utjecaj promjene širine pregradnog profila, dubine uranjanja zagata i debljine vodonosnog sloja na brzine i ukupne protoke procjeđivanja. Korišten je 2D model u vertikalnoj ravnini, u kojem je porozna sredina modelirana dvojako, kao izotropna i anizotropna. Razina tla i nepropusne podine usvojene su kao horizontalne. Korišten je numerički modeli zasnovan na metodologiji konačnih diferencija. Rezultati provedenih analiza pokazuju da anizotropija uzrokuje smanjenje procjednih količina u odnosu na slučaj izotropne sredine pri istim dubinama uranjanja zagata.

Jedna od bitnih komponenti u gospodarenju vodama je i zadržavanje vodnog resursa u akumulacijskim prostorima. Obzirom na prirodne geološke granice kojima je omeđen akumulacijski prostor česta puta je potrebna dodatna intervencija na pregradnom profilu akumulacije u želji za smanjenjem proticajnih količina kroz poroznu sredinu ispod pregradnog profila. Jedna od takvih intervencija je i izvedba zagatnih stijena. Povećanjem dubine uranjanja zagatne stijene povećava se i put čestici tekućine od akumulacijskog prostora do nizvodnog „izlaznog“ profila a što rezultira sa smanjenjem ukupne proticajne količine. S druge strane, povećanje dubine uranjanja zagata uzrokuje i povećanje investicijskih troškova.

U ovoj vježbi provedi se analiza utjecaja dubine uranjanja zagata, utjecaja debljine saturiranog vodonosnog sloja ispod akumulacijskog prostora i utjecaj anizotropije na procjedne količine ispod pregradnog profila akumulacije.

2. Prostorna domena problema i provedeni pokusi

Definicijska slika prostorne domene prikazana je na slici 2.1. Za dubine saturiranog vodonosnog sloja H od dna pregradnog profila do nepropusne horizontalne podine korištene su vrijednosti 30m i 70m. Analizirani raspon dubina uranjanja zagata a je od 0 do 60m, sa prirastom od 10m. Širina pregradnog profila b je usvojena sa konstantnom vrijednosti 30m. Rubovi modela, u smislu vertikalnih nepropusnih granica, postavljeni su 120m uzvodno od početka i 120m nizvodno od kraja pregradnog profila. Nomenklatura pokusa dana je i u tablici 1.

Prostorna domena diskretizirana je strukturiranom proračunskom mrežom s prostornim korakom $\Delta x=2\text{m}$ u horizontalnom smjeru i $\Delta y=0,5\text{m}$ u vertikalnom smjeru, uz izuzetak $\Delta x=\Delta y=0,5\text{m}$ u vertikali zagata.

Razine vodnog lica uzvodno i nizvodno od pregradnog profila su stacionarne sa međusobnom visinskom razlikom 10m. Koeficijenti filtracije u slučaju izotropnog vodonosnika usvojene su sa vrijednosti $k_x=k_y=0,001$ m/s, a u slučaju anizotropnog sa vrijednostima $k_x=0,001$ m/s; $k_y=0,1k_x$. U svim provedenim pokusima koeficijent poroznosti vodonosnika je usvojen sa vrijednosti $\varepsilon = 0,6$.

Na slici 2.1 naznačeni su i rubni uvjeti na modelskim granicama gdje je $\partial h/\partial n=0$ Neuman-ov homogeni rubni uvjet za tretman nepropusne granice a $h=10$ m i $h=0$ m Dirichlet-ovi rubni uvjet na otvorenim granicama modela.

Tablica 1 Nomenklatura pokusa

Broj pokusa	H	b	a	c	k_x/k_y
	[m]	[m]	[m]	[m]	[/]
1,2,3,4	30	30	0, 10, 20, 25	120	1
5,6,7,8	30	30	0, 10, 20, 25	120	10
7,8,9	70	30	0, 10, 20,30,40,50,60	120	1
10,11,12	70	30	0, 10, 20,30,40,50,60	120	10

H – dubina saturiranog vodonosnog sloja (m)

a – dubina uranjanja zagata (m)

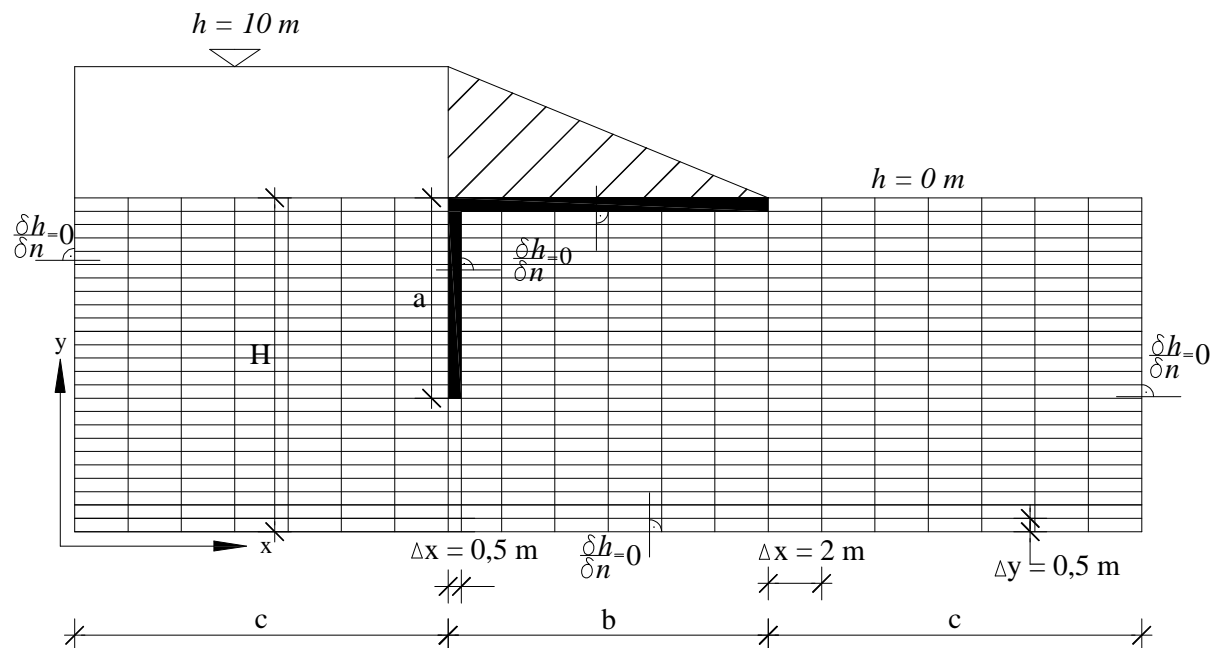
b – širina dna pregradnog profila (m)

c – širina dna uzvodno i nizvodno od pregradnog profila (m)

k_x – Darcyjev koeficijent propusnosti u horizontalnom smjeru x (l/s)

k_y – Darcyjev koeficijent propusnosti u vertikalnom smjeru y (l/s)

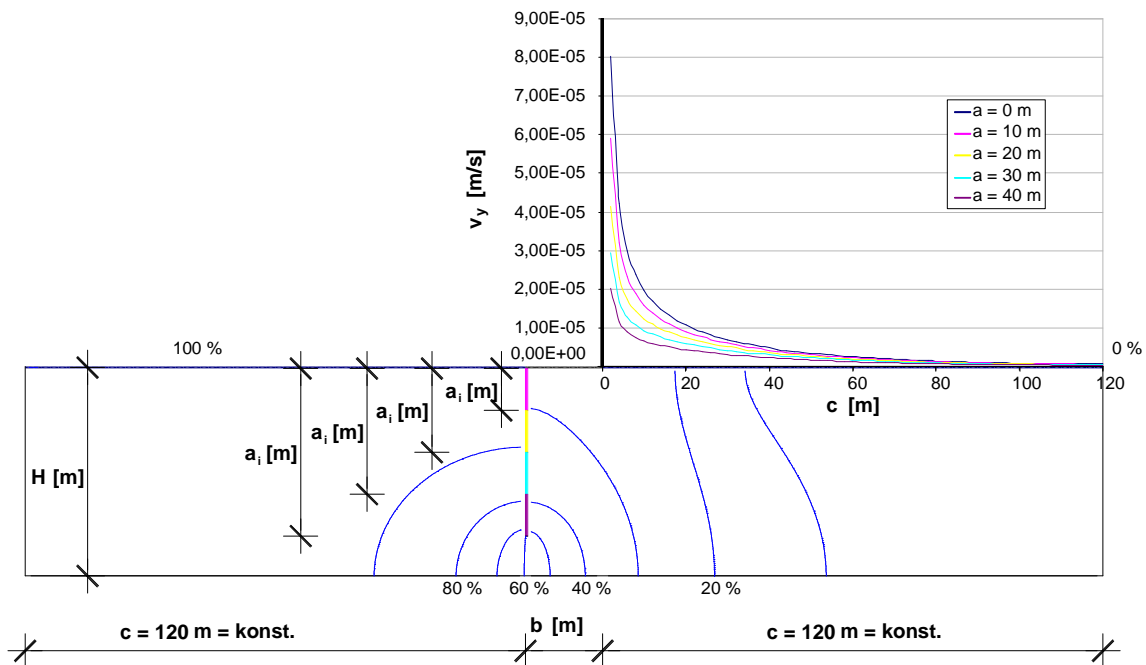
h – razina vodnog lica, Dirichletov rubni uvjet (m)



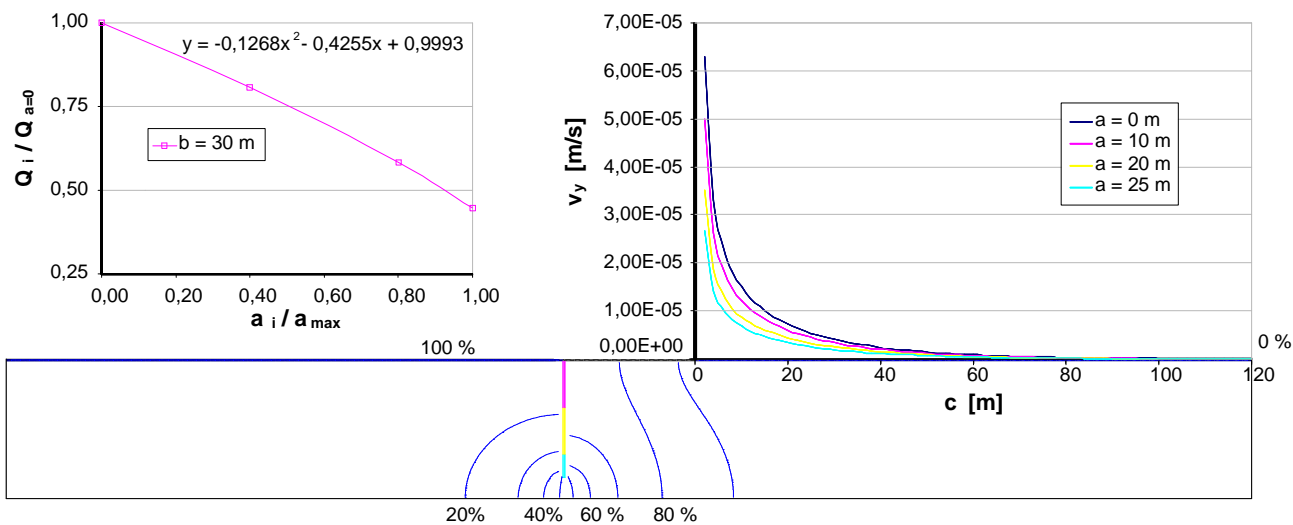
Slika 1 Definićijska skica prostorne domene sa varijabilnim geometrijskim obilježjima

3. Rezultati provedenih modelskih simulacija

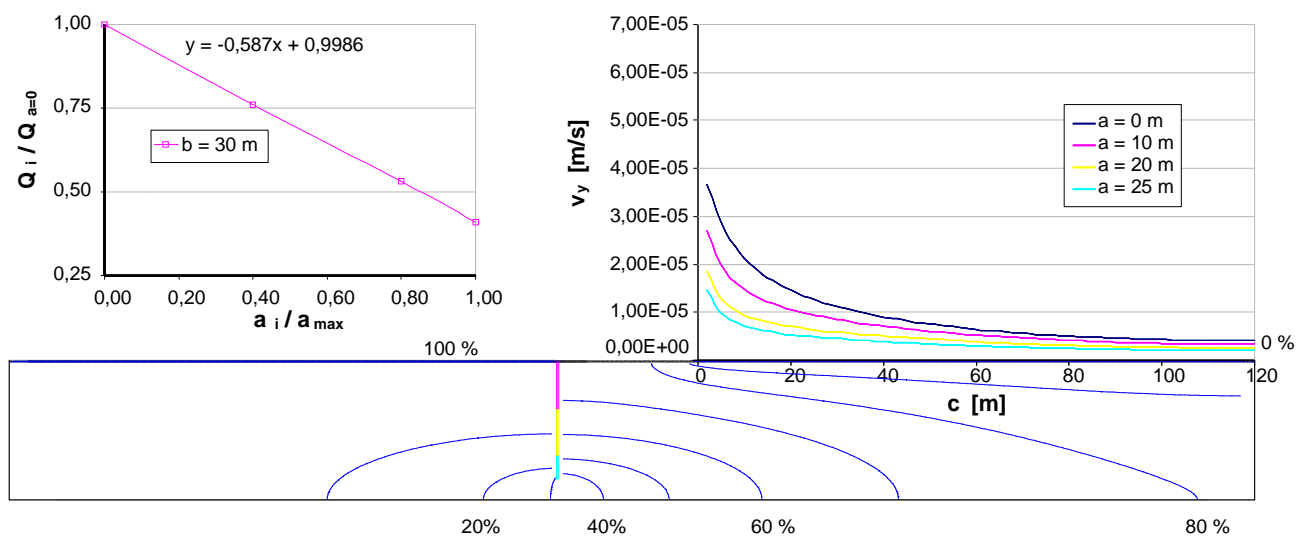
Prikaz rezultata dan je grafički prema definicijskoj slici 3.1. Na daljnjim slikama se prikazuje raspodjela ekvipotencijala sa inkrementom od 10% obzirom na ukupnu razliku potencijala uzvodno i nizvodno od pregrade. Prikazana raspodjela potencijala na svim slikama odnosi se na slučaj maksimalne dubine uranjanja zagata ($a=25\text{m}$ pri $H=30\text{m}$ i $a=60\text{m}$ pri $H=70\text{m}$). Na slikama su prikazani i dijagrami horizontalnih raspodjela vertikalne komponente brzine istjecanja v_y u izlaznom profilu nakon pregrade. Također su priloženi i dijagrami ovisnosti bezdimenzionalnog omjera i -tog protoka procjeđivanja Q_i (pri $a=10, 20$) i protoka procjeđivanja bez izvedbe zagata $Q_{a=0}$ (pri $a=0\text{m}$) o i -toj dubini uranjanja zagata a_i .



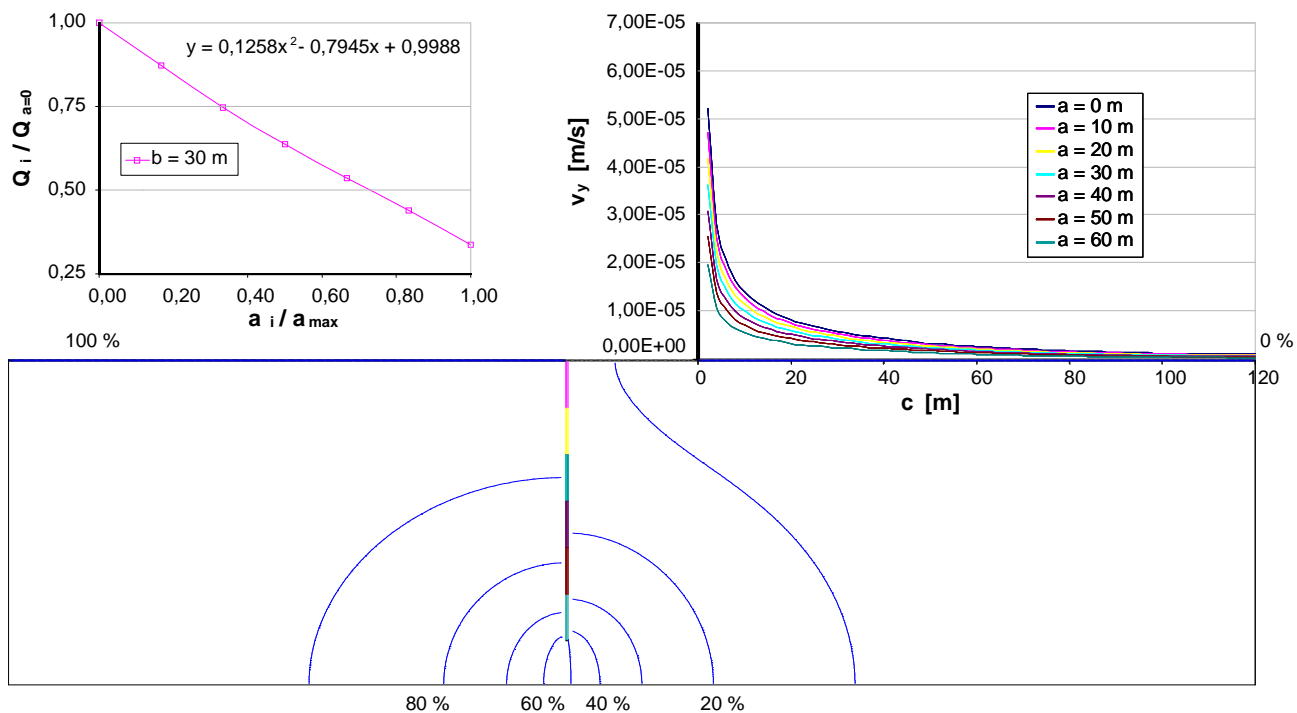
Slika 3.1 Definijska skica za prikaz rezultata (plave linije u području porozne sredine su ekvipotencijale sa inkrementom 10% ukupne razlike potencijala)



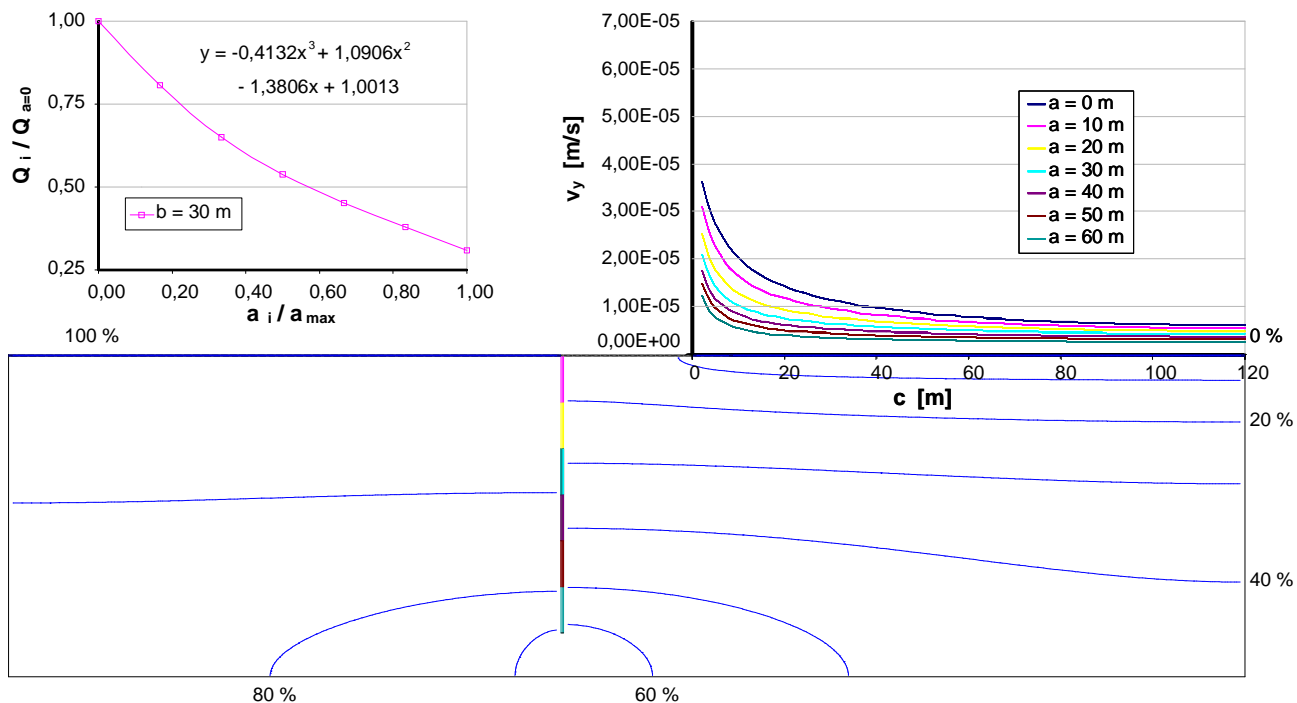
Slika 3.2 Raspodjela brzina izlalnog strujanja na izlalom profilu, raspodjela ekvipotencijala (10%) i bezdimenzionalni odnosi $Q_i/Q_{a=0}$ prema dubini uranjanja a_i/a_{max} ($H = 30\text{m}$; $b = 30\text{m}$; $k_x = k_y$)



Slika 3.3 Raspodjela brzina izlalnog strujanja na izlalom profilu, raspodjela ekvipotencijala (10%) i bezdimenzionalni odnosi $Q_i/Q_{a=0}$ prema dubini uranjanja a_i/a_{max} ($H = 30\text{m}$; $b = 30\text{m}$; $k_x = 10 k_y$)



Slika 3.4 Raspodjela brzina izlaznog strujanja na izlaznom profilu, raspodjela ekvipotencijala (10%) i bezdimenzionalni odnosi $Q_i/Q_{a=0}$ prema dubini uranjanja a_i/a_{max} , ($H = 70\text{m}$; $b = 30\text{m}$; $k_x = k_y$)



Slika 3.5 Raspodjela brzina izlaznog strujanja na izlaznom profilu, raspodjela ekvipotencijala (10%) i bezdimenzionalni odnosi $Q_i/Q_{a=0}$ prema dubini uranjanja a_i/a_{max} , ($H = 70\text{m}$; $b = 30\text{m}$; $k_x = 10 k_y$)

Prikazane raspodjele vertikalnih komponenti brzine na izlaznom profilu ukazuju na generalni trend opadanja brzine i procjernih količina sa povećanjem dubine uranjanja zagata uz konstantnu širinu pregradnog profila, kako kroz izotropnu, tako i kroz anizotropnu sredinu. Odnosi smanjenja protjecanja i produljenja zagata nisu u linearnoj vezi.

Procjeđivanje je intenzivnije u izotropnoj nego u anizotropnoj sredini, ukoliko se na modelu koristi nepromijenjena geometrija i istovjetni rubni/početni uvjeti.

Rezultati bezdimenzionalnih odnosa između protoka bez izvedbe zagata $Q_{a=0}$ i sa analiziranim rasponom dubina uranjanja zagata Q_i ukazuju na linearno smanjenje ukupnih procjernih količina za slučaj anizotropne sredine pri dubini saturiranog vodonosnog sloja od $H=30\text{m}$. U slučaju izotropne sredine, pri istoj dubini $H=30\text{m}$, narušena je linearnost odnosa $Q_i/Q_{a=0}$ i a_i/a_{max} . Kod povećane dubine vodonosnog sloja $H=70\text{m}$, odnosi $Q_i/Q_{a=0}$ i a_i/a_{max} također nisu u linearnoj vezi.

Prema tome, veća učinkovitost izvedbe zagatnih stijena, u smislu smanjenja procjernih količina, može se očekivati u slučaju izraženije anizotropije i većih debljina vodonosnog sloja.

4. Korišteni numerički model

U provedbi numeričkih analiza korišten je 2D numerički model ASMWIN (Aquifer Simulation Model) namjenjen za analizu strujanja podzemnih voda i pronosa otopljene tvari. Prva verzija ASM-a izdana je 1989. i pokretana je pod programskim jezikom MS- DOS. Od toga se ASM kontinuirano poboljšavao i unapređivao a zadnja verzija ASM 6.0 radi pod operativnom sustavom MS- Windows. Model je baziran na metodi konačnih diferencija pri čemu se pronos može tretirati kroz klasičan Eulerov pristup ili po „random walk” metodi. Model podržava proračunsku mrežu sa maksimalno 150 x 150 ćelija i do 1000 vremenskih sekvenci u slučaju nestacionarnosti procesa. Diskretizirane jednačbe procesa rješavaju se pomoću metode preduvjetnih konjugiranih gradijenata sa mogućnošću izbora dijagonalnih ili Cholesky preduvjeta. Za rješavanje stacionarnog toka koristiti se Marquardt- Levenberg algoritam. Model također omogućava upotrebu heterogenih polja transmisivnosti i koeficijenata filtracije.

VJEŽBA 4

1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava i baždarenje numeričkog modela valnog generiranja za šire područje Riječkog zaljeva temeljem rezultata mjerenja na valografskoj postaji. U sklopu baždarenja (parametrizacija) modela prvotno se provodi analiza osjetljivosti modelskih konstanti te se nakon toga varijacijom „najsenzibilnije“ modelske konstante određuje i njezina odgovarajuća vrijednost.

U sklopu ovog primjera korišten je sljedeći izvor relevantnih podataka o intenzitetu i vjerojatnosti pojavljivanja vjetrova po analiziranim smjerovima: „*Hidraulička analiza valova i nasipnih konstrukcija sjeverne obale brodogradilišta 3. Maj u Rijeci*“, Građevinski institut, Zagreb, 1991.

U navedenom radu su za potrebe dimenzioniranja obloge obalnog zida za tzv. sjevernu obalu brodogradilišta 3. Maj u Rijeci analizirana vjetrovalna obilježja predmetnog akvatorija. Analize su temeljene na podacima praćenja vjetrova tijekom razdoblja 1957-1980 od strane Republičkog hidrometeorološkog zavoda SR Hrvatske, a koji su predočeni u Meteorološkom izvještaju za projektiranje lukobrana marine Ičići. Osim toga, prikazani su i rezultati mjerenja valova tijekom 1974. i 1975. godine sa instrumentima postavljenim na lukobran Petar Drapšin u luci Rijeka.

2. Analiza podataka o vjetrovnim obilježjima

Predmetna lokcija brodogradilišta 3. Maj u Rijeci izložena je primarno valovima drugog i trećeg kvadranta (posebice SE i SSE smjera).

U tablici 2.1 prikazan je broj pojavljivanja najjačih jakih i olujnih južnih vjetrova po godinama opažanja u razdoblju 1957.-1980. za meteorološku postaju Rijeka [1].

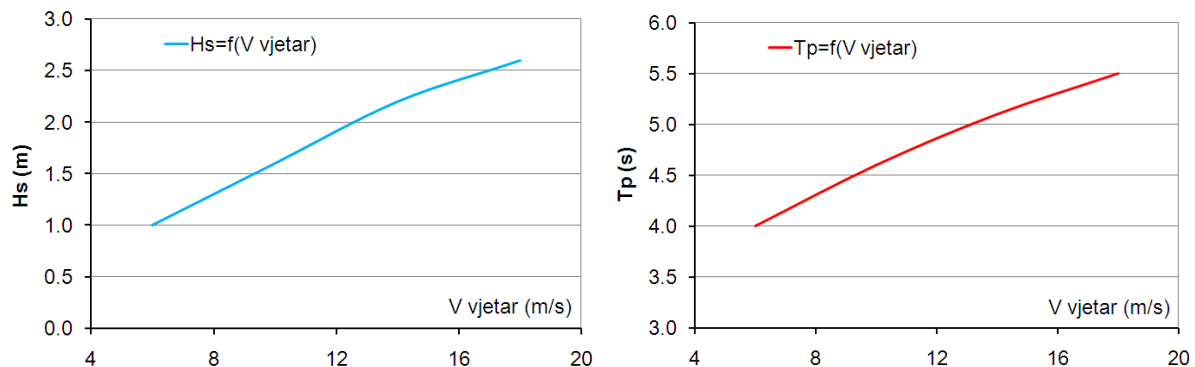
Tablica 2.1 Broj pojavljivanja najjačih jakih i olujnih južnih vjetrova po godinama opažanja u razdoblju 1957.-1980. za meteorološku postaju Rijeka [1]

	SE-SSE	S		SE-SSE	S		SE-SSE	S
1957	7 bf 5X		1965	8 bf 2X		1973	7 bf 4X	
1958	7 bf 8X		1966	8 bf 1X	7 bf 1X	1974	7 bf 1X	7 bf 1X
1959	8 bf 1X		1967	7 bf 4X	7 bf 2X	1975	8 bf 1X	
1960	8 bf 1X		1968	8 bf 1X	7 bf 1X	1976	10 bf 1X	
1961	7 bf 1X	7 bf 1X	1969	8 bf 2X		1977	9 bf 2X	
1962	8 bf 1X		1970	7 bf 3X		1978	7 bf 1X	9 bf 1X
1963	7 bf 7X	8 bf 1X	1971	7 bf 3X		1979	8 bf 2X	7 bf 1X
1964	9 bf 1X	7 bf 1X	1972	8 bf 1X	7 bf 1X	1980	8 bf 1X	

Pregledom vrijednosti brzina vjetra za smjerove SE-SSE i S, prikazanih u tablici 2.1, zaključuje se da najjači vjetrovi nastupaju iz smjera SE-SSE te da imaju smjera veću učestalost pojavljivanja. Obzirom da su duljine privjetrišta za analiziranu lokaciju slična, za SE-SSE i S smjer djelovanja vjatra, numeričke analize provode se samo za SE-SSE smjer (nepovoljniji slučaj – očekivane veće valne visine ispred brodogradilišta 3. Maj u Rijeci).

3. Analiza podataka o valnim obilježjima

Pri uspostavi numeričkog modela (baždarenje modela) korišteni su podaci mjerenja valnih parametara (slika 3.1) na poziciji lukobrana Petar Drapšin u luci Rijeka. Na slici 3.1 prikazan je odnos izmjerenih značajnih valnih visina H_s i vršnih perioda T_p o izmjerenim brzinama vjetra V_{vjetar} , pri djelovanju vjetra iz SSE smjera sa trajanjem 12 sati [1]. Pozicija valografa (long - 14,4223 ; lat - 45,3266) naznačena je na slici 4.1.



Slika 3.1 Odnos izmjerenih značajnih valnih visina H_s i vršnih perioda T_p o izmjerenim brzinama vjetra V_{vjetar} pri djelovanju vjetra iz SSE smjera sa trajanjem 12 sati [1]

Rezultati mjerenja sa slike 3.1 služe kao osnov za baždarnu proceduru pri uspostavi numeričkog modela valnog generiranja.

4. Uspostava numeričkog modela i pristup modeliranju

Na slici 4.1 prikazano je područje obuhvaćeno s prostornom domenom numeričkog modela valnog generiranja. Na slici je prikazana i primijenjena modelska diskretizacija s konačnim volumenima. Prostorna raspodjela dubina (batimetrija), kao bitna podloga, definirana je podacima na rasteru s korakom 7,5' u long/lat sustavu. Udaljenost između numeričkih čvorova, smještenih u težište površine svakog konačnog volumena, je varijabilna i proteže se od 650 m u dubokovodnom području do 150 m u zoni same obalne crte.

Za provedbu numeričkih analiza korišten je numerički model MIKE 21/SW koji omogućuje simulaciju generiranja, deformacija i zamiranja gravitacijskih vjetrovnih valova i valova mrtvog mora u području otvorenog mora i priobalja. Korištena je puna spektralna formulacija pri čemu je direkcijski valni spektar zavisna varijabla. Modelskom implementacijom moguće je obuhvatiti procese valnog generiranja s vjetrom, međusobnih valnih nelinearnih interakcija, refrakcije, difrakcije i utjecaja plićine te disipacijski procesi izazvani trenjem s dnom, površinskim lomovima valova (eng: white capping) i lomovima valova pri nailasku na male dubine.

Svaki od navedenih utjecaja moguće je uključiti ili isključiti iz modelskog proračuna. Ukoliko je pojedini proces uključen, potrebno je definirati i odgovarajuću modelsku konstantu.

Na raspolaganju su sljedeće konstante kojima se definira pojedini utjecaj:

- a) Utjecaj interakcije mora i atmosfere (DA ili NE)
- b) Koeficijent Gamma - utjecaj loma valova uslijed plićine
- c) Nikuradse koeficijent – utjecaj hrapavosti dna
- d) Koeficijenti Cdis i DELTAdis – utjecaj disipacije energije vala pri površinskom lomu valova

Određivanje važnosti pojedinog utjecaja, a time i senzibilnost pripadnog modelskog parametra, ostvaruje se na sljedeći način:

- 1.) Odabire se jedan utjecaj i njegova odgovarajuća konstanta. Varira se vrijednost te konstante, uz zanemarenje preostalih utjecaja (vrijednosti preostalih modelskih konstanti su nule). Prvo se analizira utjecaj interakcije mora i atmosfere na način da provedu simulacije sa i bez interakcije. Nakon provedbe numeričkih proračuna registriraju se modelski rezultati značajnih valnih visina H_s i vršnih spektralnih perioda T_p za referentnu točku koja odgovara poziciji valografa (ispred lukobrana Petar Drapšin).
- 2.) Uspoređuju se rezultati za dva analizirana slučaja te se prepoznaje „važnost“ ili „nevažnost“ interakcije mora i atmosfere.
- 3.) Nakon toga se u modelsku analizu uključuje i utjecaj loma valova uslijed plićine sa izborom vrijednosti koeficijenta Gamma = 0,8 (literaturno preporučena vrijednost). Pritom je zadržana interakcijska veza mora i atmosfere. Slijedi proračun i registriranje modelskih rezultata.
- 4.) Uspoređuju se rezultati za slučajeve sa i bez utjecaja loma uslijed plićine, te se prepoznaje „važnost“ ili „nevažnost“ tog utjecaja.
- 5.) Za analizu utjecaja hrapavosti dna provodi se procedura slična navedenoj pod točkama 5 i 6. Pritom se usvaja vrijednost Nikuradseovog koeficijenta 0,04, te vrijednosti koeficijent Gamma = 0,8 i Charnock parametra = 0,04.

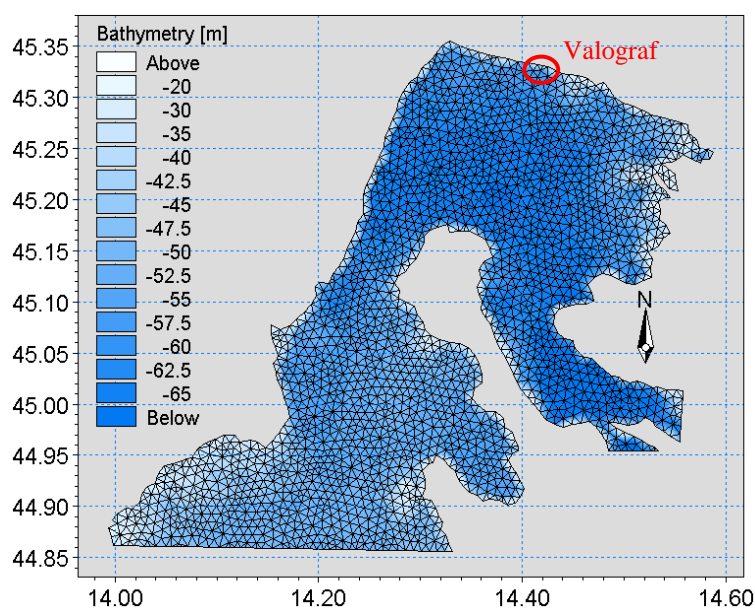
- 6.) Na kraju se analizira i utjecaj površinskih lomova valova. U modelskim proračunima varira se samo koeficijent C_{dis} s vrijednostima = 1 ; 2,5 ; 4,5. Vrijednost 4,5 je literaturno referencirana no više za područja otvorenog mora nego za akvatorije ograničenih privjetrišta. U ovom zadnjem setu modelskih simulacija korištene su sljedeće fiksirane vrijednosti ostalih konstanti: Nikuradseov koeficijent 0,01m ; koeficijent Gamma = 0,8 ; Charnock parametar = 0,01.
- 7.) Uspoređuju se modelski rezultati za analizirane slučajeve C_{dis} = 1 ; 2,5 ; 4,5 te se prepoznaje „važnost“ ili „nevažnost“ izbora te konstante i utjecaja površinskog loma valova.

U modelskim simulacijama pod prethodno navedenim točkama 1-7 koristi se homogeno i stacionarno polje vjetra s brzinom 14 m/s i smjerom SSE (157°) na 10m od površine mora.

Sumarni pregled potrebnih modelskih simulacija s odgovarajućim koeficijentima (utjecajima) za analizu osjetljivosti dan je u tablici 4.1.

Tablica 4.1 Sumarni pregled potrebnih modelskih simulacija s odgovarajućim koeficijentima (utjecajima) za analizu osjetljivosti dan je u tablici 4.1.

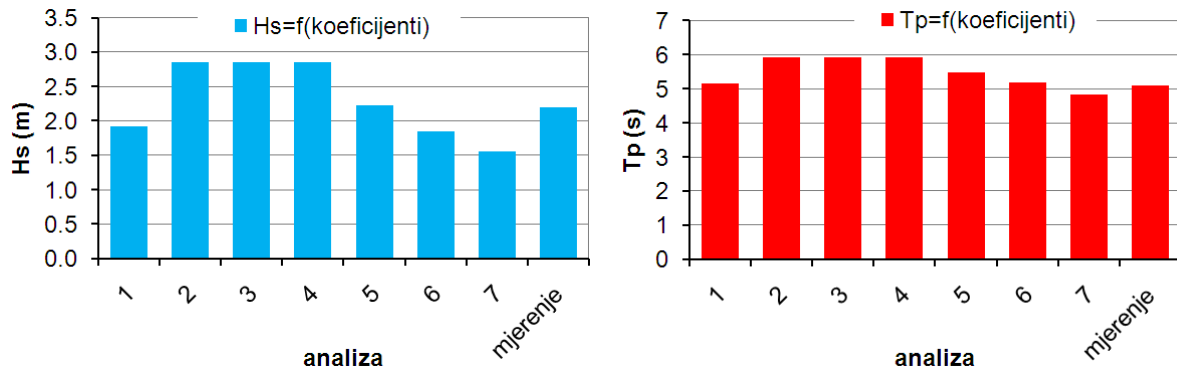
analiza	Charnock	Gamma	Nikuradse	C_{dis}
1				
2	0.01			
3	0.01	0.8		
4	0.01	0.8	0.04	
5	0.01	0.8	0.04	1
6	0.01	0.8	0.04	2.5
7	0.01	0.8	0.04	4.5



Slika 4.1 Prostorna diskretizacija modelske domene s nestrukturiranom mrežom konačnih volumena na batimetrijskoj podlozi

5. Rezultati modelskih simulacija za analizu osjetljivosti

Na slici 5.1 prikazane su modelske vrijednosti značajnih valnih visina H_S i vršnih perioda T_P za poziciju valografa prema provedenom skupu analiza iz tablice 4.1.



Slika 5.1 Modelske i izmjerene vrijednosti značajnih valnih visina H_S i vršnih perioda T_P za poziciju valografa prema provedenom skupu analiza iz tablice 4.1.

Rezultati analiza 2, 3 i 4 ukazuju na minorni utjecaj loma valova uslijed plićine (nesenzibilan koeficijent Γ) i utjecaj hrapavosti dna (nesenzibilan Nikuradse koeficijent). Analizirano područje je „dubokovodno“, čak i u samom priobalju, pa čestice tekućine u svom gibanju induciranom valovanjem ne „osjećaju“ dno i nema lomova valova uslijed plićine. Stoga se rezultati pokazuju kao logični.

Interakcija mora i atmosfere pokazala se kao bitna (analize 1 i 2). U slučaju odsustva interakcije mora i atmosfere model daje manje vrijednosti H_S od izmjerenih, te nema daljnjih mogućnosti za njihovo uvećanje. Stoga je nužno uzeti u obzir spomenutu interakciju. Nadalje, uzimanjem u obzir interakcije mora i atmosfere dobivaju se veće vrijednosti H_S i T_P od izmjerenih. U tom slučaju potrebno smanjenje modelskih vrijednosti H_S i T_P može se ostvariti kroz obuhvat utjecaja površinskog loma valova koji se parametrizira koeficijentom C_{dis} (analize 5, 6 i 7). Tako primjerice modelska vrijednost H_S proračunata u analizi 5, s koeficijentom $C_{dis}=1$, odgovara izmjerenoj vrijednosti H_S . S druge strane, modelska vrijednost T_P u analizi 5 premašuje izmjerenu, dok je u analizi 6 vrlo bliska izmjerenoj.

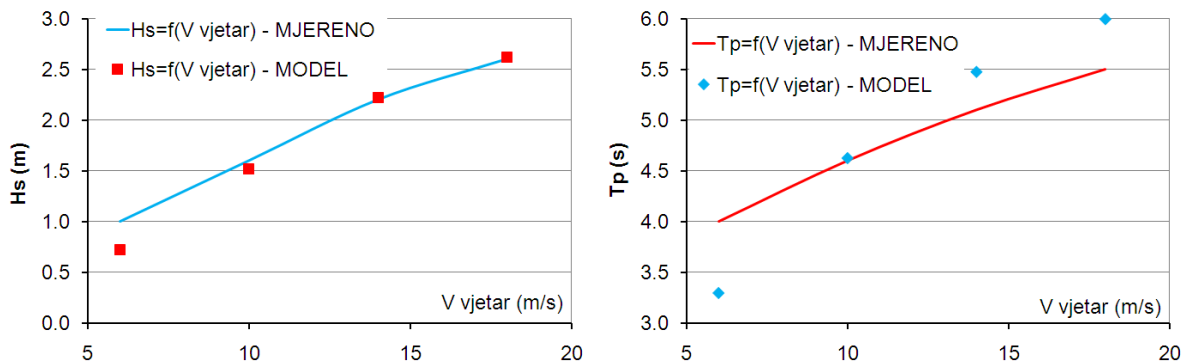
Koeficijent C_{dis} , sa kojim se parametrizira utjecaj disipacije energije vala pri površinskom lomu vala, pokazao se kao senzibilan (analize 4, 5, 6 i 7). Stoga se u nastavku baždarne procedure treba fokusirati na varijaciju vrijednosti upravo tog parametra, u cilju postizanja što većeg stupnja sličnosti sa izmjerenim valnim visinama i periodama.

6. Baždarne modelske simulacije s varijacijom najsenzibilnije konstante

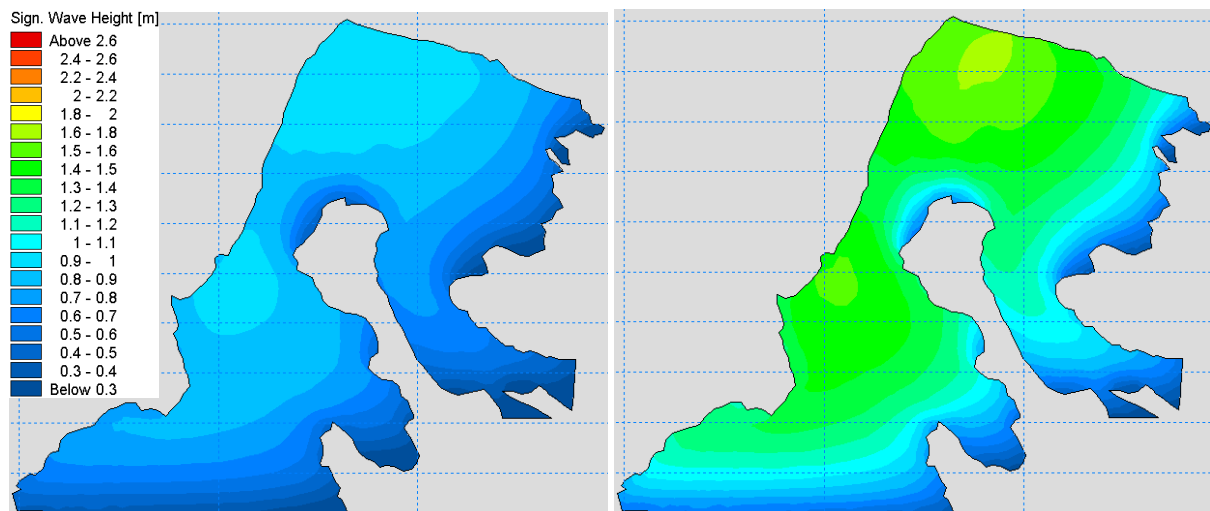
Na raspolaganju su podaci o odnosu značajnih valnih visina i vršnih perioda o brzini vjetra SSE smjera (slika 3.1) za poziciju korištenog monitoring valografa (lukobrana Petar Drapšin u luci Rijeka). Slijed nastavka baždarenja modela je takav da se u modelskim simulacijama varira vrijednost parametra C_{dis} pri djelovanju homogenom polju vjetra SSE smjera s brzinama 6, 10, 14 i 20 m/s.

Na slici 6.1 prikazana je usporedba modeliranih i izmjerenih vrijednosti H_S i T_P za poziciju mjerenja (lukobran Petar Drapšin u luci Rijeka). Na slici 6.1 naznačene su i usvojene vrijednosti koeficijenta C_{dis} sa kojima su dobiveni prikazani rezultati H_S i T_P .

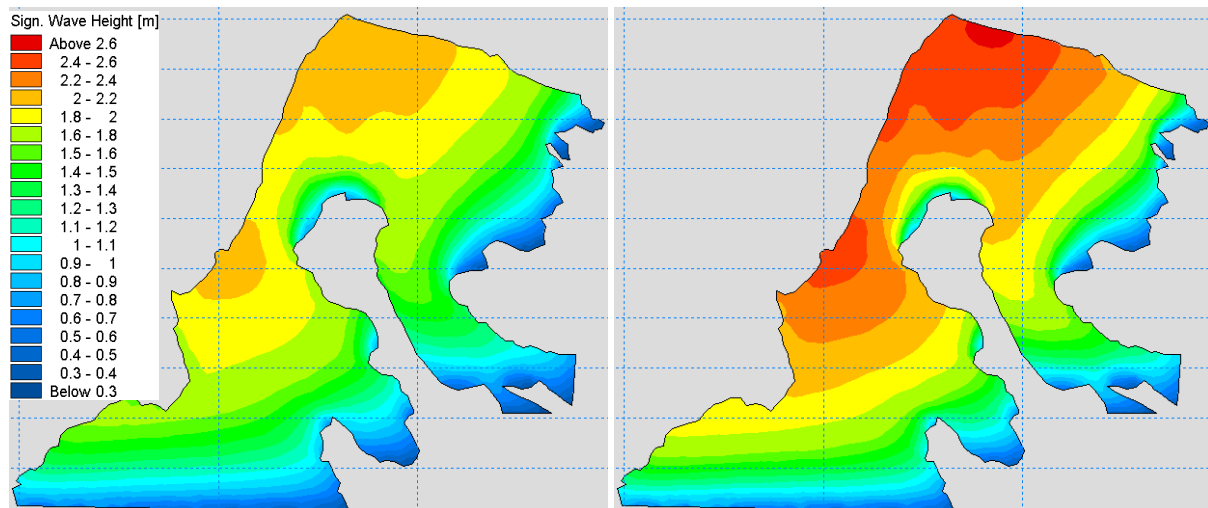
Na slikama 6.2 i 6.3 prikazana su modelska polja značajnih valnih visina H_S na modeliranom području, pri djelovanju vjetra SSE smjera sa intenzitetima 6, 10, 14 i 20 m/s.



Slika 6.1 Usporedba modelirane i izmjerene ovisnosti značajnih valnih visina H_S i vršnih spektralnih perioda T_P o brzini djelovanja vjetra SSE smjera za poziciju mjerenja (lukobran Petar Drapšin u luci Rijeka)



Slika 6.2 Modelska polja značajnih valnih visina H_S pri djelovanju vjetra SSE smjera sa intenzitetom 6m/s (lijevo) i 10m/s (desno).



Slika 6.3 Modelska polja značajnih valnih visina H_s pri djelovanju vjetra SSE smjera sa intenzitetom 14m/s (lijevo) i 20m/s (desno).

Iz provedenih analiza može se zaključiti da je koeficijent C_{dis} u funkciji brzine vjetra, te da raste sa povećanjem brzine vjetra. U slučaju djelovanja vjetra s brzinama 6m/s i 10m/s vrijednost koeficijenta C_{dis} je 0, odnosno utjecaj površinskih lomova valova je zanemariv. Takvo stanje odgovara realnosti, budući se površinski lomovi valova pojavljuju tek kod većih valova koji su uzrokovani djelovanjem jačih vjetrova.

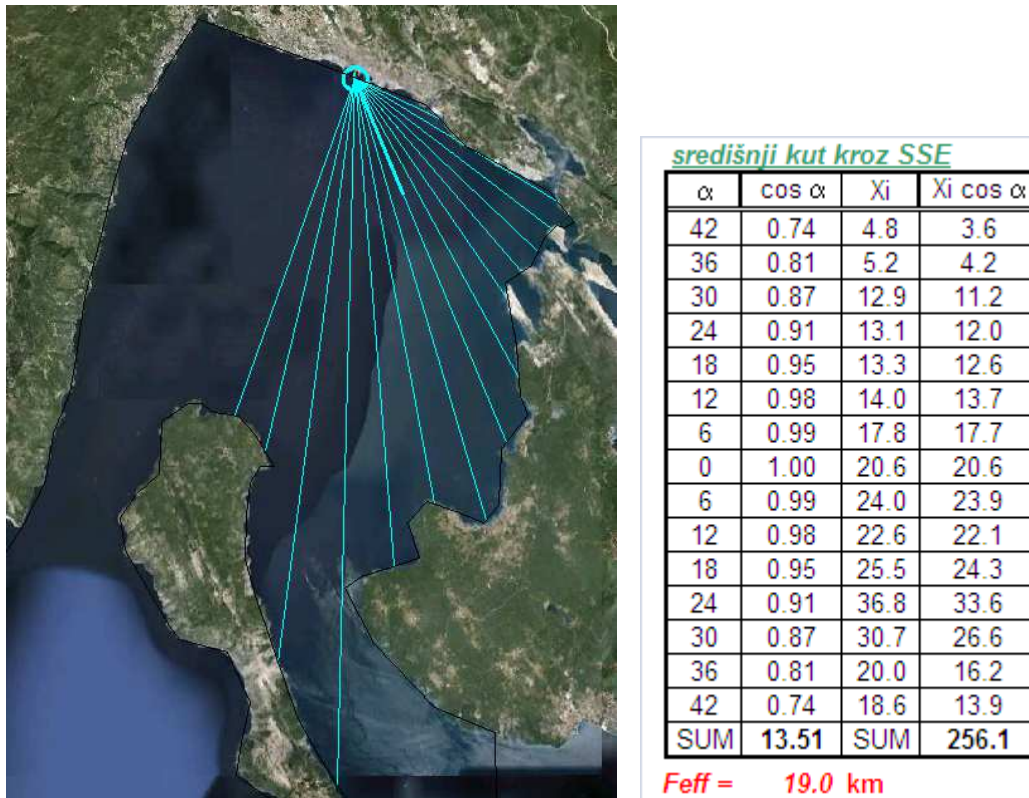
Postizanje sličnosti između modelskih i izmjerenih vrijednosti H_s međutim ne povlači za sobom i sličnost modelskih i izmjerenih rezultata T_p . Prema rezultatima prikazanim na slici 6.1, uočava se da modelski vršni spektralni periodi T_p ostvaruju brži prirast s povećanjem brzine vjetra nego što je to slučaj s izmjerenim vrijednostima T_p . Ovaj dio spektralne valne fenomenologije se neće dodatno analizirati, iako sam model sadrži elemente s kojima je moguće provesti daljnji tretman i adaptaciju vršnih spektralnih perioda.

U nastavku je provedena i semi-empirička analiza značajnih valnih visina temeljem Groen-Dorrensein metodologije. Provjera je provedena za situacije djelovanja vjetra SSE smjera. Prvo su proračunate efektivne duljine privjetrišta za smjer SSE. Proračun je proveden na način da se u svakom od odabranih smjerova postavi centralna zraka koja kao ishodište ima točku ispred lukobrana Petar Drapšin. Nakon toga se sa rotacijom od 6° u smjeru kazaljke na satu (do $+42^\circ$) i suprotno od kazaljke na satu (do -42°) postavljaju pravci kroz istu ishodišnu točku. Određuju se duljine svake zrake od ishodišta do prve točke obale te se proračunava suma njihovih projekcija na centralnu zraku. Ta suma se dijeli sa sumom sinusa kuteva centralne zrake i ostalih rotiranih zraka a čime se dobiva i vrijednost duljine efektivnog privjetrišta.

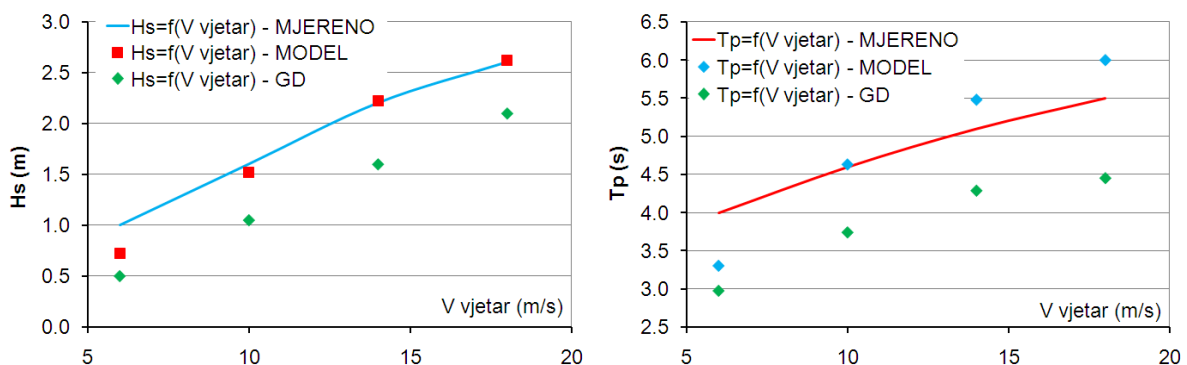
Na slici 6.4 dan je grafički prikaz postavljanja centralne zrake kroz smjer SSE te zrake sa korakom rotacije $\pm 6^\circ$ od centralne zrake. Proračunske vrijednosti spomenutog postupka za

određivanje efektivne duljine privjetrišta također su dane na slici 6.4. Usvojena efektivna dužina privjetrišta za SSE smjer je 19 km.

Na slici 6.5 prikazana je usporedba H_S i T_P za referentnu točku prema rezultatima mjerenja, numeričkog modeliranja i Groen – Dorrenstein metodologije.



Slika 6.4 Centralne zrake kroz smjer SSE i zrake sa korakom rotacije $\pm 6^\circ$ od centralne zrake (lijevo) i proračunske vrijednosti spomenutog postupka za određivanje efektivne duljine privjetrišta za središnji smjer SSE (desno)



Slika 6.5 Usporedba H_S i T_P za referentnu točku prema rezultatima mjerenja, modelskih analiza i Groen – Dorrenstein metodologije

Vrijednosti H_S proračunate Groen – Dorrenstein metodologijom manje su od izmjerenih za prosječno 29%. Vršni spektralni periodi T_P proračunati Groen – Dorrenstein metodologijom daju manje vrijednosti od izmjerenih za prosječno 20%.

7. Korišteni numerički model

Numerički model MIKE 21/SW (www.dhigroup.com) omogućava simulaciju generiranja, deformacija i zamiranja gravitacijskih vjetrovnih valova i valova mrtvog mora u području otvorenog mora i priobalja. Modelom je omogućen izbor između dvije formulacije rješavanja, direkcijskom nevezanom parametarskom formulacijom i punom spektralnom formulacijom. Prva formulacija je bazirana na parametrizaciji jednadžbe očuvanja valnog djelovanja u frekventnoj domeni kroz uvođenje nultog i prvog momenta valnog spektra kao zavisnih varijabli. Valno djelovanje N definirano je omjerom gustoće energije valnog spektra E i kutne frekvencije ω . Ova formulacija je u proračunskom smislu manje vremenski zahtjevna i primarno se primjenjuje na manjim prostornim domenama s značajnije ograničenim privjetrištima do 50 km. Ukoliko se želi analizirati valno generiranje kroz djelovanja vjetra, moguće je korištenje samo kvazistacionarnog moda u kojem se svaki valni događaj promatra kao neovisan. Druga formulacija oslanja se na radove Komen-a i Young-a u kojima je direkcijski valni spektar zavisna varijabla. Ova formulacija zahtjeva višestruko dulje proračunsko vrijeme, no daje i rezultate većeg stupnja točnosti, posebice na velikim prostornim domenama. Ukoliko se koristi direkcijska nevezana parametarska formulacija model daje mogućnost izbora jednadžbe za vjetrovalno generiranje, prema Shore Protection Manual iz 1984. godine ili prema radu Kahma i Calkoen-a iz 1994. godine.

U punom obimu, modelom se mogu modelirati procesi valnog generiranja s vjetrom, međusobnih valnih nelinearnih interakcija, refrakcije i utjecaja plićine, interakcije valova i strujanja, promjene morskih razi uslijed plimnih oscilacija te disipacijski procesi izazvani trenjem sa dnom, površinskim lomovima valova (eng: white capping) i lomovima valova pri nailasku na male dubine. Refleksija i difrakcija ne mogu se tretirati ovim modelom u verziji iz 2007. godine.

Diskretizacija osnovnih jednadžbi modela je bazirana na metodi konačnih volumena s kojima se dobiva nestrukturirana mreža u horizontalnoj ravnini modelske prostorne domene. Vremenska integracija provodi se s frakcionalnim koracima, pri čemu je za propagaciju valnog djelovanja korištena multisekvencijalna Euler-ova eksplicitna metoda. Član-funkcija izvora u jednadžbi očuvanja valnog djelovanja tretiran je na temelju posljednje 3. generacije u formulaciji opisa tog člana, a numerička integracija za član izvora provodi se prema metodologiji prikazanoj u radovima Komen-a te Hercbach-a i Jannsen-a. Konvektivni fluksevi proračunavaju se „upwind“ numeričkom shemom prvog reda.

VJEŽBA 5

1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava numeričkog modela dinamike ekosustava prezentiranog sa dva člana. Prvi član predstavlja plijen-fitoplankton (prva procesna varijabla „A“) a drugi član predstavlja predator-zooplankton (druga procesna varijabla „Z“). Postavljene su dvije međusobno vezane (ovisne) obične diferencijalne jednačbe temeljem kojih se prati dinamika rasta i odumiranja kroz nekoliko karakterističnih vremenskih ciklusa. Za rješavanje sustava sačinjenog od dvije diferencijalne jednačbe korištena je u tehničkoj praksi vrlo često primjenjivana metoda Runge-Kutta 4. reda.

2. Procesne jednačbe

Početno stanje sustava je definirano s 10 jedinki fitoplanktona koji imaju konstantu produkcije (rasta) 2,5 te ratu razgradnje 1,5. Razgradnjom je obuhvaćeno prirodno odumiranje fitoplanktona i smanjenje broja jedinki uslijed aktivnosti predatora kojeg predstavlja zooplankton. Početni broj jedinki zooplanktona je usvojen s 1. Budući da zooplankton nije primarni producent (ne može stvoriti živu tvar iz anorganske tvari kroz proces fotosinteze) njegov rast ovisan je o raspoloživom plijenu odnosno koncentraciji fitoplanktona. Brzina rasta populacije zooplanktona definirana je koeficijentom konzumacije fitoplanktona 0,03. Brzina razgradnje zooplanktona definirana je koeficijentom -1, a kojim je obuhvaćen i proces prirodnog odumiranja zooplanktona i njegova podložnost da postane plijen viših predatora. Time je definiran sustav od dvije procesne varijable sa međudodnosima koji se u matematičkoj formulaciji mogu izraziti s dvije obične diferencijalne jednačbe:

$$\frac{dA}{dt} = 2,5 \cdot A - 1,5 \cdot Z \cdot A \quad (2.1)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -1 \cdot Z + 0,03 \cdot A \cdot Z \quad (2.2)$$

Početni uvjeti izraženi su jednakostima $A(0)=10$ i $Z(0)=1$.

3. Metoda Runge-Kutta 4. Reda

Diferencijalne jednačbe dijelimo na obične diferencijalne jednačbe (ODJ) i parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) ovisno o tome da li se radi o funkciji jedne ili više varijabli. U ovom slučaju se bavimo samo rješavanjem običnih diferencijalnih jednačbi.

Rješenje diferencijalne jednačbe je funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačbu uz određene početne i/ili rubne uvjete. Pri analitičkom rješavanju diferencijalnih jednačbi

obično se pronalaze općenita rješenja koja sadrže proizvoljne konstante koje se zatim izračunavaju na osnovu početnih uvjeta. Za rješenje diferencijalne jednačbe n -tog reda mora biti poznato n nezavisnih uvjeta. Analitičke metode su ograničene samo na linearne jednačbe prvog reda, te linearne jednačbe s konstantnim koeficijentima ako je red jednačbe veći od jedan.

Numeričke metode nemaju takvih ograničenja. Rješenja diferencijalnih jednačbi numeričkim metodama se dobivaju u obliku tablice vrijednosti funkcije za različite vrijednosti jedne ili više nezavisnih varijabli, ali ne kao funkcijska ovisnost. Ako se promjene početni uvjeti potrebno je nanovo računati vrijednosti u toj tablici.

Obična diferencijalna jednačba prvog reda većinom je zadana o obliku:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.1)$$

Diferencijalnu jednačbu definiranu s:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

na intervalu $[x_0, x_n]$ možemo rješavati tako da podijelimo interval $[x_0, x_n]$ na n jednakih podintervala, označivši:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Sada y_{i+1} , aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1} , računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x+h) \approx y(x) + h\Phi(x, y(x), h, f)$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} \approx y_i + h\Phi(x_i, y_i, h, f) \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

Funkciju Φ nazivamo funkcija prirasta, a različit izbor te funkcije definira različite metode. Uočimo da je funkcija f iz diferencijalne jednačbe parametar od Φ (tj. Φ zavisi o f).

Metode oblika (3.2) zovemo jednokoračne metode (jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj točki x_i , tj. u jednom koraku dobijemo y_{i+1} iz y_i). Da bismo

pojednostavili zapis, ubuduće ćemo f izostaviti kao argument funkcije Φ . O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode. Najpoznatije jednokoračne metode su Runge – Kutta metode. Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{j=1}^r \omega_j k_j(x, y, h) \quad (3.3)$$

a k_j su zadani s:

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^r a_{jl} k_l(x, y, h)\right), \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3.4)$$

Broj r zovemo redom Runge - Kutta (RK) metode i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku. Različit izbor koeficijenata ω_j , c_j i a_{jl} definira različite RK metode. Ovi koeficijenti se najčešće biraju tako da red metode bude što je moguće veći. Ako je $j > l$, tada metoda postaje eksplisitna, odnosno k_j možemo računati preko $k_{i \dots} yk_{j-1}$.

Primjer odabira koeficijenata prikazuje se na RK metodi drugog reda:

$$\Phi(x, y, h) = \omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h)$$

$$k_1(x, y, h) = f(x, y)$$

$$k_2(x, y, h) = f(x + ah, y + ahk_1)$$

Razvojem k_2 u Taylorov red te sređivanjem zapisa dobije se:

$$k_2(x, y, h) = f + h(f_x a + f_y a f) + \frac{h^2}{2}(f_{xx} a^2 + 2f_{xy} a^2 f + f_{yy} a^2 f^2) + R_3$$

gdje su: f_x i f_y prve parcijalne derivacije funkcije $f=f(x,y)$ po x , odnosno y , a f_{xx} , f_{xy} i f_{yy} odgovarajuće druge parcijalne derivacije. Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe $y(x)$ ima oblik:

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y(f_x + f_y f)] + R_4$$

Ovdje je iskorišteno da je $y(x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'(x) = f(x, y) = f$$

te su korištena pravila za deriviranje:

$$y''(x) = f'(x, y) = f' = f_x + f_y f$$

$$y'''(x) = f''(x, y) = f'' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)$$

Sada je pogreška odsijecanja diskretizacije jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) &= \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - (\omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h)) \\ &= (1 - \omega_1 - \omega_2) f + h(f_x + f_y f) \left(\frac{1}{2} - \omega_2 a \right) + \\ &+ h^2 \left[(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \times \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2} \right) + \frac{1}{6} f_y (f_x + f_y f) \right] + R_3 \end{aligned}$$

Da bi metoda bila 1. reda koeficijente treba odabrati tako da se poništi prvi član u gornjem razvoju, odnosno da vrijedi:

$$1 - \omega_1 - \omega_2 = 0$$

Ukoliko je zadovoljeno i

$$\frac{1}{2} - \omega_2 a = 0$$

metoda će biti 2. reda. Uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1 - t, \quad a = \frac{1}{2t}$$

Može se uočiti da se t ne može odabrati tako da se poništi i član uz h^2 tako da metoda bude 3. reda. Ukoliko je $\omega_2 = 0$, radi se o metodi 1. reda, i to upravo o Eulerovoj metodi. Za $t = 1/2$ dobiva se poboljšana Eulerova, odnosno Heunova metoda:

$$\Phi = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f(x + h, y + hk_1)$$

Najraširenije su metode četvrtog reda. Odgovarajuće jednadžbe koje moraju zadovoljavati koeficijenti RK4 metoda su:

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 1 \\
\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 &= \frac{1}{2} \\
\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 &= \frac{1}{3} \\
\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) &= \frac{1}{6} \\
\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 &= \frac{1}{4} \\
\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 (c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}) &= \frac{1}{12} \\
\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) c_4 &= \frac{1}{8} \\
\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} &= \frac{1}{24}
\end{aligned} \tag{3.5-3.12}$$

gdje je:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = a_{21} \quad c_3 = a_{31} + a_{32} \quad c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43}$$

Uvjet 3.5 treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 1, uvjet 3.6 za red 2, uvjeti 3.7 i 3.8 za red 3, dok za red 4 trebaju biti ispunjeni uvjeti 3.9-3.12. Ukupno ima 10 koeficijenata i 8 jednadžbi ukoliko je metoda reda 4. Za metodu reda 3 uvrštavanjem članova

$$c_4 = a_{41} = a_{42} = a_{43} = \omega_4 = 0$$

dobiva se 9 koeficijenata i 7 jednadžbi. Metoda reda 4 može postići najviše red točnosti 4, tj. ne mogu se dva stupnja slobode iz sustava jednadžbi iskoristiti da se red točnosti metode podigne na 5.

Općenito, za metode reda jedan, dva, tri i četiri, najveći mogući red točnosti odgovara redu metode. Za metode reda 5, 6 i 7 red točnosti metode je 4, 5 i 6, dok je za metode reda 8 i više najveći mogući red točnosti za barem dva manji od reda metode. To je razlog što su metode reda 4 najpopularnije. Red točnosti je 4, a da bi se povećao na 5, mora se povećati red metode za barem 2 što povećava složenost metode.

Najpopularnija RK– 4 metoda je “klasična” Runge-Kutta metoda:

$$\Phi = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x, y) \quad ; \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \quad ; \quad k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

Pomoću jednadžbi 3.3 i 3.4 definiraju se koeficijenti: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, c_1, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{43}$.

U "klasičnoj" Runge-Kutta metodi navedeni koeficijenti imaju vrijednosti:

$$\omega_1 = \frac{1}{6}, \quad \omega_2 = \frac{2}{6}, \quad \omega_3 = \frac{2}{6}, \quad \omega_4 = \frac{1}{6}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = \frac{1}{2}, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1$$

gdje je prethodno definirano:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = a_{21} = \frac{1}{2} \quad c_3 = a_{31} + a_{32} = \frac{1}{2} \quad c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} = 1$$

Uvrštavanjem vrijednosti koeficijenata u jednadžbe 3.5-3.12 zadovoljeni su navedeni uvjeti.

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 (c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 \right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

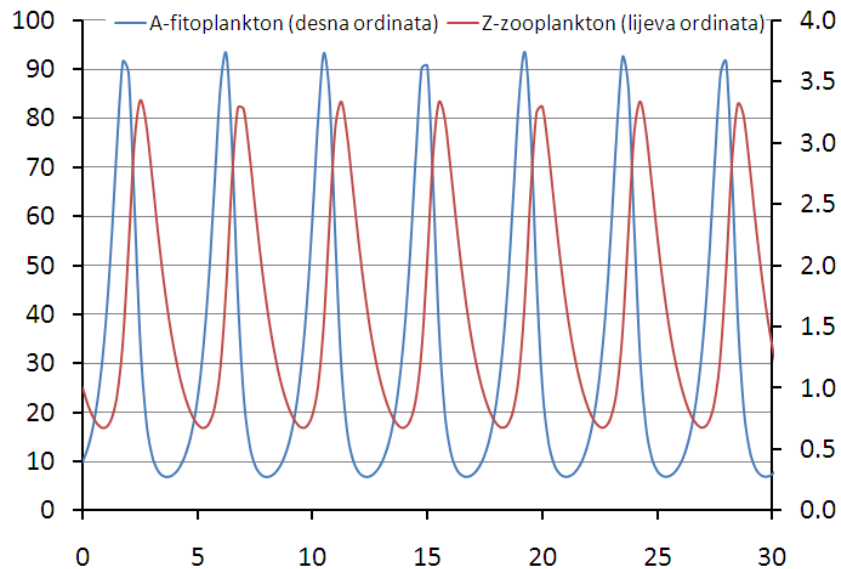
$$\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) c_4 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \right) \times 1 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{24}$$

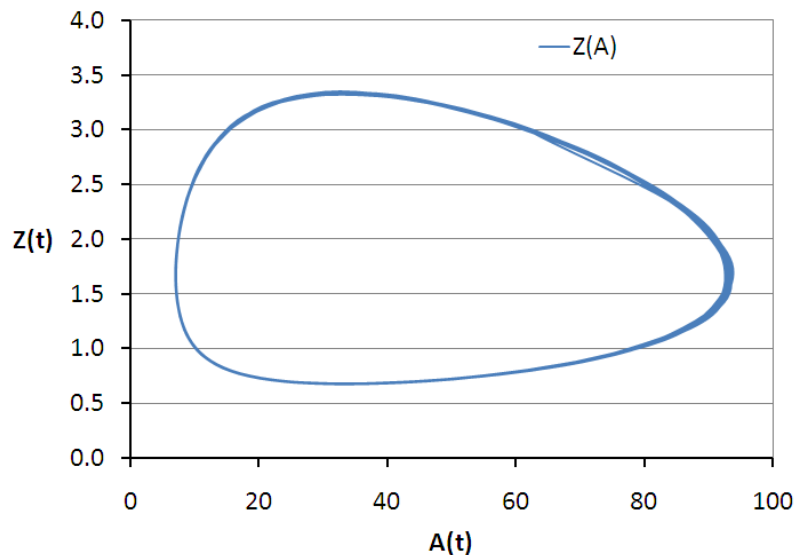
(3.5-3.12)

4. Rezultati provedenih analiza

Rezultati rješavanja sustava jednačbi 2.1 i 2.2 sa postavljenim početnim uvjetima prikazani su na slikama 4.1. (vremenske serije za obje procesne varijable „A“ i „Z“) i 4.2 (dijagram međuovisnosti).



Slika 4.1 Dinamike populacije fitoplanktona i zooplanktona temeljem rješavanja sustava diferencijalnih jednačbi s metodom Runge-Kutta 4. Reda (prikazano je 7 ciklusa)



Slika 4.1 Dijagram međuovisnosti procesnih varijabli A (fitoplankton) i Z (zooplankton)

PRIMJER 1

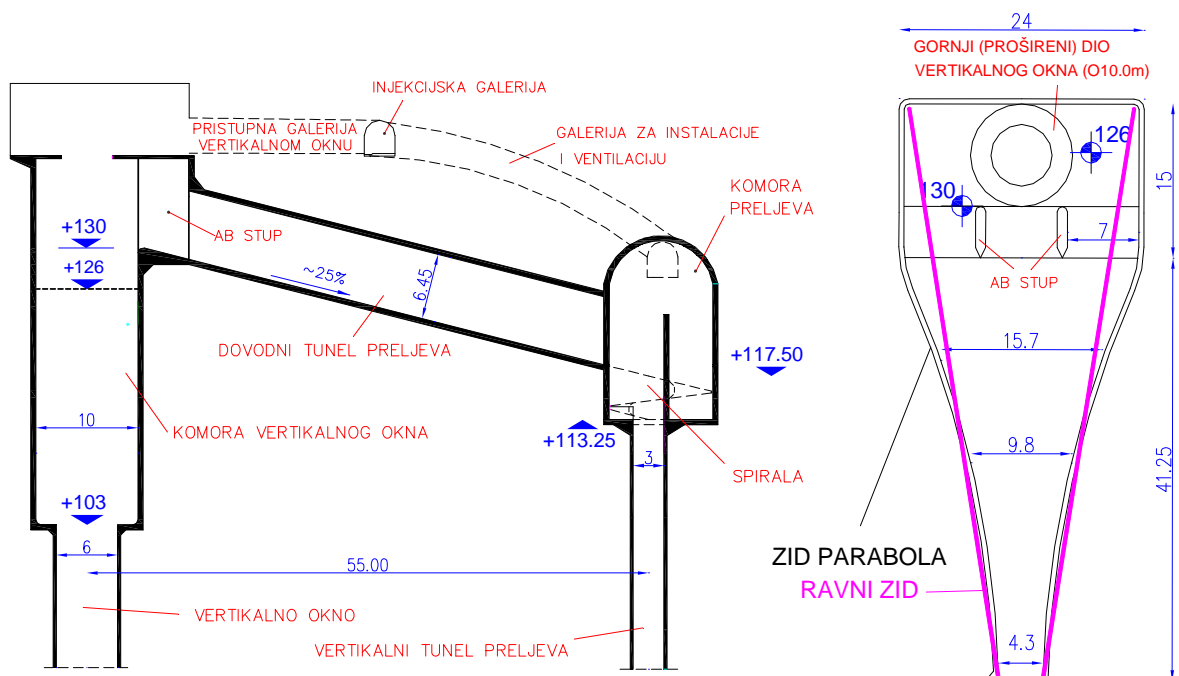
FIZIKALNO I NUMERIČKO MODELIRANJE BRZOTOKA NA HE-OMBLA

SAŽETAK:

Daje se pregled usporedbi numeričkim modelom izračunatih i na fizikalnom modelu izmjerenih dubina i brzina na dionici preljevnog brzotoka. Numerički model baziran je na metodologiji konačnih volumena a fizikalni model izgrađen je po načelu Froude-ove sličnosti u dvije verzije mjerila duljina (18 i 30). Analizirane su dvije tlocrtne konfiguracije preljevnog brzotoka sa konstantnim nagibom dna od 25%. U prvoj konfiguraciji lateralni vertikalni zidovi su parabolični a u drugoj kontura zidova je u pravcu. Analizirani su preljevni protoci $Q = 60, 90$ i $120 \text{ m}^3/\text{s}$ koji će se pojavljivati u periodu eksploatacije hidrauličke građevine za koju je i rađen numerički i fizikalni model. Usporedba rezultata pokazala je dobro slaganje između izmjerenih i numeričkim modelom proračunatih brzina i razina uzduž zidova i osi brzotoka sa naglašenijim odstupanjem na „nizvodnoj“ tekućoj granici na mjestu izlaza iz preljevnog brzotoka.

1. Uvod

Za potvrdu projektnog rješenja složenih hidrotehničkih građevina uobičajeno se koriste neke od metoda modeliranja. Iz tih potreba izgrađen je integralni fizikalni model HE Ombla sa svim projektom predviđenim hidrauličkim elementima. Zbog racionalizacije u provedbi fizikalnog modeliranja na tom modelu prethodno su provedena i istraživanja sa numeričkim modelom i na fizikalnom modelu većeg mjerila a sa kojim su obuhvaćene samo karakteristične hidrauličke komponente (slika 1).



Slika 1 Vertikalni presjek projektnog rješenja evakuacije velikih voda HE Ombla i dvije konfiguracije bočnih zidova brzotoka, sa ravnim zidovima i sa parabolničnim zidovima

Projektno rješenje evakuacije velikih voda HE Ombla predviđa preljev na koti 130 m.n.m. te raspon protoka do $Q_{max}=120\text{m}^3/\text{s}$. Preljevna voda dolazi iz uspravnog okna promjera 6m i pri vrhu se širi na promjer 10m, te se preko preljevnog praga širine 21 m preljeva u brzotok. Brzotok se u prijelaznoj jedinici sužava na širinu 4,3 m nakon čega se uvodi u okno spiralnog preljeva s ciljem postizanja slobodnog zavojnog strujanja u preljevno okno s postojanjem slobodne zračne jezgre (slika 1). Kako bi se smanjio broj varijantnih rješenja u provedbi pokusa na fizikalnom modelu velikog mjerila (1:18) na numeričkom modelu i fizikalnom modelu mjerila (1:30) prvobitno su analizirane dvije konfiguracije bočnih zidova brzotoka, sa ravnim zidovima i sa paraboličnim zidovima (slika 1). U nastavku ovog rada dan je prikaz usporedbe na fizikalnom modelu izmjerenih i numeričkim modelom proračunatih brzina i razina na području brzotoka.

2. Numerički model

Numerički model rješava 2D Navie-Stokesove jednadžbe sa Reynolds-ovim osrednjavanjem za nestišljivu tekućinu uz pretpostavku hidrostatskog tlaka. Za prostornu diskretizaciju koristi se metoda konačnih volumena sa kontinuiranim i nepreklopljenim ćelijama (trokutastim elementima). Time je na području prostorne domena podjeljena dobivena nestrukturirana mreža. Integralna formulacija sustava jednadžbi kontinuiteta i očuvanja količine gibanja za 2D plitki fluid u kartezijevom koordinatnom sustavu glasi (Sleigh i Gaskel, 1998; Zhao i sur., 1998):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh/2 \\ huv \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} hv \\ hvu \\ hu^2 + gh/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} hS \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2a,b,c,d)$$

gdje je: \mathbf{U} vektor konzervativne varijable; \mathbf{F} vektorska funkcija fluksa; \mathbf{S} vektor izvora i ponora.

Unos vode u komoru vertikalnog okna (slike 1,4) u numeričkom modelu obuhvaćen je samo kroz član izvora u jednadžbi kontinuiteta a ne i u jednadžbi očuvanja količine gibanja. Oznake S_{0x} i S_{0y} odnose se na nagibe dna u smjerovima x i y a S_{0x} i S_{0y} predstavljaju nagibe energetske linije koje su definirane sa Manning-ovom jednadžbom:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3)$$

gdje je: n manning-ov koeficijent (u numeričkom modelu usvojen sa $0,01 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$).

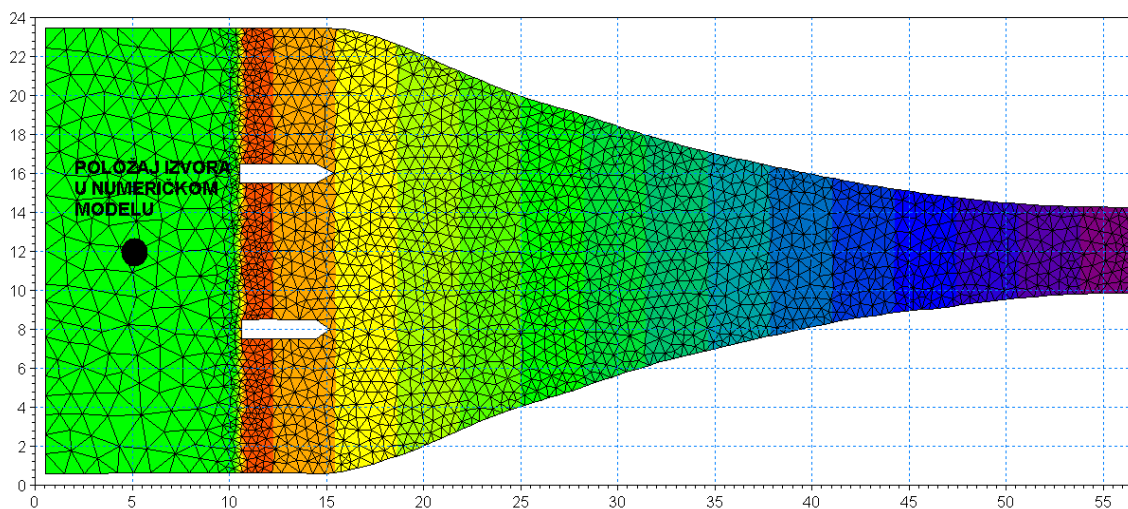
Integracija jednadžbe 1 preko i -te ćelije uz korištenje Green-Gauss teorema daje:

$$\int_{A_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{A_i} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega = - \int_{\Gamma_i} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (4)$$

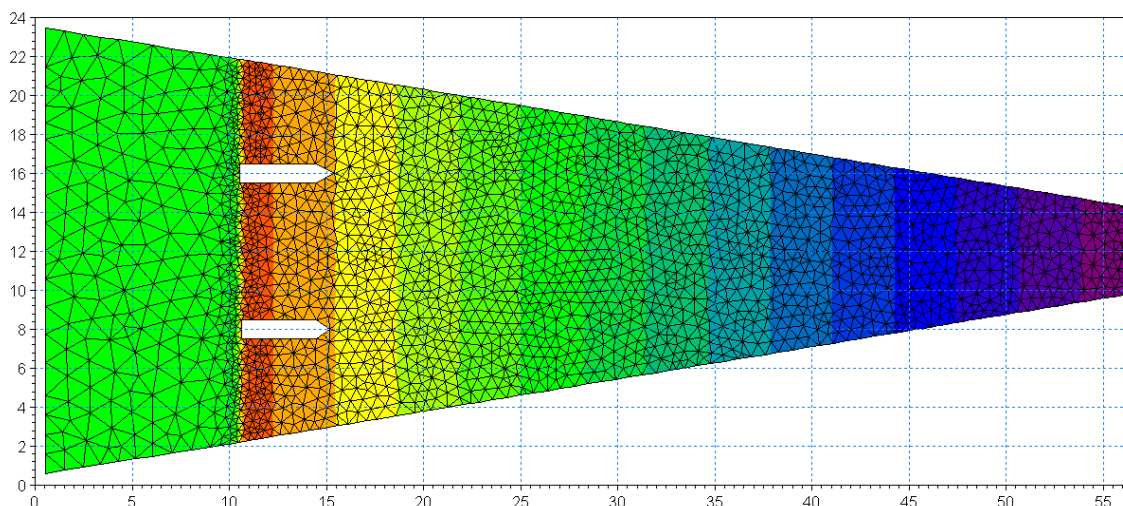
gdje je: A_i površina i -te ćelije, Ω integracijska varijabla definirana na A_i , Γ_i omeđeni opseg od ćelije A_i , ds integracijska varijabla uzduž omeđenog opsega, a \mathbf{n} vektor jedinične vanjske normale. Horizontalni konvektivni članovi su proračunati korištenjem Riemann-ovog solvera sa Roe-ovom aproksimacijom (Roe, 1981; Alcrudo i Garcia-Navarro, 1993; Toro, 1997; Causon, 1999)

Važan element aplikacije numeričkog modela je i rutina koja omogućava inicijalno „suhi“ model te naglo „plavljenje“ numeričkih ćelija a čime se one aktiviraju i u jednažbama kontinuiteta i u jednažbama očuvanja količine gibanja. Inicijacija pretvaranja elementa iz „suhog“ u „mokri“ dešava se pri postizanju dubine vode od 0,02 m.

Sa numeričkim modelom provedene su inicijalne analize strujanja na dionici brzotoka bez daljnjeg prelaska u spiralu. Diskretizacija prostorne domene numeričkog modela sa konačnim volumenima prikazana je na slikama 2 (parabolični zid) i 3 (ravni zid).



Slika 2 Diskretizacija prostorne domene numeričkog modela sa konačnim volumenima (parabolični zid brzotoka)



Slika 3 Diskretizacija prostorne domene numeričkog modela sa konačnim volumenima (ravni zid brzotoka)

Mreža sadrži 8021 (parabolični zidovi) i 7938 (ravni zidovi) elemenata i 4248 (parabolični zidovi) i 4190 (ravni zidovi) čvorova. U provedbi proračuna korišten je vremenski inkrement od 0,005s. Na izlazu iz brzotoka korištena je slobodna-absorpcijska tekuća granica.

3. Fizikalni model

Izgrađena su dva fizikalna modela prema Froude-ovom kriteriju sličnosti sa dva mjerila duljina 18 (IGH-Zagreb) i 30 (Građevinski fakultet – Zagreb). Oba fizikalna modela opremljena su sa sustavima za mjerenje protoka, brzina i razina kao i snimanje svih procesa digitalnom TV kamerom. Protok na ulazu u modelski ulaz vertikalnog okna mjenen je sa elektromagnetskim mjerajem protoka Endress-Hauser, tip Promag W te sa Thompsonovim preljevom na modelskom izlazu iz vertikalnog tunela preljeva. Mjerenja brzine izvršena su sa SEBA aluminijskim hidrometrijskim krilom tip Mini Current meter M1 sa mjerajem broja okretaja propelera Signal Counter Z6. Za mjerenje razina odnosno dubina korištene su mjerne igle, ultrazvučni mjeraji razine Endress-Hauser i piezoelektrički mjeraji razine Wika. Za akviziciju i analogno-digitalnu konverziju izmjerenih signala korišten je sustav Adam 5000 E (Advantech).

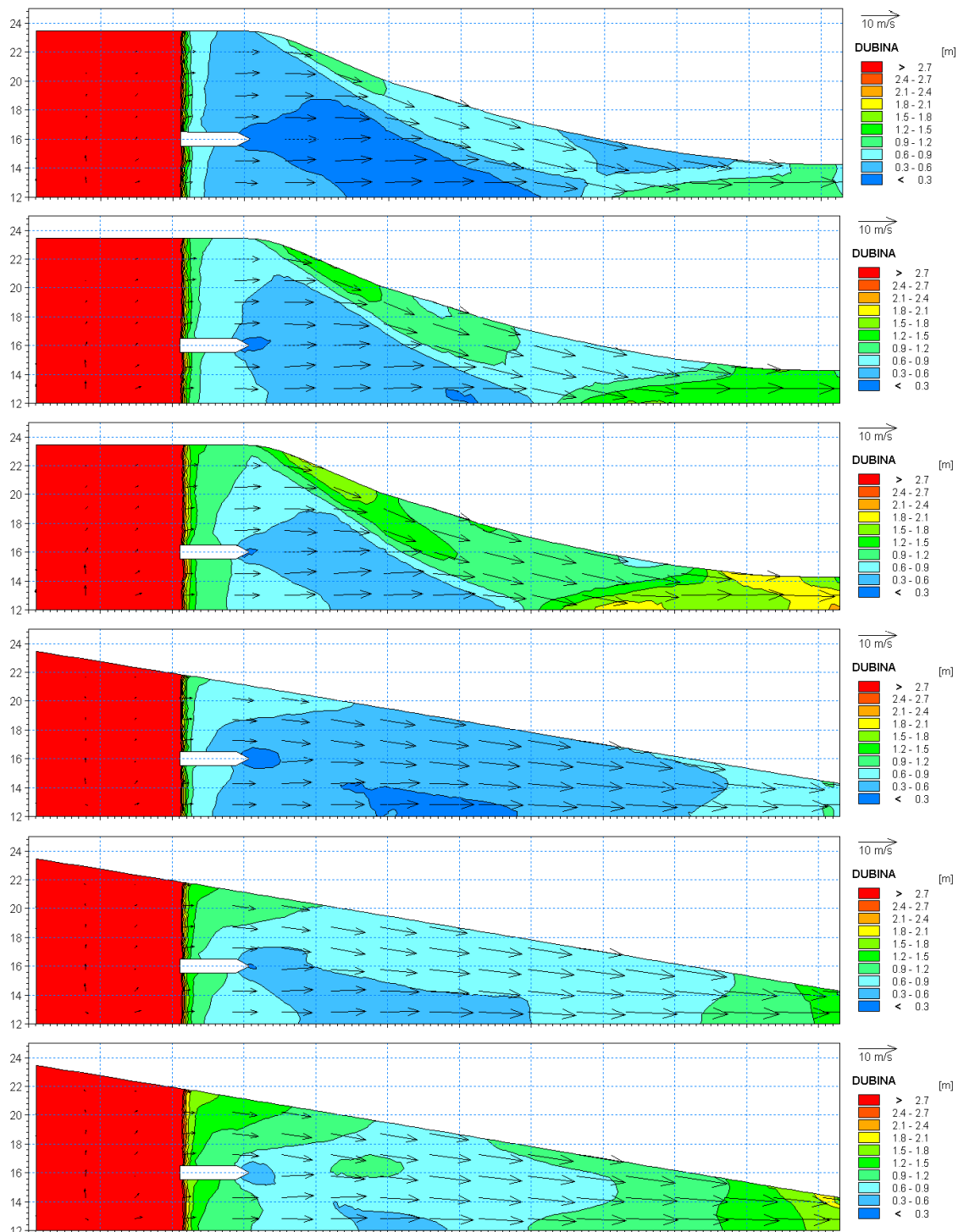
Na slici 4a prikazan je dio fizikalnog modela cijelokupnog hidrauličkog sustava HE Ombla izvedenog sa mjerilom duljina 18 a izgrađenog u IGH-Zagreb. Prikaz sa slike odnosi se samo na evakucijski organ velikih voda (vidi sliku 1). Fizikalni model evakucijskog organa velikih voda izgrađen je i u Hidrotehničkom laboratoriju Građevinskog fakulteta u Zagrebu ali sa mjerilom duljina 30 (slika 4b). Na slici 4b prikazan je stacionarni preljevni protok $Q = 60\text{m}^3/\text{s}$ kroz dionicu preljevnog brzotoka.



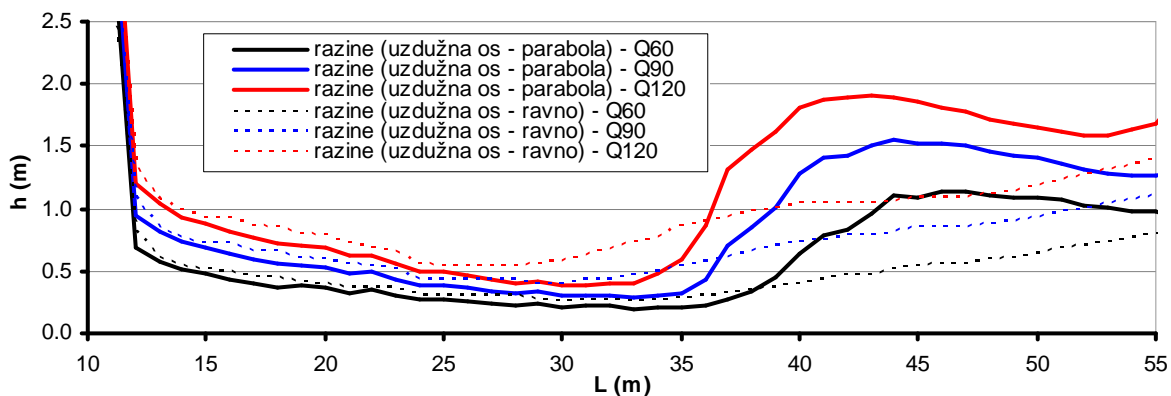
Slika 4a,b Dio fizikalnog modela cijelokupnog hidrauličkog sustava HE Ombla (lijevo – fizikalni model sa mjerilom duljina 18, IGH-Zagreb ; desno - pokus sa stacionarnim preljevnim protokom $Q = 60\text{m}^3/\text{s}$ kroz dionicu preljevnog brzotoka na fizikalnom modelu sa mjerilom duljina 30, GFZ-Zagreb)

3. Rezultati modeliranja

Prostorni raspored dubina na dionici brzotoka dobivena sa numeričkim modelom prikazana su na slici 5. Na slikama su ucrtani i vektori brzina. Usporedba dubina uzduž simetrane brzotoka za stacionarne protoke $Q = 60, 90, 120 \text{ m}^3/\text{s}$ pri paraboličnim i ravnim zidovima dana je na slici 6.

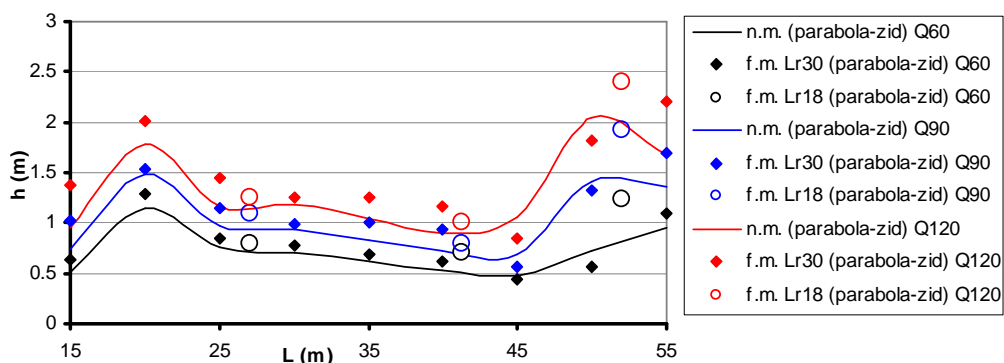


Slika 5 Polja dubina na dionici brzotoka s paraboličnim bočnim zidovima (gornje tri slike) i ravnim bočnim zidovima (doljnje tri slike) dobivena sa numeričkim modelom (gore $Q = 60\text{m}^3/\text{s}$; sredina $Q = 90\text{m}^3/\text{s}$; dolje $Q = 120\text{m}^3/\text{s}$)

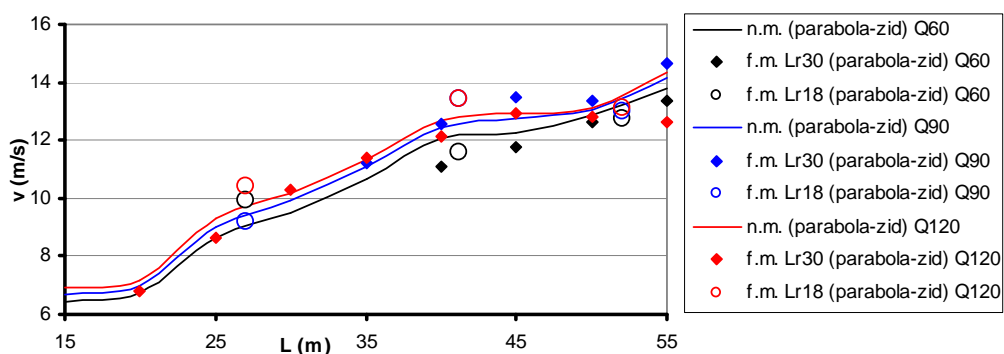


Slika 6 Usporedba dubina uzduž simetrale brzotoka za stacionarne protoke $Q = 60, 90, 120 \text{ m}^3/\text{s}$ pri paraboličnim zidovima i ravnim zidovima

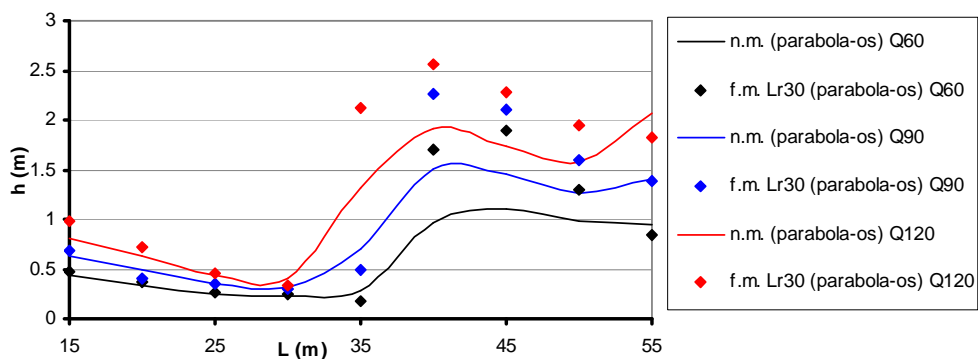
Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina i brzina uzduž paraboličnih zidova brzotoka dana je na slikama 7 i 8. Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina i brzina u osi brzotoka dana je na slikama 9 i 10. Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina i brzina uzduž zidova i u osi brzotoka dana je na slikama 11 i 12.



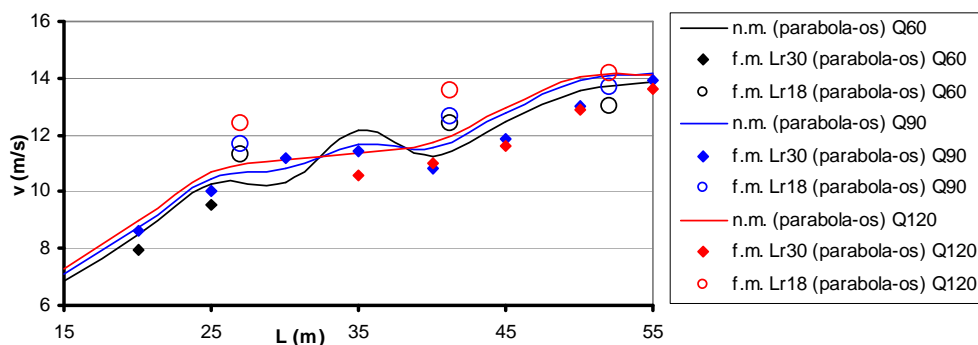
Slika 7 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina uzduž paraboličnih zidova brzotoka



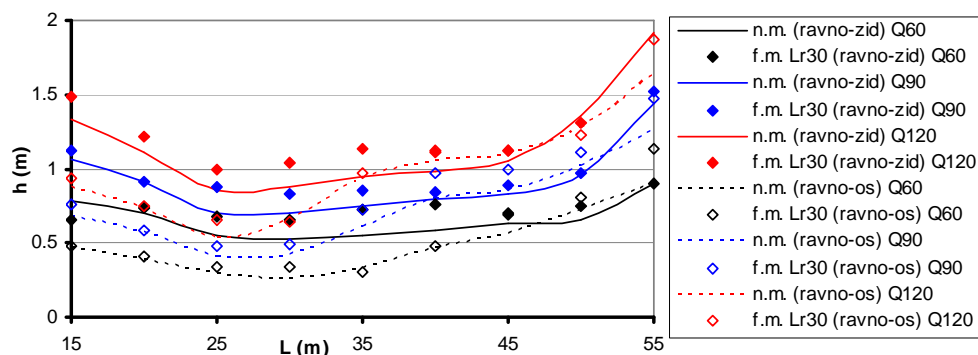
Slika 8 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih brzina uzduž paraboličnih zidova brzotoka



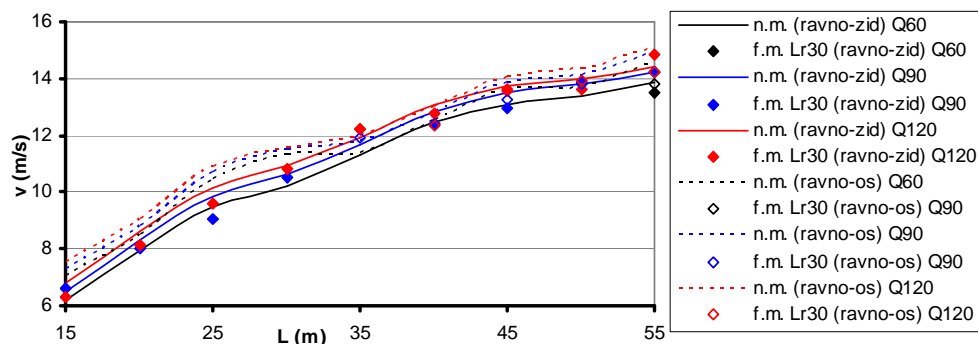
Slika 9 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina u osi brzotoka sa paraboličnim zidovima



Slika 10 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih brzina u osi brzotoka sa paraboličnim zidovima



Slika 11 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih dubina uzduž zidova i u osi brzotoka sa ravnim zidovima



Slika 12 Usporedba na fizikalnom modelu izmjerenih i sa numeričkim modelom izračunatih brzina uzduž zidova i u osi brzotoka sa ravnim zidovima

Fizikalni modeli oba mjerila duljina generalno daju veće vrijednosti dubina od numeričkog modela na području krijeste stojnog vala. Na dijagramima priložene vrijednosti dubina dobivene su sa mjernim iglama sa kojima su se registrirale maksimalne razine vodnog lica a koje se nalaze u području naglih tranzicija u kojim se pojavljuje i mješanje vode i zraka a što nije obuhvaćeno numeričkim modelom. S druge strane brzine izmjerene na fizikalnom modelu (mjerilo duljina 30) su generalno manje od vrijednosti dobivenih sa numeričkim modelom kao posljedica relativno malih dubina i otežanog mjerenja brzina na fizikalnom modelu a što je i najizraženije pri najmanjim analiziranim protocima od $Q = 60\text{m}^3/\text{s}$.

Fizikalni model mjerila duljina 18 daje veće brzine od fizikalnog modela osim na dijelu u blizini kraja analizirane dionice brzotoka a što je posljedica trodimenzionalnog efekta strujanja koji također nije obuhvaćen s 2D numeričkim modelom. Nadalje, na izlaznoj tekućoj granici numeričkog modela dubine su malo veće u osi nego na zidovima brzotoka dok je na fizikalnom modelu obrnut slučaj. Ova razlika je posljedica korištenog absorpcijskog rubnog uvjeta u numeričkom modelu.

Pozicije čela stojnih valova uz zid i u osi dobro se poklapaju na svim analiziranim modelima.

4. Zaključak

Provedena je analiza brzina i razina u području preljevnog brzotoka HE Ombla na fizikalnom modelu mjerila duljina 18 i 30 i sa numeričkim modelom baziranim na metodi konačnih volumena. Raspon analiziranih protoka je $Q = 60, 90$ i $120\text{ m}^3/\text{s}$ a varirana je i forma vertikalnih bočnih zidova preljevnog brzotoka (ravni zid, parabolični zid). Dno brzotoka ima konstantan nagib od 25%.

Usporedba rezultata pokazala je dobro slaganje između izmjerenih i numeričkim modelom proračunatih brzina i razina uzduž zidova i osi brzotoka sa naglašenijim odstupanjem na „nizvodnoj“ tekućoj granici na mjestu izlaza iz preljevnog brzotoka. Fizikalni modeli oba mjerila duljina daju malo veće vrijednosti dubina od numeričkog modela na području krijeste stojnog vala obzirom da se na fizikalnim modelima registrirala maksimalna razina vodnog lica ispod kojeg se ustvari pojavljuje mješavina vode i zraka a ne kontinuirano homogena tekućina. Ovaj fenomen nije obuhvaćen u sklopu korištenog 2D numeričkog modela.

Relativna razlika između izmjerenih (fizikalni model) i proračunatih (numerički model) vrijednosti dubina je 5,7% pri izvedbi paraboličnog zida te 3,4% pri izvedbi ravnog zida. Za izmjerene i proračunate brzine relativna razlika iznosi 2,7% pri izvedbi paraboličnog zida te 2,3% pri izvedbi ravnog zida. Ukoliko se predpostavki apsolutna točnost vrijednosti izmjerenih na fizikalnom modelu spomenute relativne razlike mogu se smatrati i relativnim greškama vezanim uz vrijednosti numeričkog modela.

Temeljem provedenih analiza i dobivenih rezultata modeliranja dobivena je potvrda o zadovoljenju propusnosti preljevnog brzotoka i pri protocima 100 godišnjeg povratnog

perioda od $Q = 120 \text{ m}^3/\text{s}$ a pri kojem nije registrirana pojava prigušenja niti na jednom od korištenih modela.

Literatura:

Abbott, M., B. (1979): *Computational Hydraulics*, Pitman, London.

Sleigh, D., H., Gaskel, P., H. (1998): *An unstructured finite volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries*, Computer and Fluids, Vol 27, No. 4.

Zhao, D., H., Shen, H.W., Tabios, G.,Q., Tan, W., Y. (1994): *Finite-volume two dimensional unsteady flow model for river basins*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, No. 7, 120.

Roe, .P., L. (1981): *Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes*, Journal of Computational Physics, No. 43.

Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P. (1993): *A high resolution Godunov type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equation*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 16(6).

Toro, E., F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, Germany, 1997.

Causon, D. (1999): *Advances in calculation methods for supercritical flow in spillway channels*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol 125, No. 10.

PRIMJER 2

Numerička analiza kvalitete mora na području sjevernog Jadrana

SAŽETAK:

Prikazani su rezultati numeričke analize kvalitete mora na području sjevernog Jadrana tijekom razdoblja 1997.-2001. Rubni uvjeti na otvorenoj granici modela i slatkovodni utoci ciklički su ponavljani za polja temperature i saliniteta mora u svim analiziranim godinama. Na kontaktu mora i atmosfere za polja temperature zraka, relativne vlage zraka, naoblake i kratkovalnog zračenja također su korištene ciklički ponavljane vrijednosti. Jedino varijabilno polje u provedenim simulacijama je polje brzine vjetra koje je u analizirano razdoblju definirano temeljem rezultata numeričkog atmosferskog modela Aladin-HR.

Provedenim istraživanjem dobiveni su rezultati koji ukazuju na važnost vjetrovne dinamike kao stohastičkog parametra na kojeg čovjek nema direktan utjecaj i na intenzitet dinamike klorofila-a u području sjevernog Jadrana. Dobiveni rezultati pokazali su da se najveće koncentracije klorofila-a pojavljuju u lipnju i listopadu, a u lipnju 2000. i 2001. godine registrirane su povećane vrijednosti u odnosu na preostale godine iz analiziranog perioda. Razlog ove pojave je vjerojatno duže zadržavanje voda bogatih nutrijentima iz slatkovodnih utoka, primarno iz rijeke Po, u površinskom sloju mora sjeverne Istre.

Rezultati numeričkih analiza u suglasju su s rezultatima istraživanja u sklopu projekata provedenih sa ciljem definiranja uzroka učestalog formiranja sluzavih nakupina u sjevernom Jadranu tijekom razdoblja 1999.-2001. (Projekt MAT - Monitoring and study of processes of mucilage formation in the Adriatic and Tyrrhenian Seas, 1999.-2002.)

1. Uvod

Na području sjevernog Jadrana formiranje sluzavih nakupina, koje uzrokuje cvjetanje mora, pojavljuje se sa povratnim periodom u rasponu 10-40 godina (Fonda Umani i sur., 1989), a u posljednje vrijeme njena učestalost je povećana. Tako je tijekom razdoblja 1997.-2001. pojava zapažena u 1997., 2000. i 2001. godini. Fenomen generiranja sluzavih nakupina ostvaruje se uslijed sinergijskog učinka nekoliko različitih faktora, primjerice značajnije promjene nutrijentnih koncentracija i njihovih omjera (Degobbis i sur., 1999; Fajon i sur., 1999), promjene organske frakcije ugljika pri prolazu kroz planktonski prehrambeni lanac (Azam i sur., 1999) te prevalentnosti specifičnih klimatoloških i oceanografskim uvjeta (Degobbis i sur., 1995). More sjevernog Jadrana je produktivnije od primjerice jugoistočnog dijela jadranskog akvatorija, a u 1997., 2000. i 2001. godini u području priobalnog mora sjevernog Jadrana registrirano je i formiranje sluzavih nakupina tijekom proljetnih i ljetnih mjeseci. U obje godine su sluzavi agregati formirani tijekom svibnja i lipnja te su se zadržali sve do prvog dijela srpnja, kada je nakon nekoliko epizoda intenzivnijeg djelovanja vjetra došlo da raspršenja agregata uzduž morskog stupca (Precali i sur., 2005). Tijekom ostalih

godina iz razdoblja 1997.-2001. ta pojava nije primijećena. Vertikalni i horizontalni termohalini gradijenti nastali uslijed zagrijavanja površinskog sloja mora u svibnju i lipnju te intruzije mora veće slanosti u intermedijalnom sloju, zajedno sa zadržavanjem voda iz rijeke Po, pogoduju razvoju sluzavih nakupina u akvatoriju sjevernog Jadrana (Russo i sur., 2005). S druge strane, zapadna jadranska struja (WAC) iznosi more bogato nutrijentima iz područja sjevernog Jadrana (Grilli i sur., 2005) pa se u ovisnosti o razvijenosti tog strujanja u pojedinim godinama mogu očekivati i različiti periodi zadržavanja i/ili različite koncentracije nutrijenata unesenih u sjeverni Jadran putem slatkovodnih utoka. Zapadna jadranska struja je bila dobro razvijena u svim godinama sa odsustvom pojave cvata mora (Grilli i sur., 2005). Dugotrajnije odsustvo jačih vjetrova također doprinosi smanjenoj dinamici mora i stabilnosti stratifikacije, a nagli prekid morske cvatnje u 2000. godini dogodio se upravo nakon nekoliko kratkih epizoda jakih vjetrova na početku srpnja (Russo i sur., 2005). Osim toga, porast temperature mora u površinskom sloju i pojačani intenzitet slatkovodnih utoka u području sjevernog Jadrana također imaju ulogu na razvoj sluzavih nakupina. Primjerice, povećano otjecanje rijeke Po tijekom svibnja koincidira sa pojavom cvata mora (Degobbis i sur., 2005).

Numeričke analize u ovom istraživanju provedene su sa ciljem da se prepozna zasebni doprinos polja vjetra u dinamici mora, a time i njegov utjecaj na razvoj koncentracije klorofila-a, kao bitnog parametra kvalitete mora, u površinskom sloju mora sjevernog Jadrana tijekom razdoblja 1997.-2001. Zbog toga se u modelskim simulacijama svaka kalendarska godina (1997.-2001.) promatra kao zasebna cjelina. Stoga početni i rubni uvjeta imaju slijedeća obilježja:

- Analiziran je kalendarski period 1.1.-31.12. sa istom prostornom raspodjelom temperature i saliniteta mora u početnim uvjetima bez obzira na analiziranu godinu
- Prostorna i vremenska raspodjela temperature i saliniteta mora na otvorenoj granici modela je definirana za iste termine (1.1., 1.4., 1.7. i 1.10.) bez obzira na analiziranu godinu
- Korištena je ista vremenska serija za temperaturu i vlagu zraka te naoblaku pri parametrizaciji izmjene topline sa atmosferom bez obzira na analiziranu godinu. Isto vrijedi i za protoke i temperature slatkovodnih utoka
- Model strujanja se na kontaktu mora i atmosfere forsira sa poljem vjetra koje ima varijabilnu dinamiku tijekom svake analizirane godine iz razdoblja 1997.-2001.

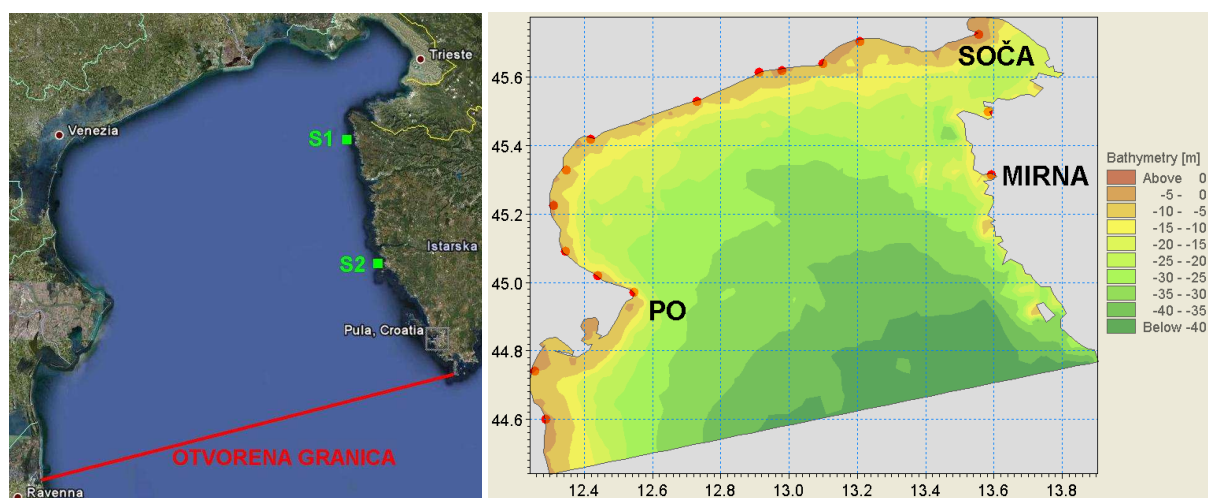
2. Numerički model

Numerička analiza strujanja mora i dinamike biološko-kemijskih parametara provedena je s trodimenzionalnim numeričkim modelom Mike 3fm (www.dhigroup.com). Procesne jednačbe i numerička formulacija hidrodinamičkog modula u modelu Mike 3fm detaljnije je objašnjena u Lončar i sur. (2011).

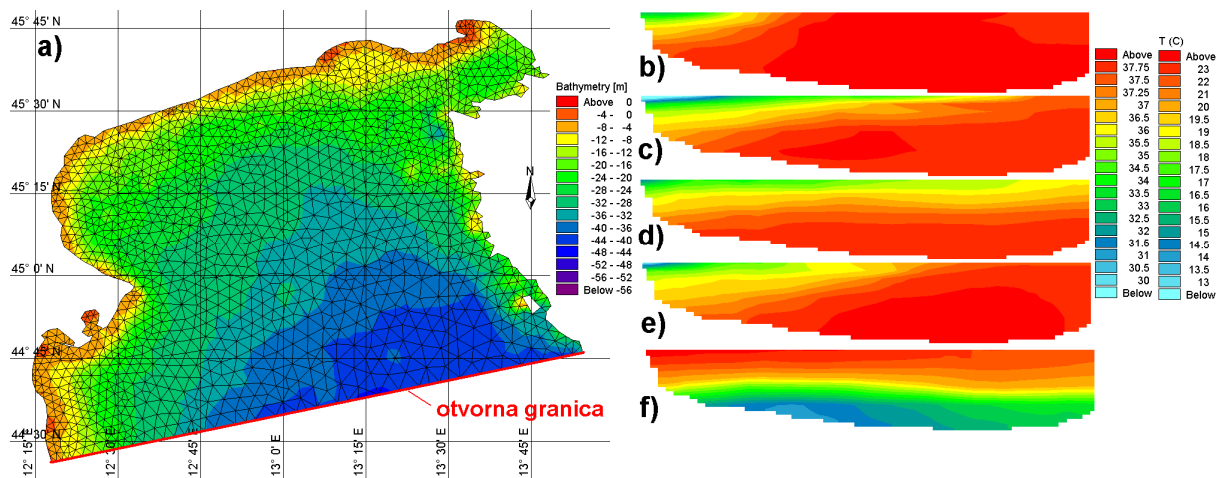
Modelska domena pokriva područje prikazano na slici 1. Prostorna domena numeričkog modela Mike 3fm (metoda konačnih volumena; Sleigh i Gaskel, 1998) diskretizirana je sa nestrukturiranom proračunskom mrežom koja u horizontalnom smjeru ima varijabilni prostorni korak Δl od 700m u do 3200m (slika 2), a u vertikalnom smjeru sadrži 20 sigma slojeva (Song i Haidvogel, 1994).

Modelske simulacije su inicirane 1. siječnja u svim analiziranim godinama tijekom razdoblja 1992.-2001. U svim godinama korištena su istovjetna polja temperature i saliniteta mora na standardnim oceanografskim dubinama (slika 2) iz oceanografske baze podataka „Dartmouth Adriatic Data Base“ – DADB (Galos, 2000). Sezonska polja temperature i saliniteta mora referencirana su na razdoblje zime (siječanj-ožujak), proljeća (travanj-lipanj), ljeta (srpanj-rujan) i jeseni (listopad-prosinac) (Cushman-Roisin i sur., 2007).

Na otvorenoj granici model koristi satnu dinamiku morskih razi (Janeković i sur., 2003; Janeković i Kuzmić, 2005; Janeković i Sikirić-Dutour, 2007), a polja temperature i saliniteta mora u vertikalnom profilu referencirana su na Galos (2000) s definiranim vrijednostima u terminima 1. siječanj, 1. april, 1. srpanj i 1. ožujak (vidi sliku 2). Istovjetan prostorni raspored temperature i saliniteta mora ciklički je ponavljan za sve godine simulacije. Slatkovodni utoci (slika 1) parametrizirani su s mjesečno osrednjenim klimatološkim vrijednostima protoka i temperatura prema Raichich (1996), a salinitet je definiran s vrijednosti 0 PSU. Polja brzine vjeta, kao rubni uvjet na kontaktu mora i atmosfere, dobivena su iz atmosferskog modela Aladin-HR (Members of the ALADIN international team, 1997; Courtier i sur, 1991; Cordoneanu i Geleyn, 1998; Brzović, 1999; Brzović i Strelec-Mahović, 1999; Ivatek-Šahdan i Tudor, 2004). Za analizirano razdoblje korišteni su izlazni podaci sa prostornim korakom od 4 km i vremenskim korakom od 3 sata.



Slika 1 Područje obuhvaćeno prostornom domenom numeričkog modela Mike 3fm s ucrtanim pozicijama ADCP i CTD postaja (zeleni kvadratići) i pozicije slatkovodnih utoka na modeliranom području

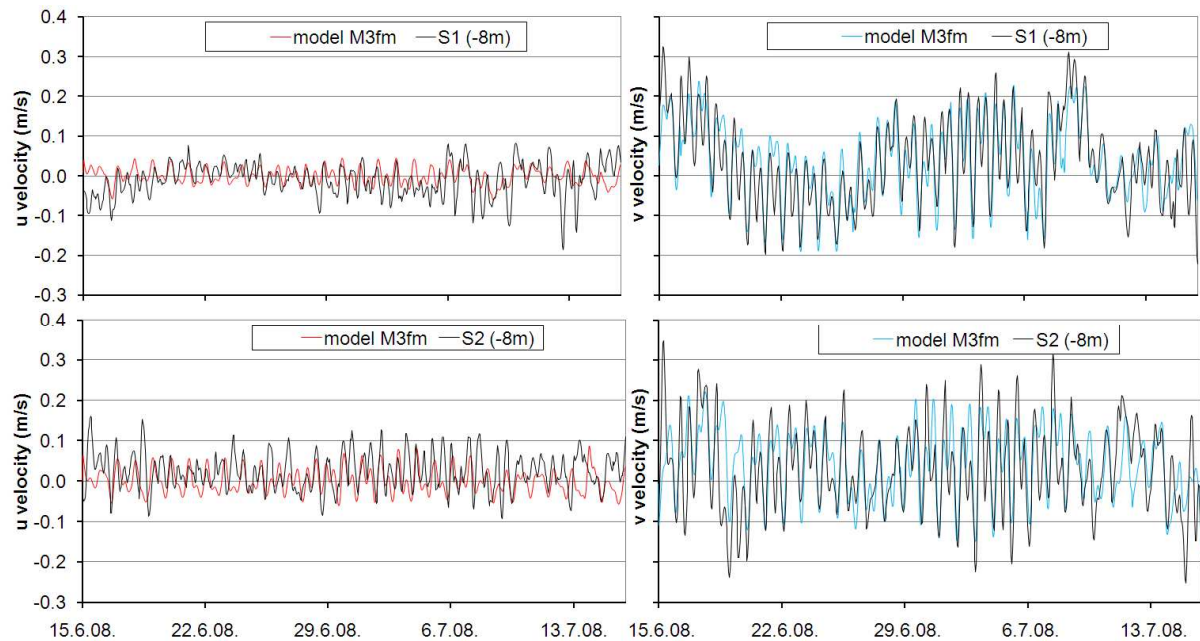


Slika 2 Diskretizacija prostorne domene numeričkog modela Mike 3fm s batimetrijskom podlogom (a), poljima saliniteta (b – zima, c – proljeće, d – ljeto, e – jesen) i poljem temperature mora u vertikalnom profilu otvorene granice (f – ljeto)

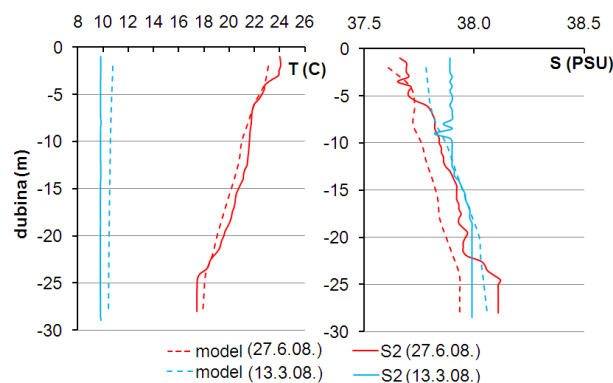
Model turbulencije oslanja se na $k-\epsilon$ formulaciju (Rodi, 1987) u vertikalnom smjeru i Smagorinsky koncept (1993) u horizontalnom smjeru. Usvojene vrijednosti koeficijenata u hidrodinamičkom modulu modela Mike 3 fm su slijedeće: faktori proporcionalnosti za koeficijent turbulentne disperzije za skalarna polja temperature i saliniteta $Pr_{V-D} = 0.05$ (vertikalni smjer) i $Pr_{H-D} = 0.15$ (horizontalni smjer); faktori proporcionalnosti za turbulentnu kinetičku energiju (TKE) i disipaciju (ϵ) $Pr_{V-k\epsilon} = 1.3$ (vertikalni smjer) i $Pr_{H-k\epsilon} = 1.0$; hrapavost = 0.01m; Smagorinsky koeficijent = 0.2; koeficijent trenja vjetra 0.0016 (Wu, 1994); koeficijenti u Angstromovom zakonu $a = 0.25$ i $b = 0.52$; koeficijent u Daltonovom zakonu evaporacije = 0.9; koeficijent apsorpcije svjetlosne energije u površinskom sloju u Beerovom zakonu = 0.2; koeficijent svjetlosnog zamiranja u Beerovom zakonu = 0.95.

Verifikacije rezultata numeričkog modela provedena je temeljem rezultata mjerenja provedenih u znanstveno-stručnom projektu „Program praćenja stanja Jadranskog mora“ (Andročec i sur., 2009). Mjerenja strujanja te temperature i salinitet mora provedena su u razdoblju 11.2007.-11.2008. Budući da je primarni interes ovog istraživanja provedba analiza u razdoblju 1997.-2001., za koje nisu bila dostupna mjerenja strujanja, prethodno opisani numerički model primijenjen je i za period 1.1.2008.-15.11.2008. uz usvajanje istih početnih i rubnih uvjeta kao i u simulacijama iz razdoblja 1997.-2001. Podaci o varijabilitetu polja vjetra za period simulacije 1.1.2008.-15.11.2008. preuzeti su iz rezultata numeričkog modela Aladin-HR. Mjerenje morskih struje je ostvareno sa ADCP strujomjerima na postajama S1 i S2 (slika 1). Usporedba izmjerenih i modeliranih satno osrednjenih brzina strujanja na dubini 8m za period 15.6.2008.-15.7.2008. prikazana je na slici 3. Greška modeliranih vrijednosti satno

osrednjenih komponenti strujanja na pozicijama strujomjernih postaja S1 i S2 u odnosu na izmjerene za period simulacije 1.1.2008.-15.11.2008. poprimila je vrijednosti korijena srednjeg kvadratnog odstupanja $RMSE=0.057$ (za u komponentu) i $RMSE=0.074$ (za v komponentu). Na slici 4 prikazana je usporedba modelske i izmjerene raspodjele temperature i saliniteta mora u vertikalama strujomjernih postaja S1 i S2 u terminima 13.3.2008. i 27.6.2008.



Slika 3 Usporedba izmjerenih i modeliranih (Mike 3fm) satno osrednjenih brzina strujanja na položaju strujomjerne postaje S1 (gore) i S2 (dole) na dubini 8m



Slika 4 Usporedba modelske i izmjerene raspodjele temperature i saliniteta mora u vertikalama strujomjernih postaja S1 i S2 u terminima 13.3.2008. i 27.6.2008.

Hidrodinamički modul modela Mike 3fm daje trodimenzionalnu sliku strujanja potrebnu za daljnji tijek proračuna koncentracija parametara kvalitete mora. Pri tome je korišten modul ECOLab koji direktno iz hidrodinamičkog modula preuzima informacije o dinamici strujanja i provodi daljnji tretman konvektivno-disperzivnog pronosa sa biološko-kemijskim reakcijama. U analizi kvalitete mora korištena je numerička formulacija koja koncentracije varijabli

otopljenog kisika (DO), amonija (NH_4), nitrita (NO_2), nitrata (NO_3), ortofosfata (PO_4) i klorofila-a (CHL) tretira kao procesne varijable. Za svaku od procesnih varijabli formira se odgovarajuća diferencijalna jednačina brzine njezine promjene, a bazira se na procesima koji se odvijaju unutar promatranog ekosustava. Osim procesnih varijabli, u korištenom pristupu analize upotrebljavaju se i konstante, parametri prisile i pomoćne varijable.

Za analizu transporta skalarnih polja korištena je 3D quickest-sharp shema koja je osobito pogodna za slučajeve naglašenih gradijenata i pripada grupaciji tzv. CWC shema (Consistency With Continuity). Za integraciju je korištena Runge-Kutta metoda 4. reda.

Reaeracija je proces kojim se opisuje izmjena kisika između otopljenog kisika u vodi i u atmosferi, a primijenjeni izraz uključuje stupanj saturacije kisika u vodi koji je ovisan o salinitetu i temperaturi. Brzina reaeracijskog procesa ovisna je o brzini vjetra, brzini strujanja i dubini vode. Proces fotosintetske produkcije kisika je opisan u relativnom odnosu naspram maksimalne produkcije u podne i varijabilan je u vremenu relativnog trajanja pojedinog dana. Za vrijednost maksimalne produkcije kisika kroz proces fotosinteze u podne usvojena je vrijednost $1.5\text{gO}_2/\text{m}^2/\text{dan}$. Fotosintetska produkcija kisika i respiracija autotrofa varijabilna je po dubini zbog ovisnosti intenziteta svjetlosti o koncentraciji autotrofa. Varijacija u funkciji dubine opisana je se Lambert-Beerovim zakonom u kojem je za koeficijent svjetlosnog prigušenja usvojena vrijednost 15m (GF, 2010). Respiracije autotrofa i heterotrofa potrebuje kisik a u ovisnosti je i o temperaturi mora. Za ratu respiracije pri 20°C primijenjena je konstanta vrijednost u toku jednog kalendarskog dana od $0.2\text{gO}_2/\text{m}^2/\text{dan}$. Temperaturni koeficijent za respiraciju usvojen je s vrijednosti 1.08, a koncentracija otopljenog kisika pri kojoj se brzina procesa reducira za 50% kao posljedica nedostatka kisika definirana je sa vrijednosti 2mg/l. Sedimentna potreba za kisikom pretpostavljena je kao ovisna o koncentraciji kisika i temperaturi te je korišten izraz za Michaelis-Mentenovu kinetiku sa ratom $0.2\text{gO}_2/\text{m}^2/\text{dan}$, Arheniusovim temperaturnim koeficijentom 1.07 i koncentracijom kisika pri 50% saturaciji 2mg/l. Promjena kisika uslijed nitrifikacije definirana je kao proces prvog reda obzirom na amonij i Michaelis-Mentenov proces te obzirom na kisik sa usvojenim vrijednostima $3.42\text{gO}_2/\text{gNH}_4\text{-N}$ (potreba za kisikom za nitrifikaciju $\text{NH}_4 \rightarrow \text{NO}_2$) i $1.14\text{gO}_2/\text{gNO}_2\text{-N}$ (potreba za kisikom za nitrifikaciju $\text{NO}_2 \rightarrow \text{NO}_3$) uz odgovarajuće usvojene vrijednosti Arheniusovog temperaturnog koeficijenta 1.088 i koncentracije kisika pri 50% saturaciji od 2mg/l.

Bilanca amonija obuhvaća primitak amonija dobivenog iz transformacije amonija u nitrite te konzumaciju od strane algi i bakterija. Proces transformacije amonija u nitrite je pretpostavljen kao proces prvog reda obzirom na koncentraciju amonija sa direktnom konverzijom, a ovisan je o temperaturi i koncentraciji kisika. Konzumacija amonija od strane algi referencirana je na fotosintezu i respiraciju i to kao konstantna vrijednost po gramu neto produkcije kisika. Za vrijeme noći konzumacija amonija postaje konstantna. Tijekom dana intenzitet konzumacije je ovisan o koncentraciji amonija, a što je definirano Michaelis-

Mentenovom kinetikom uz usvajanje konstantne vrijednosti od 0.066gN/gDO za proračun količine NH₄-N konzumirana od strane algi. Uvedena je i funkcija limitacije nutrijenata u kojoj je koncentracija 50% saturacije za dušik usvojena sa 0.05, a za fosfor sa vrijednosti 0.01. Konzumacija amonija od strane bakterija također je opisana Michaelis-Mentenovom kinetikom u kojoj je konstanta konzumacije usvojena sa 0.109gN/gDO, a koncentracija 50% saturacije sa 0.05mg/l.

Denitrifikacija pri kojoj se nitrati transformiraju u slobodni atmosferski dušik je interpretirana kao proces prvog reda ovisan o temperaturi. Za ratu nitrifikacije pri 20⁰C usvojena je vrijednost 0.1 1/dan uz usvojeni Arrheniusov temperaturni koeficijent 1.16. Fosfor se konzumira u procesu fotosinteze. Uzimajući u obzir konzumaciju fosfora kroz produkciju algi korištena bilancna jednadžba koncentracije ortofosfata obuhvaća konzumaciju fosfora od strane algi (referencirana je na fotosintezu i respiraciju) i to kao konstantna vrijednost po gramu neto produkcije kisika. Tijekom dana intenzitet konzumacije je ovisan o koncentraciji PO₄, a što je definirano Michaelis-Mentenovom kinetikom u kojoj je količina PO₄ konzumirana od strane algi usvojena sa konstantom 0.0091gP/gDO. Konzumacija fosfora od strane bakterija pri mineralizaciji organske tvari također je opisana Michaelis-Mentenovom kinetikom sa usvojenom vrijednosti 0.015gP/gDO te koncentracijom 50% saturacije od 0.05mg/l. Produkcija klorofil-a pretpostavljena je kao proporcionalna fitoplanktonskoj produkciji ugljika a time i produkciji kisika. Bilancna jednadžba za rješavanje dinamike koncentracije klorofil-a definirana je temeljem omjera klorofil-a/ugljik (usvojeno 0.025mgCHL/mgC) i ugljik/kisik pri primarnoj produkciji (usvojeno 0.2857mgC/mgO). Za rate odumiranja i sedimentacije klorofil-a usvojene su vrijednosti 0.01 1/dan i 0.2m/dan

Za početne vrijednosti modelskih parametara korištene su prostorno homogene vrijednosti temeljem podataka izmjerenih na oceanografskoj postaji smještenoj na 1nM od Centra za istraživanje mora instituta Ruđer Bošković u Rovinju (kontinuirano praćenja u razdoblju 1975.-2005.). Te vrijednosti reprezentativne su za Rovinjski akvatorij i zasigurno odstupaju od referentnih vrijednosti zapadne strane priobalja sjevernog Jadrana, no obzirom na sam cilj istraživanja korišteni podaci su svrsishodni. Stoga, usvojene vrijednosti u početnim uvjetima iznose: CHL = 0.00075mg/l, PO₄ = 0.0024mg/l, NO₂ = 0.0002mg/l, NO₃ = 0.08mg/l, NH₄ = 0.00116mg/l i DO = 7.2mg/l. Nadalje, zbog odsustva podataka o dinamici koncentracija svih parametara na području otvorene granice (utjecaj otvorenog mora) tijekom perioda simulacija također su korištene vrijednosti dobivene mjerenjem na oceanografskoj postaji na 1nM od Rovinja.

Koncentracije parametara na mjestu slatkovodnih utoka usvojene su sa konstantnim vrijednostima tijekom perioda simulacije i prikazane su u tablici 1. Za rijeke Mirna, Dragonja i Soča korištene su iste koncentracije, dobivene osrednjavanjem vrijednosti za 2006., 2009. i 2010. godinu (Hrvatske vode, 2010; 2011). Za sve preostale rijeke talijanskih slivova (slika 1)

korištene su koncentracije koje odgovaraju godišnjim prosjecima za rijeku Po (Wit i Bendoricchio, 2001; Palmeri i sur., 2005).

Potrebno je napomenuti da su numeričke analize provedene u svrhu kvantifikacije intenziteta razvoja klorofila-a te služe samo za komparaciju pojedinih situacija kroz razdoblje 1992.-2001. Shodno tome, analiza osjetljivosti korištenih konstanti i usporedba sa izmjerenim vrijednostima modeliranih parametara kvalitete mora nije provedena.

Tablica 1 Koncentracije parametara DO, NH₄, NO₂, NO₃, PO₄ i CHL=0 mg/l na mjestu slatkovodnih utoka (rijeke)

	Mirna			Stella-Reno	Mirna, Dragonja, Soča
	2006	2009	2010	usvojeno	usvojeno
DO (mg/l)	8.8	8.2	9.3	9.5	8.8
NH ₄ (mg/l)	0.083	0.024	0.029	0.074	0.045
NO ₂ (mg/l)	0.013	0.009	0.003	0.011	0.008
NO ₃ (mg/l)	1.509	1.264	0.726	2.240	1.166
PO ₄ (mg/l)	0.011	0.008	0.008	0.075	0.009

3. Rezultati numeričkog modela

Na slici 5 prikazana su mjesečno osrednjena polja strujanja na dubini 1m za lipanj i srpanj 1997., 1999., 2000. i 2001. godine.

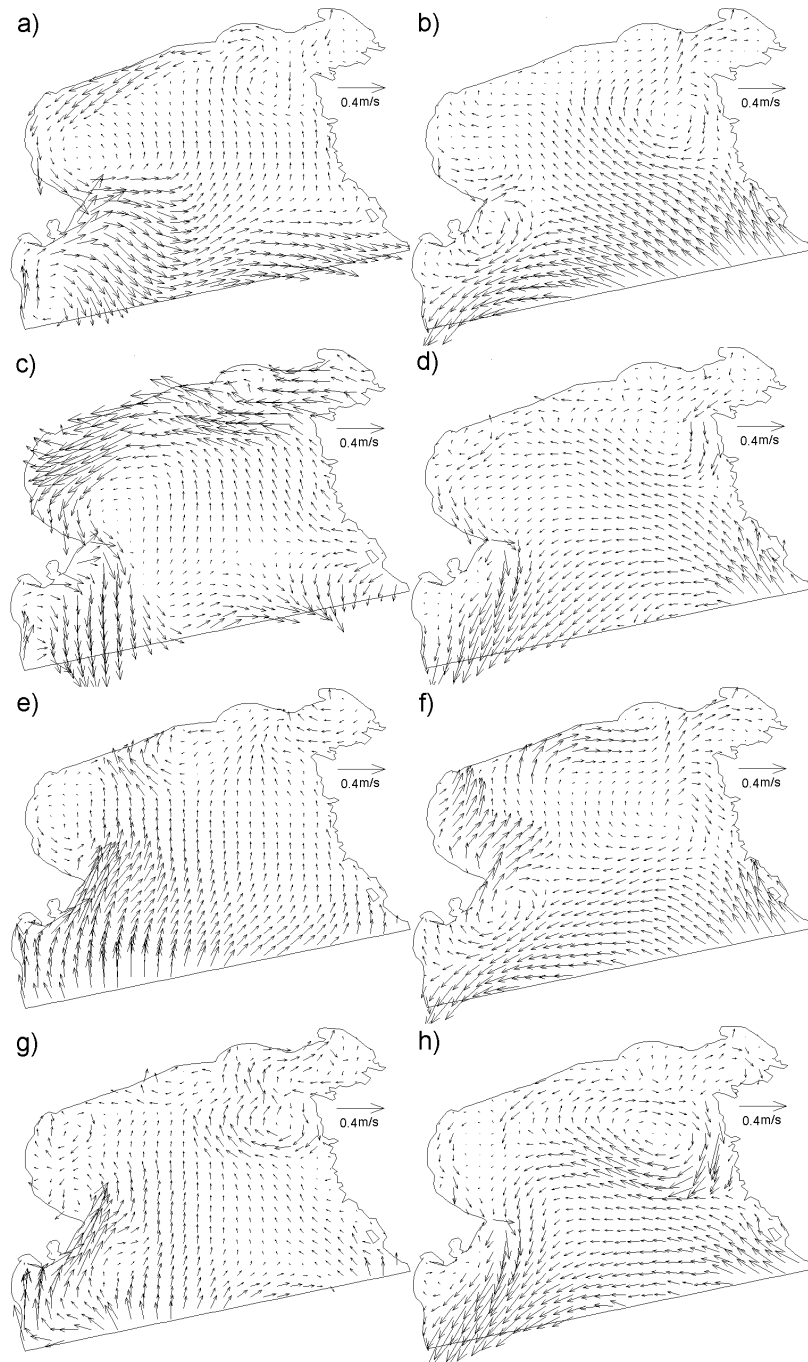
Na slici 5 se može uočiti odsustvo izlazne zapadne jadranske struje u površinskom sloju tijekom mjeseca lipnja u 2000. godini (slika 5e) i 2001. godini (slika 5g). Najizraženije ulazno strujanje zapaža se u 2000. godini, a nešto slabije u 2001. i 1997. godini. Interesantna je činjenica da se najveća koncentracija sluzavih nakupina registrirala upravo u 2000. godini te sa nešto slabijim intenzitetom u 2001. i 1997. godini. Nadalje, u 1999. godini tijekom lipnja (slika 5c) prisutna je dobro razvijena zapadna jadranska struja, odgovorna za iznošenje voda bogatih nutrijentima iz akvatorijalnog područja sjevernog Jadrana, a u toj godini nije registrirana ni pojava formiranja sluzavih nakupina. Tijekom srpnja u svim godinama dolazi do razvijanja izlaznog zapadnog jadranskog strujanja, što također koincidira sa terminom nestanka sluzavih nakupina u 1997., 2000. i 2001. godini.

Na slici 6 prikazana su mjesečno osrednjena polja koncentracija klorofila-a na dubini 1m za mjesec lipanj i srpanj, za 1997., 1999., 2000. i 2001. godinu.

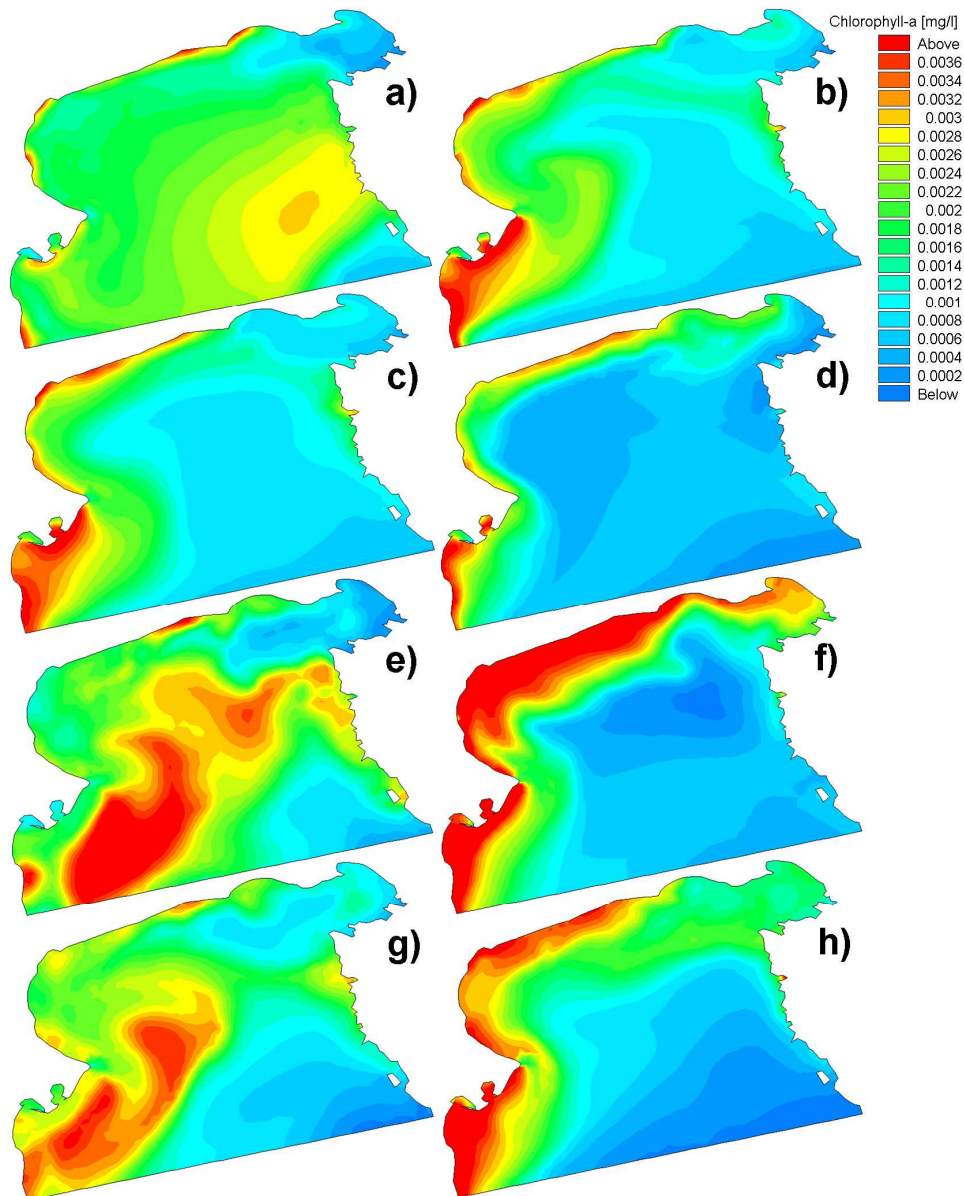
Sa slike 6 se može uočiti pojava maksimalnih koncentracija klorofila-a u mjesecu lipnju 2000. godine kada se pojavljuju i najveće koncentracije u priobalju Istre. Nakon toga, tijekom

srpnja, dolazi do koncentriranja oblaka povećanih koncentracija u zapadnom i sjevernom dijelu analiziranog područja. Sličan scenarij odvijao se i u 1997. i 2001. sa razlikom u položaju maksimalnih koncentracija te prostorne raspodjele koncentracija klorofila-a u površinskom sloju. Naime, u lipnju 1997. godine polje koncentracija je homogenije nego u 2001. godini, a najveće koncentracije pojavljuju se u istočnom dijelu promatranog područja. U 1999. godini nije zabilježeno značajnije povećanje koncentracija klorofila-a u središnjem ili istočnom dijelu modeliranog područja (sjeverni Jadran). Neovisno o analiziranoj godini, tijekom srpnja dolazi do uspostave izlazne zapadne jadranske struje koja iznosi more iz područja sjevernog Jadrana te uzrokuje značajno smanjenje koncentracija klorofila-a. Ovakvi rezultati su u suglasju sa rezultatima monitoringa provedenog u sklopu projekta MAT.

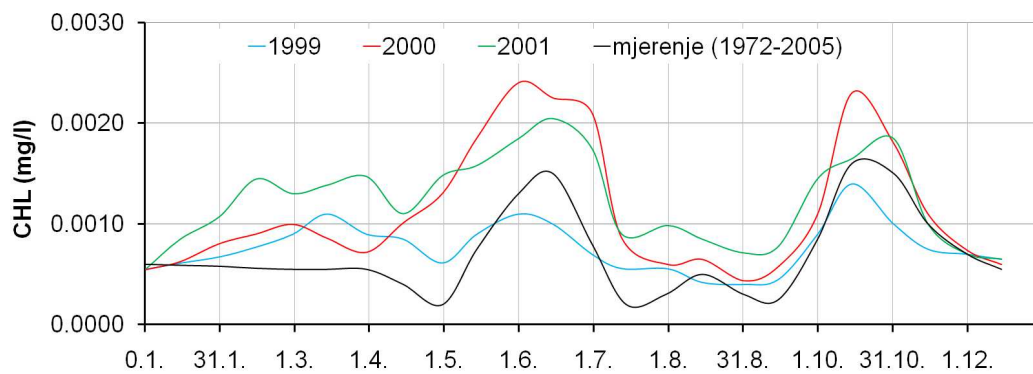
Na slici 7 prikazane su vremenske serije modelskih koncentracija klorofila-a u površinskom sloju mora s mjesečno osrednjenim vrijednostima za 1999., 2000. i 2001. godinu na poziciji mjerne postaje S2 (slika 1). Za usporedbu su prikazane i vrijednosti srednjeg sezonskog modela koncentracije klorofila-a dobivenog temeljem kontinuiranog mjerenja na istoj poziciji u razdoblju 1972.-2005. (Andročec i sur.; www.mzopug.hr/doc/Zastita_okolisa)



Slika 5 Mjesečno osrednjena polja strujanja na dubini 1m za lipanj (lijevo) i srpanj (desno) 1997.(a,b), 1999.(c,d), 2000.(e,f) i 2001.(g,h) godine



Slika 6 Mjesečno osrednjena polja koncentracija klorofila-a na dubini 1m za lipanj (lijevo) i srpanj (desno) 1997.(a,b), 1999.(c,d), 2000.(e,f) i 2001.(g,h) godine



Slika 7 Vremenske serije modelskih koncentracija klorofila-a u površinskom sloju mora sa mjesečno osrednjenim vrijednostima za 1999., 2000. i 2001. godinu na poziciji mjerne postaje S2 i vrijednosti

srednjeg sezonskog modela koncentracije klorofila-a dobivenog temeljem kontinuiranog mjerenja na istoj poziciji u razdoblju 1972.-2005.

Sa slike 7 je razvidno da modelske vrijednosti prate trend srednjeg sezonskog modela baziranog na izmjerenim vrijednostima. U 1999. godini u svibnju nije bilježen maksimum koncentracija, već se on pojavljuje sredinom listopada. U 2000. i 2001. godini tijekom travnja i svibnja dolazi do naglijeg povećanja koncentracije klorofila-a. Povećane koncentracije zadržavaju se kroz mjesec lipanj a u prvom dijelu srpnja dolazi do naglog pada koncentracija uslijed razvoja zapadnog jadranskog strujanja i općenito pojačane dinamike mora. Potrebno je napomenuti da modelski termini naglog smanjenja koncentracija klorofila-a u srpnju 2000. i 2001. godine koincidiraju sa registriranim terminima prekida morske cvatnje u projektu MAT (Precali i sur., 2005).

4. Zaključak

Provedena su istraživanja utjecaja dinamike polja vjetra na dinamiku koncentracija klorofila-a u području sjevernog Jadrana. Istraživanje je provedeno sa trodimenzionalnim modelom strujanja, koristeći hidrodinamički i ekološki modul. Strujanje dobiveno proračunom s hidrodinamičkim modulom podloga je za daljnji proračun koncentracije parametara kvalitete mora, uključujući koncentraciju klorofila-a. Modelski rezultati strujanja te temperature i saliniteta mora verificirani su mjerenjima in-situ na strujomjernim i CTD postajama.

U provedbi modeliranja koriste se istovjetni i ciklički ponavljani početni i rubni uvjeti za svaku pojedinačnu godinu iz analiziranog razdoblja 1997-2001. Jedina razlika u forsiranju modela je prostorni i vremenski varijabilitet u polju brzine vjetra, pri čemu su korišteni rezultati numeričkog atmosferskog modela Aladin-HR za razdoblje 1997.-2001.

Modelske rezultate strujanja za 1998. i 1999. godinu upućuju na dobro razvijenu zapadnu jadransku struju, dok se u ostalim godinama primjećuje znatno oslabljeno iznošenje mora iz područja sjevernog jadrana sa zapadnom jadranskom strujom. Zadržavanje voda iz slatkovodnih utoka u modeliranom području sjevernog Jadrana posebno je prisutno tijekom lipnja u 1997., 2000. i 2001. godini, pri čemu se u lipnju 2000. godine pojavljuju i maksimalne koncentracije klorofila-a u usporedbi sa preostalim mjesecima i godinama iz analiziranog vremenskog raspona. Termin nastupa maksimalnih koncentracija klorofila-a, dobiven numeričkim modelom, koincidira sa terminom intenzivnog formiranja sluzavih nakupina u 2000. godini. Stoga se može ustvrditi da rezultati numeričke simulacije potvrđuju hipotezu u kojoj se polje vjetra smatra važnim čimbenikom pri stvaranju uvjeta pogodnih za formiranje sluzavih nakupina u akvatorijalnom području sjevernog Jadrana.

Literatura:

Andročec, V., Beg-Paklar, G., Dadić, V., Djakovac, T., Grbec, B., Janeković, I., Krstulović, N., Kušpilić, G., Leder, N., Lončar, G., Marasović, I., Precali, R., Šolić, M.: The Adriatic Sea Monitoring Program - Final Report, Zagreb, 2009.

Azam, F., Fonda Umani, S., Funari, E. (1999.): Significance of bacteria in the mucilage phenomenon in the northern Adriatic Sea, *Ann. Ist. Sup. Sanita.*, 35, 411-419.

Brzović, N. (1999.): Factors affecting the Adriatic cyclone and associated windstorms, *Contributions to Atmospheric Physics*, 72, 51-65.

Brzović, N., Strelec-Mahović, N. (1999.): Cyclonic activity and severe jugo in the Adriatic, *Physics and Chemistry of the Earth (B)*, 24, 653-657.

Courtier, P.C., Freyrier, J.F., Geleyn, F., Rochas, M. (1991.): The ARPEGE project at METEO-FRANCE, *Proceedings from the ECMWF workshop on numerical methods in atmospheric models*, 193-231.

Cordoneanu, E., Geleyn, J.F. (1998.): Application to local circulation above the Carpathian-Black Sea area of a NWP-type meso-scale model, *Contributions to Atmospheric Physics*, 71, 191-212.

Cushman-Roisin, B., Korotenko, K., Galos, C., Dietrich, D. (2007.): Simulation and characterization of the Adriatic Sea mesoscale variability, *J. Geophys. Res.*, 112, C03S14, doi:10.1029/2006JC003515.

Degobbis, D., Fonda Umani, S., Franco, P., Malej, A., Precali, R., Smolaka, N. (1995.): Changes in the northern Adriatic ecosystem and appearance of hypertrophic gelatinous aggregates, *Sci. Total Environ.*, 165, 43-58.

Degobbis, D., Malej, A., Fonda Umani, S. (1999.): The mucilage phenomenon in the northern Adriatic Sea. A critical review of the present scientific hypotheses, *Ann. Ist. Sup. Sanita.*, 35, 373-83.

Degobbis, D., Precali, R., Ferrari, C.R., Djakovac, T., Rinaldi, A., Ivančić, I. (2005.): Changes in nutrient concentrations and ratios during mucilage events in the period 1999.-2002. *Sci. Total Environ.*, 353, 103-14.

Fajon, C., Cauwet, G., Lebaron, P., Terzić, S., Ahel, M., Malej, A. (1999.): The accumulation and release of polysaccharides by planktonic cells and the subsequent bacterial response during a controlled experiment, *FEMS Microb. Ecol.*, 29, 351-63.

Fonda Umani, S., Ghirardelli, E., Specchi, M. (1989.): *Gli episodi di „mare sporco“ nell'Adriatico dal 1729 ai giorni nostri*, Regione Autonoma Friuli Venezia Giulia, Direzione Regionale dell'Ambiente, Trieste, 178 str.

Galos, C. (2000.): *Seasonal circulation in the Adriatic Sea*, M.S. thesis, Dartmouth Coll., Hanover, N.H., 127str.

Grilli, F., Paschini, E., Russo, A., Precali, R., Supić, N. (2005.): Circulation and horizontal fluxes in the Northern Adriatic Sea in the period June 1999. - July 2002. Part I: geostrophic circulation and current measurement, *Sci. Total Environ.*, 353, 57-67.

Hrvatske vode (2010.): *Kakvoća površinskih voda u RH u 2009. godini*, Zagreb.

Hrvatske vode (2011.): *Kakvoća površinskih voda u RH u 2010. godini*, Zagreb.

Ivatek-Šahdan, S., Tudor, M. (2004.): Use of high-resolution dynamical adaptation in operational suite and research impact studies, *Meteorol. Z.*, 13, 99-108.

Janeković, I., Bobanović, J., Kuzmić, M. (2003.): The Adriatic Sea M2 and K1 tides by 3D model and data assimilation, *Geophysical Research Abstracts*, 9, 203-217.

Janeković, I., Kuzmić, M. (2005.): Numerical simulation of the Adriatic Sea principal tidal constituents, *Ann. Geophys.*, 23, 3207-3218.

Janeković, I., Sikirić-Dutour, M. (2007.): Improving tidal open boundary conditions for the Adriatic Sea numerical model, *Geophysical Research Abstracts*, 9, 203-217.

Lončar, G., Beg-Paklar, G., Janeković, I. (2011.): Influence of density stratification on effluent plume dynamics, *Oceanologia*, 53(2), 565-585.

Palmeri, L., Bendoricchio, G., Artioli, Y. (2005.): Modelling nutrient emissions from river systems and loads to the coastal zone: Po River case study - Italy, *Ecological Modelling*, 37-53.

Precali, R., Giani, M., Marini, M., Grilli, F., Pečar, O., Paschini, E. (2005.): Mucilage events in the northern Adriatic in the period 1999-2002: typology and distribution, *Sci. Total Environ.*, 353, 10-23.

Rodi, W. (1987.): Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids, *Journal of Geophysical Research*, 92(C5), 5305-5328.

Russo, A., Maccaferri, S., Djakovac, T., Precali, R., Degobbis, D., Deserti, M. (2005.): Meteorological and oceanographic conditions in the northern Adriatic Sea during the period June 1999.-July 2002.: influence on the mucilage phenomenon, *Sci. Total Environ.*, 353,24-38.

Sleigh, D. H., Gaskel, P.H. (1998.): An unstructured finite volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries, *Computer and Fluids*, 27(4), 479-508.

Smagorinsky, J. (1993.): *Some historical remarks on the use of nonlinear viscosities*, In: Large eddy simulations of complex engineering and geophysical flows, B. Galperin and S. Orszag (eds.), Cambridge University Press, 1-34.

Song, Y., Haidvogel, D. (1994.): A semi-implicit ocean circulation model using a generalised topography-following coordinate system, *Journal of Comp. Physics.*, 115, 228-244.

Wit, M., Bendoricchio, G. (2001.): Nutrient fluxes in the Po basin *Sci. Total Environ.*, 273, 147-161.

Wu, J. (1994.): The sea surface is aerodynamically rough even under light winds, *Boundary layer Meteorology*, 69, 149-158.

www.mzopug.hr/doc/Zastita_okolisa/Zastita_od_oneciscenja_voda_izvjesce.pdf

Dodatak A: Procesne jednadžbe parametara kvalitete mora

Brzina promjene otopljenog kisika (*DO*) definirana je izrazom:

$$\frac{d(DO)}{dt} = \text{reaeracija} + \text{fototsineza} - \text{respiracija} - (BOD)_{\text{degradacija}} - (SOD) - \text{nitrifikacija}_{DO} \quad (1)$$

gdje su *BOD* i *SOD* oznake za biološku i sedimentnu potrebu za kisikom.

Reaeracija je proces kojim se opisuje izmjena kisika između otopljenog kisika u vodi i u atmosferi.

$$\text{reaeracija} = K_2 (C_s - DO) \quad (2)$$

Izraz uključuje stupanj saturacije kisika u moru C_s koji je ovisan o salinitetu S i temperaturi T .

$$C_s = 14.652 - 0.0841S + T [0.00256S - 0.41022 + T(0.007991 - 0.0000374 S - 0.000077774 T)] \quad (3)$$

Brzina reaeracijskog procesa K_2 definirati će se kao ovisnost o brzini vjetra W_v , brzini strujanja V i dubini mora H u konkretnom horizontalnom sloju:

$$K_2 = 3.93 V^{0.5} / H^{1.5} + W/H \quad (4)$$

$$W = 0.728 W_v^{0.5} - 0.371 W_v + 0.0372 W_v^2 \quad (5)$$

Proces fotosintetske produkcije kisika je opisan u relativnom odnosu naspram dane maksimalne produkcije u podne i varira u vremenu relativnog trajanja pojedinog dana:

$$f_{\text{fotosinteza}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{\max} F_1(H) \cos\left(2\pi \times \frac{t}{24} \times \frac{1}{2 \times rd}\right) / H}{0} \text{ , ako } SD > 0 \\ \text{ , inače} \end{array} \right\} \quad (6)$$

gdje je P_{\max} maksimalna produkcija kisika kroz proces fotosinteze u podne; $t = \text{sat} - (12 + \varphi)$ gdje je sat trenutačni sat u danu, a φ vremenska korekcija u satima za najjaču insolaciju u odnosu na podne; rd relativna duljina dana (broj sunčanih sati/24); SD Secchi dubina.

Fotosintetska produkcija kisika i respiracija autotrofa varijabilna je po dubini zbog ovisnosti intenziteta svjetlosti o koncentraciji autotrofa. Varijacija u funkciji dubine opisana je se Lambert-Beerovim zakonom odnosno funkcijom :

$$F_1(H) = e^{-kH} \quad (7)$$

gdje je k koeficijent svjetlosnog prigušenja (usvojeno 1.6/Secchi dubina); H dubina mora u pojedinom horizontalnom sloju numeričkog modela.

Za respiraciju biljaka je potreban kisik, a u ovisnosti je o temperaturi na slijedeći način:

$$\text{respiracija} = \text{resp}T = \frac{DO}{DO + M_{DO}} \text{ resp } \theta_2^{(T-20)} / H \quad (8)$$

gdje je M_{DO} koncentracija kisika pri 50% saturaciji za respiraciju (koncentracija otopljenog kisika pri kojoj se brzina procesa reducira za 50% kao posljedica nedostatka kisika); resp rata respiracije za biljke u toku 24 sata (pri 20°C konstanta); θ_2 temperaturni koeficijent korekcije za respiraciju;

Biološka degradacija organske tvari je također proces koji potrebuje kisik, a ovisan je o temperaturi i koncentracijama kisika i prisutne organske tvari.

$$(BOD)_{\text{degradacija}} = K_{d3} \theta_{d3}^{(T-20)} BOD \frac{DO}{DO + H_{DO_BOD}} \quad (9)$$

gdje je K_{d3} degradacijska konstanta za organsku tvar pri 20°C; θ_{d3} Arrheniusov temperaturni koeficijent korekcije za ratu degradacije; H_{DO_BOD} koncentracija kisika pri 50% saturaciji za BOD .

Sedimentna potreba za kisikom (*SOD*) je zbroj svih kemijskih i bioloških procesa u sedimentu koji troše kisik. Sedimentna potreba za kisikom ovisi o koncentraciji kisika, temperaturi i dubini. Michaelis-Menten izraz korišten je za simulaciju procesa pri uvjetima niske koncentracije kisika.

$$SOD = \frac{DO}{DO + M_{DO_SED}} B_{1_sed} \theta_{B1}^{(T-20)} / H \quad (10)$$

gdje je M_{DO_SED} koncentracija kisika pri 50% saturaciji za *SOD*; B_{1_sed} sedimentna potreba za kisikom po m^2 ; θ_{B1} Arrheniusov temperaturni koeficijent korekcije za *SOD*; H dubina pojedinog sloja u numeričkom modelu.

Modelom se obuhvaća i promjena (potrošnja) kisika uslijed procesa nitrifikacije (amonijak → nitriti). Proces je definiran kao kemijski proces prvog reda obzirom na amonij, odnosno nitrite te Michaelis-Menten proces obzirom na kisik.

$$nitrifikacija_{DO} = y_1 \text{ nitrif} + y_2 \text{ nitri} \quad (11)$$

gdje je: $nitrifikacija_{DO}$ potreba za kisikom u procesu nitrifikacije; y_1 potreba za kisikom kod nitrifikacije $NH_4 \rightarrow NO_2$; y_2 potreba za kisikom kod nitrifikacije $NO_2 \rightarrow NO_3$; nitrif rata nitrifikacije za amonij → nitriti; nitri rata nitrifikacije za nitriti → nitriti;

$$\text{nitrif} = K_4 \theta_4^{(T-20)} NH_4 \frac{DO}{DO + H_{DO_NIT}} \quad (12)$$

$$\text{nitri} = K_7 \theta_7^{(T-20)} NO_2 \frac{DO}{DO + H_{DO_NIT}} \quad (13)$$

gdje je K_4 degradacija NH_4 pri $20^\circ C$; K_7 degradacija NO_2 pri $20^\circ C$; θ_4 Arrheniusov temperaturni koeficijent za amonij → nitriti; θ_7 Arrheniusov temperaturni koeficijent za nitriti → nitriti; H_{DO_NIT} koncentracija kisika pri 50% saturaciji za nitrifikaciju.

Korištena numerička interpretacija bilancne jednadžbe *amonija* NH_4 glasi:

$$\frac{d(NH_4)}{dt} = BOD_N - \text{nitrif} - \text{plant}_N - \text{bact}_N \quad (14)$$

gdje je BOD_N amonij dobiven procesom (*BOD*)_{degradacija}; nitrif oksidacija amonija u nitrite; plant_N konzumacija amonija od strane morske flore i bact_N konzumacija amonija od strane bakterija.

Amonij dobiven procesom $(BOD)_{degradacija}$ dobiven je u sprezi sa bilancnom jednađbom za BOD.

$$BOD_N = Y_{2d} (BOD)_{degradacija} \quad (15)$$

gdje je Y_{2d} [g NH_4 -N/g BOD] faktor otpuštanja amonija u procesu $(BOD)_{degradacija}$.

Kao dio fotosinteze i respiracije, konzumacija amonija od strane morske flore je definirana kao konstantna po gramu neto produkcije kisika (fotosinteza umanjena za respiraciju). Za vrijeme noći konzumacija amonija usvojena je kao konstantna vrijednost. Tijekom dana i noći intenzitet konzumacija je ovisan o koncentraciji amonija što je definirano Michaelis-Menten kinetikom.

$$\begin{aligned} &plant_N = \\ \text{IF} & \quad (fotosinteza - respT) > 0.8 \cdot (P_{max} / h - respT) \\ \text{THEN} & \quad N_{plant} \cdot (fotosinteza - respT) \cdot f_{NP} \\ \text{ELSE} & \quad N_{plant} \cdot 0.8 \cdot (P_{max} / h - respT) \cdot f_{NP} \end{aligned} \quad (18)$$

$$f_{NP} = \frac{2 \left[\frac{NH_4 + NO_2 + NO_3}{NH_4 + NO_2 + NO_3 + K_{SN}} \times \frac{PO_4}{PO_4 + K_{SP}} \right]}{\left[\frac{NH_4 + NO_2 + NO_3}{NH_4 + NO_2 + NO_3 + K_{SN}} + \frac{PO_4}{PO_4 + K_{SP}} \right]} \quad (16)$$

gdje je $respT$ respiracija biljaka objašnjena jednađbom (10); P_{max} maksimalna produkcija kisika kroz proces fotosinteze u podne; h dubina mora; N_{plant} količina NH_4 -N konzumirana od strane flore; f_{NP} funkcija limitacije nutrijenata; K_{SN} koncentracija 50% saturacije za dušik, limitacija za fotosintezu biljaka i algi; K_{SP} koncentracija 50% saturacije za fosfor, limitacija za fotosintezu biljaka i algi.

Konzumacija amonija od strane bakterija je integralni i konstantni dio procesa $(BOD)_{degradacija}$.

$$bact_N = N_{bact} (BOD)_{degradacija} \frac{NH_4}{NH_4 + H_{S_{NH4}}} \quad (17)$$

gdje je N_{bact} količina NH_4 -N konzumirana od strane bakterija; $H_{S_{NH4}}$ koncentracija 50% saturacije za konzumaciju N od strane bakterija.

Heterotrofna respiracija nije uzeta u obzir.

Korištena numerička interpretacija bilancne jednadžbe za nitrite NO_2 glasi:

$$\frac{d(\text{NO}_2)}{dt} = \textit{nitrif} - \textit{nitri} \quad (18)$$

gdje je *nitrif* oksidacija amonija u nitrite; *nitri* oksidacija nitrita u nitrate.

Korištena numerička interpretacija bilancne jednadžbe za nitrate NO_3 glasi:

$$\frac{d(\text{NO}_3)}{dt} = \textit{nitri} - \textit{deni} \quad (19)$$

gdje je *deni* denitrifikacija.

Denitrifikacija pri kojoj se nitrati reduciraju u slobodni atmosferski dušik je anaerobni proces koji se uglavnom odvija u sedimentu. Proces je interpretiran kao proces prvog reda koji je ovisan i o temperaturi:

$$\textit{deni} = K_6 \text{NO}_3 \theta_6^{(T-20)} \quad (20)$$

gdje je K_6 rata nitrifikacije pri 20°C ; θ_6 Arrheniusov temperaturni koeficijent za ratu nitrifikacije.

Konzumacija fosfora se odvija u procesu fotosinteze i procesu $(\text{BOD})_{\text{degradacija}}$. U tim procesima istovremeno dolazi i do njegovog oslobađanja u vidu ortofosfata. Uzimajući u obzir konzumaciju fosfora kroz produkciju algi korištena bilancna jednadžba koncentracije ortofosfata PO_4 glasi:

$$\frac{d\text{PO}_4}{dt} = \text{BOD}_p - \textit{plant}_p - \textit{bact}_p \quad (21)$$

gdje je BOD_p fosfor dobiven procesom $(\text{BOD})_{\text{degradacija}}$; \textit{plant}_p konzumacija fosfora od strane morske flore i \textit{bact}_p konzumacija fosfora od strane bakterija.

Pri degradaciji organske tvari, otpuštanje organske komponente fosfora rezultira s produkcijom fosfata. Primjenom odgovarajućeg koeficijenta na $(\text{BOD})_{\text{degradacija}}$ iz bilancne jednadžbe za BOD dobiva se količina fosfora u organskoj tvari.

$$BOD_p = Y_{3d} (BOD)_{degradacija} \quad (22)$$

gdje je Y_{3d} [g PO₄-P/g BOD] faktor otpuštanja fosfora u procesu (BOD)_{degradacija}.

Kao dio fotosinteze i respiracije, konzumacija fosfora od strane morske flore je definirana kao konstantna pomnožena sa neto produkcijom kisika (fotosinteza – respiracija). Ovisnost intenziteta konzumacije o raspoloživoj koncentraciji fosfora definirana je Michaelis-Menten kinetikom.

$$\begin{aligned}
 &plant_p = \\
 \text{IF} & \quad (fotosinteza - respT) > 0.8 \cdot (P_{max} / h - respT) \\
 \text{THEN} & \quad P_{plant} \cdot (fotosinteza - respT) \cdot f_{NP} \\
 \text{ELSE} & \quad P_{plant} \cdot 0.8 \cdot (P_{max} / h - respT) \cdot f_{NP} \quad (23)
 \end{aligned}$$

gdje je P_{plant} količina PO₄-P konzumirana od flore.

Konzumacija fosfora od strane bakterija pri mineralizaciji organske tvari je integralni i konstantni dio procesa BOD degradacije:

$$bact_p = P_{bact} (BOD)_{degradacija} \frac{PO_4}{PO_4 + H_{S_PHOS}} \quad (24)$$

gdje je P_{bact} količina PO₄-P konzumirana od bakterija; H_{S_PHOS} koncentracija 50% saturacije za konzumaciju P od strane bakterija.

Otpuštanje fosfora respiracijom pri mineralizaciji organske tvari nije uzeto u obzir.

Produkcija klorofila-a pretpostavljena je kao proporcionalna produkciji ugljika, a time i produkciji kisika. Bilancna jednačba prilagođena za numeričko rješavanje koncentracije klorofila-a glasi:

$$\frac{d(CHL)}{dt} = prod_{CH} - resp_{CH} - death_{CH} - sedi_{CH} \quad (25)$$

gdje je $prod_{CH}$ neto produkcija klorofila-a; $resp_{CH}$ respiracija klorofila-a; $death_{CH}$ odumiranje klorofila-a; $sedi_{CH}$ sedimentacija klorofila-a.

$$prod_{CH} = fotosinteza K_{10} K_{11} f_{NP} \quad (26)$$

$$respt_{CH} = K_{10} K_{11} f_{NP} respT \quad (27)$$

$$death_{CH} = K_8 CHL \quad (28)$$

$$sedi_{CH} = CHL K_9 / H \quad (29)$$

gdje je K_{10} omjer klorofil-a/ugljik, a K_{11} omjer ugljik/kisik pri primarnoj produkciji; K_8 rata odumiranja klorofila-a; K_9 rata sedimentacije klorofila-a.

PRIMJER 3

Međutjecaj površinskih i podzemnih voda na primjeru Save, kanala Dunav-Sava te crpilišta Gundinci i Sikirevci

SAŽETAK:

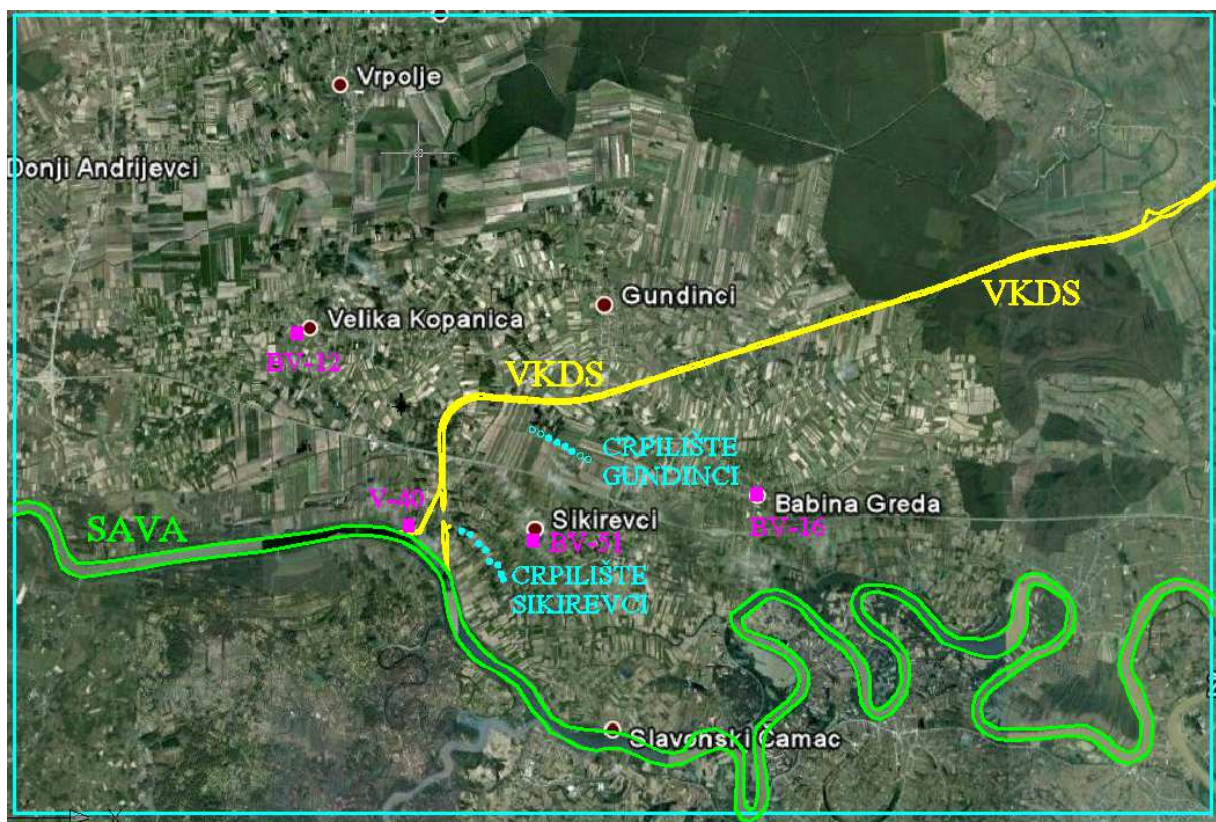
Za potrebe vodoopskrbe stanovništva u tri istočnoslavonske županije; Vukovarsko-srijemske, Osječko-baranjske i Brodsko-posavske se grade vodocrpilišta Sikirevci i Gundinci. Nedaleko od crpilišta se za potrebe navodnjavanja predviđa izgradnja melioracionog kanala. Projektima je predviđeno da se u idućim fazama izgradnje melioracioni kanal proširi i produbi kako bi mogao služiti i za potrebe plovidbe. Obzirom da se crpilište, kanal i rijeka Sava nalaze u istom vodonosnom sloju na relativno maloj udaljenosti, pojavila se potreba za analizom njihovog međudjelovanja. Istaknuta je važnost kvalitetnog opisivanja fizikalnih, kemijskih i bioloških procesa koji se odvijaju u kontaktnom sloju između vodotoka (Save i kanala) i vodonosnog kompleksa. Hidrotehnički zahvati u vodotoku mogu utjecati na količinu i kvalitetu vode koja se iz vodotoka infiltrira u vodonosnik. U okviru provedenih istraživanja je izrađen trodimenzionalni numerički model toka podzemnih voda na kojem je simuliran utjecaj izgradnje višenamjenskog kanala Dunav-Sava (VKDS) na crpilišta Sikirevci i Gundinci za sadašnje stanje izgrađenosti i pri planiranim fazama proširenja zajedno sa faznom izgradnjom VKDS-a. Sava i kanal su usječeni relativno plitko u pokrovne slojeve a zdenci zahvaćaju cijeli vodonosni sloj pa je posebna pažnja posvećena činjenici da Dupuitova hipoteza koja pretpostavlja horizontalni tok i hidrostatski raspored tlakova po vertikali nije u potpunosti zadovoljena. Odnos površinskih i podzemnih voda je vrlo složen i relativno slabo istražen proces te je u radu istaknuta važnost potrebe provođenja odgovarajućih mjerenja protoka kroz prelaznu zonu kao i hidrokemijskih procesa u prelaznoj zoni – hiporheičnom sloju.

1. Uvod

Za potrebe vodoopskrbe u tri istočnoslavonske županije; Vukovarsko-srijemske, Osječko-Baranjske i Brodsko-posavske se gradi Regionalni vodoopskrbni sustav. U sklopu regionalnog sustava, se na području općine Sikirevci gradi crpilište te planira izgradnja uređaja za kondicioniranje vode i centralne crpne stanice maksimalnog kapaciteta 2000 l/s. Dosad su u pogon puštena tri zdenca na crpilištu Sikirevci ukupne izdašnost 375 l/s. U idućim fazama se planira proširenje crpilišta do izdašnosti od 1000 l/s. Proširenjem vodoopskrbe se predviđa uključivanje i vodocrpilišta na lokaciji Gundinci izdašnosti 1000 l/s (slika 1). Obzirom da je izgradnja plovnog puta izuzetno složen i financijski zahtijevan projekt, u prvoj fazi se predviđa izgradnja melioracionog kanala koji je po dimenzijama manji od plovnog puta ali prolazi istom trasom. U idućim fazama izgradnje će se melioracioni kanal dograditi kako bi zadovoljio kriterije za plovni put.

Projektom predviđena crpilišta i višenamjenski kanal su usječeni u isti vodonosni sloj te će postojati hidraulička veza među njima. Cilj istraživanja je određivanje mogućeg utjecaja kanala na razine i kvalitetu vode na crpilištima. Dosadašnja istraživanja su razmatrala interakciju vodonosnika i crpilišta (HGI, 2005; Bačani, 1997; Pekaš i Brkić, 2007) ili utjecaj izgradnje kanala na režim podzemnih voda (Mustač, 2009; Gjetvaj i sur., 2008). U ovom primjeru istraživani su među utjecaj dva hidrotehnička objekta koji se nalaze u istom vodonosniku a težište je stavljeno na činjenicu da su rijeka Sava i Višenamjenski kanal usječeni u površinski dio vodonosnika dok zdenci zahvaćaju cijeli sloj te je bilo nužno koristiti trodimenzionalni model toka podzemnih voda i pronosa tvari.

Istraživanjem je obuhvaćeno tečenje podzemnih voda u širem područje vodocrpilišta Gundinci i Sikirevci do granica rasprostiranja vodonosnog kompleksa te rijeka Sava, melioracioni kanal i VKDS-a sa pripadajućim hidročvorom kako bi se odredio njihov međusobni hidraulički utjecaji u raznim stupnjevima izgrađenosti. Područje obuhvaćeno numeričkim modelom je prikazano na slici 1.



Slika 1 Šire područje vodocrpilišta Gundinci i Sikirevci te hidročvora Sava za koje je uspostavljen model strujanja podzemnih voda (modelom obuhvaćeno područje je omeđeno pravokutnikom svjetlo zelene boje)

2. Hidrogeološke značajke područja

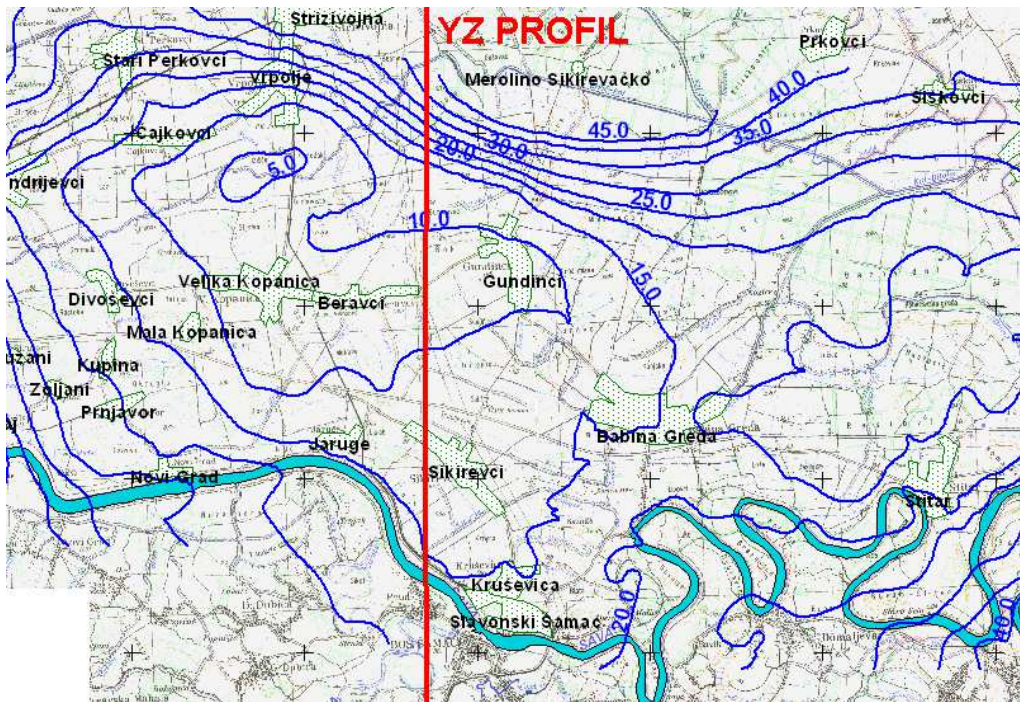
Za potrebe ovog istraživanja je korištena postojeća baza hidrogeoloških podataka. Istražni radovi na promatranom području su započeli sredinom 1970-tih godina izvedbom 17 strukturno-opažачkih bušotina s ciljem dobivanja osnovnih podataka o hidrogeološkoj strukturi vodonosnih slojeva. Pokusni zdenci na području Velike Kapanice i Babine Grede su pokazali da na istraživanom području postoji vodonosni kompleks čija debljina mjestimično prelazi i 70 m a čine ga dobropropusni pjeskoviti šljunci s pjeskovitim interkalacijama i proslojcima prašinstih glina. Krovina se sastoji od glinovito-prašinstih naslaga s proslojcima pijesaka (HGI, 2005).

Rezultati prvih provedenih hidrogeoloških istraživanja na području vodocrpilišta su ukazivali na postojanje tri vodonosna sloja, međusobno odvojena nepropusnim i neprekinutim slojem prašinstih gline. Kasnija istraživanja su pokazala da postoji veza između pojedinih slojeva tj. da se nepropusni slojevi ne prostiru kontinuirano po promatranom prostoru (Bačani, 1997). Ovakova geološka struktura ukazuje na postojanje značajne anizotropije unutar vodonosnog kompleksa.

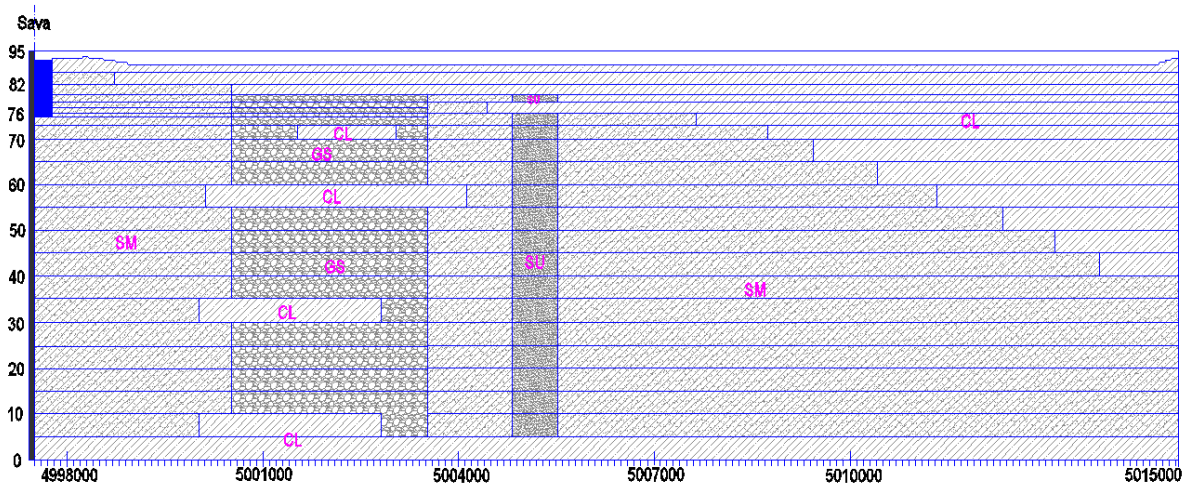
Rijeka Sava je dominantni čimbenik vodne bilance u promatranom vodonosniku. Prve procjene eksploatacijskih zaliha podzemnih voda na područja između Velike Kapanice i Babine Grede ukazuju na mogućnost zahvaćanja 1000 l/s vode uz pomoć osam zdenaca pri čemu usvajaju pretpostavku nestacionarnog toka u sloju koji je na sjeveru ograničen linijom isklinjavanja šljunčanih naslaga koje čine vodonosni kompleks, a na jugu rijekom Savom kao granicom stalnog potencijala (Bačani, 1997). Obnavljanje podzemnih voda u uvjetima eksploatacije na crpilištima Sikirevci i Gundinci vršit će se dotokom iz Save i podređeno infiltracijom oborina.

Za potrebe izrade numeričkog modela je geološka struktura vodonosnog kompleksa usvojena korištenjem baze hidrogeoloških podataka na analiziranom području (HGI, 2005; Bačani, 1997). Na slici 3 je prikazan presjek u vertikalnoj ravnini (*YZ- profil*) kroz modelirano područje s grafičkom interpretacijom prostorne raspodjele pojedinih slojeva. Prilikom formiranja numeričkog modela je diskretizacija u vertikalnom smjeru napravljena usvajanjem 21 sloja sa varijabilnim debljinama (slika 3) kako bi se što bolje opisao raspored slabo propusnih leća.

Pokrovni sloj vodonosnog kompleksa čine zaglinjene, slabo propusne naslage praha. Istraživanje pokrovnog sloja je detaljno provedeno sa agronomskog stanovišta [4,5,6]. Krovina vodonosnog kompleksa se sa hidrogeološkog stanovišta može usvojiti vodonepropusnom.



Slika 2 Izostrate podine vodonosnog sloja [1,2] sa ucrtanim položajem karakterističnog poprečnog profila



Slika 3 Vertikalni presjek kroz modelirano područje sa grafičkom interpretacijom prostorne raspodjele litoloških članova prema geomehaničkoj klasifikaciji tla u profilu YZ prikazanom na slici 2 (CL – glina male do srednje plastičnosti; GS- šljunak sa primjesama pijeska, SM – pijesak s muljem; SU – pijesak uniformno graduiran)

U horizontalnoj ravnini je usvojena izotropnost koeficijenata filtracije ($k_x=k_y$) dok je u vertikalnom smjeru korišten koeficijent anizotropije 10 ($10k_z = k_{x,y}$). U modelu su usvojene homogene vrijednosti koeficijenta efektivne poroznosti $n_{eff} = 0,2$ i koef. ukupne poroznosti $n_{tot} = 0,25$. Koeficijenti filtracije litoloških članova prikazanih na slici 3 u numeričkom modelu usvojeni su sa slijedećim vrijednostima CL - $k_{x,y} = 1 \cdot 10^{-7}$ m/s, $k_z = 1 \cdot 10^{-8}$ m/s; SM - $k_{x,y} = 8 \cdot 10^{-3}$ m/s, $k_z = 8 \cdot 10^{-4}$ m/s GS - $k_{x,y} = 1,8 \cdot 10^{-2}$ m/s, $k_z = 1,8 \cdot 10^{-3}$ m/s; SU - $k_{x,y} = 1,3 \cdot 10^{-2}$ m/s, $k_z = 1,3 \cdot 10^{-3}$ m/s.

3. Izmjena vode između vodotoka i vodonosnika

Površinske i podzemne vode su u slučajevima u kojima je vodotok usječen u saturirani dio vodonosnika dugo vremena bile promatrane i istraživane zasebno a jedina veza je bilo definiranje zajedničkog (istovjetnog) rubnog uvjeta na njihovom kontaktu što se najčešće svodilo na usvajanje jednake razine vodnog lica.

Određivanje protoka (izmjene) vode između vodotoka i vodonosnika je još uvijek veliki izazov za inženjere zbog heterogenosti geoloških formacija i problema osrednjavanja. Metode određivanja proticajnih količina se mogu podijeliti na metode koje se zasnivaju na korištenju trasera, direktne metode mjerenja protoka te na proračune zasnovane na Darcy-evom zakonu i zakonu održanja mase. Analiza izmjene vode između vodotoka i vodonosnika se može zasnivati i na praćenju postojećih trasera u vodotoku kao što je na primjer kvantificiranje količine eutrofikanta (Eglin i sur, 1997). Posebnu pažnju pri odabiru prikladnih metoda treba usredotočiti na ispravno uzimanje u obzir prostorne i vremenske dimenzije procesa infiltracije kao i nepouzdanosti i ograničenja pri korištenju pojedinih metoda (Sophocleous, 2002; Kalbus i sur.2006; Bereslavskii, 2006).

Kemijske, biološke i fizikalne karakteristike površinskih i podzemnih voda se razlikuju. Područje u kojem dolazi do miješanja površinskih i podzemnih voda se može nazvati prelazna ili kontaktna zona (eng: *hyporheic zone*). Izmjena vode kroz prelaznu zonu može imati značajnu ulogu u promjeni kvalitete vode u oba ekosustava. Ova zona može biti biološki i kemijski vrlo aktivna uz odvijanje niza hidrogeokemijskih procesa vezanih uz pronos, razgradnju, transformaciju, taloženje i sorpciju raznih supstanci. Prelazna zona može u pojedinim slučajevima imati izražena autopurifikacijska svojstva (Carbiener i Tremolueres, 2006; Hinke i sur. 2001) isto kao što može propustiti znatne količine zagađivala kao što su na primjer teški metali iz vodotoka u vodonosnik (Carbiener i Tremolueres, 2006). U cilju održivog gospodarenja vodnim resursima od presudnog je značaja razumijevanje i kvantificiranje procesa izmjene vode u prelaznoj zoni.

I u Hrvatskoj smo svjedoci da se prilikom infiltracije pojedinih površinskih voda u vodonosnik mijenja kvaliteta podzemnih voda što ugrožava rad pojedinih crpilišta. Da bi se procesi koji se odvijaju u prelaznoj zoni mogli spoznati i na taj način predvidjeti učinci pojedinih hidrotehničkih zahvata u koritu, potrebno je sistematski provoditi ciljana istraživanja koja obuhvaćaju analize promjene kvalitete vode nakon pojedinih hidrotehničkih zahvata i formiranja baza podataka te izrade i baždarenja odgovarajućih hidrokemijskih modela.

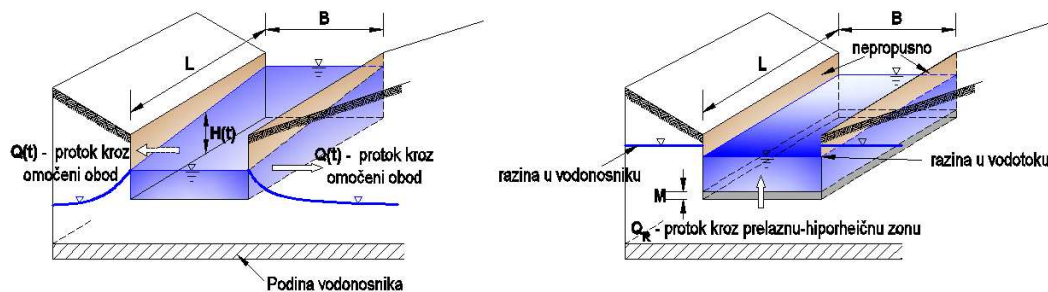
Do sada se za potrebe modeliranja utjecaja vodotoka na razine podzemnih voda u Hrvatskoj uglavnom koristio prisilni (Dirichletov) rubni uvjet u vidu zadane razine u vodotoku. Iznimno su u slučajevima modeliranja utjecaja akumulacionih jezera koja imaju razinu vode iznad

kote okolnog terena i pojave vertikalnih komponenata vektora brzine definiran i prirodni rubni uvjet.

Osim spomenutog prisilnog rubnog uvjeta se izmjena vode kroz prelaznu zonu sve češće zasniva na analizi protoka kroz kontaktni sloj ili na primjeni jednadžbe kontinuiteta pojedine dionice vodotoka. Prvo spomenuti pristup određivanja protoka između vodotoka i vodonosnika usvaja pretpostavku da je tok posljedica razlike potencijala u vodotoku i vodonosniku. Protok se računa na osnovu usvojenih razina vodnog lica u vodotoku i vodonosniku, kote dna vodotoka, te debljini, širini i propusnosti prelazne zone usvajajući pritom da vrijedi Darcyev zakon (Slika 4 lijevo).

Drugi pristup se zasniva na računanju protoka kroz vodotok po pojedinim dionicama (segmentima) pri čemu se prilikom formiranja modela definira protok na ulazu u modelom obuhvaćenu dionicu vodotoka i protok na izlazu iz nje (Hantush, 2005). Razlika između ulaza i izlaza se ravnomjerno infiltrira u vodonosnik (slika 4 desno).

Niti za jedan od navedenih novijih pristupa modeliranju toka u prelaznoj zoni ne postoje odgovarajući podaci za rijeku Savu u istočnoj Slavoniji pa je u ovom istraživanju korišten pristup računanja protoka kroz kontaktni sloj jer je u tom pristupu greška prilikom usvajanja nepoznatih hidrogeoloških parametara manja.



Slika 4 Shematski prikaz izmjene vode između vodotoka i vodonosnika

4. Numerički model

Rijeka Sava i kanal su usječeni u površinski dio vodonosnog kompleksa a zdenci zahvaćaju cijeli kompleks pa Dupitova hipoteza nije u potpunosti zadovoljena. U samom vodonosniku je izražena anizotropija kao posljedica mehanizma taloženja pojedinih čestica i kao posljedica postojanja slabopropusnih leća unutar vodonosnog kompleksa. Opisani hidrogeološki uvjeti ukazuju na potrebu korištenja trodimenzionalnog modela toka i pronosa.

U ovom istraživanju je korišten programski paket MODFLOW koji je prikladan za opisivanje trodimenzionalnog strujanja, strujanja u višeslojnim sredinama kao i za opisivanja među

utjecaja vodotoka i vodonosnika (Trescott, 1975, 1976) te se često koristi za modeliranje toka podzemnih voda u raznim hidrogeološkim uvjetima (El Yaouti i sur., 2008; Posavec i Mustač, 2009; Cho i sur., 2009). Konvektivni pronos tvari je modeliran programom MODPATH. Model toka podzemnih voda se zasniva na rješavanju jednadžbe oblika:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

pri čemu su: K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} vrijednosti koeficijenta filtracije u smjeru x, y i z koordinatne osi, h piezometarska razina, W protok (volumetrijski) po jedinici volumena koji predstavlja ponore i/ili izvore, S_s koeficijent specifičnog uskladištenja porozne sredine, t vrijeme.

Vladajuća jednadžba se za zadane početne i rubne uvjete rješava metodom konačnih diferencija. Ovaj program se ubraja u češće korištene modele kako u svijetu tako i u Hrvatskoj (Posavec i Mustač, 2009).

U formiranom modelu je usvojena diskretizacija promatranog prostora kao ortogonalna ekvidistantna mreža razmaka 100x100 m u horizontalnoj ravnini dok je po vertikali vodonosnik razdijeljen na 21 segment (podsloj). Hidrogeološke karakteristike u svakoj ćeliji su definirane na osnovu usvojene geološke strukture vodonosnika. Početni uvjet je dobiven na način da je inženjerskom procjenom usvojen raspored hidroizohipsa te je simulirano strujanje uz rubni uvjet izmjerenih varijacija rijeke Save u trajanju od jedne godine. Raspored razina podzemne vode dobiven na opisani način je poslužio kao početni uvjet u modelu toka i pronosa.

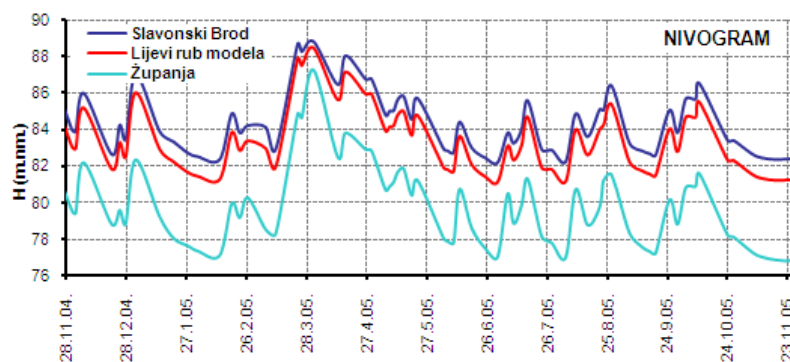
4.1 Baždarenje modela

U cilju određivanja hidrogeoloških karakteristika promatranog vodonosnog kompleksa kao i njegove interakcije sa rijekom Savom je provedeno baždarenje modela. Dinamika razine vodnog lica Save predstavlja osnovni nestacionarni rubni uvjet korišten u provedbi baždarnog postupka a model je kalibriran rješavanjem inverznog problema metodom pokušaja i pogrešaka. Razina vodnog lica Save usvojena je kao linearno promjenjiva uzduž modelirane dionice Save. U provedbi baždarenja korišten je nivogram Save, dobiven temeljem mjerenja na postajama Slavonski Brod i Županja, tijekom perioda 28.11.2004.-28.11.2005. prikazan je na slici 5 i razine podzemne vode u piezometrima.

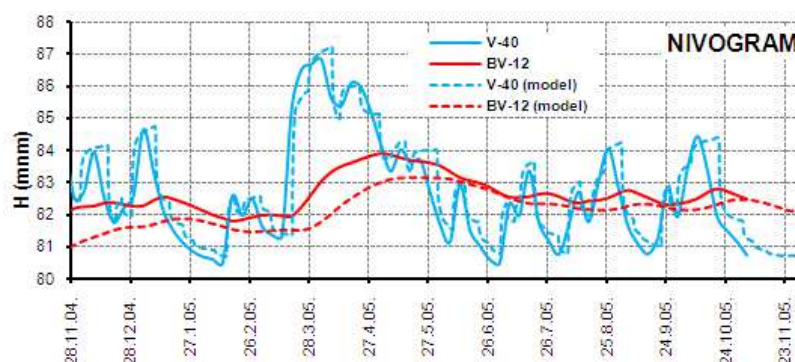
Širina korita Save na analiziranoj dionici usvojena je sa jednolikom vrijednosti od 250m. Kote dna Save na modeliranoj dionici su usvojene kao linearno promjenjive od kote 78,3 m n.m. na lijevom (zapadnom) rubu modela do kote 72,1 m n.m. na desnom (istočnom) rubu modela (Županja). Na svim rubovima modelske domene (slika 1) korišten je uvjet nepropusne granice. Prilikom rješavanja inverznog problema je simuliran i tok podzemnih

voda uz pretpostavka da postoji dotok iz smjera zapada i sjevera ali su količine koje dotiču u odnosu na doprinos rijeke Save u prihranjivanju vodonosnika zanemarive. Numeričke ćelije položene južno od korita Save tretirane su kao neaktivne. Prilikom kalibracije je Sava usvojena kao poznati rubni uvjet a mijenjane su karakteristike prijelaznog – hiporheičnog sloja te je promatran utjecaj dotoka iz smjera zapada i sjevera na promjene razine podzemnih voda.

Rezultati usporedbe izmjerenih i izračunatih nivograma za piezometar V-40 i zdenac BV-12 baždareni model su prikazani su na slici 6. Analiza propmjena razina u piezometru V40 pokazuju da rijeka Sava ima jako dobar kontakt sa vodonosnikom te da se promjene razina vode u Savi vrlo brzo i intenzivno prenose u vodonosnik. Usporedba izmjerenog i izračunatog nivograma pokazuje da numerički model dobro opisuje promjene razine podzemne vode uslijed varijacija razina u rijeci Savi. Piezometar BV 12 pokazuje da su promjene razina u području Velike Kopanice pod diominantnim utjecajem Save ali i da su oscilacije manje izražene.



Slika 5 Nivogram Save na postajama Slavonski Brod i Županja tijekom perioda 28.11.04.-28.11.05. i usvojeni nivogram Save na lokaciji lijevog ruba modeliranog područja



Slika 6 Usporedba izmjerenih i izračunatih nivograma za piezometre na pozicijama V-40 (crpna stanica hidročvora Sava) i BV-12 (Velika Kopanica) tijekom analiziranog baždarnog perioda 28.11.04.-28.11.05.

Za potrebe modeliranja pronosa tvari nije bilo odgovarajućih podataka o koeficijentu disperzivnosti i retardacije, kao niti podataka o razgradnji, adsorpciji i kemijskim reakcijama mogućih zagađivača pa je za modeliranje usvojeno da se kreće idealni traser.

4.2 Rubni uvjeti za buduće stanje

Rezultati baždarenja numeričkog modela kao i spoznaje o rasprostiranju vodonosnog kompleksa ukazuju da je dotok iz smjera zapadne, sjeverne i istočne granice zanemarivo mali, pogotovo u odnosu na predviđenu maksimalnu izdašnost regionalnog crpilišta od 2 m³/s. Iz tog razloga je prilikom modeliranja budućeg stanja usvojeno da je nema protoka kroz zapadnu, sjevernu i istočnu granicu modela.

Trodimenzionalnost numeričkog modela je omogućila da se za svaki pojedini zdenac definira interval u kojem je ugrađen filter odnosno dubina sa koje zahvaća vodu.

Razine vodnog lica Save na promatranoj dionici su usvojene kao nestacionarne i identične razinama korištenim u provedbi baždarenja modela, odnosno na osnovu rezultata mjerenja na limnigrafima Slavonski brod i Županja u vremenskom periodu 28.11.04.-28.11.05 (slika 5). Melioracijski kanal i VKDS su usvojeni sa projektom predviđenim dimenzijama i razinom vodnog lica na koti 80 m n.m. Dno melioracijskog kanala je usvojeno na koti 78 m.n.m., dok je dno VKDS usvojeno na koti 76 m n.m.

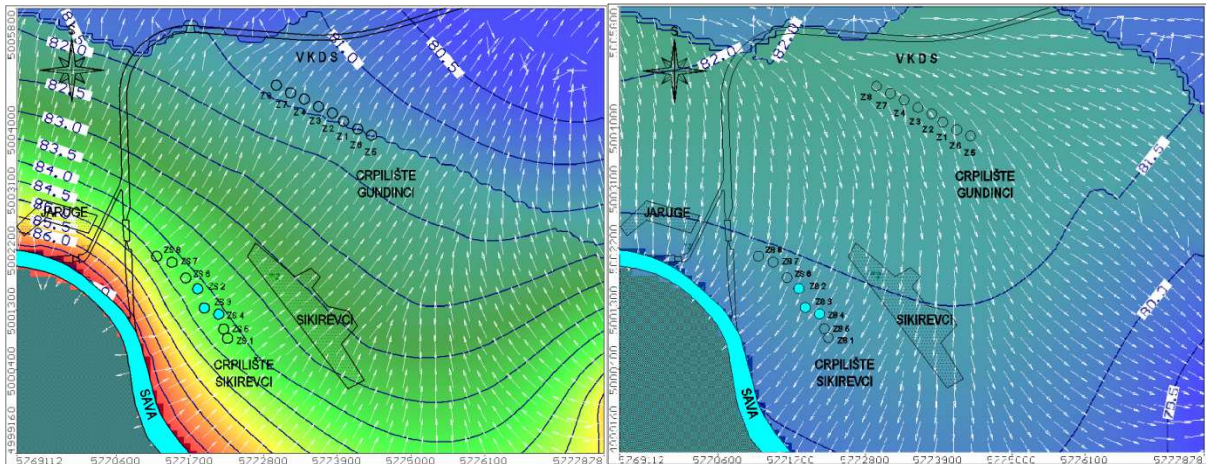
Proračuni su provedeni pod pretpostavkom postupnog povećanja izdašnosti crpilišta Sikirevci od sadašnjeg stupnja izgrađenosti ($Q_{SIK} = 3 \cdot 125 = 375$ l/s) do maksimalne projektom predviđene izdašnosti crpilišta Sikirevci i Gundinci sa po 8 zdenaca pojedinačne izdašnosti 125 l/s odnosno ukupno 2000 l/s ($Q_{SIK} = 8 \cdot 125 = 1000$ l/s i $Q_{GUN} = 8 \cdot 125 = 1000$ l/s).

5. Rezultati modeliranja toka podzemnih voda

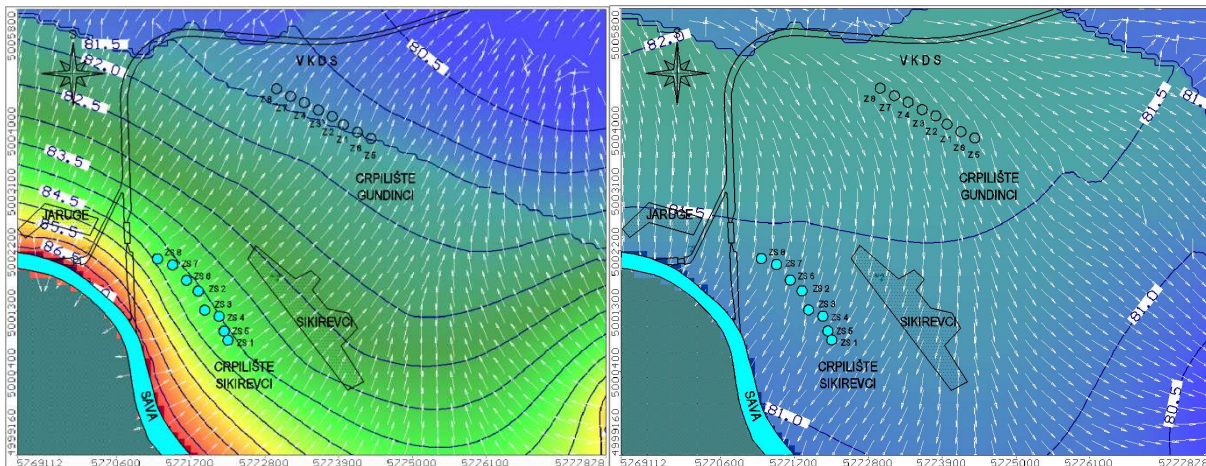
Kao karakteristične strujne slike se mogu usvojiti strujne slike za visoke vode rijeke Save pri vodostaju Save kod Slavenskog broda od 88.80 m n.m i za niske vode pri vodostaju Save 82.21m n.m.. Na slici 7 je prikazan detalj izračunate strujne slike u blizini crpilišta i višenamjenskog kanala za postojeći stupanj izgrađenosti sustava.

Analiza rezultata dobivenih numeričkim modelom pokazuje da u prirodnom stanju nema značajnijih razlika u smjerovima toka podzemnih voda po dubini vodonosnika ali postoje manje razlike u vrijednostima tlaka tj. raspored tlakova po vertikali nije u potpunosti hidrostatski. Za prikaz položaja hidroizohipsi i normiranih vektora brzina je odabrana horizontalna ravnina na koti 77.0 m n.m. koja približno odgovara koti dna Save jer se može pretpostaviti da će se eventualna zagađivala iz Save zbog anizotropije i postojanja horizontalnih slabopropusnih leća, kretati prema crpilištu dominantno kroz podpovršinske slojeve.

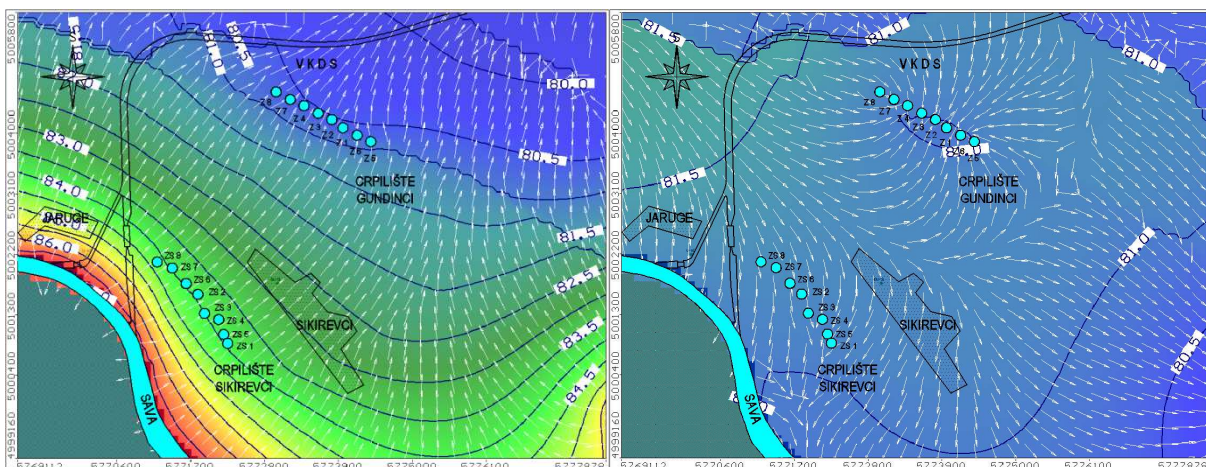
Na slici 8 su prikazane strujne slike za slučaj crpljenja iz svih osam projektom predviđenih zdenaca na crpilištu Sikirevci dok su na slici 9 prikazane strujne slike za maksimalnu izdašnost oba crpilišta za visoke (lijevo) i niske vode (desno).



Slika 7 Hidroizohipse i vektori brzina u horizontalnoj ravnini na 77 m n.m. za visoke (lijevo) i niske vode (desno) rijeke Save za postojeći stupanj izgrađenosti tj. izdašnost Sikirevaca $Q_{SIK} = 375$ l/s (aktivni zdenci imaju svjetloplavu ispunu unutar kruga)

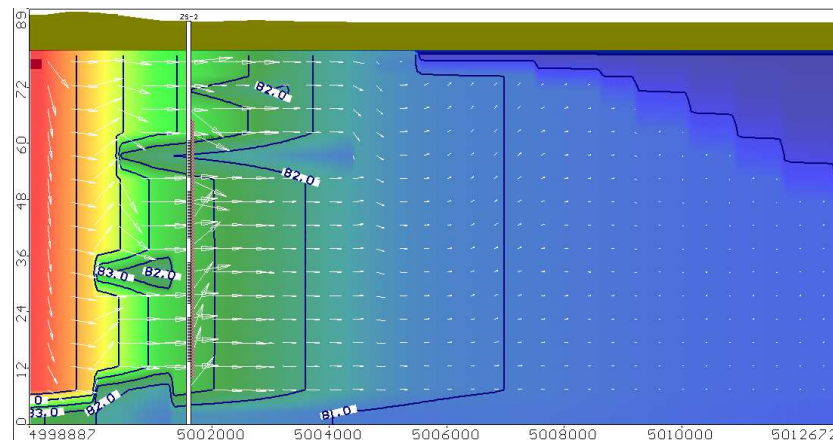


Slika 8 Hidroizohipse i vektori brzina za visoke (lijevo) i za niske vode rijeke Save (desno) za maksimalnu projektom predviđenu izdašnost crpilišta Sikirevci od $Q_{SIK} = 1000$ l/s



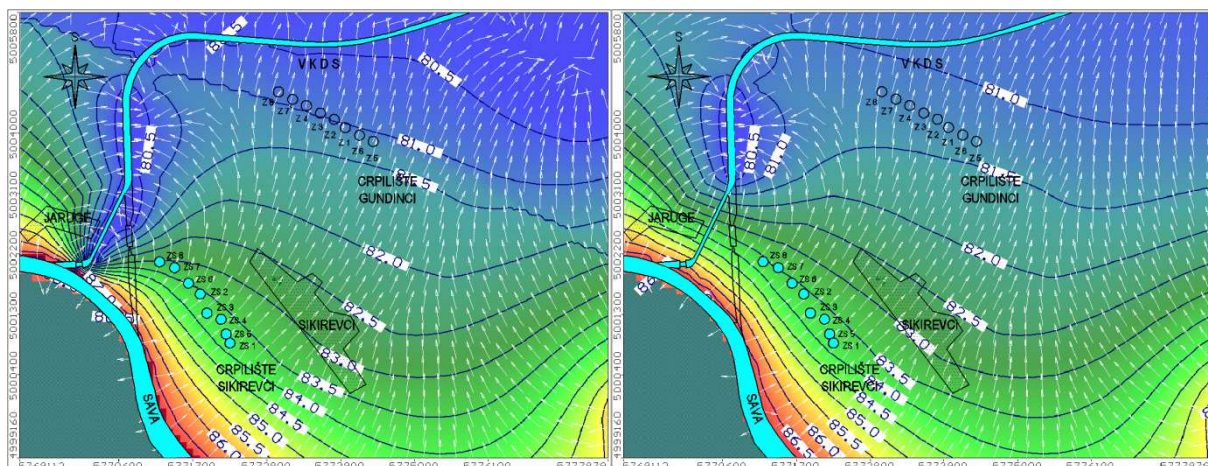
Slika 9 Hidroizohipse i vektori brzina za visoke (lijevo) i za niske vode rijeke Save (desno) za maksimalnu projektom predviđenu izdašnost crpilišta Sikirevci od $Q_{SIK} = 1000$ l/s i maksimalnu izdašnost crpilišta Gundinci od $Q_{GUN} = 1000$ l/s

Sava za vrijeme visokih voda intenzivno prihranjuje a za vrijeme niskih voda drenira vodonosnik za sve stupnjeve izgrađenosti crpilišta.



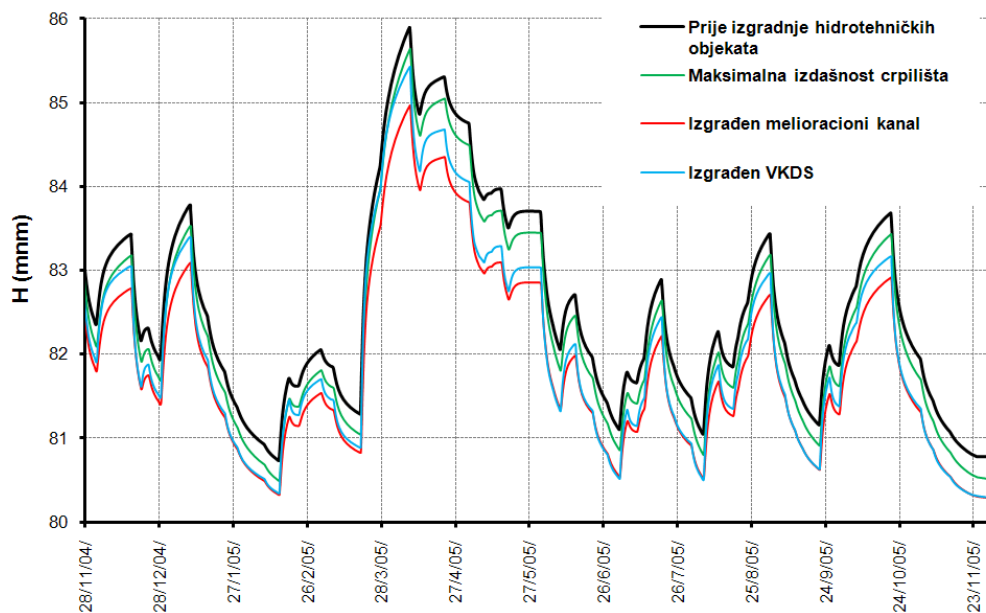
Slika 10 Ekvipotencijale i vektori brzina u vertikalnoj YZ ravnini modela koje prolaze kroz zdenac ZS-2 u Sikirevcima za visoke vode rijeke Save za maksimalnu projektom predviđenu izdašnost crpilišta Sikirevci od $Q_{SIK} = 1000$ l/s i maksimalnu izdašnost crpilišta Gundinci $Q_{GUN} = 1000$ l/s

Analiza ekvipotencijala i vektorima brzina u vertikalnom presjeku kroz vodonosni sloj (slika 10) ukazuje na postojanje vertikalne komponente brzine u uskom području uz rijeku Savu i djelomično uz zdence. Također se može očitati da su gradijenti u uvjetima visoke Save relativno veliki dok su gradijenti (a time i brzine) sjevernije od crpilišta znatno manje.



Slika 11 Ekvipotencijale i vektori brzina u horizontalnim ravninama na 77 m n.m. (lijevo) i 62,5 m n.m. (desno) za visoke vode rijeke Save pri $Q_{SIK} = 1000$ l/s i izgrađen melioracijski kanal

Strujna mreža za slučaj izgrađenosti melioracijskog kanala (slika 11) ukazuje na drenažno djelovanje projektom predviđenog kanala. Drenažno djelovanje kanala je uočljivije u sloju na koti 77 m n.m. (slika 11 lijevo) nego u sloju na koti 62.5 m n.m. (slika 11 desno) što potvrđuje da Dupuitova hipoteza u ovom području nije u potpunosti zadovoljena.



Slika 12 Razine podzemne vode na crpilištu Sikirevci za razne stupnjeve izgrađenosti sustava

Izgradnja hidrotehničkih objekata uzrokuje promjene razine podzemnih voda na području crpilišta Sikirevci (Slika 12). Najviše razine podzemne vode su u prirodnom – zatečenom stanju. Crpilište očekivano snižava razine podzemnih voda. Obzirom da je razina vode u projektu predviđenim kanalima niža od razina podzemnih voda i kanali će dodatno snižavati razine podzemnih voda pri čemu će pri niskim vodama rijeke Save i melioracioni i VKDS kanal snižavati približno jednako dok će pri visokim vodama rijeke Save infiltracija u području predluke umanjiti utjecaj drenažnog djelovanja VKDS-a. Prikazana sniženja usljed izgradnje VKDS-a neće ugroziti izdašnost crpilišta Sikirevci i Gundinci.

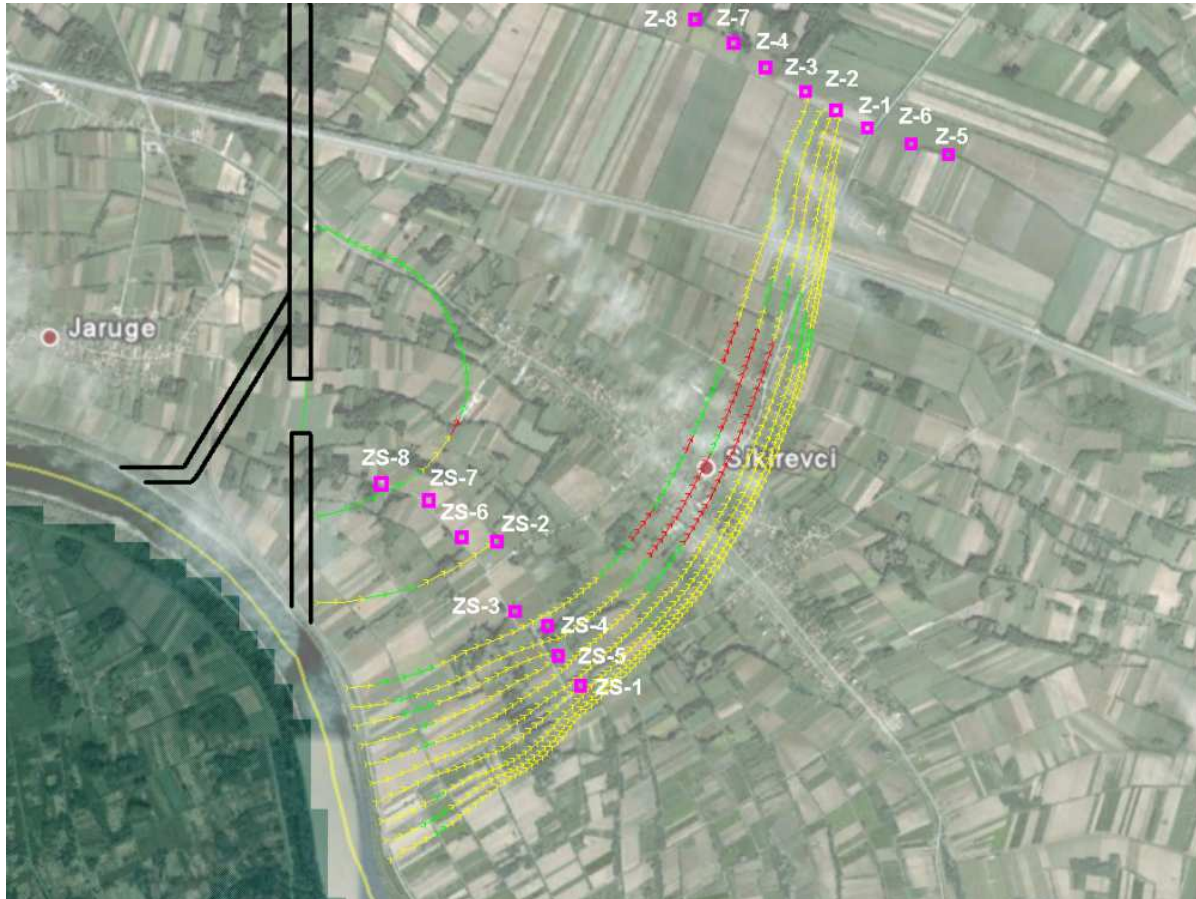
5.1 Rezultati modeliranja pronosa tvari

Iz rezultata dosadašnjih istraživanja može se utvrditi da je kakvoća voda u zdencima dobra, osim što su kod nekih uzoraka utvrđene povišene koncentracije željeza i mangana. Planom razvoja crpilišta je predviđeno da se u sljedećoj fazi izgradi uređaj za kondicioniranje vode crpilišta “Istočna Slavonija”.

U okviru istraživanja mogućeg širenja zagađivala iz melioracionog kanala, VKDS-a ili rijeke Save prema crpilištima Sikirevci i Gundinci su modelirane i trajektorije putovanja pojedinih čestica iz smjera površinskih voda prema zdencima. Pri tomu su korištene traserske čestice, inicijalno upuštene pri dnu korita. Za ovu analizu korišteni su stacionarni rubni uvjeti Save definirani srednjim vodostajem i shemom napredovanja čestica *prema naprijed*.

Trajektorije pojedinih čestica u uvjetima srednje razine rijeke Save i izdašnosti crpilišta Sikirevci i Gundinci od po 1000 l/s (slika 13) pokazuju da pojedine čestice tijekom svog puta od vodotoka do zdenca mjestimično poniru (žute strelice), zadržavaju se u istom sloju

(zeleno) a ponegdje i uzdižu prema površini terena (crvene strjelice). Razmak između pojedinih sukcesivnih strelica je 50 dana pa se može očitati da je putovanje čestica od Save do zdenaca u Sikirevcima dulje od jedne godine a do crpilišta Gundinci znatno dulje. Može se primjetiti da će dio čestica iz spojnog kanala putovati direktno u VKDS.



Slika 13 Napredovanje tvari iz Save prema zdenacima crpilišta u Sikirevcima i Gundincima

Vrijeme zadržavanja u vodonosniku za pojedine čestice koje se kreću iz Save (područja predluke) u zdenca će se nakon izgradnje VKDS-a bitno skratiti iz dva razloga:

- nakon izgradnje spojnog kanala između prevodnice i korita Save će se bitno skratiti udaljenost koju čestica trebaju prevaliti od vodotoka do zdenca i
- obzirom da će površinske vode u spojnog kanalu biti na približno istoj koti kao i u vodotoku, skraćivanjem puta čestica za istu razliku razina između kanala i zdenaca će se povećati hidraulički gradijent a time i brzine toka podzemne vode

Tijekom vremena će zbog manjih brzina u spojnog kanalu doći do procesa kolmatacije i taloženja čestica što će smanjiti količinu infiltrirane vode te produljiti vrijeme zadržavanja čestica u vodonosniku.

Temeljna činjenica vezana uz porijeklo onečišćenja zahvaćenih pitkih voda iz zdenaca crpilišta Sikirevci i Gundinci je da ista nisu antropogenog porijekla, već iz samog vodonosnika.

Onečišćenja koja prelaze propisane maksimalno dozvoljene koncentracije u crpljenoj vodi povezana su uz lokacije određenih eksploatacijskih zdenaca i istraţnih bušotina. Pošto je temeljni izvor prihranjivanja vodonosnika rijeka Sava, proizlazi da se razliĉita kakvoća vode na pojedinim zdencima i piezometrima moţe isključivo pripisati uvjetima koji vladaju u vodonosniku.

Promjena kakvoće vode na zahvatima ne prati promjenu kakvoće u rijeci Savi kao temeljnom izvoru prihranjivanja već se mogu pripisati stohastiĉkoj prirodi procesa pronosa pri ĉemu dominantnu ulogu ima neravnomjernost polja brzina u vodonosniku kao i njegova nehomogenost.

Numeriĉkim je modelom pokazano da je preteţiiti reţiim strujanja od rijeke Save prema kanalu, što znaĉi da je kanal prijernik eventualnog oneĉišćenja iz vodonosnika, a ne izvor oneĉišćenja. U uvjetima vrlo niskih razina podzemnih voda je moguće da kanal na nekim dijelovima prihranjuje vodonosnik ali je trajanje te pojave toliko kratko da je nemoguća uspostava reţiima u kojem bi voda iz kanala, a s njom i eventualno oneĉišćenje, dospjeli na veću udaljenost od kanala te nastavili napredovanje prema zdencima iz kojih se zahvaća pitka voda.

Uz sve propisane mjere zaštite vode u plovnom kanalu i/ili melioracijskom kanalu, voda iz istih ne bi se smjela bitno kakvoćom razlikovati od savske vode, što ove objekte ne izdvaja kao posebni rizik za vodonosnik. Dugoroĉno gledano na kakvoću vode u vodonosniku moţe utjecati presudno rijeka Sava pod pretpostavkom da se njezina kakvoća bitno i trajno naruši pronosom velikih koliĉina nerazgradivog ili teško razgradivog, lako pokretnog oneĉišćenja koje bi bilo u stanju promijenjeno ili nepromijenjeno svladati izuzetno povoljnu prirodnu zaštitu vodonosnika. Takvo potencijalno oneĉišćenje sigurno ne bi bilo iz kategorije pokazatelja koji sada povremeno prelaze propisane MDK.

5. Zaključak

Višenamjenski kanala Dunav-Sava i regionalno crpilište istoĉne Slavonije će biti izgrađeni na maloj međusobnoj udaljenosti te će utjecat na promjene razine vode u istom vodonosnom sloju. U ovom radu su opisana istraţivanja mogućeg utjecaja projektom predviđenog melioracionog odnosno višenamjenskog kanala Dunav-Sava na razine i kvalitetu podzemnih voda sa posebnim osvrtom na regionalno crpilište istoĉne Slavonije u Sikirevcima.

U radu je istaknuta potreba korištenja trodimenzionalnog modela toka podzemnih voda i pronosa tvari. Vodotoci (rijeka Sava i višenamjenski kanal) su usjeĉeni relativno plitko u vodonosni kompleks a zdenci zahvaćaju propusnije slojeve po cijeloj dubini vodonosnog kompleksa pa Dupuitova hipoteza o horizontalnom strujanju nije u potpunosti ispunjena što

su potvrdili i rezultati modeliranja. Ova činjenica je od izuzetne važnosti u slučaju pojave zagađivala u podzemnim vodama koje bi se kretalo prema zdencima i potrebe njihove sanacije. Trodimenzionalni modeli su nužni kod modeliranja pronosa tvari koji imaju značajno različitu gustoću od vode (LNAPL ili DNAPL) ili se zbog izražene anizotropije kreću samo kroz dio vodonosnog kompleksa.

Razina vode u kanalu će u većem dijelu godine biti niža od razina podzemnih voda te će kanal drenirati vodonosnik i uzrokovat sniženja razine podzemnih voda na crpilištima. Intenzitet dreniranja nije velik jer je kanal usječen u slabije propusne pokrovne slojeve te sniženja usljed izgradnje VKDS-a neće ugroziti izdašnost crpilišta Sikirevci i Gundinci.

U području projektom predviđene predluke koja je u stvarnosti novosagrađeni rukavac Save između korita za srednju vodu i prevodnice će se uspostaviti ista razina vode kao u Savi. U tom području će se za vrijeme srednjih i visokih voda odvijati intenzivno prihranjivanje vodonosnika savskom vodom. Promatrajući putovanje čestica vode i eventualnih zagađivala iz Save prema crpilištu Sikirevci se može konstatirati da će se za neke čestice vrijeme putovanja do zdenaca nakon izgradnje VKDS-a bitno skratiti iz dva razloga:

- a) nakon izgradnje spojnog kanala između prevodnice i korita Save će se bitno skratiti udaljenost koju čestica trebaju prevaliti od vodotoka do zdenca i
- b) obzirom da će površinske vode u spojnem kanalu biti na približno istoj koti kao i u vodotoku, skraćivanjem puta čestica za istu razliku razina između kanala i zdenaca će se povećati hidraulički gradijent a time i brzine toka podzemne vode

Ova zapažanja se odnose na stanje neposredno nakon izgradnje kanala. Tijekom vremena će zbog manjih brzina u spojnem kanalu doći do procesa kolmatacije i taloženja čestica što će smanjiti količinu infiltrirane vode i produljiti vrijeme zadržavanja čestica u vodonosniku.

Čestica vode koje se iz Save kreću prema zdencima će se i u najnepovoljnijim hidrološkim i eksploatacijskim uvjetima relativno dugo zadržavati u vodonosniku te su po tom kriteriju ispunjeni uvjeti zaštitnih zona.

Razina vode u višenamjenskom kanalu je pretežni dio godine niža od razina u Savi i vodonosniku te će kanal biti prijemnik eventualnog onečišćenja iz vodonosnika, a ne izvor onečišćenja. U uvjetima vrlo niskih razina podzemnih voda je moguće da kanal na nekim dijelovima prihranjuje vodonosnik ali je trajanje te pojave vrlo kratko pa je nemoguća uspostava režima u kojem bi voda iz kanala, a s njom i eventualno onečišćenje, dospjeli na veću udaljenost od kanala te nastavili napredovanje prema zdencima iz kojih se zahvaća voda za potrebe vodoopskrbe.

Uz sve propisane mjere zaštite vode u plovnom i/ili melioracijskom kanalu, voda iz njih se ne bi smjela kakvoćom bitno razlikovati od savske vode, što ove objekte ne izdvaja kao posebni

rizik za vodonosnik. Dugoročno gledano na kakvoću vode u vodonosniku može utjecati presudno rijeka Sava pod pretpostavkom da se njezina kakvoća bitno i trajno naruši pronosom velikih količina nerazgradivog ili teško razgradivog, lako pokretnog onečišćenja koje bi bilo u stanju promijenjeno ili nepromijenjeno svladati izuzetno povoljnu prirodnu zaštitu vodonosnika. Takvo potencijalno onečišćenje sigurno ne bi bilo iz kategorije pokazatelja koji sada povremeno prelaze propisane MDK.

I u Hrvatskoj smo svjedoci da se prilikom infiltracije pojedinih površinskih voda u vodonosnik mijenja kvaliteta podzemnih voda što ugrožava rad pojedinih crpilišta. Da bi se procesi koji se odvijaju u prelaznoj zoni mogli spoznati i na taj način predvidjeti učinci pojedinih hidrotehničkih zahvata u koritu vodotoka, potrebno je sistematski provoditi ciljana hidrokemijska istraživanja. Istraživanjima treba obuhvatiti mjerenja količinu vode koja se infiltrira (ili drenira) iz vodotoka u vodonosnik i kemijske procese koji se odvijaju o prelaznoj zoni. U suprotnom bi se moglo provedbom nepromišljenih i nedovoljno istraženih građevinskih zahvata smanjiti kvalitetu podzemne vode koja se koristi za vodoopskrbu.

Sistematski pristup praćenju hidrogeokemijskih procesa u kontaktnom sloju i u vodonosniku je nužan kako bi se mogli predvidjeti eventualni negativni učinci projektom predviđenih građevinskih zahvata na kvalitetu podzemnih voda i po potrebi projektirati i izgraditi uspješne sanacije zagađenja in situ.

U ovom radu istraživani šljunkovito-pjekoviti vodonosnik se proteže i južno od Save te bi trebalo istražiti mogućnost pronosa zagađivala iz bosanskog djela vodonosnika prema predviđenim crpilištima Sikirevci i Gundinci.

Literatura:

Hrvatski geološki institut (2005): *Hidrogeološka istraživanja u cilju definiranja eksploatacijskih zaliha podzemne vode na potencijalnom regionalnom crpilištu Gundinci-Sikirevci*, Zagreb.

Baćani, A. (1997): *Značajke hidrauličkih granica vodonosnih slojeva na vododjelnici Savskog i Dravskog porječja u istočnoj Slavoniji*, Disertacija, Rudarsko-naftno-geološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Bereslavskii, E.N. (2006): Groundwater Flow to a System of Drainage Canals, *Water Resources*, Vol.22, No 4, pp 417-420.

Carbiener, R., Tremolueres M. (2006): The rine rift valley ground water- river interactions: Evolution of the susceptibility to pollution, *Regulated Rivers:Research &Management*, Vol 5.,No 5, pp 375-389.

Cho, J., Barone, V.A., Mostghimi, S. (2009): Simulation of land use impacts on groundwaterlevels and streamflow in a Virginia watershed, *Agricultural Water Management*, online, 96.

- Eglin, I., Roeck, U., Robach, F., Tremolieres, M. (1997): Macrophyte biological methods used in the study of the exchange between the rhine river and the groundwater, *Water Resources*, Vol.31, No. 3, pp. 503-514.
- El Yaouti, F., El Mandour., A., Khattach, D., Kaufmann, O. (2008): Modelling groundwater flow and advective contaminant transport in the Bou-Areg unconfined aquifer (NE Marocco), *Journal of Hydro-environment Research*, 2, pp.192-209.
- Gjetvaj, G, Petošić, D., Mustač.I (2008): Prediction of Water Balance Change After Construction of the Danube-Sava Multipurpose Canal, *XXIV Conference of the Danubian Countries on the Hydrological Forecasting and Hydrological Bases of Water Management*, Conference Abstracts pp. 98.
- Hantush, M.M.(2005): Modeling stream-aquifer interaction with linear response function, *Journal of Hydrology*, Vol. 311, pp. 59-79.
- Hinke, S.R., Duff, J.H., Triska, F.J. ,Laenen, A., Gates, E.B., Bencala, K.E., Wentz, D.A., Silva S.R. (2001): Linking hyporheic flow and nitrogen cycling near the Willamette River- a large river in Oregon, USA, *Journal of Hydrology*, Vol. 244, pp157-180.
- Kalbus E.,Reinstorf F., Schirmer M (2006): Measuring methods for groundwater-surface water interaction: a review, *Hydrology and Earth System Science*, Vol 10, pp 873-887.
- Mustač, I. (2009): *Modeliranje utjecaja višenamjenskog kanala Dunav-Sava na dinamiku podzemnih voda*, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Agronomski fakultet, Zagreb.
- Mustač I., Gjetvaj G., Petošić,D.,Tomić,F. (2011): Impact of the future multipurpose Danube-Sava Canal on Groundwater dynamics, *Tehnički vjesnik (Technical Gazette)*, No 2, Vol 18, pp. 211- 218.
- Pekaš, Ž., Brkić, Ž. (2007): Crpilište regionalnog vodovoda Istočne Slavonije – rezultati tridesetgodišnjeg istraživanja, *4. Hrvatska konferencija o vodama*,pp 787-796, Opatija.
- Posavec, K., Mustač, I. (2009): Zone sanitarne zaštite međimurskih vodocrpilišta, *Hrvatske vode*, Vol.17, No 68, pp.113-124.
- Sophocleous, M. (2002): Interactions between groundwater and surface water: the state of the science, *Hydrogeol. J.*, 10,52-67.
- Trescott, P.C. (1975): *Documentation of finite-difference model for simulation of three-dimensional groundwater flow*, U.S. Geological Survey Open-File Report 75–438, 32 p.
- Trescott, P.C., Larson, S.P. (1976): *Supplement to Open-File Report 75–438, Documentation of finite-difference model for simulation of three-dimensional ground-water flow*, U.S.Geological Survey Open-File Report 76–591, 21 p.
- Trescott, P.C., Pinder, G.F., Larson, S.P. (1976): *Finite-difference model for aquifer simulation in two dimensions with results of numerical experiments*, U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations, book 7, chap. C1, 116 p.

PRIMJER 4

Usporedba modeliranih i mjerenih površinskih vjetrovnih valova na području Jadrana

SAŽETAK:

Prikazani su rezultati numeričkog modeliranja valnog generiranja, razvoja i zamiranja gravitacionih vjetrovnih valova te valnih deformacija u akvatorijalnom području Jadranskog bazena. Dinamika gravitacijskih vjetrovnih valova na istraživanom području dobivena je temeljem rezultata prognostičkog atmosferskog modela Aladin. Modelskim rezultatima i mjerenjem pokriven je period 1.11.07.-15.11.08. Korišten je numerički model Mike 21/SW (www.dhigroup.com). Za potrebe verifikacije rezultata dobivenih numeričkim modelom korišteni su podaci s dvije mjerne valografske postaje.

1. Uvod

Važan element u provedbi proračuna stabilnosti hidrotehničkih konstrukcija, poput platformi na otvorenom moru ili valobrana u priobalju, je analiza dinamičkog opterećenja izazvanog valovima. Zbog toga je vrlo važno omogućiti praćenje vjetrovalne klime na području planiranih građevinskih-hidrotehničkih aktivnosti sa što većom prostornom i vremenskom rezolucijom. Mjerenje valova sa valografima je vremenski i financijski zahtjevno a dobivene informacije mjerodavne su za sam lokalitet provedenog monitoringa. U novije vrijeme valografska mjerenja obavljaju se u svrhu baždarenja numeričkih modela sa kojima se omogućava prostorna interpolacija rezultata na proizvoljno detaljnim prostornim i vremenskim skalama.

Za aktiviranje operativnog-prognostičkog modela valne dinamike potrebni su i podaci u vidu polja vjetrovnog djelovanja iznad analiziranog područja, također iz operativnog atmosferskog modela. U Državnom hidrometeorološkom zavodu Hrvatske je trenutno operativno funkcionalan atmosferski model ALADIN u hidrostatskoj verziji baziranoj na primitivnim jednadžbama sa numeričkom implementacijom razvijenom u kooperaciji sa nekoliko nacionalnih meteoroloških institucija. Izlazni skup podataka o brzinama i smjerovima vjetra iz modela Aladin korišten je za numeričko spektralno modeliranje valne klime na području Jadrana.

Za potrebe verifikacije numeričkog modela korišteni su podaci o mjerenjima valova s dvije valografske postaje tvrtke Datawell, tip MKIII (slika 1). Položaj mjerne postaje V1 se nalazi na $\varphi=44^{\circ} 44.5'$ i $\lambda=13^{\circ} 10.2'$, a postaje V2 na $\varphi=43^{\circ} 29.3'$ i $\lambda=16^{\circ} 27.9'$. Podatci su mjereni u periodu 1.11.2007.-15.11.2008. tijekom provedbe *Programa praćenja stanja jadranskog mora - Jadranski projekt* (Andročec i sur., 2009). Izlazni podatci valografa sadrže standardne valne statistike za sukcesivne 30 minutne periode.



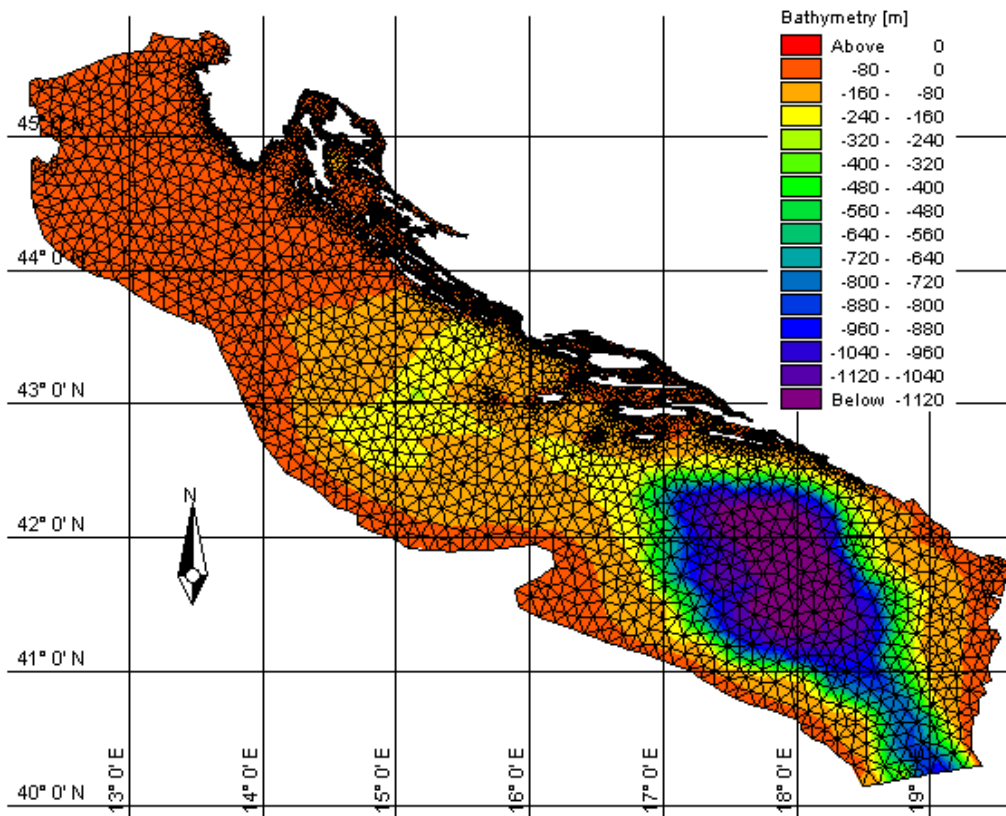
Slika 1 Pozicije valografskih postaja V1 i V2 korištenih za baždarenje numeričkog modela

2. Pristup modeliranju

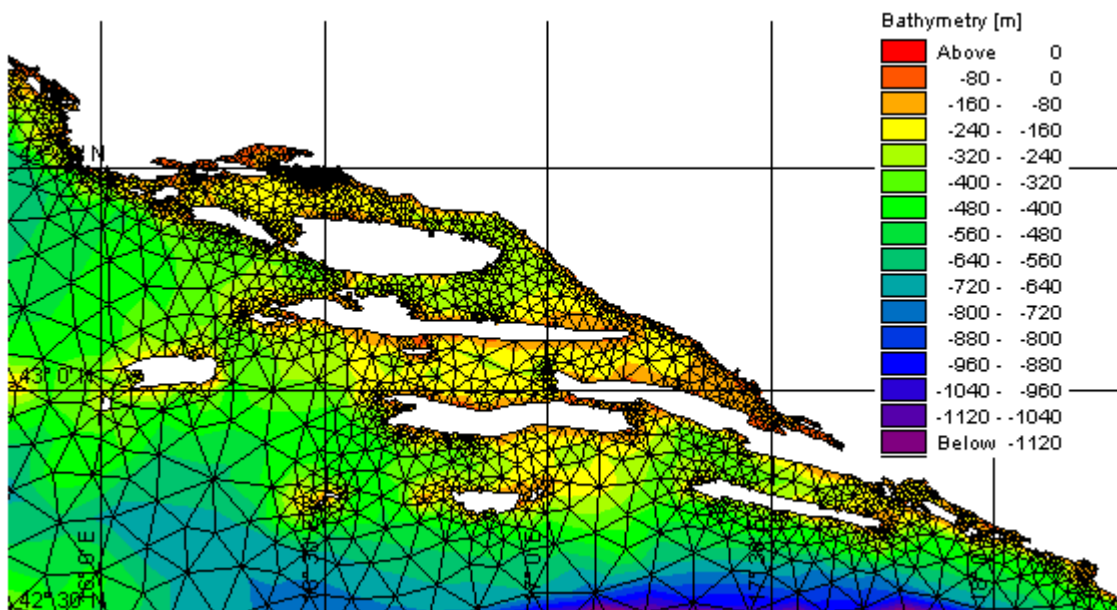
Na slici 2a prikazana je prostorna domena numeričkog modela valnog generiranja kojom je obuhvaćeno područje cijelog Jadrana. Na slikama 2a i 2b prikazana je i batimetrijska podloga bazirana na prostornoj kontinuiranoj rasterskoj mreži podataka od 7.5' ($\approx 200\text{m}$) u longitudinalnom i latitudnom smjeru te modelska diskretizacija prostorne domene s nestrukturiranom mrežom trokutnih konačnih volumena. Udaljenosti između numeričkih čvorova postavljenih u težištima konačnih volumena su varijabilne u rasponu od 160m do 9500m. Modelska domena nema otvorenih granica, a sve krute granice su potpuno absorpcijske (odsustvo refleksije). Usvajanjem takve pretpostavke o izuzeću otvorenih granica, koje su očigledno prisutne u prirodi na Otrantu, unesena je inicijalna pogreška u modelskom generiranju valova pri vjetrovima iz SE smjera. Obzirom na položaj obalne crte zaključuje se da unesena pogreška prihvatljivo mala te da ima utjecaj na modelske rezultate samo na području bliskom Otrantu.

U numeričkom modelu Mike 21/SW korištena je puna spektralna formulacija koja se oslanja na radove Komen i sur. (1994). Za spektralnu diskretizaciju frekvencijske domene korištena je logaritamska skala od minimalne frekvencije 0.08Hz (valni period 12.5s) do maksimalne frekvencije 0.95Hz (valni period 1.05s), kroz 26 diskretnih koraka. Spomenutim rasponom osigurava se obuhvat svih relevantnih spektralnih perioda koje se mogu očekivati u analiziranom području. Modelom su obuhvaćeni procesi valnog generiranja s vjetrom, međusobnih valnih nelinearnih interakcija, refrakcije i šolinga te disipacijskog procesa pri površinskim lomovima valova. Korišteni su disipacijski koeficijenti s prostorno homogenim i stacionarnim vrijednostima (Kahma i Calkoen, 1992). Refleksija i difrakcija su također tretirane ovim modelom. Vremenska integracija provodi se s frakcionalnim koracima pri čemu je za propagaciju valnog djelovanja korištena multisekvencijalna Eulerova eksplicitna metoda. Funkcija izvora u jednadžbi očuvanja valnog djelovanja tretirana je na temelju

posljednje treće generacije modela, a numerička integracija iste provodi se prema DIA (Discrete Interaction Approximation) metodi prikazanoj u radovima Komen i sur. (1994) te Hercbach i Janssen (1999). Konvektivni fluksevi proračunavaju se upwind numeričkom shemom prvog reda.



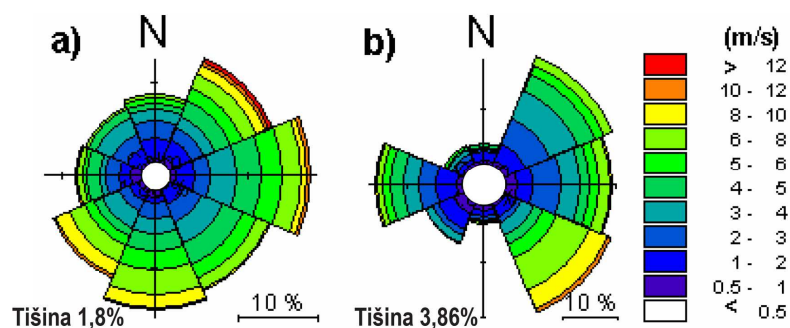
Slika 2a Prostorna domena numeričkog modela s batimetrijskom podlogom i prostornom diskretizacijom s trokutnim konačnim volumenima



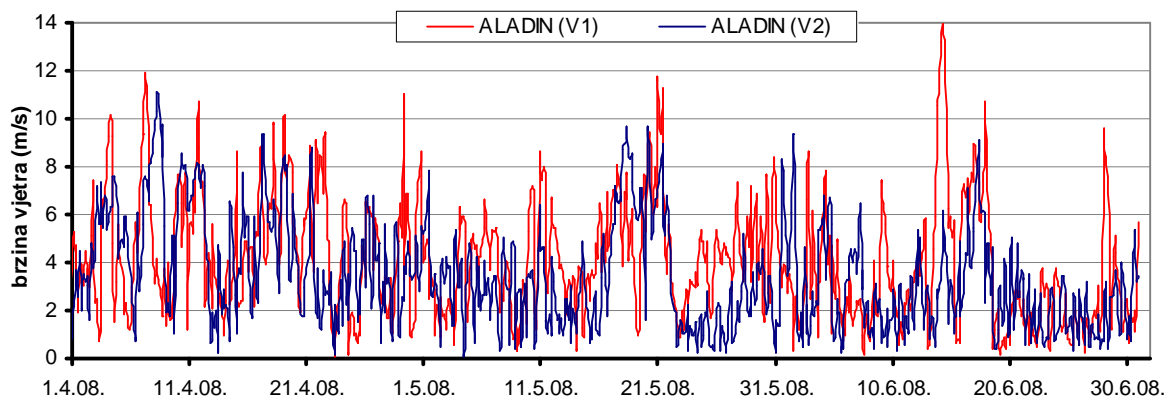
Slika 2b Detalj prostorne domene numeričkog modela s batimetrijskom podlogom i prostornom diskretizacijom s trokutnim konačnim volumenima

Za generiranje valne dinamike potrebni su podatci o vjetru (intenzitet i smjer) u području prostorne domene numeričkog modela na 10m od površine mora. Ti podatci dobiveni su iz prognostičkog numeričkog atmosferskog modela Aladin-HR (Courtier i sur, 1991; Cordoneanu i Geleyn, 1998; Brzović, 1999; Brzović i Strelec-Mahović, 1999; Ivatek-Šahdan i Tudor, 2004). sa horizontalnom rezolucijom od 8km i vremenskom rezolucijom od 3 h. Početni uvjeti (1.11.2007.) definirani su nultim valnim spektrom, odnosno pretpostavlja se odsustvo inicijalnog valnog gibanja na cijelom području modelske prostorne domene.

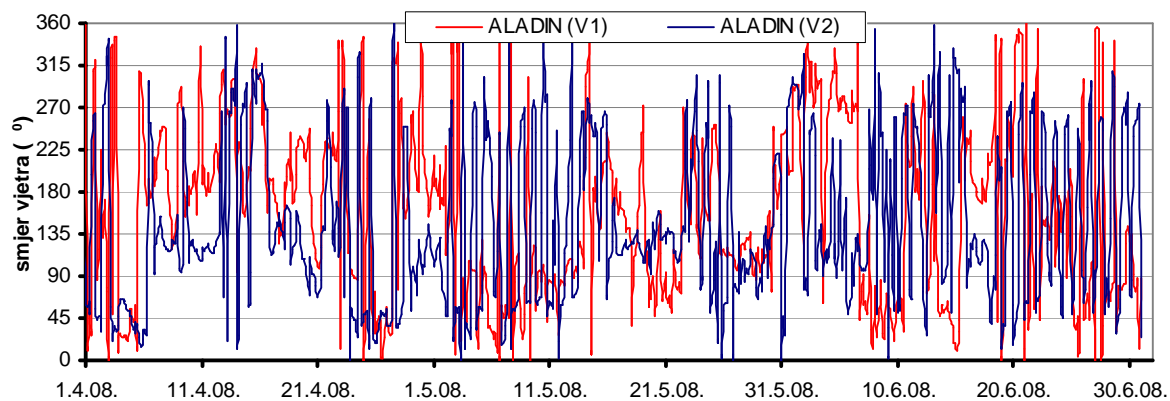
Ruže vjetrova za period 1.11.07.-15.11.08. dobivene temeljem rezultata iz modela Aladin na pozicijama valografskih postaja V1 i V2 prikazane su na slici 3. Na slikama 4 i 5 prikazana je vremenska serija brzine i smjera vjetra tijekom razdoblja 1.4.08.-1.7.08. za poziciju valografskih postaja V1 i V2.



Slika 3 Ruže vjetrova za cijeli period provedenih analiza temeljem rezultata iz modela Aladin na pozicijama valografa V1 i V2



Slika 4 Vremenski niz podataka o brzini vjetra dobiven temeljem rezultata iz modela Aladin na položaju valografa V1 i V2 tijekom perioda 1.4.08. – 1.7.08. (na 10m iznad površine mora)

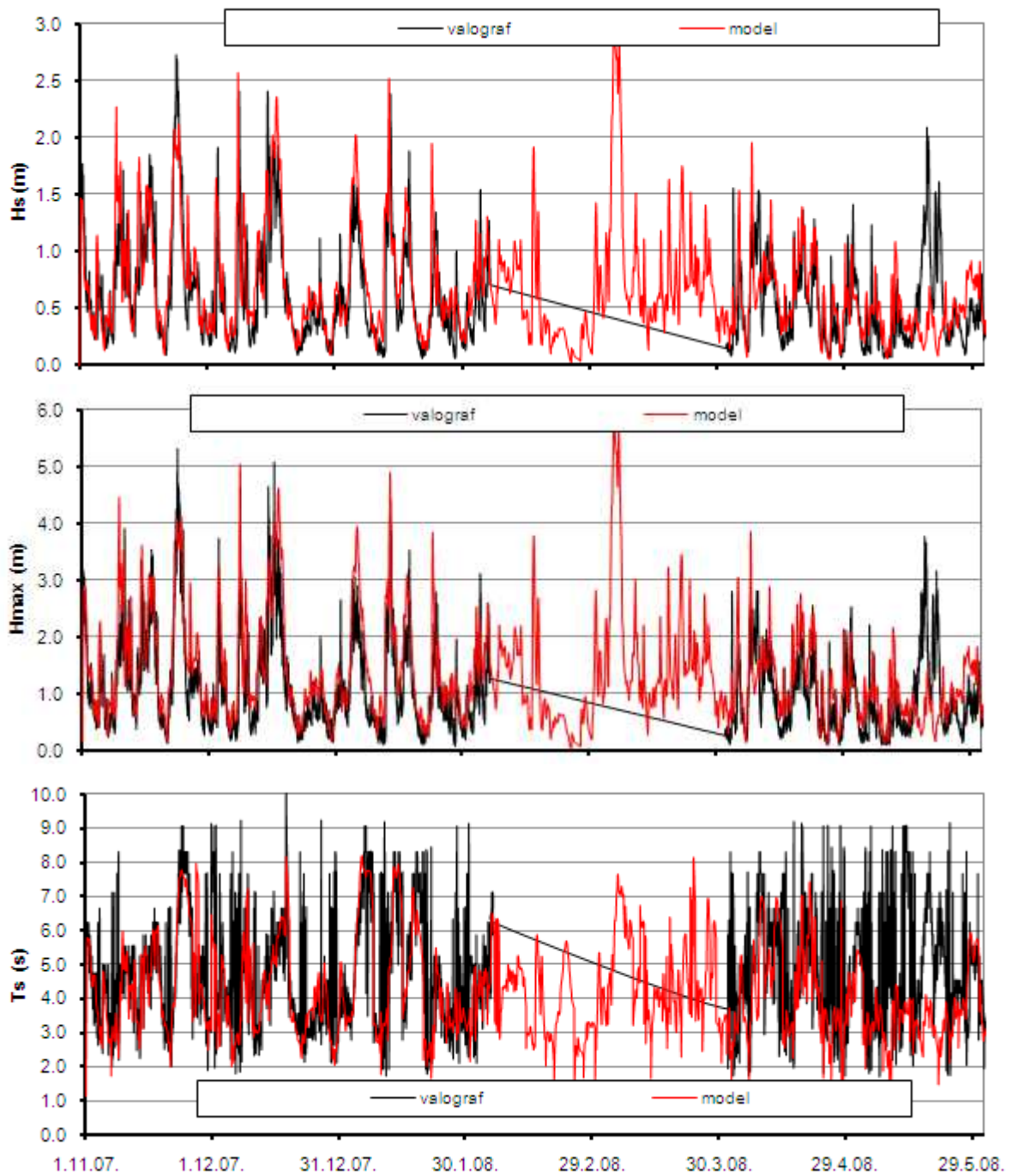


Slika 5 Vremenski niz podataka o smjeru vjetra dobiven temeljem rezultata iz modela Aladin na položaju valografa V1 i V2 tijekom perioda 1.4.08. – 1.7.08. (na 10m iznad površine mora)

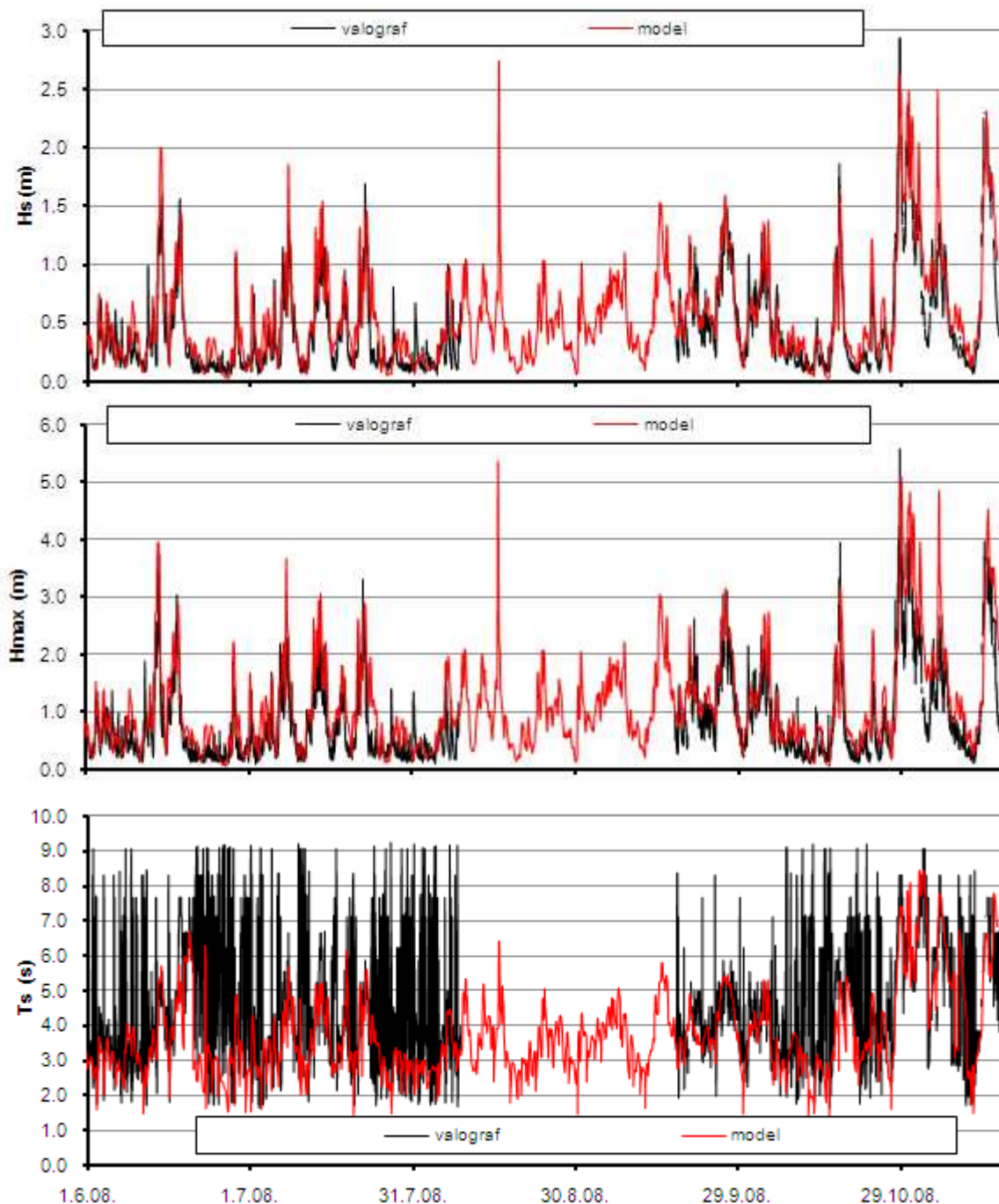
3. Rezultati provedenih analiza

Na slici 6 prikazana je usporedba izmjerene i modelirane dinamike značajnih valnih visina, maksimalnih valnih visina te vršnih perioda na poziciji valografske postaje V1 tijekom analiziranog perioda (1.11.07-15.11.08).

Sa slike 6 može se uočiti da na poziciji valografa V1 model najbolje opisuje izmjerene vrijednosti za vrijeme djelovanja bure (NE smjer vjetra - 14.6.08.), a nešto lošije za vrijeme djelovanja lebića (SW smjer vjetra - 7.4.08., 19.4.08., 22.4.08., 29.4.08., 18.6.08.). U terminu djelovanja tramontane (N smjer vjetra - 4.4.08.) modelske vrijednosti premašuju izmjerene. Interesantna je situacija u terminima djelovanja juga (SE smjer vjetra - 11.4.08., 17.-18.5.08., 17.6.08.), posebice u periodu 17.-18.5.08. kada modelske vrijednosti znatno podbacuju u odnosu na izmjerene. Razlog odstupanja modelskih vrijednosti od izmjerenih vrijednosti H_s i H_{max} je vjerojatno loša prognoza intenziteta vjetra iz atmosferskog modela Aladin. Srednja vrijednost brzine vjetra dobivena modelom Aladin tijekom perioda 17.-18.5.08. na poziciji V1 iznosi 6.2m/s. Ukoliko se pretpostavi da je ta brzina konstantna na cijelom privjetrištu od 700km, te ukoliko se upotrijebi Groen-Dorrenstein dijagram, dobiva se značajna valna visina $H_s=1m$, što je vrlo blisko modelskoj vrijednosti. Na slici 7 prikazani su omjeri izmjerenih i modeliranih H_s na poziciji valografa V1 u spomenutim terminima pri pojavi ekstrema valnih visina. Srednja vrijednost omjera maksimalnih i značajnih valnih visina H_{max}/H_s tijekom analiziranog perioda na poziciji valografa V1 iznosi 1.84 temeljem mjerenja i 2.0 temeljem modeliranja. Obje vrijednosti pripadaju literaturno referenciranom rasponu $H_{max}/H_s = [1.6 - 2.0]$ (Goda, 2000).



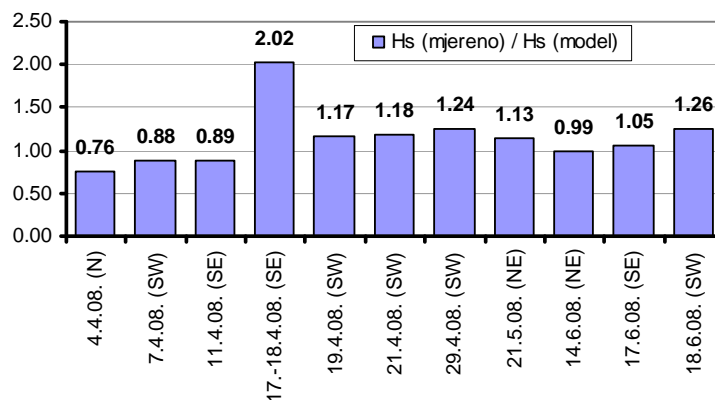
Slika 6a Izmjereni i modelirani vremenski niz značajnih valnih visina H_s (gore), maksimalnih valnih visina H_{max} (sredina) i vršnih perioda T_p (dolje), na poziciji valografske postaje V1 za period (1.11.07. - 31.5.08.)



Slika 6b Izmjereni i modelirani vremenski niz značajnih valnih visina H_s (gore), maksimalnih valnih visina H_{max} (sredina) i vršnih perioda T_p (dolje), na poziciji valografske postaje V1 za period (1.6.08. - 15.11.08.)

Prema rezultatima sa slike 6 izmjerene vrijednosti T_p prosječno su veće od modeliranih za 19%. Najizraženije relativne razlike pojavljuju se za vrijeme vjetrovnih tišina kada modelske vrijednosti značajnih valnih visina H_s i vršnih perioda T_p poprimaju vrijednosti bliske nuli. Nadalje, omjeri spektralnih vršnih perioda T_p (stohastička veličina) i značajnih perioda $T_{1/3}$ (statistička veličina), u situacijama pojave ekstrema valnih visina pri djelovanju vjetrova iz različitih smjerova iznose 1.1 (7.4.08.: lebić), 1.14 (17.-18.5.08.: jugo) i 1.08 (14.6.08.: bura).

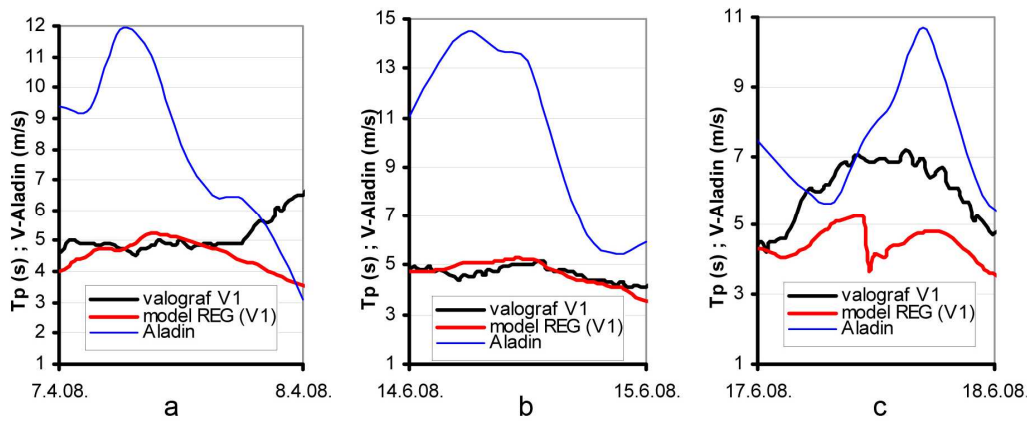
Relativno visoka vrijednost $Tp/T_{1/3}=1.14$ ukazuje na činjenicu da pri djelovanju vjetra iz smjera SE (jugo) valografska postaja V1 ima karakteristiku točke u otvorenom moru, a ne točke u području ograničenog privjetrišta. Djelovanje vjetrova u uvjetima ograničenih privjetrišta ($SW\approx 100\text{km}$; $NE\approx 50\text{km}$) rezultira i sa smanjenjem omjera na vrijednosti $Tp/T_{1/3}=1.1$ (7.4.08.: lebić) i $Tp/T_{1/3}=1.08$ (14.6.08.: bura). U situacijama izraženo ograničenog privjetrišta omjer $Tp/T_{1/3}$ literaturnim referencama definiran je s vrijednosti 1.05 (Goda, 2000). Iako na valografskoj postaji V2 nije ostvarena registracija Tp i $T_{1/3}$, za pretpostaviti je da pripadajuća ograničena privjetrišta uzrokuju konvergenciju omjera $Tp/T_{1/3}$ prema vrijednosti 1.05.



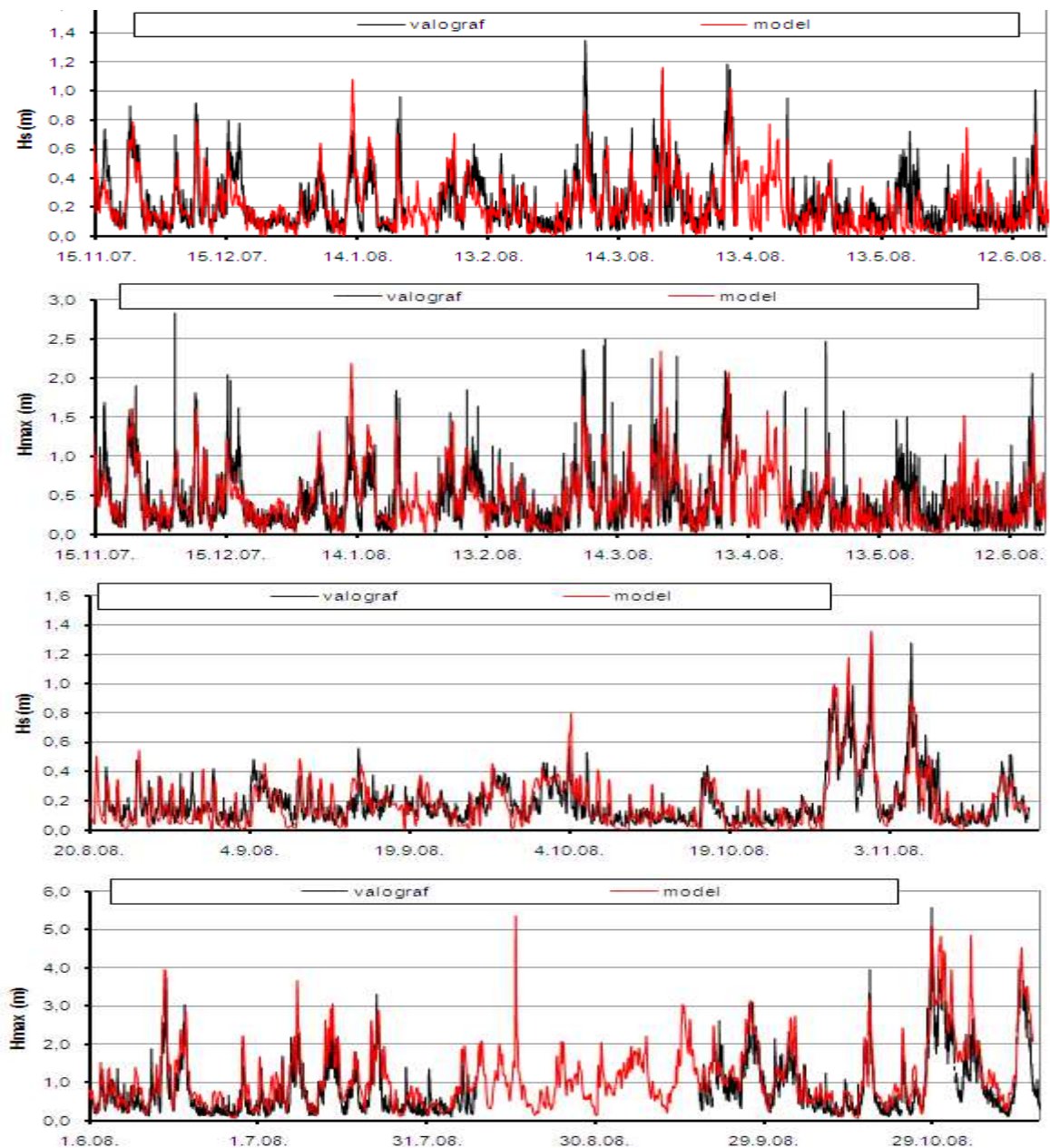
Slika 7 Omjeri izmjerenih i modeliranih značajnih valnih visina na poziciji valografa V1 u terminima u kojima se pojavljuju ekstremi valnih visina tijekom analiziranog perioda

Na slici 8 prikazani su razvoji vršnih perioda Tp na poziciji valografa V1 tijekom jednog dana u situacijama s djelovanjem lebića (slika 8a), bure (slika 8b) i tranzicije iz juga u lebić. (slika 8c). Na dijagramima je ucrtana i promjena intenziteta vjetra tijekom vremena dobivena iz modela Aladin. Sa slike 8a može se uočiti da padajući intenzitet vjetra uzrokuje smanjenje modelskih vrijednosti Tp . Međutim, na valografu V1 registrirano je postepeno povećanje Tp , vjerojatno kao posljedica pojačanja intenziteta vjetra prisutnog u stvarnom, odnosno, prirodnom procesu. Na slici 8b uočava se dobra korelacija modelskih i izmjerenih Tp , očigledno kao posljedica dobre prognoze smjera i intenziteta vjetra dobivene modelom Aladin, korištene u numeričkom modelu valnog generiranja. Slika 8c ocrta situaciju u kojoj model Aladin daje relativno naglu promjenu u prevladavajućem smjeru vjetra, iz smjera juga (SE) u smjer lebića (SW). Zbog skraćivanja pripadnog privjetrišta sa 700km (SE privjetrište) na 100km (SW privjetrište), numerički model valnog generiranja daje naglo smanjenje vršnog spektralnog perioda Tp sa 5.2s na 3.7s.

Na slici 9 prikazana je usporedba izmjerene i modelirane dinamike značajnih valnih visina i maksimalnih valnih visina na poziciji valografske postaje V2 tijekom perioda 15.11.07.-15.11.08.



Slika 8 Razvoji vršnih perioda T_p na poziciji valografa V1 tijekom 24 sata u situacijama sa djelovanjem lebića (a), bure (b) i tranzicije iz juga u lebić (c) te promjena intenziteta vjetra tijekom vremena dobivena modelom Aladin



Slika 9 Usporedba izmjerenog i modeliranog vremenskog niza značajnih valnih visina H_s (gore) i maksimalnih valnih visina H_{max} (dolje) na poziciji valografske postaje V2

Vršni periodi nisu registrirani zbog greške na valografu. Napominje se da su rezultatna polja brzine i smjerova djelovanja vjetra dobivene modelom Aladin prognostičkog karaktera (rezultati su za +12h unaprijed) te ih je potrebno kritički analizirati. Jedna od mogućnosti je i usporedba s izmjerenim incidentnim valnim smjerovima. Smisljena je pretpostavka da se prevalentni smjerovi djelovanja vjetra i propagacije vala u nekom vremenskom periodu poklapaju ili se nalaze pod konstantnim kutem. Primjerice, pri djelovanju juga smjer valne propagacije u području Bračkog kanala prati uzdužnu os kanala koja je položena pod blažim kutem od smjera djelovanja vjetra. S druge strane, valovi koji kroz Splitski kanal dolaze iz smjera zapada difraktiraju oko rta otoka Čiovo te na poziciju valografa nailaze pod kutem koji odstupa od smjera djelovanja čistog zapadnog vjetra. Za vrijeme djelovanja lebića (SSE smjer) očekuje se da smjer valne propagacije registriran na valografu odgovara smjeru djelovanja vjetra.

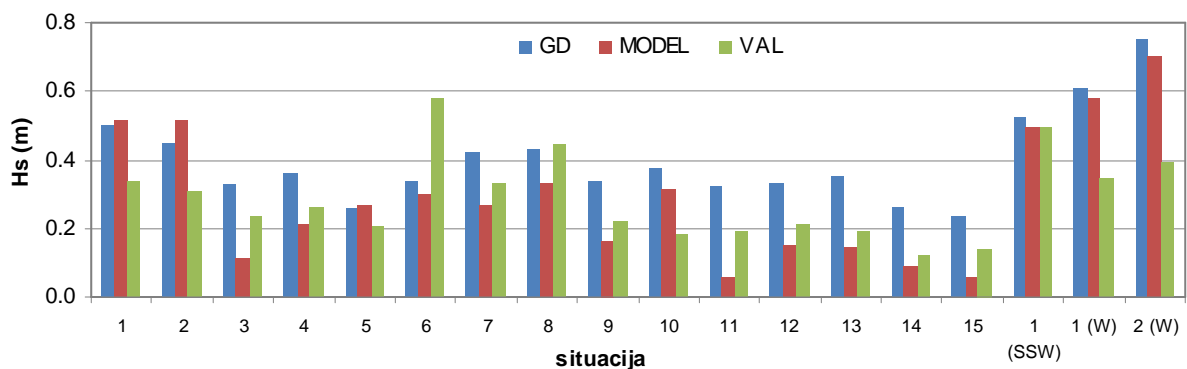
Usporedbom rezultatnih smjerova vjetra dobivenih modelom Aladin na poziciji valografske postaje V2 s registriranim smjerovima valova na valografu dobiven je skup vremenskih intervala (situacija) interesantnih za daljnju analizu modelskih rezultata valnog generiranja (tablica 1). Potrebno je napomenuti da su iz cjelokupnog perioda praćenja 1.11.07.-15.11.08. izdvojeni samo periodi u kojima se kontinuirano pojavljuju brzine vjetra veće od 5m/s.

Tablica 1 Situacije u kojima su brzine vjetra kontinuirano veće od 5m/s i u kojima su rezultati smjerova vjetra iz modela Aladin verificirani s izmjerenim smjerovima valne propagacije na valografu V2

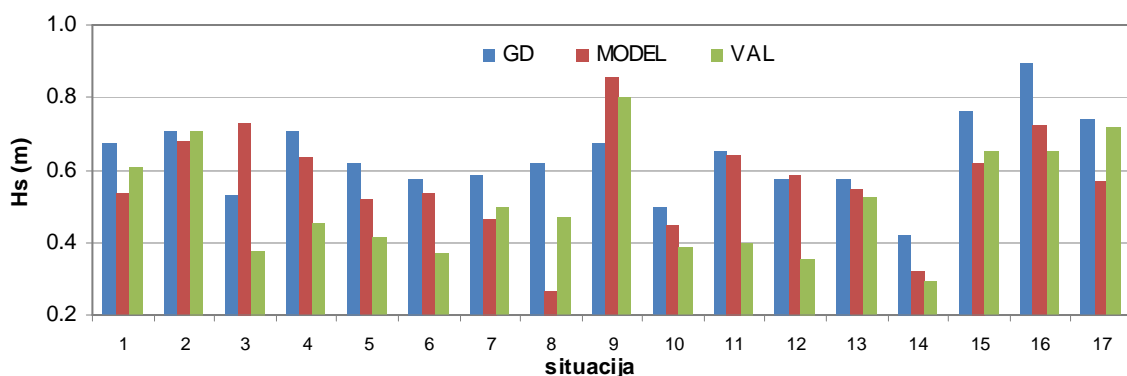
	<i>Bura (>5m/s)</i>		<i>Jugo (>5m/s)</i>		<i>Lebić (>5m/s)</i>
1	09.11.07. 21h → 10.11.07. 00h	1	22.11.07. 12h → 25.11.07. 03h	1	30.10.07.15h→30.10.07.18h
2	12.11.07. 09h → 12.11.07. 15h	2	07.12.07. 18h → 08.12.07. 15h		Zapadnjak (>5m/s)
3	13.12.07. 09h → 14.12.07. 00h	3	04.01.08. 12h → 06.01.07. 00h	1	31.05.08.12h→31.05.08.15h
4	14.12.07. 12h → 14.12.07. 21h	4	11.01.08. 15h → 13.01.08. 21h	2	01.06.08.09h→01.06.08.15h
5	01.01.08. 09h → 01.01.08. 18h	5	15.01.08. 12h → 18.01.08. 00h		
6	23.01.08. 14h → 23.01.08. 21h	6	03.02.08. 09h → 05.02.08. 06h		
7	07.02.08. 09h → 07.02.08. 24h	7	10.03.08. 09h → 11.03.08. 09h		
8	15.02.08. 15h → 16.02.08. 00h	8	16.03.08. 09h → 16.03.08. 21h		
9	16.02.08. 21h → 17.02.08. 00h	9	07.04.08. 03h → 07.04.08. 18h		
10	05.03.08. 06h → 07.03.08. 09h	10	30.04.08. 21h → 01.05.08. 12h		
11	16.09.08. 06h → 17.09.08. 12h	11	17.05.08. 03h → 19.05.08. 06h		
12	19.09.08. 18h → 20.09.08. 21h	12	20.05.08. 00h → 21.05.08. 12h		
13	04.10.08. 18h → 05.10.08. 03h	13	16.06.08. 21h → 17.06.08. 21h		
14	17.10.08. 18h → 18.10.08. 03h	14	30.09.08. 18h → 04.10.08. 03h		
15	15.11.08. 00h → 15.11.08. 21h	15	28.10.08. 12h → 30.10.08. 00h		
		16	31.10.08. 12h → 01.11.08. 09h		
		17	04.11.08. 12h → 05.11.08. 09h		

Dodatna kontrola pouzdanosti podataka iz modela Aladin provedena je i kroz provedbu proračuna H_s temeljem Groen-Dorrenstein dijagrama. Za proračun su korišteni podaci o brzini vjetera iz modela Aladin, s osrednjenim vrijednostima tijekom svake pojedine situacije prikazane u tablici 1. Usvojene duljine privjetrišta po smjerovima djelovanja vjetera su: 3km (bura), 20km (jugo), 10km (lebić) i 15km (zapadnjak). Prema navedenim trajanjima pojedinih vremenskih intervala (tablica 1) i usvojenim duljinama privjetrišta trajanje vjetera nije ograničavajući faktor u razvoju valova.

Na ovaj način dobivena su tri skupa podataka za situacije u periodima navedenim u tablici 1. Prvi skup vrijednosti predstavlja rezultate dobivene upotrebom Groen-Dorrenstein dijagrama, drugi skup je dobiven numeričkim modelom, a treći skup predstavlja rezultate mjerenja. Usporedba je dana na slici 10 za situacije 1-15 pri djelovanju bure, lebića (SSW) i zapadnjaka (W) te na slici 11 za situacije 1-17 pri djelovanju juga (prema tablici 1).



Slika 10 Usporedba proračunatih (Groen-Dorrenstein dijagram - GD), modeliranih (MODEL) i izmjerenih (VAL) vrijednosti značajnih valnih visina H_s u vremenskim razdobljima pri djelovanju bure (1-15) lebića (SSW) i zapadnjaka (W)

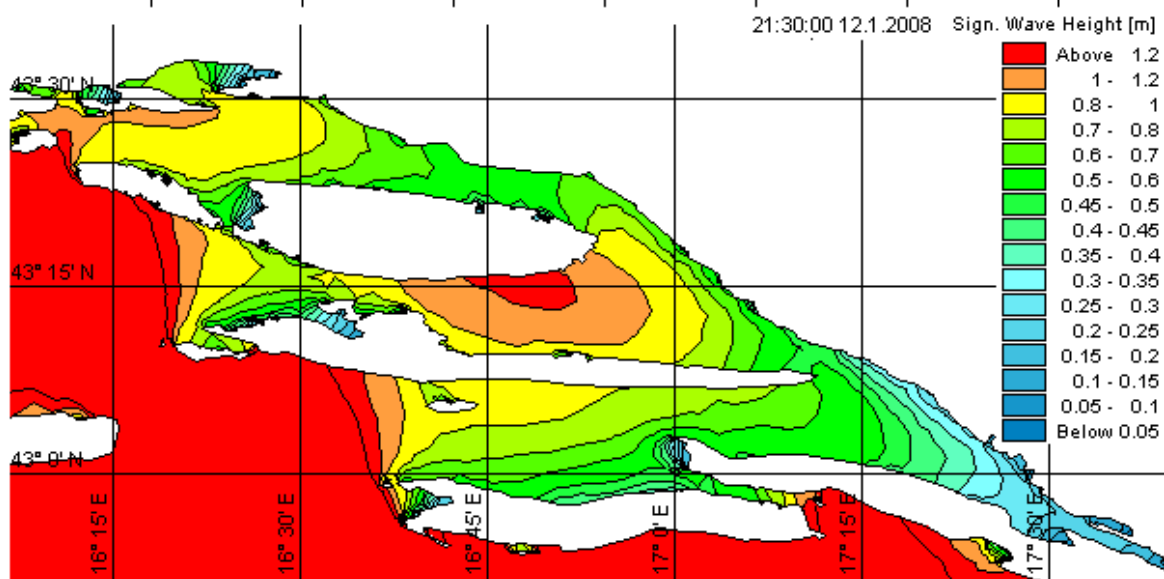
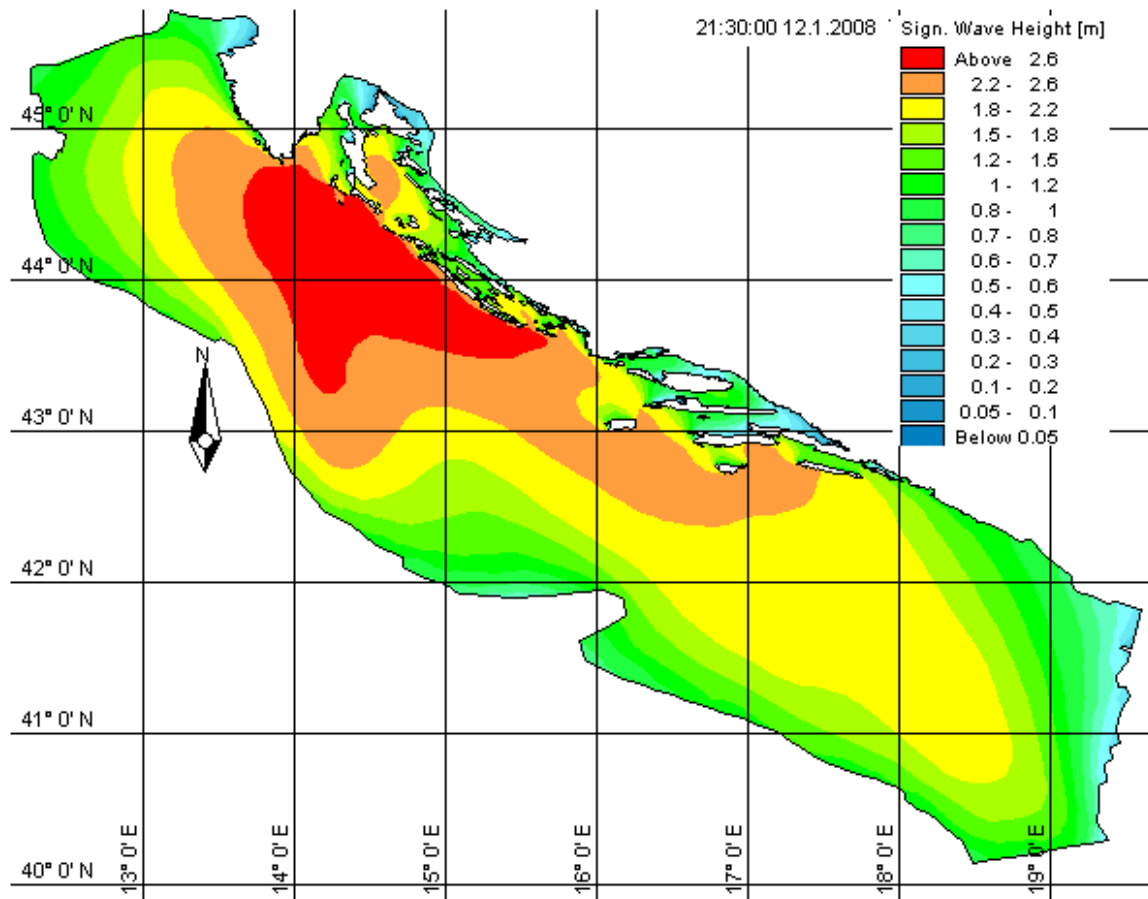


Slika 11 Usporedba proračunatih (Groen-Dorrenstein dijagram - GD), modeliranih (MODEL) i izmjerenih (VAL) vrijednosti značajnih valnih visina H_s u vremenskim razdobljima situacija 1-17 pri djelovanju juga

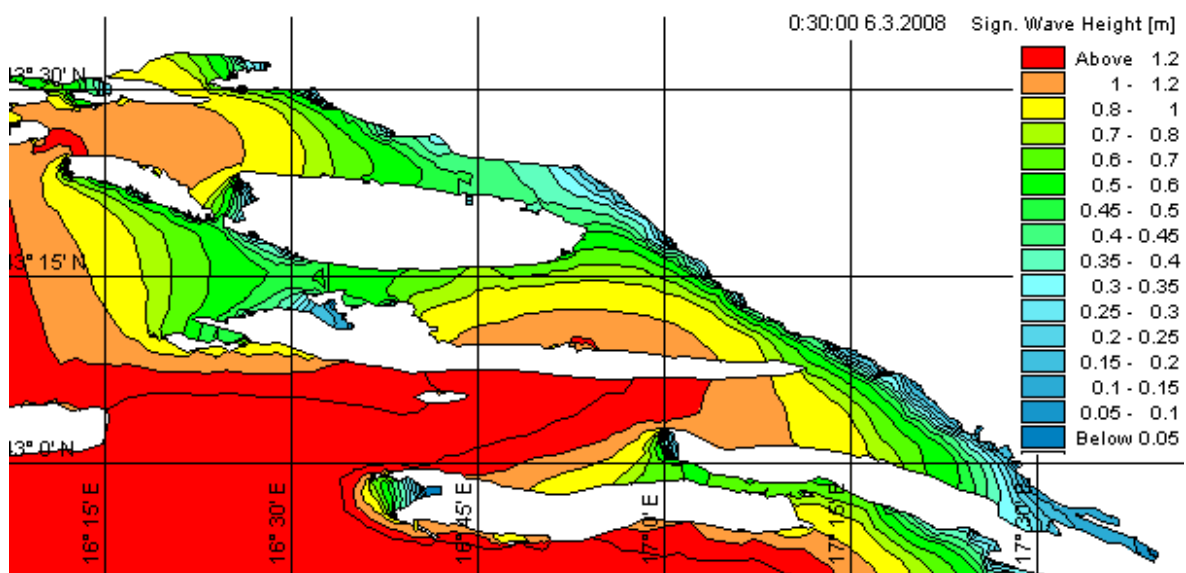
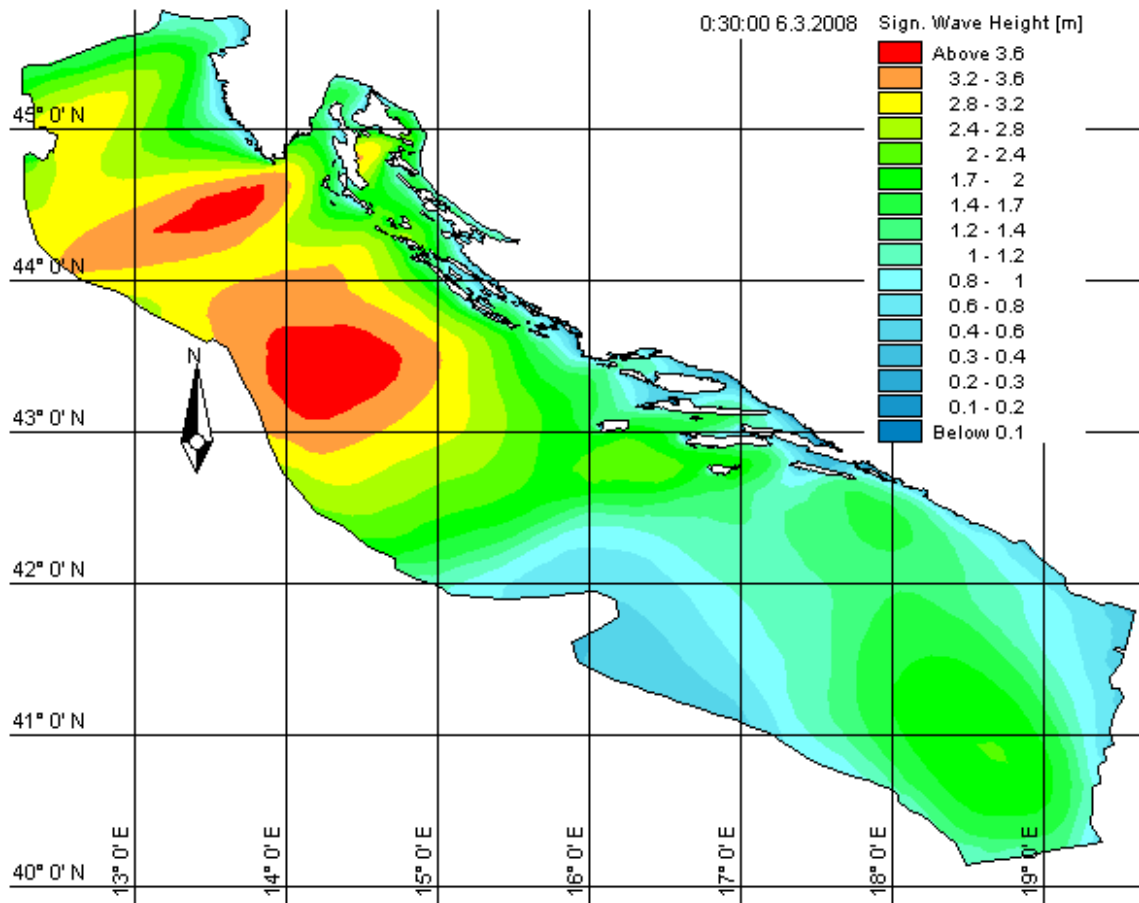
Sa slika 10 i 11 može se uočiti da pri djelovanju juga rezultati numeričkog modela bolje korespondiraju izmjerenim vrijednostima na valografu V2 i vrijednostima proračunatih sa Groen-Dorrenstein dijagramom nego u slučaju djelovanja bure. Prema rezultatima

prikazanim na slici 10 može se zaključiti da mahovitost bure onemogućuje razvoj valnih visina koje bi se ostvarile u slučaju konstantnih brzina vjetra, što je i pretpostavka korištena u sintezi Groen-Dorrenstein dijagrama. Iz tog razloga i dolazi do učestalog premašenja vrijednosti dobivenih Groen-Dorrenstein dijagramom u usporedbi s izmjerenim vrijednostima. Prema postavljenom kriteriju trajanja i brzine vjetra zabilježena je samo jedna situacija nastupa lebića (tablica 1). U toj situaciji je ostvareno potpuno podudaranje modelskih i izmjerenih vrijednosti kao posljedica dovoljno dugačkog privjetrišta u kojem nema valnih deformacija od mjesta inicijacije valnog generiranja do pozicije valografa (slika 10). Pri djelovanju vjetra iz smjera zapada pojavljuje se značajnije premašenje modelskih vrijednosti H_s obzirom na izmjerene na valografu V2 (slika 10). S druge strane modelske vrijednosti i vrijednosti dobivene Groen-Dorrenstein dijagramom vrlo su bliske. Na temelju tih činjenica može se zaključiti da je u prirodnom procesu prisutna i difrakcija oko vrha otoka Čiovo zbog koje su registrirane valne visine na valografu umanjene. Prema rezultatima prikazanim na slikama 10 i 11 srednje vrijednosti omjera $H_{s_{GD}}/H_{s_{MODEL}}$ i $H_{s_{GD}}/H_{s_{VAL}}$ iznose 1.12 i 1.25. Time se potvrđuje i činjenica da numerički model interpretira stanje valne klime sa stupnjem pouzdanosti koji odgovara pouzdanosti prognostičkih podataka o brzini vjetra iz modela Aladin. Na slikama 12 i 13 prikazano je modelsko polje značajnih valnih visina H_s u terminima modelskih ekstrema H_s postignutih na poziciji valografske postaje V1 (12.1.08. 21:30 - djelovanje juga; 6.3.08. 00:30 - djelovanje bure).

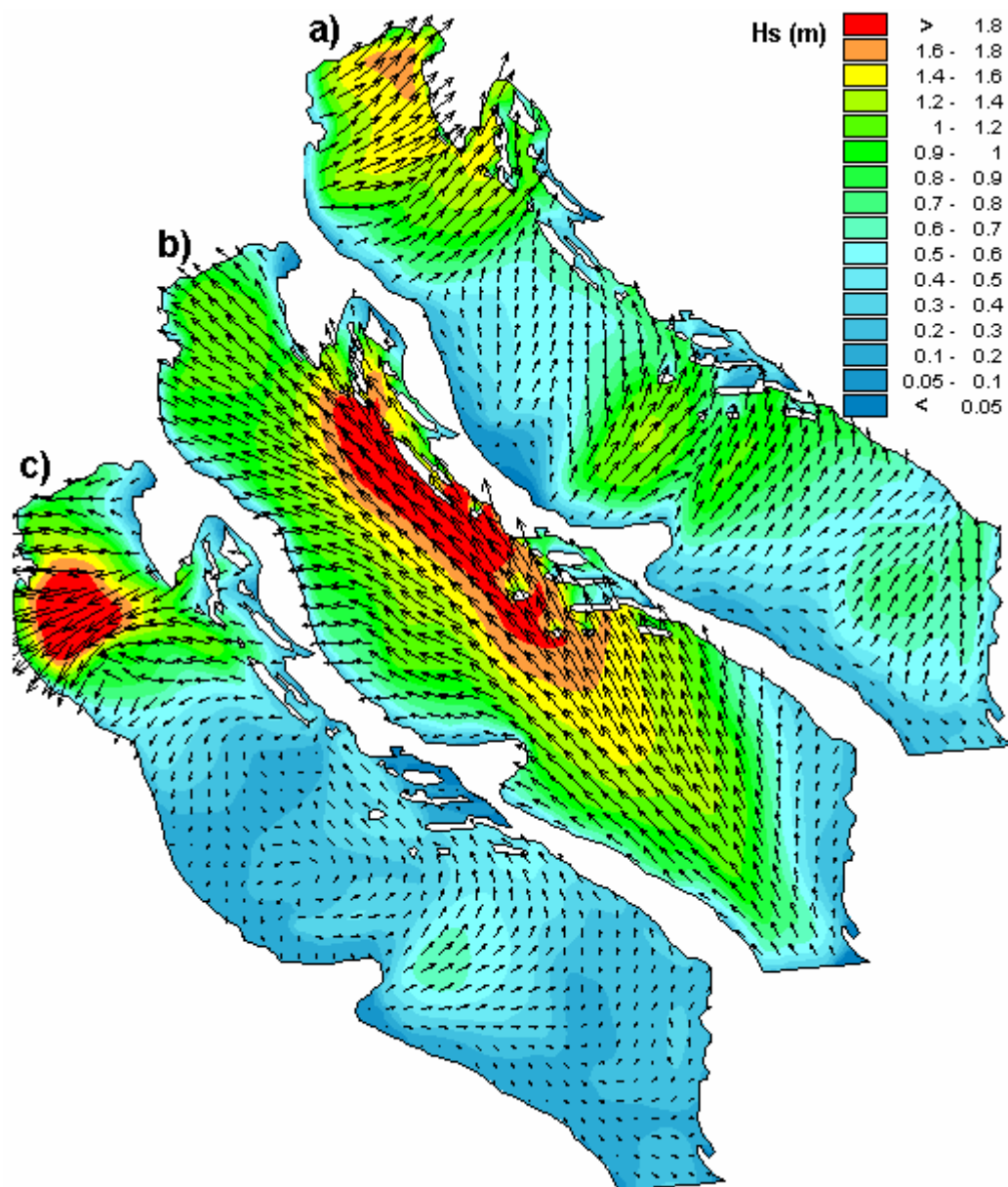
Na slici 14 prikazana su polja značajnih valnih visina H_s u jednom od termina pri djelovanju lebića - 7.4.08. 8:30 (slika 14a), juga - 18.5.08. 9:30 (slika 14b) i bure - 14.6.08. 6:00 (slika 14c). Na slici su prikazani i vektori valnog djelovanja u istim terminima.



Slika 12 Modelsko polje značajnih valnih visina H_s u terminu modelskog ekstrema H_s postignutog na poziciji valografske postaje V1 (12.1.08. 21:30 - djelovanje juga)



Slika 13 Modelsko polje značajnih valnih visina H_s u terminu modelskog ekstrema H_s postignutog na poziciji valografske postaje V1 (6.3.08. 00:30 - djelovanje bure)



Slika 14 Modelsko polje značajnih valnih visina H_s (regionalni model) s vektorima valnog djelovanja u terminu postizanja ekstrema na poziciji valografa V1 a) 7.4.08. 8:30; b) 18.5.08. 9:30; c) 14.6.08. 6:00)

4. Zaključak

Provedena je analiza dinamike značajnih valnih visina na području jadranskog bazena s numeričkim modelom valnog generiranja MIKE 21/SW. Rezultati modelskih analiza uspoređivani su sa rezultatima mjerenja na valografskim postajama tijekom perioda 1.11.07.-15.11.2008. Za generiranje valova na području modelske prostorne domene korišteni su podaci o brzinama i smjerovima vjetra iz prognostičkog atmosferskog modela Aladin.

Rezultati provedenog istraživanja s numeričkim modelom pokazali su sljedeće:

- Na poziciji valografa model dobro opisuje dinamiku značajnih i maksimalnih valnih visina.
- Upotrebom Groen-Dorrenstein dijagrama temeljem podataka o brzinama vjetra iz numeričkog modela Aladin ostvaruje se premašenje izmjerenih vrijednosti H_s na V2 za prosječno 25%, što je vezano na činjenicu da su modelske vrijednosti brzina i smjerova vjetra iz Aladina prognostičkog karaktera.
- Izmjerene vrijednosti značajnih valnih visina H_s na poziciji valografa V1 (za $H_s > 1m$) i V2 (za $H_s > 0.5m$) prosječno su veće od modeliranih za 3% i 6%, što je u okvirima točnosti mjerenja i prognostičkog karaktera ulaznih podataka o vjetru vrlo prihvatljivo.
- Izmjerene vrijednosti maksimalnih valnih visina H_{max} na poziciji valografa V1 (za $H_{max} > 2m$) i V2 (za $H_{max} > 1m$) prosječno su veće od modeliranih za 2% i 8%, što je u okvirima točnosti mjerenja i prognostičkog karaktera ulaznih podataka o vjetru vrlo prihvatljivo.
- Vrijednosti srednje greške AE i korijena srednjeg kvadratnog odstupanja $RMSE$ pri promjeni najsenzibilnijeg modelskog parametra C_{dis} (koeficijent disipacije u površinskim lomovima valova, eng. white capping) u postupku baždarenja poprimile su sljedeće vrijednosti:

V1	Hs		Hmax		Hs > 1m		Hmax > 2m	
	AE	RMSE	AE	RMSE	AE	RMSE	AE	RMSE
$C_{dis}=4.5$	0.036	0.269	-0.06	0.498	0.28	0.012	0.36	0.026
$C_{dis}=2.5$	-0.075	0.29	-0.28	0.608	0.08	0.012	-0.053	0.028
$C_{dis}=1.5$	-0.167	0.344	-0.46	0.752	-0.08	0.013	-0.39	0.032
V2	Hs		Hmax		Hs > 0,5m		Hmax > 1m	
	AE	RMSE	AE	RMSE	AE	RMSE	AE	RMSE
$C_{dis}=4.5$	0.039	0.001	0.042	0.002	0.22	0.276	0.374	0.579
$C_{dis}=2.5$	0.007	0.001	-0.02	0.002	0.14	0.238	0.212	0.553
$C_{dis}=1.5$	-0.019	0.001	-0.08	0.003	0.08	0.225	0.092	0.585

- Pri djelovanju juga rezultati numeričkog modela na položaju valografa V2 bolje korespondiraju izmjerenim vrijednostima i vrijednostima proračunatih s Groen-Dorrenstein dijagramom nego u slučaju djelovanja bure. Može se zaključiti da mahovitost bure onemogućuje razvoj valnih visina koje bi se ostvarile u slučaju konstantnih brzina vjetra.

Literatura

Andročec, V.; Beg-Paklar, G.; Dadić, V.; Djakovac, T.; Grbec, B.; Janeković, I.; Krstulović, N.; Kušpilić, G.; Leder, N.; Lončar, G.; Marasović, I.; Precali, R.; Šolić, M. (2009): *The Adriatic Sea Monitoring Program - Final Report*, Zagreb.

Cordoneanu, E., Geleyn, J.F. (1998): Application to local circulation above the Carpathian-Black Sea area of a NWP-type meso-scale model, *Contributions to Atmospheric Physics*, 71, 191-212.

Ivatek-Šahdan, S., Tudor, M. (2004): Use of high-resolution dynamical adaptation in operational suite and research impact studies, *Meteorol. Z.*, 13, 99-108.

Courtier, P.C., Freydl, J.F., Geleyn, F., Rochas, M. (1991): The ARPEGE project at METEO-FRANCE, *Proceedings from the ECMWF workshop on numerical methods in atmospheric models*, 193-231.

Brzović, N. (1999): Factors affecting the Adriatic cyclone and associated windstorms, *Contributions to Atmospheric Physics*, 72, 51-65.

Brzović, N., Strelec-Mahović, N. (1999): Cyclonic activity and severe jugo in the Adriatic, *Physics and Chemistry of the Earth (B)*, 24, 653-657.

Goda., Y. (2000): *Random Seas and Design of Maritime Structures, Advanced series on ocean engineering*, World Scientific Edn., New Jersey, 437pp.

Hercbach, H., Janssen, P., A., E. (1999): *Improvement of the short-fetch behavior in the Wave Ocean Model (WAM)*, *J. Atmos and Ocean Tech.*, 16, 884-892.

Kahma, K., K., Calkoen, C., J., (1992): Reconciling discrepancies in the observed growth of wind – generate waves, *Journal of Physical Oceanography*, 22(12), 1389-1405.

Komen, G., J., Cavaleri, M., Donelan, K., Hasselman, S., Hasselman, K., Janssen, P., A., E., M. (1994): *Dynamic of modeling of ocean surface waves*, Cambridge university press, Cambridge, 532pp.

Literatura

UZ POGLAVLJE „A“

MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U KONTINUIRANOJ AKVATIČKOJ SREDINI

Abbott, M.B., Basco, D.R. (1979): *Computational fluid dynamics – an introduction for engineers*, Pitman, London.

Abbott, M.B., McCowan, A., Warren, I. R. (1981): *Numerical modelling of free surface flows that are two-dimensional in plan, Transport models for inland and coastal waters*. Academic Press, London.

Andreson, J.D. (1995): *Computational fluid dynamics: The basics with applications*, McGraw-Hill, New York.

Cho, W.T. (1959): *Open Chanel Hydraulic*, McGraw-Hill, NewYork.

Hinze, J.O. (1975): *Turbulence, an introduction to its mechanism and theory*, McGraw-Hill, New York.

Press, H.; Schroeder, R. (1966): *Hydromechanik im Wasserbau*, Ernst&Sons, Berlin.

Vested, H. J., Nielsen, H. R., Jensen, H. R., Kristensen, K. B. (1995): Skill assessment of an operational hydrodynamic forecast system for the North Sea and Danish Belts, *Coastal Estuarine Studies*, 47, American Geophysical Union, Washington DC, 373–396.

White, F.M. (2005): *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York.

UZ POGLAVLJE „B“

MODELIRANJE STRUJANJA I PRONOSA U STIJENI MEĐUZRNSKE POROZNOSTI

Bear, J. (1979): *Hydraulics of Groundwater*, McGraw-Hill, New York.

Choy, B., Reible, D.D.(1999): *Diffusion models of environmental transport*, CRC press.

Delleur J.D. (2006): *The Handbook of Groundwater Engineering, Second Edition*, Ch 23, Taylor and Francis Group.

Domenico, P.A. and Schwartz, F.W. (1997): *Physical and Chemical Hydrogeology*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.

Huyakorn, P.S. and Pinder, G.F. (1983): *Computational Methods in Subsurface Flow*, Academic Press, New York.

Kinzelbach W.(1987): *Numerische Methoden zur Modellierung des Transports von Schadstoffen im Grundwasser*, Munchen, Germany.

Ogata A., Banks R.B.(1961): *A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media*, US Geological Survey, USA.

Wexler E.J.(1992): *Analytical solutions for one-, two-, and three-dimensional solute transport in groundwater systems with uniform flow*, Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey, USA.

UZ POGLAVLJE „C“

MODELIRANJE PROCESA U EKO SUSTAVU

Ji, Z.G. (2008): *Hydrodynamics and water quality : modeling rives, lakes, and estuaries*, John Wiley & Sons, 676.

Jorgensen, S., Bendoricchio, G. (2001): *Fundamentals of ecological modelling*, Elsevier-academic press, 350.

UZ POGLAVLJE „D“

MODELIRANJE VALNOG GENERIRANJA

Belcher, S.E., Hunt, J.C.R. (1993): Turbulent shear flow over slowly moving waves. *Journal of Fluid Mechanics* 251, 109–148.

Bretschneider, C.L. (1952): The generation and decay of wind waves in deep water, *Trans. Am. Geophys. Union*, 33(3), 381-389.

Cavaleri, L., Malanotte-Rizzoli (1981): Wind wave prediction in shallow water: Theory and application, *Journal of Geophysical Research*, 86 (C11), 10961-10973.

Dobson, F.W. (1971): Measurements of atmospheric pressure on wind-generated sea waves. *Journal of Fluid Mechanics* 48, 91.

Donelan, M.,A. (1977): *A simple numerical model for wave and wind stress prediction*, National Water Research institute manuscript, Berlington, Canada, 28.

Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *Journal of Fluid Mechanics* 12, 481–500.

Hasselmann, K. (1963a): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility. *Journal of Fluid Mechanics* 15, 273–281.

Hasselmann, K. (1963b): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of energy flux and swell–sea interaction for a Neumann spectrum. *Journal of Fluid Mechanics* 15, 385–398.

Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D.E., Enke, K., Ewing, J.I., Gienapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Meerburg, A., Müller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W., Walden, H. (1973): Measurements of wind–wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Deutsche Hydrographische Zeitschrift A* 8 (12), 1–95.

Hasselmann, K. (1974): On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping. *Boundary-Layer Meteorology* 6, 107–127.

Hasselmann, D.E., Bosenberg, J. (1991): Field measurements of wave-induced pressure over wind sea and swell. *Journal of Fluid Mechanics* 230, 391–428.

Janssen, P., A., E., M. (1989): Wave induced stress and drag of airflow over sea waves, *Journal of Physical Oceanography*, 19, 745-754.

Janssen, P., A., E., M. (1991): Quasi-linear theory of wind wave generation applied to wave forecasting, *Journal of Physical Oceanography*, 21, 1631-1642.

Janssen, P., A., E., M. (1992): Experimental evidence of the effect of surface waves on the airflow, *Journal of Physical Oceanography*, 22, 1600-1604.

Janssen, P., A., E., M. (1998): On the effect of ocean waves on the kinetic energy balance and consequences for the initial dissipation technique, *Journal of Physical Oceanography*, 30, 1743-1756.

Johnson, H., K. (1998): On modeling wind-waves in shallow and fetch limited areas using method of Holthuijsn, Booij and Herbers, *Journal of Coastal Research*, 14(3), 917-932.

Johnson, H., K., Kofoed-Hansen (2000): Influence of bottom friction on sea surface roughness and its impact on shallow water wind wave modeling, *Journal of Physical Oceanography*, 30, 1743-1756.

Kahma, K., K., Calkoen, C., J., (1992): Reconciling discrepancies in the observed growth of wind –generate waves, *Journal of Physical Oceanography*, 22(12), 1389-1405.

Lamb., H. (1932): *Hydrodynamic*, 6th edn, Dover publications, New York, 738.

Madsen, O.S., Poon, Y.K., Graber, H.C. (1988): Spectral wave attenuation by bottom friction: theory. In: *Proceedings of the 21th ASCE Coastal Engineering Conference*, pp. 492–504.

Madsen, P.A., Bingham, H.B., Schäffer, H.A. (2003): Boussinesq-type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis. *Proceedings of the Royal Society of London, A* 459, 1075–1104.

Mastenbroek, C. (1996): Wind-wave interaction. Ph.D. Thesis. Delft Techology University, 119pp.

Miles, O., M. (1957): On the generation of surface waves by shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 3, 185-204.

Peregrine, D.H. (1967): Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 815–827.

Phillips, O., M. (1957): On the generation of waves by turbulent wind, *Journal of Fluid Mechanics*, 2, 417-445.

Phillips, O.M. (1960): On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics* 9, 193–217.

Sverdrup, H., V., Munk, W., H. (1946): Empirical and theoretical relations between wind, sea and swell, *Trans. Am. Geophys. Union*, 27, 823-827.

Zakharov, V. (1968): Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics* 4, 86–94.

Zakharov, V., Pushkarev, A.N. (1999): Diffusion model of interacting gravity waves on the surface of a deep fluid. *Nonlinear Processesin Geophysics* 6, 1–10.

Weber, S.L. (1991): Eddy-viscosity and drag-law models for random ocean wave dissipation. *Journal of Fluid Mechanics* 232, 73–98.

Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R. (1995): A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics* 294, 71–92.

UZ POGLAVLJE „E“
MODELIRANJE SUSTAVA POD TLAKOM

Swamee, P.K., Sharma, A.K. (2008): *Design of water supply pipe networks*, John Wiley & Sons, 353.