STRUJANJE VODE KROZ NESATURIRANO TLO

I. Uvod

Skelet tla, voda i zrak čine tri faze u nesaturiranom tlu. Voda i zrak mogu se gibati u odnosu na gibanje skeleta tla, pa kažemo da je tlo propusno za vodu i zrak. Detaljnijim istraživanjima pokazuje se da je i sama voda propusna za prolaz zraka, jer se voda također može prikazati kao šupljikava sredina, s veličinom šupljina od nekoliko postotaka ukupnog volumena vode. Bez obzira na svoju „šupljikavost“, voda je u odnosu na skelet tla vrlo kruta na promjenu volumena, ali je zanemarive krutosti na promjenu oblika (smicanje). Zrak je, međutim, vrlo mekan. Složeni prostorni raspored zrna/čestica, vode i zraka u tlu, kao i bitno različiti relativni odnosi krutosti skeleta tla, zrna/čestica, vode i zraka, zatim utjecaj temperature i stupnja koncentracije raznih tvari otopljenih u vodi ili raspršenih u zraku, čine ponašanje tla vrlo složenim. Svi pokušaji da se ova složenost matematički opiše i time učini dostupnom analizi i praktičnoj primjeni, nužno koriste razna pojednostavljenja, čime se stvaraju idealizirani modeli tla. Tipični primjeri pojednostavljenja su, primjerice, idealizacija tla kao neprekidne sredine i princip efektivnih naprezanja za potpuno saturirano tlo. Ove su idealizacije, međutim, polučile golem uspjeh u istraživanjima i praksi.

Unutar idealizacije tla kao neprekidne sredine, nekoliko je veličina koje se neposredno mogu mjeriti: ukupna naprezanja i deformacije tla, tlak vode i tlak zraka, relativno gibanje vode, zraka i skeleta tla, temperatura pojedinih faza tla i koncentracija tvari otopljenih u vodi ili raspršenih u zraku. Sve ove mjerljive veličine općenito ovise o položaju promatrane točke u prostoru, opisanog koordinatama u nekom koordinatnom sustavu. One se, dakle, mogu opisati kao funkcije koordinata, a mogu se razmatrati i međusobni odnosi ovih funkcija. Odnosi među funkcijama opet mogu biti funkcije, ako su oni jednoznačni, ili mogu imati složeniji matematički oblik poput funkcionala, koji uključuju i utjecaj povijesti razvoja pojedinih funkcija (primjerice, trag naprezanja). Često se odnosi među spomenutim funkcijama izražavaju diferencijalnim jednadžbama, kao, primjerice, jednadžbe kontinuiteta. Među ovim se odnosima razlikuju dvije vrste. Prvu čine opće fizikalne zakonitosti koje za sve vrste materijala jednako vrijede (primjerice, zakon održanja mase, zakon održanja količine gibanja, princip akcije i reakcije, termodinamički zakoni). Drugu vrstu čine takozvani konstitucijski odnosi koji ovise o pojedinom materijalu (primjerice, odnos efektivnih naprezanja i deformacija u potpuno saturiranom tlu, Darcyev zakon strujanja vode u tlu, odnos stupnja saturacije tla i negativnog tlaka vode). Parametre konstitucijskih odnosa, za svaki razmatrani sloj tla, u praksi treba posebno utvrditi odgovarajućim eksperimentalnim postupcima.

Jedna od idealizacija za tlo je Terzaghiev princip efektivnih naprezanja. To je temeljni princip mehanike potpuno saturiranoga tla, a predstavlja vrlo uspješan pokušaj uvođenja pomoćne veličine, koju se ne može izravno mjeriti: razlike ukupnog naprezanja u tlu i tlaka vode u porama, koja se naziva efektivnim naprezanjem. Ovaj princip nije univerzalni fizikalni zakon, već je pojednostavljenje, koje se u istraživanjima i praksi pokazalo vrlo zadovoljavajućim za tlo. Precizna i složena mjerenja, uz odgovarajuća teoretska razmatranja i interpretacije, ukazuju da ovaj princip nije u potpunosti ispunjen u tlu, ali je pogreška, koja se njegovim prihvaćanjem uvodi u analize, uglavnom zanemariva u odnosu na pogreške mjerenja na današnjem stupnju tehnološkog razvoja i pogreške koje se uvode ostalim pojednostavljenjima u analizama. Treba napomenuti da „pogreška“ u prihvaćanju principa efektivnih naprezanja ovisi o relativnom odnosu krutosti skeleta tla i vode u porama, pa tako za guste stijene, gdje se krutost skeleta približava krutosti vode, ili je čak premašuje, njegova primjena u praksi postaje problematičnom.

Princip efektivnih naprezanja, primjerice, može poslužiti za interpretaciju dva lako provjerljiva opažanja u edometarskom pokusu. Pri tom treba naglasiti da samo promjena efektivnih naprezanja može prouzročiti deformacije, a efektivna naprezanja i deformacije su povezani konstitucijskim odnosom. Znači, prvo je opažanje da povećanje vertikalnog opterećenja (naprezanja) na uzorku saturiranoga tla neće izazvati vertikalne deformacije uzorka ako se ne omogući istjecanje vode iz tla, a izazvat će vertikalne deformacije (promjenu volumena uzorka) nakon što je istjecanje vode omogućeno. Drugo, promjena vertikalnog naprezanja na uzorku tla izazvat će jednaku promjenu tlaka vode u uzorku ako istjecanje vode nije omogućeno. Naime, ako voda ne može istjecati iz tla, pa nema deformacija, nema ni promjene efektivnog naprezanja, a vanjsku promjenu opterećenja uzorka u potpunosti preuzima kruća faza u tlu, a to je voda u porama tla. Ova opažanja u potpunom su skladu s ranije opisanim relativnim odnosima krutosti zrna/čestica tla, skeleta i vode. Osim ovog, mnogi drugi pokusi također upućuju na univerzalnu primjenljivost principa efektivnih naprezanja u potpuno saturiranom tlu.

Za razliku od potpuno saturiranoga tla, princip efektivnih naprezanja ne može se primijeniti u nesaturiranom tlu, gdje je u porama tla prisutan zrak, koji lako mijenja volumen pri promjeni tlaka. U opisanom edometarskom pokusu, ali sada s djelomično saturiranim tlom, promjena opterećenja (naprezanja) na uzorku izazvat će njegovu deformaciju (promjenu volumena) čak i u slučaju da istjecanje vode iz uzorka nije omogućeno (nedrenirani uvjeti za vodu, drenirani uvjeti za zrak). U ovom će slučaju doći do promjene volumena zraka, pa tako i cijelog uzorka. Promjena volumena uzorka izazvat će deformacije skeleta tla, pa dio vanjskog opterećenja preuzima skelet tla, a dio preuzima voda. Zato će porast tlaka vode biti manji od porasta opterećenja. Nadalje, ovaj će porast tlaka vode biti to manji što je tlo manje saturirano vodom, odnosno što mu je stupanj saturacije manji. Ova lako provjerljiva opažanja, u suprotnosti su s principom efektivnih naprezanja.

S obzirom na privlačnost principa efektivnih naprezanja i pogodnosti koje njegova primjena unosi u analize, istraživači su ga pokušali doraditi i za slučaj nesaturiranoga tla. Tako je Bishop 1959. predložio da se normalno efektivno naprezanje σ', kao naprezanje koje je “odgovorno” za deformacije skeleta tla preko odgovarajućeg konstitucijskog odnosa, definira kao

$$\sigma' = \left(\sigma - u_{\mathrm{a}}\right) + \chi\left(u_{\mathrm{a}} - u\right)$$

gdje je σ ukupno normalno naprezanje, u_{a} je tlak zraka, a u je tlak vode u porama. U odnosu na standardni izraz za normalno efektivno naprezanje u potpuno saturiranom tlu,

$\sigma' = \sigma - u$, u gornjem se izrazu pojavljuju još veličine u_a i χ. Tlak zraka jednako djeluje u svim smjerovima, isto kao i tlak vode. Samo povećanje tlaka zraka na uzorak tla, u nedreniranim uvjetima za vodu i zrak, neće izazvati nikakve deformacije. Ako, primjerice, iznad posude s vodom povećamo tlak zraka, tlak vode u posudi porast će za istu veličinu. To znači da, ako na uzorak nesaturiranoga tla, u nedreniranim uvjetima za vodu i zrak, primijenimo određeni tlak zraka, ovo će povećanje tlaka, osim zraka u porama, preuzeti voda. Dakle, za istu se veličinu povećavaju ukupno naprezanje, tlak zraka i tlak vode, pa nema promjene efektivnog naprezanja ni deformacija tla.

Parametar χ bi trebao odražavati opažanje u edometarskom pokusu da tlak vode, u nedreniranim uvjetima za vodu i dreniranim za zrak, poraste manje od vanjskog opterećenja. To znači da je

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \chi\ \Delta u$$

iz čega slijedi da je za nesaturirano tlo $0 \leq \chi < 1$. Za saturirano je tlo očito $\chi = 1$, dok je za suho tlo $\chi = 0$. Bishopova su istraživanja pokazala da χ ovisi o stupnju saturacije tla S_r, a najjednostavnija je aproksimacija $\chi = S_r$, ako je $S_r > 80$ %, što je najčešće slučaj u standardnim geotehničkim problemima. Primjerice, Bishop i Blight (1963) pokazuju rezultate pokusa određivanja posmične čvrstoće na uzorcima nesaturiranoga tla, iz kojih proizlazi da vrijednost stupnja saturacije ispod kojeg χ bitno odudara od S_r (manji je od S_r), pada s padom udjela gline u tlu.

U svakom slučaju proizlazi da je Bishopov prilagođeni izraz za efektivna naprezanja u nesaturiranom tlu konstitucijski odnos. Neki su istraživači to smatrali značajnim nedostatkom, pa su pokušali nesaturiranom tlu pristupiti drugačije.

Fredlund i Morgenstern (1976) odustaju od definiranja efektivnog naprezanja u nesaturiranom tlu, pa stanje naprezanja u tlu definiraju dvama nezavisnim naprezanjima: mjerljivim relativnim naprezanjem u odnosu na tlak zraka $\sigma - u_a$ i relativnim tlakom vode u odnosu na tlak zraka $u_a - u$ (kapilarni usis). U matričnom obliku općeg stanja naprezanja, ove dvije komponente naprezanja imaju oblik

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - u_a) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - u_a) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - u_a) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} (u_a - u) & 0 & 0 \\ 0 & (u_a - u) & 0 \\ 0 & 0 & (u_a - u) \end{bmatrix}$$

Potpuno se saturirano tlo može smatrati posebnim slučajem, u kojem je $u_a = u$, pa prva matrica naprezanja prelazi u standardno definiranu matricu efektivnih naprezanja, dok druga matrica iščezava.

Navedeni je prikaz ilustracija razlika između pristupa saturiranom i nesaturiranom tlu. U nastavku će biti iznesene teoretske postavke za strujanje vode kroz nesaturirano tlo. Nesaturirano je tlo, zbog raznih kemijskih, fizikalnih i termodinamičkih interakcija među njegovim fazama, kompleksno za proučavanje samo po sebi. Ovo se pogotovo odnosi na teoretska razmatranja procesa u nesaturiranom tlu, za koja je nužno pretpostaviti niz ograničavajućih uvjeta.

Jedna od pretpostavki u tekstu koji slijedi je da se zanemaruje isparavanje vode. Zanemarivanje isparavanja vode onemogućava obuhvaćanje za geotehniku važne pojave, jer se stupanj saturacije u tlu, u većini slučajeva, smanjuje upravo isparavanjem vode iz tla uslijed povećanja temperature zraka ili zbog smanjenja vlažnosti zraka iznad površine tla. Nadalje, zanemaruje se promjena temperature, koja je važan čimbenik za ponašanje nesaturiranog tla. O promjeni temperature ovisi i viskoznost vode i zraka. Viskoznost je otpornost tekućina i plinova na brzinu promjene oblika ili smicanja. Viskoznost tekućina pada s porastom temperature, dok viskoznost zraka raste s porastom temperature. Pojave kao što su difuzija zraka kroz vodu i otapanje zraka u vodi također se zanemaruju.

II. Sparena konsolidacija

Za trodimenzionalno nestacionarno strujanje vode kroz nesaturirano tlo, u svakom trenutku imamo pet nepoznatih veličina: tri komponente vektora pomaka skeleta tla w_x, w_y i w_z u x, y i z smjeru, tlak vode u i tlak zraka u_a. Komponente vektora pomaka služe za proračun trenutnog ukupnog volumena tla, pri čemu se volumen pojedinačnih zrna i čestica tla ne mijenja. Rješenje za pet nepoznatih veličina dobiva se pomoću triju jednadžbi ravnoteže i dviju jednadžbi kontinuiteta, jedne iz zakona održanja mase vode, druge iz zakona održanja mase zraka. Uz to je potrebno poznavati sve relevantne konstitucijske odnose. Usporedno rješavanje ovih pet jednadžbi, za zadane početne i rubne uvjete, naziva se rješavanjem sparene (*coupled*) konsolidacije tla, pri čemu se dobiva rješenje za svih pet nepoznatih veličina.

Osim gore navedenih, uvode se sljedeće pretpostavke: konstitucijski odnos između naprezanja i deformacija je linearan i reverzibilan, deformacije su konačne (male), voda u porama tla nije stišljiva, a matrica koeficijenta propusnosti je dijagonalna, oblika

$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

Teoretske postavke za trodimenzionalnu sparenu konsolidaciju nesaturiranoga tla prvi je prikazao Biot (1941). Formulacija Fredlunda i Rihardja (1993) u velikoj se mjeri zasniva na Biotovoj. U ovom će se tekstu prikazati teoretska podloga koja uključuje obje formulacije.

II.1. Konstitucijski odnos za skelet tla

Konstitucijski odnos za skelet saturiranog tla definira vezu između efektivnih naprezanja i deformacija. Za nesaturirano tlo, on definira odnos između ukupnih naprezanja, deformacija i tlaka vode. Zbog nestišljivosti zrna i čestica tla, promjena volumena tla odgovara promjeni volumena pora, $dV = dV_v$. Općeniti konstitucijski odnos za skelet tla predstavlja funkcional, čija vrijednost ovisi o povijesti razvoja varijabli. Za skelet tla se može pisati

$$[\sigma] = \mathcal{F}\left([\varepsilon],[u]\right)$$

gdje je $[\sigma]$ matrica ukupnih naprezanja, $[\varepsilon]$ matrica deformacija, a $[u]$ dijagonalna matrica tlaka vode u tlu.

Matrica deformacija definirana je u obliku

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{x}} & \varepsilon_{\mathrm{xy}} & \varepsilon_{\mathrm{xz}} \\ \varepsilon_{\mathrm{xy}} & \varepsilon_{\mathrm{y}} & \varepsilon_{\mathrm{yz}} \\ \varepsilon_{\mathrm{xz}} & \varepsilon_{\mathrm{yz}} & \varepsilon_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

a deformacije se s pomacima skeleta tla w_{x}, w_{y} i w_{z}, povezuju izrazima

$$\varepsilon_{\mathrm{x}} = -\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{y}} = -\frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{z}} = -\frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{xy}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial y} + \frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{xz}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{\mathrm{x}}}{\partial z} + \frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{yz}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{\mathrm{y}}}{\partial z} + \frac{\partial w_{\mathrm{z}}}{\partial y}\right)$$

Negativni predznaci u izrazima koji povezuju deformacije i pomake skeleta tla odgovaraju definiciji predznaka u mehanici tla, prema kojoj je skraćenje pozitivno.

Samo ako se tlo ponaša kao elastičan materijal, funkcional $\mathcal{F}$ iz konstitucijskog odnosa poprima oblik matematičke funkcije, koja ovisi o trenutnim vrijednostima varijabli, a ne o njihovoj povijesti razvoja. Tako ovdje pretpostavljamo elastičan odnos između naprezanja, deformacija i tlaka vode u tlu te da je tlo izotropno.

Biot (1941) predlaže sljedeći konstitucijski odnos za skelet nesaturiranoga tla, uz napomenu da koristi simbol $d\sigma$ umjesto *-du*:

$$d\varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{d\sigma_{\mathrm{x}}}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{z}}\right) - \frac{du}{3H_{\mathrm{B}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{y}} = \frac{d\sigma_{\mathrm{y}}}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{z}}\right) - \frac{du}{3H_{\mathrm{B}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{z}} = \frac{d\sigma_{\mathrm{z}}}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{y}}\right) - \frac{du}{3H_{\mathrm{B}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{xy}} = \frac{d\tau_{\mathrm{xy}}}{2G}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{yz}} = \frac{d\tau_{\mathrm{yz}}}{2G}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{xz}} = \frac{d\tau_{\mathrm{xz}}}{2G}$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti skeleta tla u odnosu na promjenu ukupnog naprezanja, ν je Poissonov koeficijent, H_{B} je modul elastičnosti skeleta tla u odnosu na promjenu tlaka vode, a G je modul posmika

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

Fredlund i Rihardjo (1993) uvode relativni tlak zraka u_{a} u konstitucijski odnos, pa on glasi

$$d\varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{d\left(\sigma_{\mathrm{x}} - u_{\mathrm{a}}\right)}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{z}} - 2u_{\mathrm{a}}\right) + \frac{d\left(u_{\mathrm{a}} - u\right)}{H_{\mathrm{F}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{y}} = \frac{d\left(\sigma_{\mathrm{y}} - u_{\mathrm{a}}\right)}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{z}} - 2u_{\mathrm{a}}\right) + \frac{d\left(u_{\mathrm{a}} - u\right)}{H_{\mathrm{F}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{z}} = \frac{d\left(\sigma_{\mathrm{z}} - u_{\mathrm{a}}\right)}{E} - \frac{\nu}{E} d\left(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{y}} - 2u_{\mathrm{a}}\right) + \frac{d\left(u_{\mathrm{a}} - u\right)}{H_{\mathrm{F}}}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{xy}} = \frac{d\tau_{\mathrm{xy}}}{2G}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{yz}} = \frac{d\tau_{\mathrm{yz}}}{2G}$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{xz}} = \frac{d\tau_{\mathrm{xz}}}{2G}$$

gdje je sada E Youngov modul elastičnosti skeleta tla u odnosu na promjenu ($\sigma - u_a$), a H_F je modul elastičnosti skeleta tla u odnosu na promjenu ($u_a - u$), pri čemu je $H_F = 3H_B$.

Promjena volumske deformacije jednaka je zbroju promjena dijagonalnih članova matrice deformacija

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z$$

tako da iz konstitucijskog odnosa Fredlunda i Rihardja za skelet tla slijedi

$$d\varepsilon_v = 3\left(\frac{1-2\nu}{E}\right) d\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} - u_a\right) + \frac{3}{H_F}\, d\left(u_a - u\right)$$

II.2. Jednadžbe ravnoteže

Ako zanemarimo silu gravitacije, jednadžbe ravnoteže glase:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Konstitucijski odnos za skelet nesaturiranoga tla može se pisati u obliku

$$d\left(\sigma_x - u_a\right) = 2G\left(d\varepsilon_x + \alpha\, d\varepsilon_v\right) - \beta\, d\left(u_a - u\right)$$

$$d\left(\sigma_y - u_a\right) = 2G\left(d\varepsilon_y + \alpha\, d\varepsilon_v\right) - \beta\, d\left(u_a - u\right)$$

$$d\left(\sigma_z - u_a\right) = 2G\left(d\varepsilon_z + \alpha\, d\varepsilon_v\right) - \beta\, d\left(u_a - u\right)$$

gdje su

$$\alpha = \frac{\nu}{1-2\nu}$$

i

$$\beta = \frac{E}{H_F\left(1-2\nu\right)} \quad \text{ili} \quad \frac{2G\left(1+\nu\right)}{H_F\left(1-2\nu\right)}$$

Ako se lijevoj i desnoj strani konstitucijskog odnosa oduzme $G\,d\varepsilon_\mathrm{v}$ i rezultat uvrsti u jednadžbe ravnoteže, dobiju se konačne jednadžbe ravnoteže u sljedećem obliku:

$$G\left(\frac{\partial^2 w_\mathrm{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{x}}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon_\mathrm{v}}{\partial x}-\beta\frac{\partial\left(u_\mathrm{a}-u\right)}{\partial x}+\frac{\partial u_\mathrm{a}}{\partial x}=0$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w_\mathrm{y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{y}}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon_\mathrm{v}}{\partial y}-\beta\frac{\partial\left(u_\mathrm{a}-u\right)}{\partial y}+\frac{\partial u_\mathrm{a}}{\partial y}=0$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w_\mathrm{z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_\mathrm{z}}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon_\mathrm{v}}{\partial z}-\beta\frac{\partial\left(u_\mathrm{a}-u\right)}{\partial z}+\frac{\partial u_\mathrm{a}}{\partial z}=0$$

II.3. Nastavak o konstitucijskom odnosu za skelet tla

Kada se pogleda oblik konstitucijskog odnosa za skelet tla, koji je poslužio za izvod konačnog oblika jednadžbi ravnoteže dobije se:

$$2G\left(d\varepsilon_\mathrm{x}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\left(\sigma_\mathrm{x}-u_\mathrm{a}\right)+\beta\,d\left(u_\mathrm{a}-u\right)$$

$$2G\left(d\varepsilon_\mathrm{y}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\left(\sigma_\mathrm{y}-u_\mathrm{a}\right)+\beta\,d\left(u_\mathrm{a}-u\right)$$

$$2G\left(d\varepsilon_\mathrm{z}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\left(\sigma_\mathrm{z}-u_\mathrm{a}\right)+\beta\,d\left(u_\mathrm{a}-u\right)$$

Budući da α sadrži samo Poissonov koeficijent, koji se odnosi na skelet tla, a $G = G'$, može se konstatirati da se lijevi dio ovih jednadžbi odnosi na efektivna naprezanja. Naime, za potpuno saturirano tlo vrijedi princip efektivnih naprezanja, pa se konstitucijski odnos za elastično, izotropno tlo može pisati u obliku

$$d\sigma'_\mathrm{x}=2G'\left(d\varepsilon_\mathrm{x}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\sigma_\mathrm{x}-du$$

$$d\sigma'_\mathrm{y}=2G'\left(d\varepsilon_\mathrm{y}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\sigma_\mathrm{y}-du$$

$$d\sigma'_\mathrm{z}=2G'\left(d\varepsilon_\mathrm{z}+\alpha\,d\varepsilon_\mathrm{v}\right)=d\sigma_\mathrm{z}-du$$

Može se, dakle, zaključiti da se navedenim konstitucijskim odnosom za skelet nesaturiranoga tla, implicitno uvodi Bishopov izraz za efektivna naprezanja nesaturiranoga tla:

$$\sigma'=\left(\sigma-u_\mathrm{a}\right)+\chi\left(u_\mathrm{a}-u\right)$$

pri čemu bi parametar β bio jednak parametru χ. Isto je implicitno učinio Biot u analognim izrazima za konstitucijski odnos za skelet tla:

$$d\sigma_x = 2G\left(d\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} d\varepsilon_v \right) + \alpha_B \, du$$

$$d\sigma_z = 2G\left(d\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} d\varepsilon_v \right) + \alpha_B \, du$$

$$d\sigma_z = 2G\left(d\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} d\varepsilon_v \right) + \alpha_B \, du$$

gdje je $\alpha_B = \beta = \chi$.

II.4. Jednadžba kontinuiteta za vodu

Specifični protok u trodimenzionalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu definira se kao vektor čiji je smjer tangentan na putanju vode, a komponente su mu (v_x, v_y i v_z) jednake protoci po jedinici površine plohe okomite na odgovarajući smjer. Za dijagonalnu matricu koeficijenta propusnosti, prema Darcyevom zakonu možemo pisati

$$v_x = k_x \, i_x \qquad v_y = k_y \, i_y \qquad v_z = k_z \, i_z$$

Kada matrica koeficijenta propusnosti ne bi bila dijagonalna, dobili bismo, primjerice,

$$v_x = k_x \, i_x + k_{xy} \, i_y + k_{xz} \, i_z$$

Hidraulički su gradijenti definirani s

$$i_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad i_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad i_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

gdje je H hidraulički potencijal.

U poglavlju o konsolidaciji tla je pokazano da je za jednodimenzionalno (vertikalno) strujanje vode kroz potpuno saturirano tlo u smjeru y

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u_e}{\partial y}$$

gdje je u_e višak tlaka vode u odnosu na tlak vode u_0 u hidrostatskom stanju. Međutim, za trodimenzionalno strujanje vode treba krenuti od osnovne definicije hidrauličkoga potencijala:

$$H = P + z_g = \frac{u}{\gamma_w} + z_g$$

Ako pretpostavimo da je zapreminska težine vode γ_w konstantna u vremenu i usmjerena u smjeru sile teže, tada se geodetska visina z_g, koja je usmjerena u suprotnom smjeru od sile teže, može pisati u obliku

$$z_g = -y + C$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Sada je

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\gamma_w}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_w\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}$$

Za strujanje vode kroz propusnu sredinu mora biti zadovoljena jednadžba kontinuiteta, odnosno zakon održanja mase vode. Budući da se pretpostavlja da je voda u tlu nestišljiva, ovaj je zakon ekvivalentan zakonu održanja volumena vode u tlu. To znači da odljev vode iz nekog elementa tla kroz njegove rubove mora biti jednak smanjenju volumena vode u tom elementu po jedinici vremena. Jednadžba kontinuiteta za vodu u matematičkom obliku glasi

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

gdje je θ obujamska vlažnost tla

$$\theta = n_w = \frac{V_w}{V} = n\,S_r$$

dakle, ovisi o porozitetu tla n i stupnju saturacije tla S_r.

Za nestacionarno strujanje vode kroz tlo, jednadžbu kontinuiteta možemo, dakle, pisati u obliku

$$\frac{1}{\gamma_w}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_w\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Desnu stranu jednadžbe kontinuiteta možemo pisati i u drugom obliku:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = n\,\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial t} + S_{\mathrm{r}}\,\frac{\partial n}{\partial t}$$

s tim da je

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t}$$

S druge strane, stupanj saturacije ovisi o kapilarnom usisu ($u_{\mathrm{a}} - u$) i pada s porastom kapilarnog usisa, tako da je

$$\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial t} = -\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}\,\frac{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}{\partial t}$$

pa jednadžba kontinuiteta za vodu glasi

$$\frac{1}{\gamma_{\mathrm{w}}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{\mathrm{x}}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{\mathrm{y}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{\mathrm{w}}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{\mathrm{z}}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= -\left(S_{\mathrm{r}}\,\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t} + n\,\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}\,\frac{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}{\partial t}\right)$$

Ovaj oblik jednadžbe kontinuiteta za vodu odgovara onom Fredlunda i Rihardja za izotropan koeficijent propusnosti *k*, a glasi:

$$\frac{k}{\gamma_{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\gamma_{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial k}{\partial y} =$$

$$= -\left(\beta_{\mathrm{w1}}\,\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t} + \beta_{\mathrm{w2}}\,\frac{\partial \left(u_{\mathrm{a}} - u\right)}{\partial t}\right)$$

s tim da je

$$\beta_{\mathrm{w1}} = S_{\mathrm{r}}$$

$$\beta_{\mathrm{w2}} = n\,\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)} < 0$$

Za izotropan i konstantan koeficijent propusnosti *k*, Biot dobiva sljedeću jednadžbu kontinuiteta za vodu:

$$\frac{k}{\gamma_\mathrm{w}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\left(\alpha_\mathrm{B}\frac{\partial \varepsilon_\mathrm{v}}{\partial t}+\frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

pri čemu treba napomenuti da je definicija predznaka za ε_v kod Biota obrnuta od ovdje primijenjene, a Q ima pozitivnu vrijednost i definiran je izrazom

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{R}-\frac{\alpha_\mathrm{B}}{H_\mathrm{B}}$$

gdje $1/R$ predstavlja promjenu obujamske vlažnosti θ za danu promjenu negativnog tlaka vode, a $1/Q$ predstavlja količinu vode koja se pod tlakom može usisati u tlo pri konstantnom volumenu tla. Nadalje, Biot kaže da konstante α_B i Q imaju ulogu samo za nesaturirano tlo koje sadrži mjehuriće zraka (stupanj saturacije iznad 80 %) te da njihova vrijednost ovisi o stupnju saturacije tla. Za saturirano je tlo $\alpha_\mathrm{B} = 1$, a $1/Q = 0$.

Dakle, iz ovdje prikazane jednadžbe kontinuiteta za vodu proizlazi da je

$$\alpha_\mathrm{B}=S_\mathrm{r}$$

$$-\frac{1}{Q}=n\,\frac{\partial S_\mathrm{r}}{\partial(u_\mathrm{a}-u)}<0$$

II.5. Jednadžba kontinuiteta za zrak

Za strujanje vode kroz tlo primjenjuje se Darcyev zakon, dok se za strujanje zraka kroz tlo koristi prvi Fickov zakon, koji kaže da je specifični protok mase tvari koja struji, proporcionalan gradijentu koncentracije ove tvari (omjer mase tvari i volumena promatranoga tijela). Specifični protok mase zraka u smjeru x ćemo označiti s J_ax (g/(s m^2)) i analogno u smjerovima y i z, a koncentraciju zraka u tlu s C, s tim da je

$$C=\frac{M_\mathrm{a}}{V}$$

gdje je M_a masa zraka u gramima (g), a V je volumen tla.

Tada prvi Fickov zakon za zrak glasi

$$J_{ax} = -D_a \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$J_{ay} = -D_a \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$J_{az} = -D_a \frac{\partial C}{\partial z}$$

gdje je D_a izotropan koeficijent difuzije, odnosno koeficijent protoka zraka kroz tlo (m^2/s).

Prema zakonu održanja mase zraka u tlu, „odljev“ mase zraka iz nekog elementa tla kroz njegove rubove mora biti jednak smanjenju koncentracije zraka u tom elementu po jedinici vremena. Jednadžba kontinuiteta za zrak u matematičkom obliku glasi

$$\frac{\partial J_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial J_{ay}}{\partial y} + \frac{\partial J_{az}}{\partial z} = -\frac{\partial C}{\partial t}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_a \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_a \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_a \frac{\partial C}{\partial z} \right) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Ako je koeficijent protoka zraka kroz tlo D_a konstantan, dobijemo

$$D_a \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

što predstavlja drugi Fickov zakon.

No, vratimo se prvom Fickovom zakonu za zrak, u koji želimo uvesti relativni tlak zraka u_a. Apsolutni tlak zraka $\overline{u}_a$ jednak je zbroju relativnog tlaka zraka u_a i atmosferskog tlaka zraka $\overline{u}_{atm}$. Gustoća zraka ρ_a omjer je mase zraka M_a i volumena zraka V_a. Prema zakonu idealnog plina je

$$\overline{u}_a V_a = \frac{M_a}{\omega_a} R T$$

gdje je ω_a molekularna masa zraka (g/mol), R je molarna konstanta plina ($R = 8{,}31432$ J/(mol×K)), a T je apsolutna temperatura, $T = t° + 273{,}16$ (K), pri čemu je $t°$ temperatura (°C).

Tako dobijemo da je

$$\rho_a = \frac{\omega_a}{RT}\,\overline{u}_a$$

Volumen zraka u tlu V_a vezan je s volumenom tla V izrazom

$$V_a = \left(1 - S_r\right) n\, V$$

tako da koncentraciju zraka u tlu možemo pisati u obliku

$$C = \rho_a \left(1 - S_r\right) n$$

Budući da gustoća zraka ovisi o apsolutnom tlaku zraka, pa tako i o relativnom tlaku zraka u_a, za smjer x možemo pisati da je

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial x}$$

Ako označimo:

$$D_a^* = -D_a \frac{\partial C}{\partial u_a}$$

tada prvi Fickov zakon možemo pisati u obliku

$$J_{ax} = D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial x}$$

$$J_{ay} = D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial y}$$

$$J_{az} = D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial z}$$

pa jednadžba kontinuiteta za zrak poprima oblik

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) = -\frac{\partial C}{\partial t}$$

S druge strane je

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(1 - S_{\mathrm{r}}\right) n \frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} - \rho_{\mathrm{a}}\, n \frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial t} + \rho_{\mathrm{a}} \left(1 - S_{\mathrm{r}}\right) \frac{\partial n}{\partial t}$$

Kako je

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{a}}}{\partial t} = \frac{\omega_{\mathrm{a}}}{RT} \frac{\partial \overline{u}_{\mathrm{a}}}{\partial t} = \frac{\omega_{\mathrm{a}}}{RT} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial t} = \frac{\rho_{\mathrm{a}}}{\overline{u}_{\mathrm{a}}} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial t} = -\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)} \frac{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t}$$

konačno dobijemo jednadžbu kontinuiteta za zrak u obliku

$$\frac{1}{\rho_{\mathrm{a}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\mathrm{a}}^{*} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{\mathrm{a}}^{*} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\mathrm{a}}^{*} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\left(1 - S_{\mathrm{r}}\right) n}{\overline{u}_{\mathrm{a}}} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial t} =$$
$$= -\left[\left(S_{\mathrm{r}} - 1\right) \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t} + n \frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)} \frac{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}{\partial t} \right]$$

Ovaj oblik jednadžbe kontinuiteta za zrak odgovara onom Fredlunda i Rihardja:

$$\frac{D_{\mathrm{a}}^{*}}{\rho_{\mathrm{a}}} \left(\frac{\partial^2 u_{\mathrm{a}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{\mathrm{a}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{\mathrm{a}}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho_{\mathrm{a}}} \left(\frac{\partial D_{\mathrm{a}}^{*}}{\partial x} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial x} + \frac{\partial D_{\mathrm{a}}^{*}}{\partial y} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial y} + \frac{\partial D_{\mathrm{a}}^{*}}{\partial y} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial y} \right) +$$
$$+ \frac{\left(1 - S_{\mathrm{r}}\right) n}{\overline{u}_{\mathrm{a}}} \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial t} = -\left(\beta_{\mathrm{a1}} \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t} + \beta_{\mathrm{a2}} \frac{\partial \left(u_{\mathrm{a}} - u\right)}{\partial t} \right)$$

s tim da je

$$\beta_{\mathrm{a1}} = \beta_{\mathrm{w1}} - 1 = S_{\mathrm{r}} - 1$$

$$\beta_{\mathrm{a2}} = \beta_{\mathrm{w2}} = n \frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial (u_{\mathrm{a}} - u)}$$

Ako je u nesaturiranom dijelu tla tlak zraka konstantan u vremenu i prostoru, tada strujanje zraka postaje irelevantnim, isto kao i jednadžba kontinuiteta za zrak. Budući da je tlo bitno više propusno u odnosu na gibanje zraka nego u odnosu na gibanje vode, a propusnost zraka je također bitno veća od uobičajene brzine promjene deformacija u tlu, u praktičnoj se geotehnici tlak zraka može smatrati konstantnim. Zato se u praksi strujanje zraka, odnosno jednadžba kontinuiteta za zrak, uglavnom zanemaruje.

II.6. Ostali konstitucijski odnosi

Uz konstitucijski odnos za skelet tla, potrebno je definirati još nekoliko konstitucijskih odnosa. Prvo je potrebno poznavati ovisnost stupnja saturacije o kapilarnom usisu (u_a - u)

$$S_r = \mathcal{S}(u_a - u)$$

gdje je $\mathcal{S}$ funkcional.

Zatim treba poznavati ovisnost komponenata matrice koeficijenta propusnosti o ($u_a - u$) i o volumskoj deformaciji

$$[k] = [\mathcal{K}][(u_a - u), \varepsilon_v]$$

Komponente matrice $[\mathcal{K}]$ su također funkcionali.

Ako se ne zanemaruje strujanje zraka, treba poznavati ovisnost koncentracije zraka u tlu o relativnom tlaku zraka

$$C = \mathcal{C}(u_a)$$

Kako je koncentracija zraka u tlu dana izrazom

$$C = \rho_a (1 - S_r) n$$

proizlazi da je potrebno poznavati ovisnost gustoće zraka o tlaku zraka, što je dano zakonom idealnog plina, dok S_r ovisi o ($u_a - u$), a promjena poroziteta n odgovara promjeni volumske deformacije.

Jednadžbama ravnoteže, jednadžbama kontinuiteta za zrak i vodu te svim spomenutim konstitucijskim odnosima, u potpunosti je definirana sparena teorija trodimenzionalne konsolidacije za nesaturirano tlo. Kao što se može vidjeti iz ovih jednadžbi, radi se o matematički vrlo kompleksnom problemu.

III. Nesparena konsolidacija

III.1. Saturirano tlo

Budući da je rješavanje sparene konsolidacije tla matematički vrlo zahtijevan zadatak, u praksi se često koristi približno rješenje nesparene (*uncoupled*) konsolidacije, koje je prvo razvijeno za saturirano tlo. Ovo je rješenje zadovoljavajuće, ako se može pretpostaviti da se tijekom konsolidacije ukupna naprezanja ne mijenjaju.

Za saturirano je tlo $S_r = 1$, pa je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$$

pri čemu volumska deformacija ε_v ovisi o efektivnim naprezanjima. Uz uvažavanje principa efektivnih naprezanja, slijedi da je

$$-\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma'_x} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma'_y} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma'_z} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

Iz izraza

$$d\sigma'_x = 2G'\left(d\varepsilon_x + \alpha\, d\varepsilon_v \right)$$

$$d\sigma'_y = 2G'\left(d\varepsilon_y + \alpha\, d\varepsilon_v \right)$$

$$d\sigma'_z = 2G'\left(d\varepsilon_z + \alpha\, d\varepsilon_v \right)$$

slijedi da je srednje efektivno naprezanje

$$dp' = \frac{d\sigma'_x + d\sigma'_y + d\sigma'_z}{3} = K'\, d\varepsilon_v$$

gdje je K' volumski modul skeleta tla:

$$K' = \frac{E'}{3\left(1 - 2\nu\right)}$$

Time dobijemo da je

$$-\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{K'} \frac{\partial u}{\partial t}$$

odnosno

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{K'} \frac{\partial u}{\partial t}$$

pa jednadžba kontinuiteta za vodu poprima oblik

$$\frac{K'}{\gamma_{\mathrm{w}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{\mathrm{x}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{\mathrm{y}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{\mathrm{w}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{\mathrm{z}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu kojoj je jedina nepoznanica tlak vode u tlu, a opisuje proces konsolidacije tla. Jednadžbe ravnoteže više nisu potrebne, pa otuda naziv nesparene konsolidacije. Kada se iz ove diferencijalne jednadžbe odredi tlak vode za dano vrijeme t, jednadžbe ravnoteže mogu se nezavisno rješavati.

U edometarskim uvjetima nema bočnih deformacija, pa je volumska deformacija jednaka vertikalnoj, $d\varepsilon_{\mathrm{v}} = d\varepsilon_{\mathrm{y}}$. Tako dobijemo da je

$$-\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{v}}}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \sigma'_{\mathrm{y}}} \frac{\partial \sigma'_{\mathrm{y}}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \sigma'_{\mathrm{y}}} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{M_{\mathrm{v}}} \frac{\partial u}{\partial t}$$

gdje je M_{v} edometarski modul stišljivosti skeleta tla:

$$M_{\mathrm{v}} = \frac{E'}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Sada diferencijalna jednadžba nesparene konsolidacije poprima oblik

$$\frac{M_{\mathrm{v}}}{\gamma_{\mathrm{w}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{\mathrm{x}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{\mathrm{y}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{\mathrm{w}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{\mathrm{z}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

U posebnom slučaju izotropnog koeficijenta propusnosti k, dobijemo

$$c_{\mathrm{v}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

gdje je c_{v} Terzaghiev koeficijent konsolidacije:

$$c_{\mathrm{v}} = \frac{M_{\mathrm{v}}\, k}{\gamma_{\mathrm{w}}}$$

Za slučaj jednodimenzionalne konsolidacije dobijemo Terzaghievu jednadžbu

$$c_{\mathrm{v}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

III.2. Nesaturirano tlo

U nesaturiranom tlu, posebno ako je njegova vlažnost ispod granice stezanja, može se pretpostaviti da je promjena volumske deformacije približno jednaka nuli. U tom je slučaju obujamska vlažnost θ funkcija samo tlaka vode u, pa je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ako s $1/M_1$ označimo nagib tangente na krivulju ovisnosti obujamske vlažnosti o tlaku vode, odnosno

$$\frac{1}{M_1} = \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

tada jednadžba kontinuiteta za vodu poprima oblik

$$\frac{M_1}{\gamma_{\mathrm{w}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{\mathrm{x}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{\mathrm{y}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{\mathrm{w}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{\mathrm{z}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ako se u ovoj jednadžbi M_1 zamijeni edometarskim modulom M_{v}, dobiva se ista jednadžba kao za saturirano tlo u edometarskim uvjetima. U analizama tla koje je dijelom saturirano, a dijelom nesaturirano, zbog uvjeta neprekidnosti, za $S_{\mathrm{r}} = 1$, mora vrijediti da je $M_1 = M_{\mathrm{v}}$.

IV. Stacionarno strujanje vode kroz tlo

Za stacionarno je strujanje vode

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

Pa jednadžba stacionarnog strujanja vode kroz tlo glasi

$$\frac{1}{\gamma_{\mathrm{w}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{\mathrm{x}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{\mathrm{y}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{\mathrm{w}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{\mathrm{z}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0$$

Reference

Biot, M.A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics* 12(2), 155-164.

Bishop, A.W., Blight, G.E. (1963). Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Géotechnique* 13(3), 177-197.

Fredlund, D.G., Morgenstern, N.R. (1976). Constitutive relations for volume change in unsaturated soil. *Canadian Geotechnical Journal* 13 (4) 261-276.

Fredlund, D.G., Rahardjo, H. (1993). *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. John Wiley & Sons, New York, 560 p.