Vjerojatnost i statistika

vježbe 2018/2019.

11. prosinca 2018.

Sadržaj

Poglavlje 1

Kombinatorika

1.1 Permutacije

Permutacija je poredak konačnog broja objekata u redoslijed. Ako imamo n objekata, onda je broj mogućih poredaka $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Zadatak 1.1. Napišite sve permutacije bez ponavljanja skupa $S = \{1, 2, 3\}$.

Rješenje: Permutacije su uređene trojke skupa S: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. Broj permutacija: $3! = 6$. $\square$

Zadatak 1.2. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, pri čemu se znamenke ne smiju ponavljati?

Rješenje: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $\square$

Zadatak 1.3. Na koliko načina možemo razdijeliti 5 različitih pari čarapa u 5 ladica ako u svaku ladicu smijemo staviti samo jedan par?

Rješenje: Na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina. $\square$

1.2 Permutacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n objekata od čega je n_1 objekata prve vrste, n_2 objekata druge vrste, … i n_k objekata k-te vrste. Broj različitih poredaka ove familije je

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Zadatak 1.4. Na koliko načina je moguće nanizati 4 zelene, 5 plavih i 6 crvenih perlica?

Rješenje: Perlice razlikujemo samo po boji, dakle bitan nam je poredak perlica koje su međusobno različitih boja. Kad bi svih 15 perlica bilo različite boje, mogli bismo ih nanizati na 15! načina. Međutim, moramo uzeti u obzir da se perlice istih boja međusobno ne razlikuju, pa dobivamo konačan broj od $\frac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!} = 630630$ mogućnosti. □

Zadatak 1.5. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 1, 2, 2, 2$?

Rješenje: Od ukupno 5 znamenaka, imamo dvije jedinice i tri dvojke, dakle možemo sastaviti $\frac{5!}{2!3!} = 10$ različitih peteroznamenkastih brojeva. □

Zadatak 1.6. Na koliko načina možemo rasporediti 5 osobnih automobila, 7 motocikala i 3 kombi-vozila na 15 policijskih postaja ako svakoj postaji pripada samo jedno vozilo?

Rješenje: Na $\frac{15!}{5!7!3!} = 720720$ načina. □

1.3 Varijacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n$. Varijacija je poredak bilo kojih k objekata (od n) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Specijalno, ako je $k = n$, onda se radi o permutaciji.

Zadatak 1.7. Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$ tako da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Prvu znamenku možemo izabrati na 6 načina, drugu znamenku na 5 načina, a treću na 4 načina (znamenke se ne smiju ponavljati). Ukupan broj mogućnosti: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. □

Zadatak 1.8. Koliko ima različitih dvoznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Budući da 0 ne može biti na prvom mjestu (inače nemamo dvoznamenkasti broj!), prvu znamenku možemo izabrati na 4 načina. Drugu znamenku također biramo na 4 načina jer se znamenke ne smiju ponavljati. Dakle, broj različitih dvoznamenkastih brojeva iz skupa S je $4 \cdot 4 = 16$. □

Zadatak 1.9. U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo odabrati 3 loptice bez vraćanja ako je poredak izvučenih loptica bitan?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. □

Zadatak 1.10. U kutiji se nalaze 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti najviše jednu lopticu?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. □

1.4 Varijacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $k \geqslant 1$. Varijacija s ponavljanjem je poredak bilo kojih k (možemo ponavljati/uzimati isti objekt) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n^k.$$

Zadatak 1.11. Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5$ ako dozvoljavamo ponavljanje?

Rješenje: Budući da je ponavljanje znamenki dozvoljeno, sva tri broja možemo izabrati na 5 načina, pa ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ mogućnosti. □

Zadatak 1.12. Iz kutije u kojoj je sedam kuglica različitih boja izvlačimo dvije kuglice jednu po jednu, s vraćanjem ponovo u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti tim postupkom ako je poredak izvučenih kuglica bitan?

Rješenje: Navedenim postupkom dobit ćemo $7 \cdot 7 = 49$ različitih uzoraka. □

Zadatak 1.13. U kutiji su 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 6 kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj loptica?

Rješenje: Na $6^3 = 216$ načina. $\square$

1.5 Kombinacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $0 \leqslant k \leqslant n$. Kombinacija je bilo koji podskup veličine k ove familije. Takvih podskupova imamo

$$\binom{n}{k}.$$

Neka su $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant n$. Binomni koeficijent, u oznaci $\binom{n}{k}$, je broj dan formulom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1$, jer definiramo $0! = 1$.

(ii) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(iii) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

Zadatak 1.14. Na koliko načina možemo iz grupe od 10 ljudi izabrati četveročlani odbor?

Rješenje: Na $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$ načina. $\square$

Zadatak 1.15. Skup od 50 proizvoda sadrži 10 neispravnih proizvoda. Na koliko se različitih načina može formirati uzorak koji bi sadržavao 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda?

Rješenje: U skupu se nalazi 10 neispravnih i 40 ispravnih proizvoda. Od 10 neispravnih, mi izabiremo 3 proizvoda na $\binom{10}{3}$ načina. Iz podskupa ispravnih proizvoda izabiremo 5 proizvoda na $\binom{40}{5}$ načina. Dakle, osmeročlani uzorak u kojem ima 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda možemo formirati na $\binom{40}{5} \cdot \binom{10}{3} = 78960960$ načina. $\square$

Zadatak 1.16. U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo izabrati 3 loptice bez vraćanja ako poredak izabranih loptica nije bitan?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina. $\square$

Zadatak 1.17. Imamo 3 jednake loptice. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti samo jednu lopticu?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina. $\square$

1.6 Kombinacije s ponavljanjem

Imamo n različitih spremnika. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kombinacija s ponavljanjem je bilo koji raspored k objekata (koje ne razlikujemo) u tih n spremnika. Objekte možemo zamišljati kao kuglice u nizu, a spremnike određujemo s $n-1$ pregradom. Npr. na slici prikazujemo jedan takav raspored 8 kuglica u 6 spremnika.

Slika 1.1: Raspored 8 objekata u 6 spremnika

Slika određuje sljedeći raspored: dvije kuglice u prvi spremnik, jedna u drugi spremnik, tri u treći spremnik, jedna u četvrti spremnik, nijedna u peti spremnik i jedna u šesti spremnik.

Prebrojimo sad moguće rasporede za n spremnika i k objekata. U tom bismo slučaju na slici imali ukupno $k+n-1$ mjesto za kuglicu i pregradu. Raspored je određen odabirom k mjesta na koje bismo stavili kuglice, odnosno odabirom $n-1$ mjesta na koje bismo stavili pregrade. Stoga takvih rasporeda imamo

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

Zadatak 1.18. Na koliko se načina 10 jednakih kuglica može rasporediti u 5 različitih kutija?

Rješenje: To možemo učiniti na $\binom{10+5-1}{10}$ načina. $\square$

Zadatak 1.19. Deset jednakih olovaka raspoređujemo u tri različite posude. Koliko razdioba možemo dobiti?

Rješenje: $n = 3, k = 10$. Možemo dobiti $\binom{3+10-1}{10} = 66$ različitih razdioba. $\square$

Zadatak 1.20. U studentskoj menzi se prodaju tri vrste kolača. Na koliko je načina moguće kupiti 9 kolača?

Rješenje: Imamo tri različite vrste kolača ($n = 3$) od kojih želimo sastaviti skup od 9 kolača ($k = 9$). To je moguće napraviti na $\binom{3+9-1}{9} = \binom{11}{9} = 55$ načina. $\square$

Zadatak 1.21. Iz kutije u kojoj su tri kuglice različitih boja izvlačimo jednu kuglicu, bilježimo boju i vraćamo je u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti ako postupak ponavljamo 8 puta uz pretpostavku da redosljed nije bitan?

Rješenje: $n = 3, k = 8$, dobit ćemo $\binom{3+8-1}{8} = 45$ različitih uzoraka. $\square$

Zadatak 1.22. (DZ) Koliko rješenja (x, y, z) u skupu $\mathbb{N}_0$ ima jednadžba $x + y + z = 10$?

Poglavlje 2

Vjerojatnost a priori

Definicija 2.1 (Vjerojatnost *a priori*)**.** *Izvršavamo pokus koji ima najviše konačno mnogo ishoda koji su svi jednako vjerojatni. Vjerojatnost* a priori *događaja vezanog uz ovaj pokus se definira kao omjer broja povoljnih ishoda (koji ulaze u promatrani događaj) i broja svih ishoda.*

Primjenjiva je samo na slučajne pokuse s konačno mnogo jednako vjerojatnih ishoda.

Definicija 2.2 (Vjerojatnost *a posteriori*)**.** *Izvršavamo neki slučajan pokus. Neka je A neki događaj vezan uz taj pokus. Vjerojatnost* a posteriori *događaja A se definira kao*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},$$

gdje je n_A broj pojavljivanja događaja A u n ponavljanja pokusa.

Neka svojstva vjerojatnosti:

(i) $A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Zadatak 2.1. A, B i C su događaji vezani za isti prostor elementarnih događaja Ω. Koristeći skupovne operacije napišite izreke za događaje:

a) nastupili su A i B dok C nije nastupio,

b) nastupila su barem dva događaja,

c) nastupio je samo jedan događaj.

(Prodajemo stanove u Zagrebu. Označimo sa A događaj "prodan je stan na Trešnjevci", s B događaj "prodan je stan u Mlinovima" i s C događaj "prodan je stan na Kajzerici". Koristeći skupovne operacije napišite izreke za događaje:

a) prodani su stanovi na Trešnjevci i u Mlinovima, dok na Kajzerici nije,

b) prodani su stanovi u barem dva kvarta,

c) prodan je stan u samo jednom kvartu.)

Rješenje:

a) $A \cap B \cap C^C$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

□

Zadatak 2.2. Na slučajan način izabiremo studenta Građevinskog fakulteta u Zagrebu. Razlikujemo sljedeće događaje:
$A \ldots$ izabrana osoba je pušač
$B \ldots$ izabrana osoba ima plavu kosu
$C \ldots$ izabrana osoba je student prve godine
Opišite riječima događaje:

a) $A^C \cap B \cap C$

b) $(A \cup B)^C$

c) $A \cup (B \cap C)^C$

Rješenje:

a) Izabrana osoba je plavokosi nepušač, student prve godine.

b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \Rightarrow$ Izabrana osoba je nepušač koji nema plavu kosu.

c) $A \cup B^C \cup C^C \Rightarrow$ Izabrana osoba ili puši ili nema plavu kosu ili nije student prve godine.

$\square$

Zadatak 2.3. Eksperiment se sastoji u bacanju tri simetrična novčića.

a) Ispišite elemente skupa Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:
A - pojavio se barem jedan grb
B - pojavilo se barem jedno pismo
C - pojavilo se više grbova nego pisama
D - nije se pojavio grb
E - pojavili su se i grb i pismo
F - pojavilo se više pisama nego grbova
G - pojavili su se samo grbovi ili samo pisma

Rješenje:

a) $\Omega = \{(P,P,P),(P,P,G),(P,G,P),(P,G,G),(G,P,P),(G,P,G),$
$(G,G,P),(G,G,G)\}$

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4}$.

$\square$

Zadatak 2.4. Eksperiment se sastoji u bacanju tri igraće kocke.

a) Opišite skup Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti događaja:
$A \ldots$ na sve tri kocke ja pao isti broj
$B \ldots$ suma brojeva na sve tri kocke je 6

Rješenje:

a) $\Omega = \{(x,y,z) \in S^3 : S = \{1,2,3,4,5,6\}\}$

b) $A = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$
$B = \{(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),$
$(3,1,2),(3,2,1),(2,2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$.

$\square$

Zadatak 2.5. U kutiji su dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice. Izvlačimo jednu po jednu kuglicu i stavljamo ih u niz.

a) Koliko postoji različitih uzoraka sastavljanih od dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice?

b) Kolika je vjerojatnost da se izabere niz u kojem su baš prve dvije kuglice bijele, zatim tri zelene i na kraju četiri crvene?

Rješenje:

a) Navedenih uzoraka ima $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$.

b) Tražimo vjerojatnost pojavljivanja skupa $A = (b,b,z,z,z,c,c,c,c)$. Od ukupno 1260 mogućnosti, nama odgovara samo jedna, dakle tražena vjerojatnost je jednaka $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1260}$.

$\square$

Zadatak 2.6. U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice s vraćanjem u kutiju. Kolika je vjerojatnost

a) da u drugom izvlačenju izvadimo žutu kuglicu?

b) da u uzorku imamo barem jednu žutu kuglicu?

Rješenje:

a) $A \ldots$ u drugom izvlačenju dobivena je žuta kuglica $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{5^2}{5^3} = 0.2$

b) $B \ldots$ izvučena je barem jedna žuta kuglica $\Rightarrow B^C \ldots$ nije izvučena nijedna žuta kuglica. Stoga je $\mathbb{P}(B^C) = \dfrac{4^3}{5^3}$, jer kuglice biramo iz skupa od preostale 4 različite kuglice, pa slijedi da je $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{4^3}{5^3}$. $\square$

Zadatak 2.7. Imamo tri loptice koje raspoređujemo u pet kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti najviše jednu lopticu. Kolika je vjerojatnost da prva kutija bude puna ako

a) pretpostavimo da su sve loptice različitih boja?

b) su sve loptice iste boje?

Rješenje:

$A \ldots$ prva kutija je puna

a) $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot (4 \cdot 3)}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0.6$

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.6$

$\square$

Zadatak 2.8. U uzorak uzimamo 3 proizvoda od ukupno 10 proizvoda (od kojih je 6 ispravnih i 4 neispravna). Kolika je vjerojatnost da u uzorku

a) nema neispravnih proizvoda?

b) ima jedan neispravan proizvod?

c) ima barem dva ispravna proizvoda?

Rješenje:
Tri proizvoda koja uzimamo u uzorak možemo izabrati na $\binom{10}{3} = 120$ načina.

a) Broj uzoraka koji nemaju neispravnih proizvoda je jednak $\binom{6}{3}\binom{4}{0} = 20$.
$A \ldots$ u uzorku nema neispravnih proizvoda. $\mathbb{P}(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

b) Broj uzoraka u kojem se nalazi točno jedan neispravan proizvod je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$.
$B \ldots$ u uzorku je točno jedan neispravan proizvod. $\mathbb{P}(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

c) Broj uzoraka s barem dva ispravna proizvoda je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{3}\binom{4}{0} = 60 + 20 = 80$.
$C \ldots$ u uzorku se nalaze barem dva ispravna proizvoda.
$\mathbb{P}(C) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$. $\square$

Zadatak 2.9. U skupu od 50 žarulja 3 su štedne.

a) Na koliko načina možemo odabrati dvije žarulje iz navedenog skupa? Na koliko načina možemo odabrati dvije štedne žarulje?

b) Kolika je vjerojatnost da će dvije odabrane žarulje biti štedne?

c) Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati jednu štednu i jednu običnu žarulju?

Rješenje:

a) Dvije žarulje iz skupa od 50 žarulja možemo odabrati na $\binom{50}{2} = 1225$ načina, a dvije štedne žarulje možemo izabrati na $\binom{3}{2} = 3$ načina.

b) $A \ldots$ odabrali smo dvije štedne žarulje $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{3}{1225} = 0,0024$.

c) $B \ldots$ odabrali smo jednu štednu i jednu običnu žarulju $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{47}{1}\binom{3}{1}}{1225} = \dfrac{141}{1225} \approx 0.1151$.

$\square$

Zadatak 2.10. Bacamo dvije igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti

a) barem jedna četvorka,

b) broj djeljiv s 2 ili s 3?

Rješenje: Znamo da je $n_\Omega = 6^2 = 36$.

a) Ishodi povoljni za događaj $A =$"pala je barem jedna četvorka" su $(4,4)$ i $(4,i),(i,4), i = 1,2,3,5,6$. Dakle $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$.

b) Brojevi djeljivi s 2 su 2, 4 i 6, a brojevi djeljivi s tri su 3 i 6. Označimo s B događaj "pao je broj djeljiv s 2 ili 3". Tada je $B^c = \{(5,1),(1,5),(1,1),(5,5)\}$ i

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{8}{9}.$$

$\square$

Zadatak 2.11. U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati uzorak u kojem se nalaze plava, crvena i zelena kuglica, ako je:

a) poredak boja bitan?

b) poredak boja nije bitan?

Rješenje:

$A \ldots$ izabrali smo plavu, crvenu i zelenu kuglicu

a) $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0.1$

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0.1$

$\square$

Zadatak 2.12. Imamo 7 loptica koje raspoređujemo u 10 kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti proizvoljan broj loptica. Kolika je vjerojatnost da u četvrtoj kutiji imamo tri loptice?

Rješenje: $A \ldots$ u četvrtoj kutiji imamo tri jednake loptice

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{9+4-1}{4}}{\binom{10+7-1}{7}} = \frac{9}{208} \approx 0.0433$$ $\square$

Zadatak 2.13. U kutiji se nalazi 20 kuglica (12 bijelih i 8 crnih). Izvlačimo 4 kuglice jednu za drugom bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da će barem jedna od njih biti bijela?

Rješenje:
$A \ldots$ izvučena je barem jedna bijela kuglica
$A^C \ldots$ izvučene su sve crne kuglice

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{14}{969}$$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{14}{969} = \frac{955}{969}.$ $\square$

Poglavlje 3

Geometrijska definicija vjerojatnosti

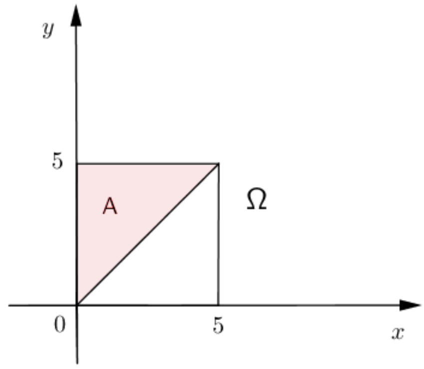
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ izmjeriv i ograničen skup. Za $A \in \mathcal{F}$ označimo s $\mu(A)$ površinu skupa A, a s $\mu(\Omega)$ površinu skupa Ω. Tada je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

vjerojatnost da smo slučajnim odabirom točke iz prostora Ω odabrali upravo točku iz izmjerivog skupa A.

Zadatak 3.1. Nasumce biramo točku iz kvadrata $\Omega = [0,5]\times[0,5]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leq x, y \leq 5$ i $x \leq y\}$?

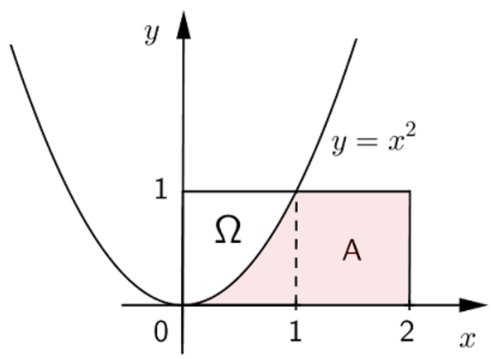
Rješenje:



$\Omega = [0,5] \times [0,5] \Rightarrow \mu(\Omega) = 5^2 = 25$
$\mu(A) = \dfrac{5^2}{2} = \dfrac{25}{2}$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{25}{2}}{25} = \dfrac{1}{2}$ $\square$

Zadatak 3.2. Iglom gađamo pravokutnik $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ cm^2. Kolika je vjerojatnost da pogodimo točku $T(x,y)$ unutar zadanog pravokutnika takvu da je $y \leq x^2$?

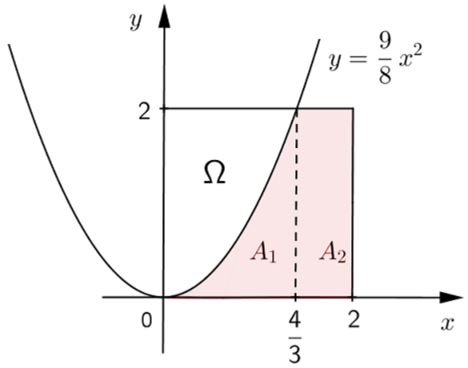
Rješenje:



$\Omega = [0,2] \times [0,1] \Rightarrow \mu(\Omega) = 2$
$T(x,y) \in A \Rightarrow \mu(A) = \int_0^1 x^2\,dx + 1 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{2}{3}$ $\square$

Zadatak 3.3. Biramo nasumce točke iz kvadrata $\Omega = [0,2]\times[0,2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leq x, y \leq 2$ i $y \leq \frac{9}{8}x^2\}$?

Rješenje:



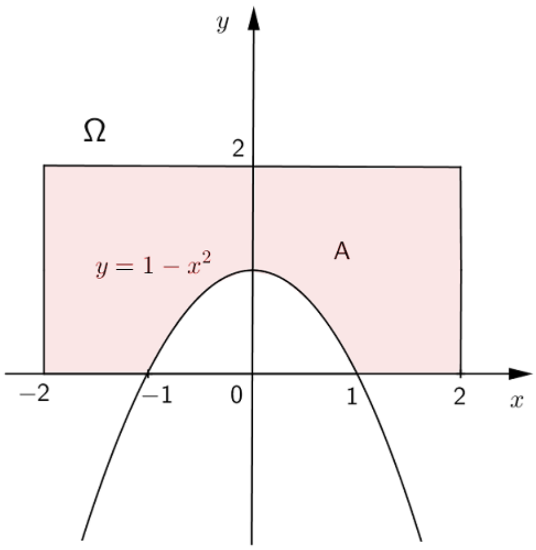
$\Omega = [0,2] \times [0,2] \Rightarrow \mu(\Omega) = 2^2 = 4$

$\mu(A) = \mu(A_1)+\mu(A_2) = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{9}{8}x^2\,dx + (2-\frac{4}{3})\cdot 2 = \frac{9}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} = \frac{3}{8}\cdot\frac{4^3}{3^3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{9}+\frac{4}{3} = \frac{20}{9}$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{20}{9}}{4} = \dfrac{5}{9}$ $\square$

Zadatak 3.4. Nasumce biramo točku iz pravokutnika $\Omega = [-2,2]\times[0,2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x,y) \in \Omega : y \geq 1 - x^2\}$?

Rješenje:



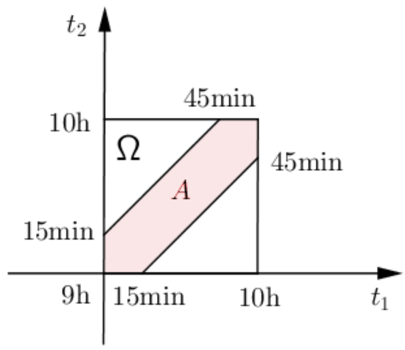
$\Omega = [-2, 2] \times [0, 2] \Rightarrow \mu(\Omega) = 4 \cdot 2 = 8$

$T(x, y) \in A \Rightarrow \mu(A) = 8 - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 8 - (x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = 8 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{20}{3}}{8} = \dfrac{5}{6}$ □

Zadatak 3.5. Dvije osobe dogovore se da će na određeno mjesto doći između 9 i 10 sati i da će se svaka tamo zadržati 15 minuta ali ne nakon 10 sati. Kolika je vjerojatnost da će se te dvije osobe susresti ako pretpostavimo da su momenti njihovih dolazaka nasumce odabrani momenti vremena između 9 i 10 sati?

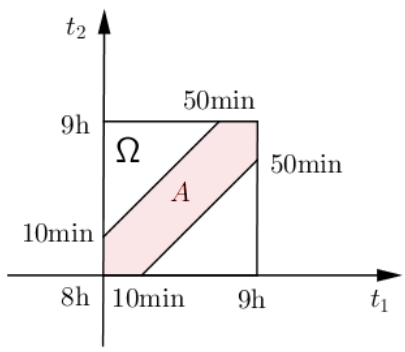
Rješenje:
$A \ldots$ osobe će se susresti
$t_1 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 1
$t_2 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 2
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 9\text{h} \leq t_1, t_2 \leq 10\text{h}\}$
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leq 15min\}$



Površine skupova Ω i A:
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$, $\mu(A) = 60^2 - 45^2 = 1575$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{1575}{3600} = \dfrac{7}{16}$. $\square$

Zadatak 3.6. Dva vlaka stižu na stanicu između 8 i 9 sati. Svaki se zadrži na stanici 10 minuta ali ne poslije 9 sati. Kolika je vjerojatnost da će se vlakovi susresti?

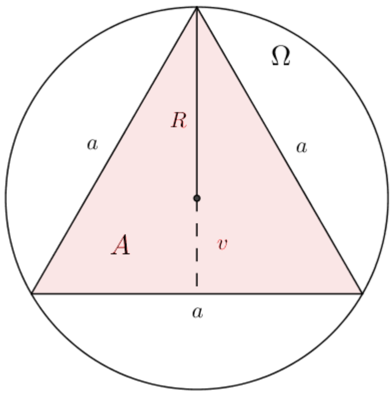
Rješenje:
$A \dots$ vlakovi će se susresti
$t_1 \dots$ trenutak kada je došao vlak 1
$t_2 \dots$ trenutak kada je došao vlak 2
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 8\text{h} \leq t_1, t_2 \leq 9\text{h}\}$
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leq 10min\}$



Površine skupova Ω i A:
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$, $\mu(A) = 60^2 - 50^2 = 1100$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{1100}{3600} = \dfrac{11}{36}.$ $\square$

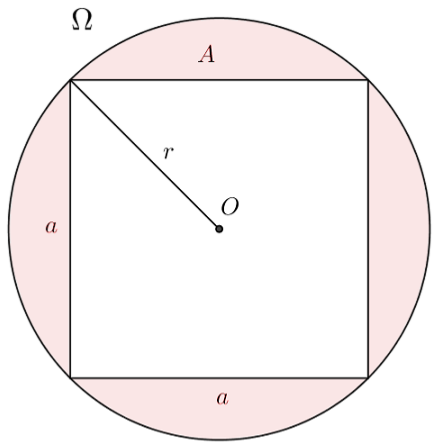
Zadatak 3.7. Unutar kruga radijusa R slučajno je odabrana točka. Nađite vjerojatnost da ta točka bude u jednakostraničnom trokutu stranice a upisanom u navedeni krug.



Rješenje:
$R = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow \sqrt{3}R = a$
$\Omega \dots$ skup svih točaka kruga radijusa R
$A \dots$ sve točke upisanog jednakostraničnog trokuta
$\mu(\Omega) = R^2\pi$
$\mu(A) = \dfrac{a \cdot v}{2} = \dfrac{a \cdot \frac{3}{2}R}{2} = \dfrac{\sqrt{3}R \cdot 3R}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}}{R^2\pi} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.4135$ $\square$

Zadatak 3.8. U krug radijusa $r = 2$ upisan je kvadrat. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući nasumce točke iz kruga odabrati točku izvan kvadrata?

Rješenje:



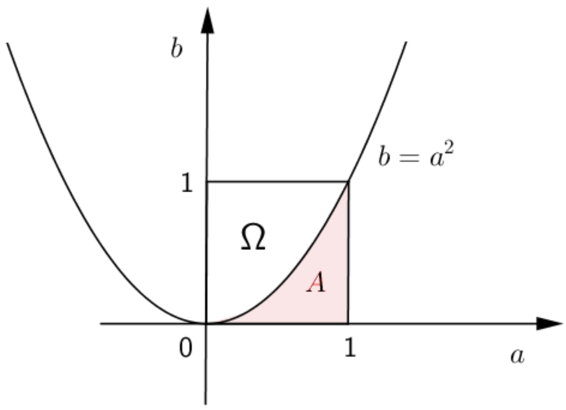
$\Omega \ldots$ krug radijusa $r = 2$
$A \ldots$ točke unutar kruga a izvan upisanog kvadrata
Ako sa a označimo stranicu upisanog kvadrata, tada po Pitagorinom poučku znamo da vrijedi

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2,$$

iz čega dolazimo do $a^2 = 8$.
$\mu(\Omega) = 4\pi$
$\mu(A) = 4\pi - 8$
$\mathbb{P}(A) = \frac{4\pi-8}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$ $\square$

Zadatak 3.9. Koeficijenti a i b jednadžbe $x^2+2ax+b = 0$ biraju se slučajno i nezavisno iz segmenta $[0, 1]$. Kolika je vjerojatnost da će navedena jednadžba imati realna rješenja?

Rješenje:
Jednadžba $x^2 + 2ax + b = 0$ ima realna rješenja ako je $D = (2a)^2 - 4b \geq 0$, tj. ako vrijedi $a^2 - b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b$.
Prostor elementarnih događaja:
$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a, b \leq 1\} \Rightarrow \mu(\Omega) = 1^2 = 1$.
$A \ldots$ jednadžba ima realna rješenja $\Rightarrow A = \{(a, b) \in \Omega : a^2 \geq b\}$



Površina skupa A: $\mu(A) = \int_0^1 a^2 da = \frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

$\square$

Poglavlje 4

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Definicija 4.1. *Za događaje A i B vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da su* nezavisni *ako je*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \tag{4.1}$$

Napomenimo da ako su A i B nezavisni, onda su to i A^C i B, A i B^C i A^C i B^C.

Definicija 4.2. *Uvjetna vjerojatnost ili vjerojatnost od A uz uvjet B je jednaka*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Posebno, ako su A i B nezavisni, informacija o A nam ne donosi ništa važno prilikom zaključivanja o neizvjesnosti B, pa vrijedi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, kao i obratno, $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Zadatak 4.1. Dva strijelca gađaju određenu metu nezavisno jedan o drugome. Vjerojatnost da će prvi strijelac pogoditi metu iznosi 0.7, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi je 0.8. Kolika je vjerojatnost da metu pogode:

a) oba strijelca?

b) točno jedan strijelac?

c) barem jedan strijelac?

d) niti jedan strijelac?

Rješenje:
$A\dots$ prvi strijelac je pogodio metu $\mathbb{P}(A) = 0.7 \implies \mathbb{P}(A^c) = 1 - 0.7 = 0.3$
$B\dots$ drugi strijelac je pogodio metu $\mathbb{P}(B) = 0.8 \implies \mathbb{P}(B^c) = 1 - 0.8 = 0.2$

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathbb{P}((A \cap B^c) + \mathbb{P}((A^c \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.14 + 0.24 = 0.38$

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94$

d) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06.$

$\square$

Zadatak 4.2. Bacamo simetričnu igraću kocku. Kolika je vjerojatnost da će pasti neparan broj pod uvjetom da je pao broj ne veći od 3?

Rješenje:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$
$A\dots$ pao je broj ne veći od 3 $\Rightarrow A = \{1, 2, 3\}$
$B\dots$ pao je neparan broj $\Rightarrow B = \{1, 3, 5\}$
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$ $\square$

Zadatak 4.3. Bacamo tri simetrične kockice. Kolika je vjerojatnost da je pala točno jedna šestica ako je poznato da su pali različiti brojevi?

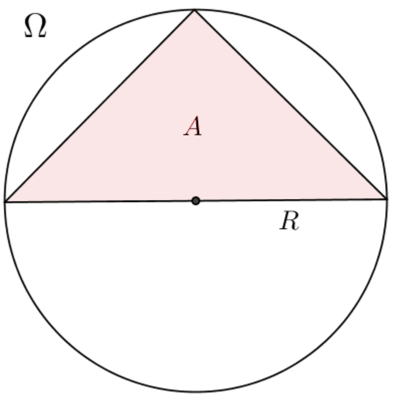
Rješenje:
$n_\Omega = 6^3$
$A\dots$ pala je točno jedna šestica
$B\dots$ pali su različiti brojevi $\Rightarrow n_B = 6 \cdot 5 \cdot 4$
$A\cap B\dots$ pala je točno jedna šestica i pali su različiti brojevi $\Rightarrow n_{A\cap B} = 3 \cdot 5 \cdot 4$
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3\cdot5\cdot4}{6^3}}{\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}} = \frac{1}{2}.$ $\square$

Zadatak 4.4. U krugu radijusa R slučajno je odabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da se točka nalazi

a) u najvećem jednakokračnom trokutu upisanom u krug s bazom u središtu kruga,

b) u trokutu pod uvjetom da se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta?

Rješenje:



a) $A \ldots$ točka se nalazi u trokutu $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{\frac{2R \cdot R}{2}}{R^2\pi} = \frac{1}{\pi}$

b) $B \ldots$ točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta (nalazi se u gornjem polukrugu)
$A \cap B \ldots$ točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta i nalazi se u trokutu $\Rightarrow$ točka se nalazi u trokutu

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{\frac{R^2\pi}{2}}{R^2\pi}} = \frac{2}{\pi}$$

□

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $H_1, H_2, \ldots, H_n$ disjunktni takvi da vrijedi $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$. Tada $H_1, \ldots, H_n$ nazivamo *potpun sustav događaja* i za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).$$

Dakle, gornja formula daje vjerojatnost događaja A ako znamo vjerojatnost po dijelovima $(H_i), i = 1, \ldots, n$. Formulu zovemo *formula potpune vjerojatnosti*.

Iz formule potpune vjerojatnosti direktno slijedi i takozvana *Bayesova formula*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}, \quad \text{za } i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Gornju formula daje vjerojatnost uzroka H_i uz danu posljedicu A.

Zadatak 4.5. Neki proizvod izrađuje se na tri stroja.
Na prvom stroju se izrađuje 40% ukupne proizvodnje i od toga je 0.1% neispravnih proizvoda,
na drugom stroju se izrađuje 35% ukupne proizvodnje i od toga je 0.2% neispravnih proizvoda, a
na trećem stroju se izrađuje 25% ukupne proizvodnje i od toga je 0.25% neispravnih proizvoda.
Kolika je vjerojatnost

a) da nasumično odabran proizvod bude neispravan,

b) da je odabrani proizvod načinjen na prvom stroju ako znamo da je neispravan?

Rješenje:
a)
$H_1 \ldots$ proizvod je izrađen na prvom stroju $\quad \mathbb{P}(H_1) = 0.4$
$H_2 \ldots$ proizvod je izrađen na drugom stroju $\quad \mathbb{P}(H_2) = 0.35$
$H_3 \ldots$ proizvod je izrađen na trećem stroju $\quad \mathbb{P}(H_3) = 0.25$
$A \ldots$ proizvod je neispravan

$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.001$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.002$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 0.0025$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3) = 0.001725.$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.4}{0.001 \cdot 0.4 + 0.002 \cdot 0.35 + 0.0025 \cdot 0.25} = 0.2319.\end{aligned}$$

□

Zadatak 4.6. Uređaj se može naći u dva režima rada: normalnom i otežanom. U normalnom režimu se nalazi 75%, a u otežanom režimu 25% radnog vremena. Za vrijeme normalnog rada uređaj otkazuje s vjerojatnošću 0.2, a za vrijeme otežanog rada s vjerojatnošću 0.5. Ako znamo da je uređaj otkazao, kolika je vjerojatnost da se to dogodilo za vrijeme otežanog režima rada? Kolika je vjerojatnost da uređaj ne otkaže?

Rješenje:
$H_1 \ldots$ uređaj je u normalnom režimu rada $\quad \mathbb{P}(H_1) = 0.75$
$H_2 \ldots$ uređaj je u otežanom režimu rada $\quad \mathbb{P}(H_2) = 0.25$
$A \ldots$ uređaj je otkazao $\quad \mathbb{P}(A|H_1) = 0.2, \mathbb{P}(A|H_2) = 0.5$

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{0.25 \cdot 0.5}{0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.5} = 0.45.$$

$A^C \ldots$ uređaj nije otkazao $\quad \mathbb{P}(A^C|H_1) = 0.8, \mathbb{P}(A^C|H_2) = 0.5$

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A^C|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A^C|H_2)\mathbb{P}(H_2) = 0.8 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.725 \quad \square$$

Zadatak 4.7. Promatrani stroj može raditi normalno i pod opterećenjem. Stroj radi normalno 60% vremena, a ostalo pod opterećenjem. Vjerojatnost da radi ispravno dok je pod opterećenjem iznosi 0.7, dok je vjerojatnost ispravnog rada dok nije pod opterećenjem jednaka 0.9. Izračunajte vjerojatnost da:

a) stroj radi ispravno.

b) je stroj ispravan i pod opterećenjem.

c) je stroj pod opterećenjem ako je ispravan.

d) je stroj pod opterećenjem ako nije ispravan.

Rješenje:
$H_1 \ldots$ stroj je pod opterećenjem $\quad \mathbb{P}(H_1) = 0.4$
$H_2 \ldots$ stroj nije pod opterećenjem $\quad \mathbb{P}(H_2) = 0.6$
$A \ldots$ stroj radi ispravno $\quad \mathbb{P}(A|H_1) = 0.7, \mathbb{P}(A|H_2) = 0.9$

a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) = 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9 = 0.82.$

b) $\mathbb{P}(A \cap H_1) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

c) $\mathbb{P}(H_1|A)$=?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9} = 0.34\end{aligned}$$

d) $\mathbb{P}(A^c|H_1) = 0.3$, $\mathbb{P}(A^c|H_2) = 0.1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A^c) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A^c|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1} = 0.67\end{aligned}$$

□

Formula produkta vjerojatnosti Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \quad (4.3)$$

Zadatak 4.8. Kuharica zna pripremiti 4 vrste jela. Tjedan započinje bilo kojim jelom s jednakom vjerojatnošću. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana s vjerojatnošću 0.4 ili odabire jedno od preostalih jela, koja su sva jednako vjerojatna. Kolika je vjerojatnost da će izbor jela biti b, b, a, c, c?

Rješenje:
$A_1 \ldots$ prvo izabrano jelo je b $\quad \mathbb{P}(A_1) = 0.25$
$A_2 \ldots$ drugo izabrano jelo je b $\quad \mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.4$
$A_3 \ldots$ treće izabrano jelo je a $\quad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 0.2$
$A_4 \ldots$ četvrto izabrano jelo je c $\quad \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.2$
$A_5 \ldots$ peto izabrano jelo je c $\quad \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 0.4$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = \frac{1}{625}$. □

Zadatak 4.9. Građevinska tvrtka nabavlja crijep od dobavljača A, B i C. Pri prvoj kupnji vjerojatnost da odabere dobavlječa A iznosi 0.5, a s jednakom vjerojatnošću bira dobavljače B i C. Pri svakoj sljedećoj kupnji vjerojatnost da ostane pri istom dobavljaču iznosi 0.6, a između ostala dva dobavljača bira s jednakim vjerojatnostima. Kolika je vjerojatnost da je crijep nabavljen prema redoslijedu AABCCA?

Rješenje:
$A_1 \ldots$ prvi izabrani dobavljač je A
$A_2 \ldots$ drugi izabrani dobavljač je A
$A_3 \ldots$ treći izabrani dobavljač je B
$A_4 \ldots$ četvrti izabrani dobavljač je C
$A_5 \ldots$ peti izabrani dobavljač je C
$A_6 \ldots$ šesti izabrani dobavljač je A
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)$
$= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$\mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\mathbb{P}(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$
$= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0.00144$ $\square$

Zadatak 4.10. Iz snopa od 52 karte izvlačimo dvije karte, jednu po jednu.

a) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu nakon izvlačenja nismo vraćali u snop?

b) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu smo nakon izvlačenja vraćali u snop?

Rješenje:
$A_1 \ldots$ prva izvučena karta je pik $\quad \mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}}$
$A_2 \ldots$ druga izvučena karta je pik

a) U slučaju da prvu kartu ne vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu je ostala 51 karta, od čega je 12 pikova pa je tražena vjerojatnost: $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{12}{1}}{\binom{51}{1}} = \frac{12}{51}$.

b) U slučaju da prvu kartu vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu su opet 52 karte, od čega 13 pikova pa je tražena vjerojatnost: $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{13}{52}$.

$\square$

Poglavlje 5

Slučajne varijable

Teorija vjerojatnosti bazirana samo na definiciji vjerojatnosnog prostora, tj. teoriji skupova, nije previše moćan alat. Dakle, željeli bismo dalje "matematizirati" vjerojatnosni prostor. Vjerojatnosnom prostoru (pokusa) pridružujemo funkcije koje u teoriji vjerojatnosti zovemo *slučajne varijable.*

Neka je sad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. *Slučajna varijabla* je funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Slučajne varijable s obzirom na njihovu sliku $R(X)$ dijelimo na

(i) **diskretne** - slika $R(X)$ je konačan ili prebrojiv skup (npr. broj automobila, broj ljudi,...)

(ii) **neprekidne** - slika $R(X)$ je neki interval (npr. količina vode, vrijeme, ...)

5.1 Diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla određena je svojom slikom $R(X)$ i brojevima (distribucijom) $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ za $x_i \in R(X)$. Jasno je da je

$$\sum_{x_i \in R(X)} p_i = \sum_{x_i \in R(X)} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \in R(X)) = 1.$$

Svaku diskretnu slučajnu varijablu zapisujemo tablično

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

i tu tablicu nazivamo *funkcija vjerojatnosti od* X i pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ diskretne slučajne varijable X je definirana relacijom

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \in R(X), x_i \leq x} p_i$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Očekivanje od X, u oznaci $\mathbb{E}(X)$, je broj definiran s

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in R(X)} x_i \cdot p_i.$$

Ovaj broj daje usrednjenje (srednju vrijednost) slučajne varijable X.
Svojstva očekivanja:

(i) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, gdje su X i Y diskretne slučajne varijable.

Varijanca od X u oznaci $\operatorname{Var}(X)$, je broj definiran s

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{x_i \in R(X)} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = \sum_{x_i \in R(X)} x_i^2 \cdot p_i - E(X)^2. \end{aligned}$$

(i) $\operatorname{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \operatorname{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\operatorname{Var}(X + \lambda) = \operatorname{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Standardna devijacija od X, u oznaci $\sigma(X)$, je broj dan formulom

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Zadatak 5.1. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$.

a) Odredite sliku slučajne varijable X.

b) Odredite funkciju distribucije varijable X.

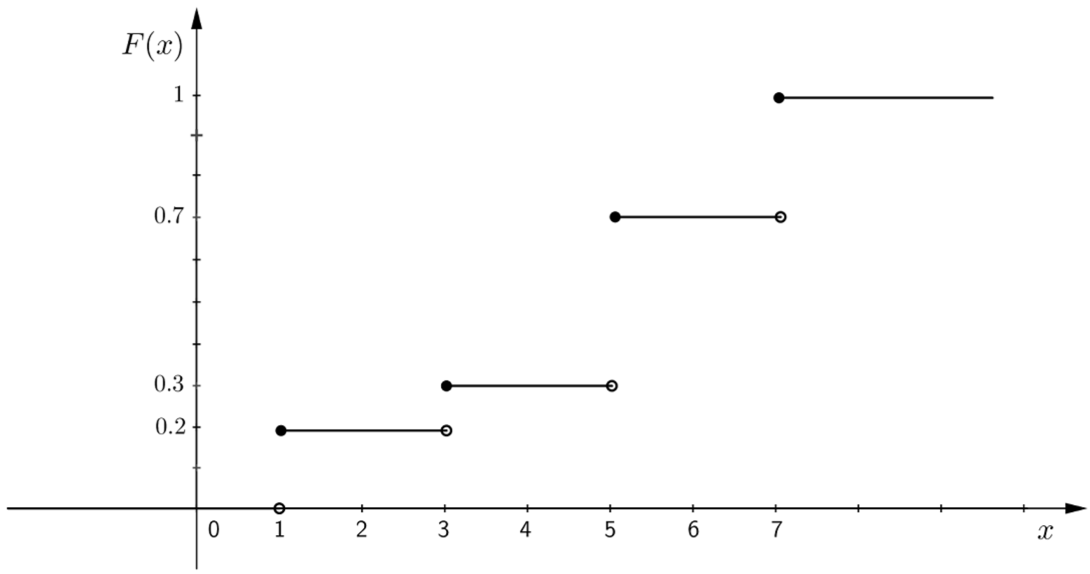
c) Prikažite grafički funkciju distribucije varijable X.

Rješenje:

a) $R(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

b) Funkcija distribucije od X:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 3 \\ 0.3, & 3 \leq x < 5 \\ 0.7, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

c) Graf funkcije distribucije:



□

Zadatak 5.2. Odredite matematičko očekivanje i standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable X zadane funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & ? \end{pmatrix}$.

Rješenje:
$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - 0.4 - 0.3 - 0.1 = 0.2$
$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.1$
$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.2 - 2.1^2 = 1.29$
$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.29} = 1.136$

□

Zadatak 5.3. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 6 & 8 \\ C & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 2C \end{pmatrix}$. Odredite

a) konstantu C,

b) očekivanje i varijancu,

c) $\mathbb{P}(1 \le X < 6)$ i $\mathbb{P}(3 \le X)$.

Rješenje:

a) $C + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.1 + 2C = 1 \Rightarrow C = 0.1$

b) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 2.5 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 = 3.6$

$\mathrm{Var}(X) = 1^2 \cdot 0.1 + 1.5^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 2.5^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.1 + 8^2 \cdot 0.2 - 3.6^2 = 6.44$

c) $\mathbb{P}(1 \le X < 6) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.7$

$\mathbb{P}(3 \le X) = 0.1 + 0.2 = 0.3$

□

Zadatak 5.4. Bacamo dvije igraće kocke. Neka je X razlika većeg i manjeg broja koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X.

b) Odredite i skicirajte funkciju distribucije slučajne varijable X.

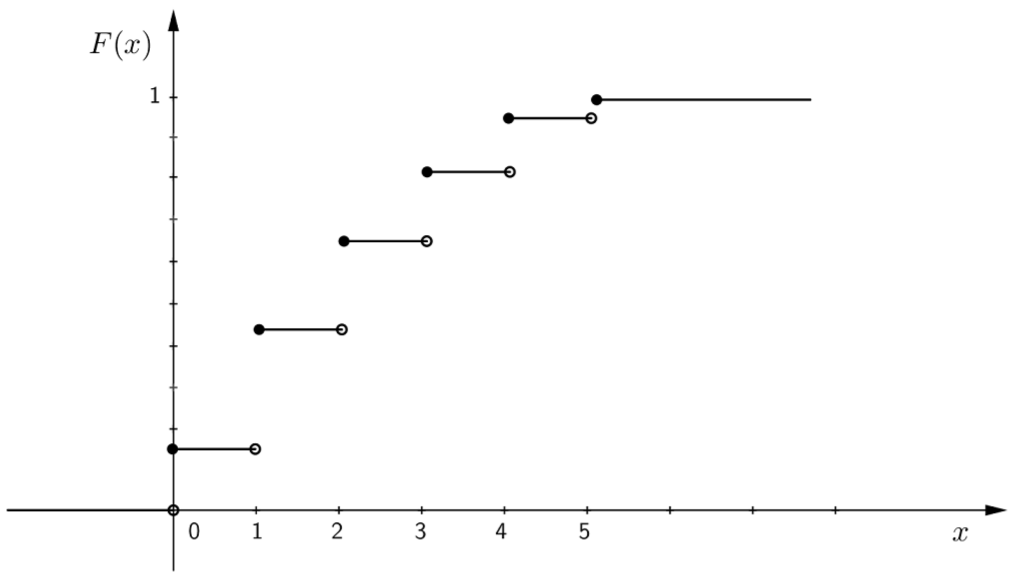
c) Izračunajte $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5)$ i $\mathbb{P}(0 \leq X < 3)$.

Rješenje:

a) Funkcija vjerojatnosti od X:
$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$.

b) Funkcija distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{36}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{24}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{30}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{34}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$



c) $\mathbb{P}(1 < X \leq 3) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{7}{18}$
$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{4}{9}$
$\mathbb{P}(0 \leq X < 3) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{2}{3}$

$\square$

Zadatak 5.5. Promatramo slučajan pokus bacanja dvije igraće kocke i slučajnu varijablu $X=$ suma brojeva koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X.

b) Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 4, a manji ili jednak 8.

c) Izračunajte očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) Funkcija vjerojatnosti od X:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36}, & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36}, & 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36}, & 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36}, & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36}, & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36}, & 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36}, & 11 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12 \end{cases}$$

b) $\mathbb{P}(4 < X \leq 8) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36}$

c) $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot \dfrac{1}{36} + 3 \cdot \dfrac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \dfrac{1}{36} = 7$

$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 2^2 \cdot \dfrac{1}{36} + 3^2 \cdot \dfrac{2}{36} + \cdots + 12^2 \cdot \dfrac{1}{36} - 7^2 = 5.83$

$\square$

Zadatak 5.6. Ispravan novčić bačen je četiri puta. Neka X označava broj pisama u najduljem nizu. Odredite funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:
Broj pisama u najduljem nizu ne mora biti ukupan broj pisama koje se pojavljuju.
Npr. $X(p,g,p,g) = 1$, $X(p,p,g,g) = 2$.
$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{p, g\}, i = 1,2,3,4\} \Rightarrow |\Omega| = 2^4 = 16$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{(g,g,g,g)\}) = \frac{1}{16}\\
&\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{(p,g,g,g),(g,p,g,g),(g,g,p,g),\\
&\qquad\qquad (g,g,g,p),(p,g,p,g),(g,p,g,p),(p,g,g,p)\}) = \frac{7}{16}\\
&\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{(p,p,g,g),(g,p,p,g),(g,g,p,p),(p,p,g,p),(p,g,p,p)\}) = \frac{5}{16}\\
&\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{(p,p,p,g),(g,p,p,p)\}) = \frac{2}{16}\\
&\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(\{(p,p,p,p)\}) = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Sada možemo napisati funkciju vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$,
a zatim i izračunati očekivanje i varijancu

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{27}{16},\\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2\\
&= 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{2}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - (\frac{27}{16})^2\\
&= \frac{247}{256}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadatak 5.7. Diskretne slučajne varijable X i Y zadane su funkcijama vjerojatnosti

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. Opišite varijable $Z = 3X + 1$ i $V = Y^2$.

Rješenje:
$\mathbb{E}X = 0.4 + 0.2 + 0.9 = 1.5$, $\operatorname{Var} X = 0.4 + 0.4 + 2.7 - 1.5^2 = 1.25$
$\mathbb{E}Y = -0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.3$, $\operatorname{Var} Y = 0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.09 = 0.81$
$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{E}Z = 5.5$
$\operatorname{Var} Z = 9 \operatorname{Var} X = 9 \cdot 1.25 = 11.25$
$V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{E}V = 0.9$
$\operatorname{Var} V = 2.1 - 0.9^2 = 1.29$ □

Zadatak 5.8. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} -e & -1 & 1 & e & e^2 \\ 0.3 & 0.1 & x & 3x & 0.2 \end{pmatrix}$. Odredite

a) broj x,

b) funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \ln |X|$,

c) F_Y,

d) $\mathbb{E}(Y)$.

Rješenje:

a) $0.3 + 0.1 + x + 3x + 0.2 = 1 \Rightarrow x = 0.1$

b) $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

d) $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 = 1$

$\square$

Zadatak 5.9. Diskretna slučajna varijabla zadana je funkcijom vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \sin X$.

Rješenje: $R(X) = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\} \Rightarrow R(Y) = \{\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{4}\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$ pa je $Y \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. $\square$

5.2 Primjeri diskretnih slučajnih varijabli (6. vježbe)

5.2.1 Binomna slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je Bernoullijeva s parametrom $0 \leqslant p \leqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Ova slučajna varijabla može se interpretirati kao ishod pokusa koji može rezultirati samo uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je p). Očito je

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

Diskretna slučajna varijabla X je binomna s parametrima $0 \leqslant p \leqslant 1$ i $n \geqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Binomna slučajna varijabla jest broj uspjeha $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ u n nezavisnih ponavljanja pokusa kod kojeg kao ishod imamo uspjeh s vjerojatnošću p i neuspjeh s vjerojatnošću $1-p$. Vjerojatnost od i uspjeha i $n-i$ neuspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa je $p^i(1-p)^{n-i}$, a broj načina na koje možemo izabrati i uspjeha od n ponavljanja je $\binom{n}{i}$. Nije teško izračunati da je

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Zadatak 5.10. Bacamo simetričnu kocku 3 puta. Neka je X slučajna varijabla koja označava koliko je puta pao broj 6. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X. Odredite očekivani broj jedinica u 3 bacanja.

Rješenje:
X=broj pojavljivanja šestice $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$
$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787$

$f(1) = \mathbb{P}(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472$
$f(2) = \mathbb{P}(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0695$
$f(3) = \mathbb{P}(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.0046$
$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$
$\mathbb{E}X = n \cdot p = \frac{1}{2}$. □

Zadatak 5.11. Vjerojatnost da se tijekom jedne godine u nekom gradu dogodi potres iznosi $p = 0.2$. Pretpostavljamo da se u jednoj godini ne može dogoditi više od jednog potresa. Kolika je vjerojatnost da se tijekom 5 godina

a) ni u jednoj godini ne dogodi potres,

b) barem jedne godine pojavi potres?

c) Koliki je očekivani broj potresa u razdoblju od 10 godina i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: X=broj godina s potresom, $X \sim B(n, 0.2)$

a) $n = 5$, $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}0.2^0 \cdot (1 - 0.2)^5 = 0.3277$

b) $n = 5$, $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.3277 = 0.6723$

c) $n = 10$, $\mathbb{E}X = 10 \cdot 0.2 = 2$, $\operatorname{Var} X = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6$

□

Zadatak 5.12. Strijelac gađa metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka iznosi $\frac{1}{2}$. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj pogodaka u metu. Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X. Kolika je vjerojatnost da će strijelac pogoditi metu jednom ili dva puta?

Rješenje:
X=broj pogodaka u metu, $X \sim B(3, \frac{1}{2})$
$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125$

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.375$$
$$f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.375$$
$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.125$$
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 0.125, \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5, \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.875, \quad 2 \leq x < 3 \\ 1, \quad x \geq 3 \end{cases}$$
$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.375 + 0.375 = 0.75$

□

Zadatak 5.13. Bacamo novčić pet puta. Kolika je vjerojatnost da se pojavlo pismo

a) točno tri puta,

b) više od dva puta,

c) između dva i četiri puta?

Rješenje: X=broj pojavljivanja pisama u 5 bacanja $\Rightarrow X \sim B(5, 0.5)$

a) $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3}0.5^3 \cdot 0.5^2 = 0.3125$

b) $\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{3}0.5^5 + \binom{5}{4}0.5^5 + \binom{5}{5}0.5^5 = 0.5$

c) $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{2}0.5^5 + \binom{5}{3}0.5^5 + \binom{5}{4}0.5^5 = 0.78125$

□

5.2.2 Poissonova slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je Poissonova s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim Poi(\lambda)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla broji slučajne događaje u vremenu ili prostoru. Parametar λ predstavlja prosječan broj slučajnih događaja u jedinici vremena ili prostora i vrijedi $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Zadatak 5.14. Broj prometnih nesreća na određenoj dionici puta u toku jednog mjeseca je Poissonova slučajna varijabla X s parametrom $\lambda = 4$. Kolika je vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca

a) ne dogodi niti jedna nesreća,

b) dogode više od 3 nesreće?

c) Koliki je očekivani broj nesreća tijekom jednog mjeseca i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: $X =$ broj prometnih nesreća, $X \sim Poi(4)$

a) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = 0.01832$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)) \\ &= 1 - \left(\frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4} + \frac{4^2}{2!} e^{-4} + \frac{4^3}{3!} e^{-4} \right) \\ &= 1 - (0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954) \\ &= 0.5665 \end{aligned}$$

c) $\mathbb{E}(X) = 4, \mathrm{Var}(X) = 4$

□

Zadatak 5.15. Na nekom graničnom prijelazu prođu prosječno 2 vozila u minuti. Kolika je vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći

a) jedno vozilo?

b) najviše jedno vozilo?

Rješenje:
X=broj vozila koji prijeđu granični prijelaz u minuti $\Rightarrow \lambda = 2$, $X \sim Poi(2)$

a) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.2707$

b) $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2^0}{0!}e^{-2} + \dfrac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.1353 + 0.2707 = 0.4060$

□

Zadatak 5.16. Prodavač osiguranja proda prosječno tri police osiguranja tjedno. Izračunajte vjerojatnost da će u nekom tjednu prodati više od dvije a manje od pet polica osiguranja.

Rješenje:
X = broj prodanih polica osiguranja u jednom tjednu, $\lambda = 3 \Rightarrow X \sim P(3)$
$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} + \frac{3^4}{4!}e^{-3} = 0.2240 + 0.1680 = 0.392$ □

5.2.3 Hipergeometrijska slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je hipergeometrijska s parametrima $n \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, u oznaci $X \sim Hip(n, m, k)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \min\{k, m\} \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{\min\{k,m\}} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}, \quad i = 0, 1, \ldots, \min\{k, m\}.$$

Imamo n-članu populaciju koja je sačinjena od m članova 1. vrste i $n-m$ članova 2. vrste. Slučajna varijabla X predstavlja broj i članova 1. vrste u k-članom uzorku. Nije teško vidjeti da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{km}{n} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{km}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{n-k}{n-1}.$$

Zadatak 5.17. U pošiljci ima 20 proizvoda od kojih je 5 neispravno. Odaberemo (bez vraćanja) 3 proizvoda. Odredite:

a) vjerojatnost da su svi proizvodi neispravni.

b) vjerojatnost da smo odabrali više od jednog ispravnog proizvoda.

c) očekivani broj ispravnih proizvoda u uzorku.

Rješenje:
X - broj ispravnih proizvoda u tročlanom uzorku skupa od 20 elemenata, od kojih je 15 ispravnih

a) $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{10}{1140} = 0.0088$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>1) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)) \\
&= 1 - \left(\frac{\binom{15}{0}\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{15}{1}\binom{5}{2}}{\binom{20}{3}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{114} - \frac{5}{38} = 0.8597
\end{aligned}$$

c) $\mathbb{E}X = \frac{3 \cdot 15}{20} = 2.25$

$\square$

Zadatak 5.18. Na polici se nalazi 12 knjiga, od kojih su 3 ljubavni romani. Na slučajan način biramo 4 knjige. Kolika je vjerojatnost

a) da su odabrana točno 2 ljubavna romana?

b) da su odabrana najmanje 3 ljubavna romana?

Rješenje:
X=broj ljubavnih romana u skupu od 4 odabrane knjige

a) $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{9}{2}\binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} = 0.2182$

b) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) = \frac{\binom{9}{1}\binom{3}{3}}{\binom{12}{4}} + 0 = 0.0182$

$\square$

Zadatak 5.19. Iz špila od 52 karte izvlačimo 6 karata. Kolika je vjerojatnost da smo dobili najviše dva pika?

Rješenje:
X=broj pikova u izvučenih 6 karata (iz špila od 52 karte)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) \\
&= \frac{\binom{39}{6}\binom{13}{0}}{\binom{52}{6}} + \frac{\binom{39}{5}\binom{13}{1}}{\binom{52}{6}} + \frac{\binom{39}{4}\binom{13}{2}}{\binom{52}{6}} \\
&= 0.1603 + 0.3677 + 0.3151 \\
&= 0.8431
\end{aligned}$$

$\square$

5.2.4 Geometrijska slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je geometrijska s parametrom $0 < p \leqslant 1$, u oznaci $X \sim G(p)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = (1-p)^{i-1}p, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla predstavlja broj nezavisnih ponavljanja eksperimenta koji mogu rezultirati uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je p) sve do prvog uspjeha. Dakle, $(1-p)^{i-1}p$ znači da u prvih $i-1$ ponavljanja imamo neuspjehe, a u i-tom ponavljanju dogodi se uspjeh. Nije teško vidjeti da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Zadatak 5.20. U kutiji se nalazi 5 plavih i 10 zelenih kuglica. Izvlačimo kuglice jednu za drugom s vraćanjem u kutiju dok ne dobijemo plavu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ćemo tek u sedmom izvlačenju dobiti plavu kuglicu? Koliki je očekivani broj izvlačenja?

Rješenje:
X = broj izvlačenja dok se ne izvuče plava kuglica
$p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow X \sim G(\frac{1}{3})$
$\mathbb{P}(X = 7) = (1 - \frac{1}{3})^{7-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} = 0.0293$
Očekivani broj izvlačenja: $EX = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ □

Zadatak 5.21. Student izlazi na ispit iz kolegija Vjerojatnost i statistika dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost da će student položiti ispit svaki put jednaka $\frac{1}{4}$, kolika je vjerojatnost da će student položiti ispit na trećem izlasku?

Rješenje:
X = broj izlazaka na ispit (dok ne položi), $p = \frac{1}{4} \Rightarrow X \sim G(\frac{1}{4})$
$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - \frac{1}{4})^{3-1} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 0.1406$

□

Zadatak 5.22. Poznato je da je u određenom procesu proizvodnje 20% proizvoda neispravno. Proizvode ispitujemo dok ne naiđemo na prvi neispravni proizvod. Kolika je vjerojatnost da ćemo ispitati samo 5 proizvoda?

Rješenje:
X=broj ispitanih proizvoda (do prvog neispravnog) $p = 0.2 \Rightarrow X \sim G(0.2)$
$\mathbb{P}(X = 5) = (1 - 0.2)^{5-1} \cdot 0.2 = (0.8)^4 \cdot 0.2 = 0.0819$

□

5.3 Neprekidne slučajne varijable

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla. Dakle, $R(X)$ je neki interval u $\mathbb{R}$. Kao i u diskretnom slučaju X je u potpunosti određena svojom slikom $R(X)$ i funkcijom gustoće. *Funkcija gustoće* od X je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx, \quad a \in \mathbb{R}$.

Uočimo da iz svojstva (iii) slijedi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, vrijedi

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Nadalje, zbog neprekidnosti od X imamo

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b).$$

Analogno kao i u diskretnom slučaju uvodimo pojam funkcije distribucije. *Funkcija distribucije* od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$,

(ii) F je neopadajuća

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$,

(iv) $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$,

(v) $F'(x) = f(x)$.

Uočimo da kao i u diskretnom slučaju F daje punu informaciju o X, tj.

$$f(x) = F'(x) \quad \text{i} \quad R(X) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.$$

Za neprekidnu slučajnu varijablu X definiramo *očekivanje* od X s

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Varijancu od X definiramo s

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = E(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - (\mathbb{E}(X))^2$$

Standardnu devijaciju od X definiramo s

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Uočimo da funkcija gustoće ne mora biti neprekidna već samo funkcija distribucije (zadana je integralom). Funkcija distribucije diskretnih slučajnih varijabli je stepenastog oblika (zadana je sumom). Dakle, razlog zašto slučajne varijable nazivamo diskretnim ili neprekidnim je dan svojstvom njihove funkcije distribucije (skokovita ili neprekidna).

Zadatak 5.23. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Odredite konstantu C.

b) Nacrtajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti f.

c) Odredite funkciju distribucije F i nacrtajte njen graf.

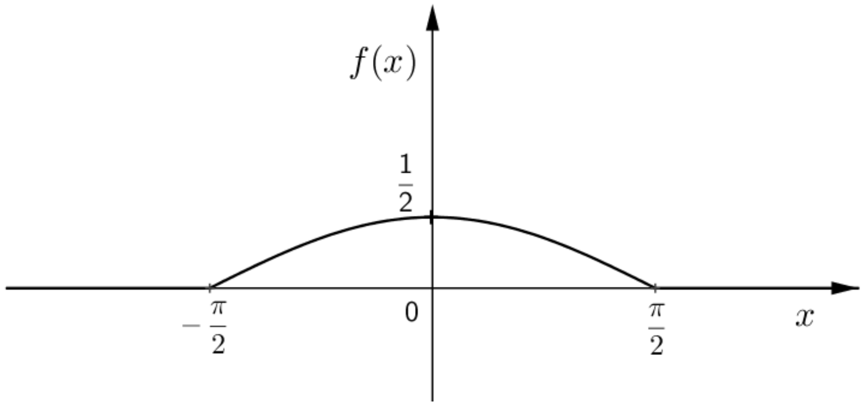
d) Odredite $\mathbb{P}(0 \le X \le \frac{\pi}{4})$.

Rješenje:

a) Konstantu C određujemo iz uvjeta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = C \sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = C(\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b) Funkcija gustoće slučajne varijable X:

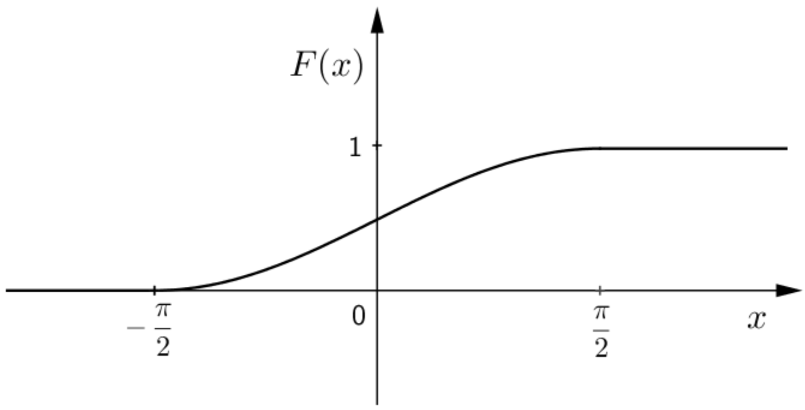


c) Funkciju distribucije određujemo koristeći se formulom $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Za $x < -\frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$

Za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\,dt =$
$\frac{1}{2}\sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$

Za $x > \frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot\, dt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



d) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + 1) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

□

Zadatak 5.24. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3} & : x > 1 \end{cases}$$

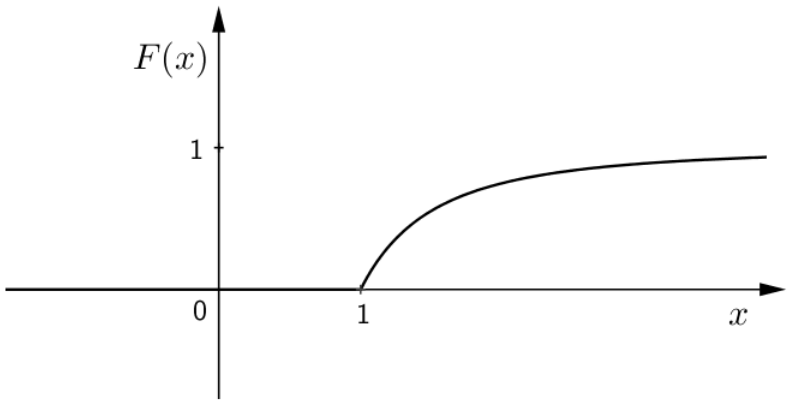
a) Odredite funkciju distribucije F slučajne varijable i nacrtajte njen graf.

b) Izračunajte $\mathbb{P}(0 < X < 3)$ i $\mathbb{P}(X > 1)$.

Rješenje:

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & : x > 1 \end{cases}$$



b) $\mathbb{P}(0 < X < 3) = F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1$

$\square$

Zadatak 5.25. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & : 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & : x < 0, x > 2 \end{cases}$$

a) Odredite konstantu a.

b) Napišite pripadnu funkciju distribucije.

c) Izračunajte $\mathbb{P}(0.4 \leq X \leq 1.5)$.

Rješenje:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow a\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & : 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & : x > 2 \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(0.4 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.4) = \frac{1}{8}(1.5^3 - 0.4^3) = 0.4139$

$\square$

Zadatak 5.26. Funkcija distribucije slučajne varijable X zadana je formulom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 2 \\ 0.5x - 1 & : 2 < x \leq 4 \\ 1 & : x > 4 \end{cases}$$

a) Odredite vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost veću od 0.2 i vjerojatnost da poprimi vrijednost manju od 3.

b) Nađite očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) $\mathbb{P}(X > 0.2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0.2) = 1 - F(0.2) = 1 - 0 = 1$
$\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 0.5 \cdot 3 - 1 = 0.5$

b) Gustoća od X:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0.5 & : 2 < x \leq 4 \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 0.5 \int_2^4 x\, dx = 0.5 \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 0.5(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}) = 3$
$\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - (\mathbb{E}(X)^2) = 0.5 \int_2^4 x^2 dx - 9 = 0.5 \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 - 9 =$
$0.5(\dfrac{64}{3} - \dfrac{8}{3}) - 9 = \dfrac{1}{3}$

□

Teorem. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla, a funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona i derivabilna. Za neprekidnu slučajnu varijablu $Y = h(X)$vrijedi:*

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx.$$

Zadatak 5.27. Slučajna varijbla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leq 0, x \geq \pi \end{cases}$$

Odredite matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = X^2$.

Rješenje:
$h(x) = x^2$
$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2xdx & v = -\cos x \end{matrix}\right\} =$
$-\frac{1}{2}x^2 \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\pi^2\cos\pi +$
$x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} - 2$ □

Zadatak 5.28. Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leq 0, x \geq \pi \end{cases}$$

Neka je $Y = -2X + 3$. Odredite

a) $\mathbb{E}(Y)$.

b) $\mathrm{Var}(Y)$.

Rješenje:

a) $\mathbb{E}(Y) = -2\mathbb{E}X + 3$
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(-x\cos x|_0^{\pi} +$
$\int_0^{\pi} \cos x\,dx) = \frac{1}{2}(\pi + \sin x|_0^{\pi}) = \frac{1}{2}\pi$
$\mathbb{E}(Y) = -\pi + 3$

b) $\mathrm{Var}\,Y = 4\,\mathrm{Var}\,X$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx - (\mathbb{E}(X))^2 = DZ = \frac{\pi^2}{2} - 2 - (\frac{1}{2}\pi)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$
$\mathrm{Var}(Y) = \pi^2 - 8$

□

Zadatak 5.29. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & : x < 0, x > \sqrt{2} \end{cases}$$

a) Odredite F_X, $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

b) Neka je $Y = 2X + 1$. Nađite $\mathbb{E}(Y)$ i $\mathrm{Var}(Y)$.

Rješenje:

a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} & : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x = (\sqrt{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$Var(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x - (\frac{\sqrt{2}}{3})2 = (\sqrt{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

b) $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 1$

$\mathrm{Var}(Y) = 2^2\,\mathrm{Var}(X) = \dfrac{4}{9}$

□

5.4 Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli

5.4.1 Normalna (Gaussova) slučajna varijabla

Normalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = \mathbb{R}$ i funkcijom gustoće

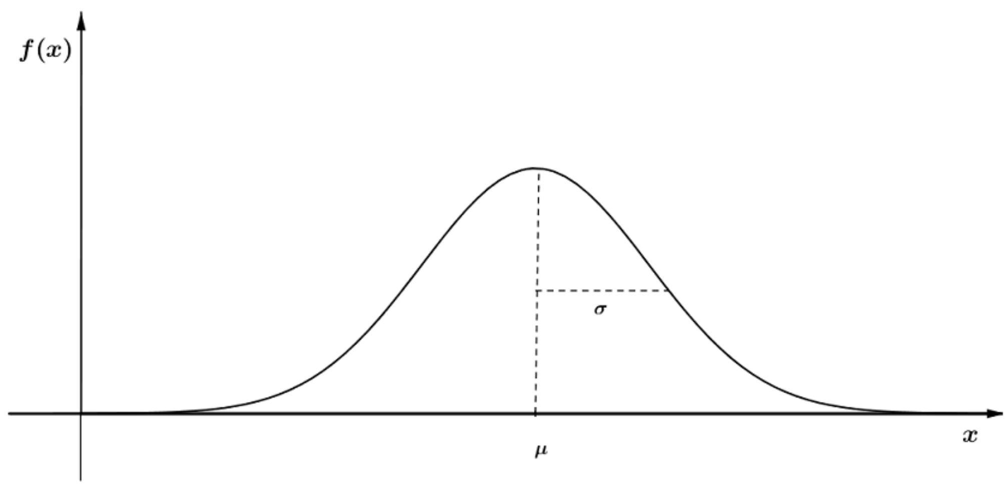
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, f je zvonolika, simetrična oko μ i repovi joj idu u $-\infty$ i $+\infty$. Uočimo i da je

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Parametar μ zovemo *parametrom lokacije*, a σ^2 zovemo *parametrom raspršenja*:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

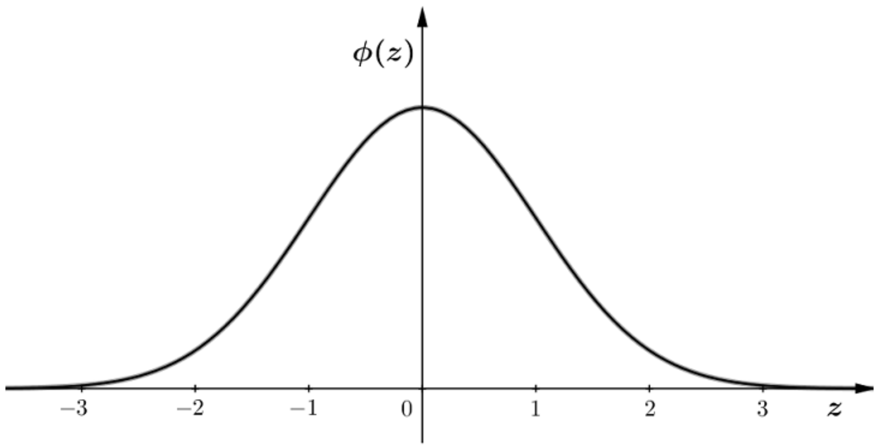


Funkcija distribucije od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Ovaj integral se ne da elementarno riješiti i zato su vrijednosti od F tabelirane. Međutim, bilo bi nepraktično tabelirati F za sve μ i σ, pa to činimo samo za jedan slučaj, za takozvanu jediničnu normalnu slučajnu varijablu, a ostale dobivamo iz ovog. Jedinična normalna slučajna varijabla je

$$Z \sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{i} \quad \Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)\, dx.$$



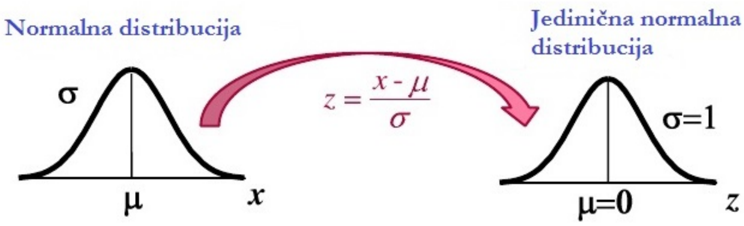
Vrijednosti na osi apscisa, u slučaju standardne normalne slučajne varijable, se označavaju sa z i izražavaju se u jedinicama standardnih devijacija. Na primjer, izraz $z = 2$ označava da je točka apscise udaljena za dvije standardne devijacije u desno.

Imajući tabeliranu $Z \sim N(0,1)$, slučajnu varijablu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dobijemo iz

$$X = \sigma Z + \mu.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} Z \sim N(0,1) &\implies \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) &\implies \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

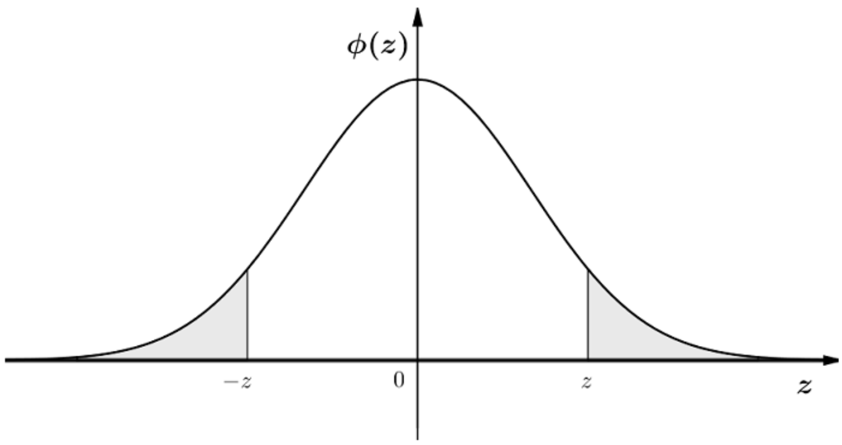


Sada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \Phi(z),$$

gdje je $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ i $\Phi(z)$ iščitamo iz tablice. Uočimo još da je dovoljno tabelirati vrijednosti za $\Phi(z)$ samo za $z \geqslant 0$ jer vrijedi:

$$\Phi(-z) = \mathbb{P}(Z \leqslant -z) = \mathbb{P}(Z \geqslant z) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1 - \Phi(z).$$



Zadatak 5.30. Godišnja količina oborina u nekom mjestu izražena u l/m^2 je normalno distribuirana slučajna varijabla X s očekivanjem $\mu = 360l/m^2$ i standardnom devijacijom $\sigma = 120l/m^2$. Kolika je vjerojatnost da

a) neke godine količina oborina premaši $500l/m^2$?

b) količina oborina bude između $300l/m^2$ i $400l/m^2$?

c) količina oborina bude manja od $200l/m^2$?

Rješenje:
$X \sim N(360, 120^2)$ godišnja količina oborina u l/m^2

a) $\mathbb{P}(X > 500) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 500) = 1 - F(500) = 1 - \Phi(\frac{500-360}{120}) = 1 - \Phi(1.17) = 1 - 0.879 = 0.121$

b) $\mathbb{P}(300 \leq X \leq 400) = F(400) - F(300) = \Phi(\frac{400-360}{120}) - \Phi(\frac{300-360}{120}) = \Phi(0.33) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.33) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.6293 - 1 + 0.6915 = 0.3208$

c) $\mathbb{P}(X < 200) = \Phi(\frac{200-360}{120}) = \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$

□

Zadatak 5.31. Visina učenika osmih razreda osnovne škole je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 175 cm i standardnom devijacijom od 8 cm. Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik niži od očekivane visine.

Rješenje:
$\mathbb{P}(X < 175) = F(175) = \Phi(\frac{175-175}{8}) = \Phi(0) = 0.5$ □

Zadatak 5.32. Instrumentom se mjeri određena veličina A, pri čemu je greška mjerenja slučajna varijabla X distribuirana po normalnoj razdiobi s očekivanjem $\mu = 0$ i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Kolika je vjerojatnost da

a) greška mjerenja ne premaši po apsolutnoj vrijednosti 6?

b) se pri mjerenju veličine A=60 pogriješi više od 10%?

Rješenje:
$X \sim N(0, 25)$ greška kod mjerenja veličine A

a) $\mathbb{P}(|X| \leq 6) = \mathbb{P}(-6 \leq X \leq 6) = F(6) - F(-6) = \Phi(\frac{6-0}{5}) - (1 - \Phi(\frac{6-0}{5})) = 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698$

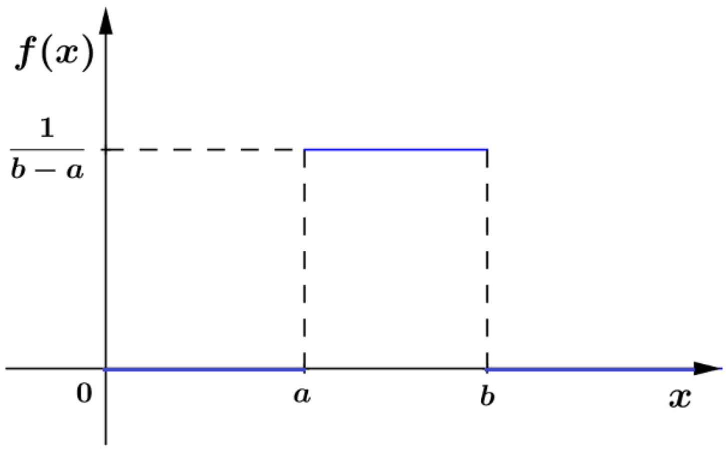
b) 10% od $A = 60$ iznosi 6, prema tome treba odrediti:
$\mathbb{P}(|X| > 6) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leq 6) = 1 - 0.7698 = 0.2302$

□

5.4.2 Uniformna slučajna varijabla

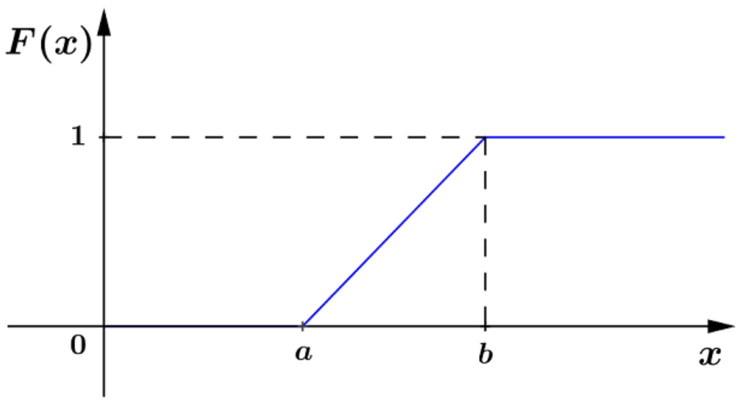
Uniformna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim U(a,b)$, je neprekidna slučajna varijabla za koju vrijedi $R(X) = [a,b]$ i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Uočimo da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x > b \end{cases} .$$



Lako se vidi da vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Zadatak 5.33. Slučajna varijabla X distribuirana je uniformno na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = \sin X$

Rješenje:
Budući da sinus preslikava $[0, \frac{\pi}{2}]$ u segment $[0, 1]$, slika varijable Y je $R(Y) = [0, 1]$. Distribuciju od Y označimo s $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y)$. Očito je $F_Y(y) = 0$ za $y < 0$, te je $F_Y(y) = 1$ za $y \geqslant 1$.

Funkcija distribucije slučajne varijable X dana je s

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{2}{\pi}x & : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Za $y \in [0, 1]$ je $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y)$, što je (budući da je $X \in [0, \frac{\pi}{2}]$ te je sinus rastuća funkcija na tom intervalu), jednako $\mathbb{P}(X \leqslant \arcsin y) = F(\arcsin y) = \frac{2}{\pi} \arcsin y$. Dakle, funkcija distribucije slučajne varijable Y je dana s

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & : y < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y & : 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases}$$

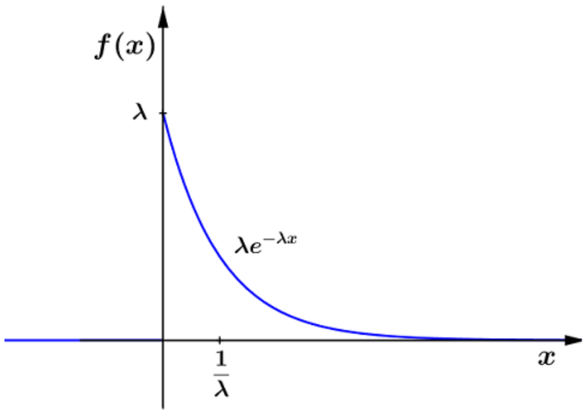
□

5.4.3 Eksponencijalna slučajna varijabla

Eksponencijalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim Exp(\lambda)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = (0, \infty)$ i

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za parametar $\lambda > 0$.



Uočimo da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ova slučajna varijabla slična je Poissonovoj slučajnoj varijabli koja je brojala slučajne događaje, dok eksponencijalna mjeri vrijeme između dva slučajna događaja. dolazak telefonskih poziva u centralu, dolazak mušterija u trgovinu, . . .
Broj λ označava, slično kao i kod Poissonove slučajne varijable, prosječan broj pojavljivanja u jedinici vremena.

Zadatak 5.34. Vijek trajanja žarulje je slučajna varijabla X distribuirana po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem $\mathbb{E}X = 2000$ sati. Kolika je vjerojatnost da će žarulja pregoriti:

a) u prvih tisuću sati rada?

b) u toku drugih tisuću sati rada?

c) nakon 5000 sati rada?

Rješenje:
$\mathbb{E}X = 2000 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2000}$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

a) $\mathbb{P}(X \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$

b) $\mathbb{P}(1000 < X \leq 2000) = F(2000) - F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 2000} = e^{-0.5} - e^{-1} = 0.2387$

c) $\mathbb{P}(X > 5000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5000) = 1 - F(5000) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 5000} = e^{-2.5} = 0.0821$

$\square$

Zadatak 5.35. Službenik na šalteru posluži u prosjeku 30 stranaka na sat. Ako je vrijeme posluživanja eksponencijalna slučajna varijabla X, kolika je vjerojatnost da će iduća stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju)? Kolika je vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute?

Rješenje:
$\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-0.5\cdot 5} = 0.082$
$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = F(2) = 1 - e^{-0.5\cdot 2} = 0.632.$ $\square$

5.5 Diskretni dvodimenzionalni slučajni vektori

Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije diskretne slučajne varijable. Funkciju $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, danu s $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ zovemo *dvodimenzionalni slučajni vektor*.
Ako je $R(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $R(Y) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, tada (X, Y) zapisujemo pomoću sheme:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix},$$

gdje je $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x, Y = y), & x \in R(X), y \in R(Y) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zovemo *funkcija vjerojatnosti od* (X, Y). Vrijedi $p_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \in R(X) \\ x_i \le x}} \sum_{\substack{y_j \in R(Y) \\ y_j \le y}} f(x_i, y_j)$$

zovemo *funkcija distribucije od* (X, Y).

Marginalne funkcije vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) su funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane s $f_1(x) = \sum\limits_{y \in R(Y)} f(x, y)$, $f_2(y) = \sum\limits_{x \in R(X)} f(x, y)$.
Marginalne funkcije vjerojatnosti su baš funkcije vjerojatnosti od slučajnih varijabli X i Y, tj. $f_1(x) = f_X(x)$, $f_2(y) = f_Y(y)$.

Kovarijanca od (X, Y) je broj μ_{xy} definiran s $\mu_{xy} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, gdje je

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x_i \in R(X)} \sum_{y_j \in R(Y)} x_i y_j f(x_i, y_j).$$

Koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y je broj $\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_1\sigma_2}$, gdje su $\sigma_1 = \sqrt{\operatorname{Var} X}$ i $\sigma_2 = \sqrt{\operatorname{Var} Y}$.

Slučajne varijable X i Y su *nezavisne* ako vrijedi

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \forall x \in R(X), \forall y \in R(Y).$$

Teorem. *Neka je (X,Y) dvodimenzionalni slučajni vektor i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada vrijedi* $\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_{x_i \in R(X)} \sum_{y_j \in R(Y)} h(x_i,y_j)f(x_i,y_j)$.

Zadatak 5.36. Dvodimenzionalni slučajni vektor (X,Y) zadan je shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0.05 & 0.1 & 0.03 \\ -1 & 0.05 & 0.05 & 0.12 \\ 0 & 0.1 & 0.05 & 0.07 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0.06 \\ 2 & 0.05 & 0 & 0.03 \\ 3 & 0.05 & 0.05 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Odredite:

a) Marginalne funkcije vjerojatnosti, $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \operatorname{Var}(X), \operatorname{Var}(Y)$.

b) $\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| \leq 1)$.

Rješenje:

a) $f_1 \ldots$ funkcija vjerojatnosti od X:
$f_1(-2) = 0.05 + 0.1 + 0.03 = 0.18$
$f_1(-1) = 0.05 + 0.05 + 0.12 = 0.22$
$f_1(0) = 0.1 + 0.05 + 0.07 = 0.22$
$f_1(1) = 0 + 0.1 + 0.06 = 0.16$
$f_1(2) = 0.05 + 0 + 0.03 = 0.08$
$f_1(3) = 0.05 + 0.05 + 0.04 = 0.14$

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.18 & 0.22 & 0.22 & 0.16 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix}$$

$f_2 \ldots$ funkcija vjerojatnosti od Y:
$f_2(0) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 + 0.05 = 0.3$

$f_2(1) = 0.1 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 = 0.35$
$f_2(2) = 0.03 + 0.12 + 0.07 + 0.06 + 0.03 + 0.04 = 0.35$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}(X) = (-2) \cdot 0.18 - 1 \cdot 0.22 + 0 \cdot 0.22 + 1 \cdot 0.16 + 2 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.14 = 0.16$

$\mathbb{E}(Y) = 0.03 + 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.35 = 0.35 + 0.7 = 1.05$

$\mathrm{Var}(X) = (-2)^2 \cdot 0.18 + (-1)^2 \cdot 0.22 + 1 \cdot 0.16 + 2^2 \cdot 0.08 + 3^2 \cdot 0.14 - 0.16^2 = 2.68 - 0.16^2 = 2.6544$

$\mathrm{Var}(Y) = 1^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.35 - 1.05^2 = 0.6475$

b) $\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| \leq 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0 + 0.1 = 0.35$

$\square$

Zadatak 5.37. Bacamo dvije kocke. Definiramo slučajne varijable X="veći od brojeva koji su pali" i

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{ako je zbroj brojeva na na obje kocke paran} \\ 1, & \text{ako je zbroj brojeva na obje kocke neparan} \end{cases}$$

a) Odredite kovarijancu μ_{xy} i koeficijent korelacije ρ_{xy} slučajnog vektora (X, Y).

b) Odredite $\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1), \mathbb{P}(2 \leq X < 4, Y < 1)$.

c) Koliko je $F(3, 1)$?

d) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno zavisne?

e) Odredite $\mathbb{E}(X \cdot Y^{17})$.

Rješenje:

a) $R(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R(Y) = \{0, 1\}$

Funkcija vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y), te marginalne funkcije vjerojantosti varijabli X i Y dane su shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ 2 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} \\ 3 & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{5}{36} \\ 4 & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{7}{36} \\ 5 & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{9}{36} \\ 6 & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{11}{36} \\ f_2(y) & \frac{18}{36} & \frac{18}{36} & 1 \end{pmatrix}$$

Kovarijanca μ_{XY} je definirana relacijom $\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Stoga računamo sljedeća očekivanja:

$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{1} i \cdot j \cdot f(i,j) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot 1 \frac{4}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{6}{36} = \frac{82}{36} = 2.2778$

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot f_1(i) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.4722$

$E(Y) = \sum_{j=0}^{1} j \cdot f_2(j) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$

$\mu_{XY} = 2.27 - 4.472 \cdot 0.5 = 0.0416$

$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \sigma_2}, \sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - 4.472^2 = 1.9715$

$\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1.4041$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} - 0.5^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 0.5$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{0.0416}{1.4041 \cdot 0.5} = 0.0594$$

b) $\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{14}{36}$
$\mathbb{P}(2 \leq X < 4, Y < 1) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36}$.

c) $F(3,1) = f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + 0 + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{9}{36}$

d) $f(1,1) = 0$, $f_1(1) = \frac{1}{36}$, $f_2(1) = \frac{18}{36}$, dakle X i Y su zavisne.

e) $\mathbb{E}(XY^{17}) = 1 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 5 \cdot 1^{17} \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot 1^{17} \cdot \frac{6}{36} = 2.27$

□

Zadatak 5.38. Promatramo slučajan pokus bacanja 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X=suma brojeva koji su pali, te varijablu Y=broj 1 ako su pali jednaki brojevi, 0 inače. Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X,Y). Odredite $\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1)$ i $F(8,1)$. Ispitajte jesu li varijable X i Y nezavisne.

Rješenje:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1) = f(4,1) + f(5,1) + f(6,1) = \frac{1}{36} + 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$$F(8,1) = f(2,0) + f(3,0) + f(4,0) + \cdots + f(7,1) + f(8,1) = \frac{13}{18}$$

Varijable X i Y nisu nezavisne jer $f(6,1) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = f_1(6) \cdot f_2(1)$ $\square$

Zadatak 5.39. Neka je (X,Y) slučajni vektor iz prethodnog zadatka i neka je $h(x,y) = x \cdot y$. Odredite $\mathbb{E}(h(X,Y))$.

Rješenje:
$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j f(x_i, y_j) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} +$
$4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{6}$ $\square$

Zadatak 5.40. Ispitajte jesu li komponente X i Y slučajnog vektora

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 \\ 1 & 0.16 & 0.24 \\ 2 & 0.24 & 0.36 \end{pmatrix}$$

nezavisne?

Rješenje:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & 0.16 & 0.24 & 0.4 \\ 2 & 0.24 & 0.36 & 0.6 \\ f_2(y) & 0.4 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

Provjerimo nezavisnost:
$f(1,0) = 0.16 = 0.4 \cdot 0.4 = f_1(1) \cdot f_2(0)$,
$f(1,1) = 0.24 = 0.4 \cdot 0.6 = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(2,0) = 0.24 = 0.6 \cdot 0.4 = f_1(2) \cdot f_2(0)$,
$f(2,1) = 0.36 = 0.6 \cdot 0.6 = f_1(2) \cdot f_2(1)$.
Da, X i Y su nezavisne. $\square$

Zadatak 5.41. Bacamo igraću kockicu i promatramo slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ako je pao neparan broj} \\ 1, & \text{ako je pao paran broj} \end{cases}$$

i

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ako je pao broj manji od tri} \\ 2, & \text{ako je pao broj veći ili jednak tri} \end{cases}$$

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i marginalne funkcije vjerojatnosti vektora (X, Y).

b) Izračunajte kovarijancu μ_{XY} i koeficijent korelacije ρ_{XY}.

c) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno nezavisne?

Rješenje:

a)
$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & f_1(x) \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ f_2(y) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = 0$
$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = 0$

c) Provjeravamo nezavisnost:
$f(0,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(0) \cdot f_2(1)$,
$f(0,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(0) \cdot f_2(2)$,
$f(1,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(1,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(1) \cdot f_2(2)$.
Da, X i Y su nezavisne.

□

Zadatak 5.42. Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom vjerojatnosti
$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$
Odredite:

a) kovarijancu i koeficijent korelacije,

b) $\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leq 3)$, $F(1,2)$, $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1, 2 \leq Y \leq 3)$ i $F(0,3)$,

c) $\mathbb{E}(XY^2)$.

Rješenje:

a)

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ f_2(y) & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0. = 0.4$
$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2.1$
$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 3 \cdot 0.3 + 1 \cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3 \cdot 0.1 = 0.7$
$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.7 - 0.84 = -0.14$
$\text{Var}(X) = 0.4 - 0.4^2 = 0.24$
$\text{Var}(Y) = 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 - 2.1^2 = 5.1 - 4.41 = 0.69$
$\sigma_1 = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0.4899$
$\sigma_2 = \sqrt{\text{Var}(Y)} = 0.8307$
$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{-0.14}{0.4899 \cdot 0.8307} = -0.344$

b) $\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leq 3) = 0.2 + 0.3 = 0.5$
$F(1,2) = 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.6$
$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1, 2 \leq Y \leq 3) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.1 = 0.7$
$F(0,3) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$

c) $\mathbb{E}(XY^2) = 0 \cdot 1^2 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2^2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 3^2 \cdot 0.3 + 1 \cdot 1^2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2^2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3^2 \cdot 0.1 = 1.5$

$\square$

Poglavlje 6

Statistika

6.1 Deskriptivna statistika

Uzoračka aritmetička sredina:

- negrupirani podaci : $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- grupirani podaci (ako se medu brojevima $x_1, \ldots, x_n$ pojavljuju brojevi $a_1, ..., a_k$, $k < n$, s frekvencijama $f_1, ..., f_k$): $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i f_i$,
- podaci grupirani u razrede: $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i} f_i$ pri čemu s x_{sr_i} označavamo sredine razreda, k je broj razreda te vrijedi $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$

Uzoračka varijanca:

- negrupirani podaci: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}_n^2)$
- grupirani podaci: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$
- podaci grupirani u razrede: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i}^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$

Uzoračka standardna devijacija: $s_n = \sqrt{s_n^2}$

Koeficijent varijacije: $K_V = \frac{s_n}{\overline{x}_n}$

Koeficijent asimetrije:

- negrupirani podaci: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$

- grupirani podaci: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(a_i - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$

- podaci grupirani u razrede: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$

Koeficijent spljoštenosti:

- negrupirani podaci: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$

- grupirani podaci: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(a_i - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$

- podaci grupirani u razrede: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$

6.1.1 Diskretna statistička razdioba

Zadatak 6.1. Promatramo broj putnika koji čekaju autobus na nekoj autobusnoj stanici. U 50 promatranja, dobiveni su sljedeći rezultati o broju putnika na stanici:
$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7.$

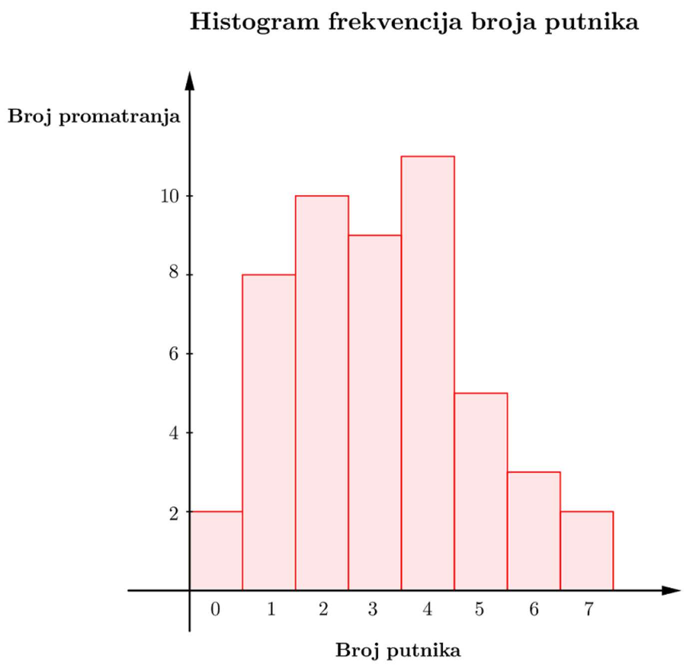
Grupirajte podatke u tabelu frekvencija te odredite relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije broja putnika. Nacrtajte histogram i poligon apsolutnih frekvencija. Izračunajte uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku varijancu (standardnu devijaciju).

Rješenje:

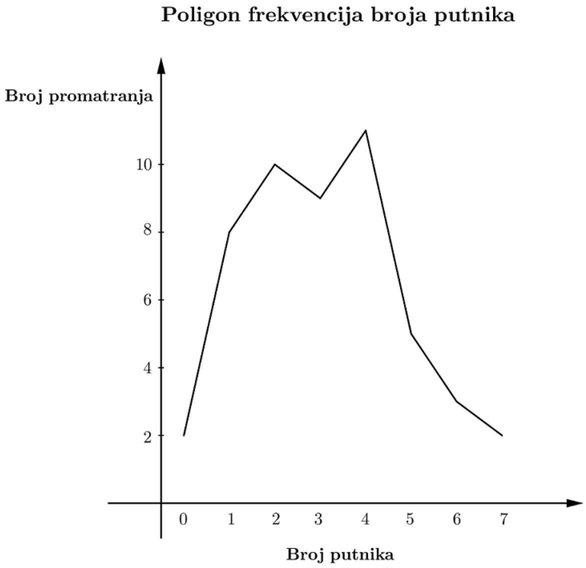
Grupirajmo podatke u tablicu frekvencija te izračunajmo relativne i kumulativne relativne frekvencije:

a_i (broj putnika)	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i (broj promatranja)	2	8	10	9	11	5	3	2
$\frac{f_i}{n}$ (relativne frekvencije)	$\frac{2}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$
$F_n(x_i)$ (kumulativne relativne frekvencije)	$\frac{2}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{29}{50}$	$\frac{40}{50}$	$\frac{45}{50}$	$\frac{48}{50}$	$\frac{50}{50}$

Tablica 6.1: Tablica frekvencija, relativnih frekvencija i kumulativnih relativnih frekvencija broja putnika iz Zadatka 6.1



Slika 6.1: Histogram frekvencija iz Tablice 6.1.1



Slika 6.2: Poligon frekvencija iz Tablice 6.1.1

Uzoračka aritmetička sredina:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i f_i$$

$$\begin{aligned}\overline{x}_{50} &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{8} a_i f_i \\ &= \frac{1}{50}(0\cdot 2 + 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 9 + 4\cdot 11 + 5\cdot 5 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2) \\ &= 3.12\end{aligned}$$

Uzoračka varijanca:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$$

$$\begin{aligned}s_{50}^2 &= \frac{1}{49}(\sum_{i=1}^{8} a_i^2 f_i - 50\overline{x}_{50}^2) \\ &= \frac{1}{49}(0^2\cdot 2 + 1^2\cdot 8 + 2^2\cdot 10 + \cdots + 7^2\cdot 2 - 50\cdot 3.12^2) \\ &= 3.0465\end{aligned}$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_n = \sqrt{s_n^2}$$

$s_{50} = \sqrt{s_{50}^2} = \sqrt{3.0465} = 1.7454$

$\square$

Mod - najčešći podatak (tj. podatak s najvećom frekvencijom)

Medijan:

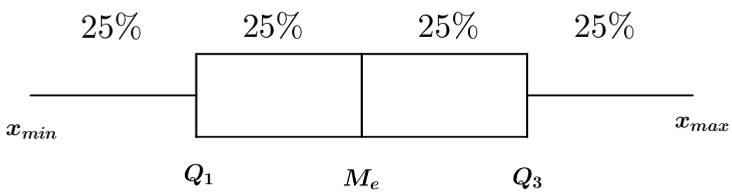
$$M_e = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor}, & \frac{n}{2} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \frac{n}{2} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$

Prvi kvartil:

$$Q_1 = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor}, & \frac{n}{4} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2}, & \frac{n}{4} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$

Treći kvartil:

$$Q_3 = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor}, & \frac{3n}{4} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2}, & \frac{3n}{4} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$



Slika 6.3: Medijan i kvartili

Zadatak 6.2. Odredite 1. kvartil, medijan, 3. kvartil i uzoračku aritmetičku sredinu za zadane nizove statističkih podataka:

a) 1, 1, 7, 5, 5, 4, 5, 2;

b) 2, 5, 1, 3, 7.

Za koji od navedenih slučajeva se može na jedinstven način odrediti mod? Odredite ga.

Rješenje:

a) Poredajmo podatke po veličini:
1, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 7
te izračunajmo njihovu aritmetičku sredinu $\overline{x}_8 = \frac{1}{8}(2 \cdot 1 + 2 + 4 + 3 \cdot 5 + 7) = \frac{30}{8} = 3.75$
Budući da je $n = 8$ paran i djeljiv s 4, računamo:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

b) Ponovno, poredajmo podatke po veličini:
1, 2, 3, 5, 7

$$\overline{x}_5 = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 5 + 7) = \frac{18}{5} = 3.6$$

Budući da $\frac{n}{2} = \frac{5}{2}$, $\frac{n}{4} = \frac{5}{4}$ i $\frac{3n}{4} = \frac{15}{4}$ nisu prirodni brojevi, računamo:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 2$$

$$M_e = x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor} = x_3 = 3$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_4 = 5$$

Mod se može na jednoznačan način odrediti za slučaj a) i iznosi $M_0 = 5$. $\square$

Zadatak 6.3. Odredite mod te medijan i kvartile zadanih statističkih podataka:

a) $\begin{array}{c|c|c|c} a_i & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 3 & 2 & 2 \end{array}$;

b) $\begin{array}{c|c|c|c} a_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 2 & 4 & 2 \end{array}$.

Rješenje:

a) 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4

$M_0 = 2$

$\frac{n}{2} = \frac{7}{2}$, $\frac{n}{4} = \frac{7}{4}$ i $\frac{3n}{4} = \frac{21}{4}$ nisu prirodni brojevi:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 2$$

$$M_e = x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor} = x_4 = 3$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_6 = 4$$

b) 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3

$M_0 = 2$

$n = 8$ je dijeljiv s 2 i 4, pa računamo:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$\square$

Zadatak 6.4. Odredite mod, 1. kvartil, medijan i 3. kvartil, te uzoračku varijancu i uzoračku standardnu devijaciju statističkih podataka:

a)

a_i	0	1	3	4
f_i	3	2	2	1

;

b) 1, -1, 7, 2, 5, 1.

Rješenje:

a) 0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 4

$M_0 = 0$

$n = 8$ paran i dijeljiv s 4:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$\mathrm{M_e} = \frac{\mathrm{x}_{\frac{n}{2}} + \mathrm{x}_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{\mathrm{x}_4 + \mathrm{x}_5}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$\overline{x}_8 = \frac{1}{8}(0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = \frac{12}{8} = 1.5$

$s_8^2 = \frac{1}{7}(0^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1 - 8 \cdot 1.5^2) = 2.57$

$s_8 = \sqrt{2.57} = 1.60$

b) -1, 1, 1, 2, 5, 7

$M_0 = 1$

$n = 6$ paran i nije djeljiv s 4:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 1$$

$$\mathrm{M_e} = \frac{\mathrm{x}_{\frac{n}{2}} + \mathrm{x}_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_5 = 5$$

$$\overline{x}_6 = \tfrac{1}{6}(1 - 1 + 7 + 2 + 5 + 1) = \tfrac{15}{6} = 2.5$$

$$s_6^2 = \tfrac{1}{5}(1^2 + (-1)^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2 - 6 \cdot 2.5^2) = 8.7$$

$$s_6 = \sqrt{8.7} = 2.95$$

□

6.1.2 Neprekidna statistička razdioba

Zadatak 6.5. Ispitujemo skup od 200 žarulja tako da sve žarulje istovremeno upalimo i mjerimo vrijeme neprekidnog rada žarulje do pregaranja. Dobiveni su rezultati mjerenja:

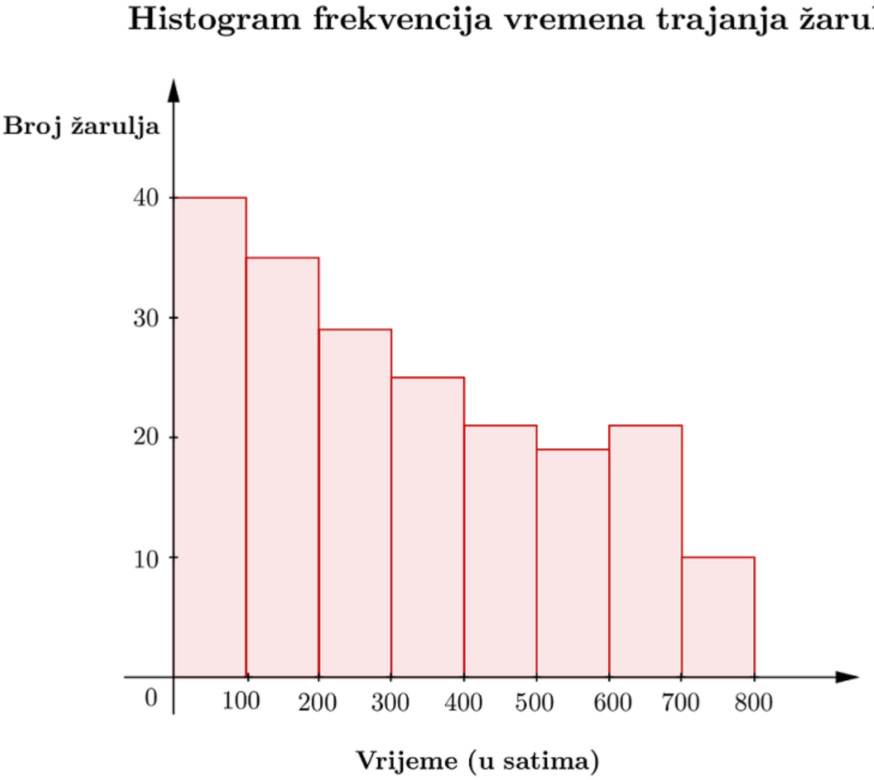
x_i (vrijeme u satima)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
f_i (broj žarulja)	40	35	29	25	21	19	21	10

Odredite relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije te nacrtajte histogram relativnih (apsolutnih frekvencija). Izračunajte uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku varijancu (standardnu devijaciju) danih podataka.

Rješenje:

x_i (vrijeme u satima)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
f_i (broj žarulja)	40	35	29	25	21	19	21	10
$\frac{f_i}{n}$ (relativne frekvencije)	0.2	0.175	0.145	0.125	0.105	0.095	0.105	0.05
$F_n(x_i)$ (kumulativne relativne frekvencije)	0.2	0.375	0.52	0.645	0.75	0.845	0.95	1

Tablica 6.2: Tabela frekvencija, relativnih frekvencija i kumulativnih relativnih frekvencija iz Zadatka 6.5



Slika 6.4: Histogram apsolutnih frekvencija podataka iz Zadatka 6.5

Uzoračka aritmetička sredina:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i} f_i$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_{200} &= \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{8} x_{sr_i} f_i \\
&= \frac{1}{200}(50\cdot 40 + 150\cdot 35 + 250\cdot 29 + 350\cdot 25 + 450\cdot 21 + 550\cdot 19 + 650\cdot 21 + 750\cdot 10) \\
&= 321.5
\end{aligned}
$$

Uzoračka varijanca:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i}^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$$

$$
\begin{aligned}
s_{200}^2 &= \frac{1}{199}(\sum_{i=1}^{8} x_{sr_i}^2 f_i - 200\cdot \overline{x}_{200}^2) \\
&= \frac{1}{199}(50^2\cdot 40 + 150^2\cdot 35 + 250^2\cdot 29 + \cdots + 750^2\cdot 10 - 200\cdot 321.5^2) \\
&= 48178.64
\end{aligned}
$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_n = \sqrt{s_n^2}$$

$$s_{200} = \sqrt{s_{200}^2} = 219.4963$$

□

Zadatak 6.6. Dani su podaci o tlačnoj čvrstoći 80 aluminij - litij legura:

tlačna čvrstoća	broj legura
70-90	2
90-110	3
110-130	6
130-150	14
150-170	22
170-190	17
190-210	10
210-230	4
230-250	2

a) Izračunajte uzoračku varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije K_V.

b) Nađite koeficijent asimetrije K_A i koeficijent spljoštenosti K_E (eksces) distribucije. Nacrtajte histogram tlačne čvrstoće legura.

Rješenje:

a) Aritmetička sredina:

$$\overline{x}_{80} = \frac{1}{80}(80 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + \cdots + 240 \cdot 2) = 163.5$$

Uzoračka varijanca:

$$s_{80}^2 = \frac{1}{79}(80^2 \cdot 2 + 100^2 \cdot 3 + \cdots + 240^2 \cdot 2 - 80 \cdot 163.5^2) = 1111.6456$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_{80} = \sqrt{s_{80}^2} = \sqrt{1111.6456} = 33.3413$$

Koeficijent varijacije:

$$K_V = \frac{s_{80}}{\overline{x}_{80}} = \frac{33.3413}{163.5} = 0.2039$$

b) Koeficijent asimetrije:

$$K_A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$$

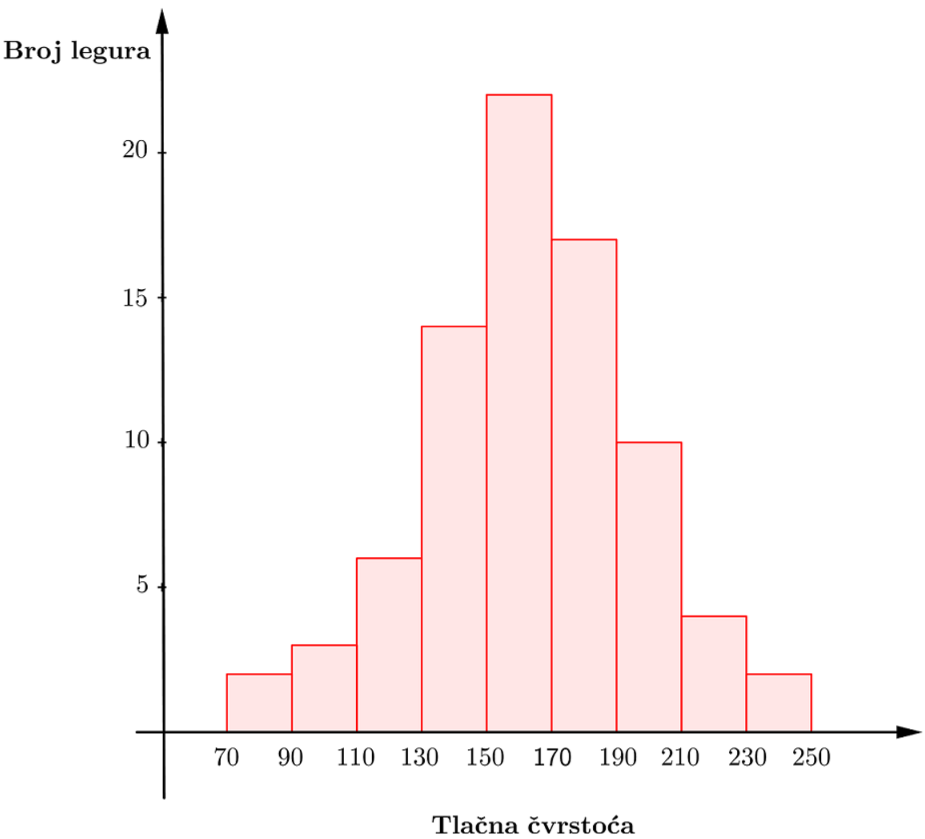
$$\begin{aligned} K_A &= \frac{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{9} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_{80})^3}{s_{80}^3} \\ &= \frac{\frac{1}{80}(2 \cdot (80 - 163.5)^3 + 3 \cdot (100 - 163.5)^3 + \cdots + 2 \cdot (240 - 163.5)^3)}{33.3413^3} \\ &= \frac{-5369.25}{33.3413^3} = -0.1448 \end{aligned}$$

Koeficijent spljoštenosti:

$$K_E = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$$

$$\begin{aligned}
K_E &= \frac{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{9} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_{80})^4}{s_{80}^4} - 3 \\
&= \frac{\frac{1}{80}(2\cdot(80-163.5)^4 + 3\cdot(100-163.5)^4 + \cdots + 2\cdot(240-163.5)^4)}{33.3413^4} - 3 \\
&= \frac{3750334.813}{33.3413^4} - 3 = 0.0349
\end{aligned}$$

Histogram frekvencija tlačne čvrstoće aluminij - litij legura



Slika 6.5: Histogram frekvencija podataka iz Zadatka 6.6

$\square$

Zadatak 6.7. Mjerenjem tjelesne težine na 100 učenica osmih razreda neke osnovne škole dobiveni su podaci:

razredi	x_{sr_i}	f_i	$F_n(x_i)$
60 - 63	61.5	5	5
63 - 66	64.5	18	23
66 - 69	67.5	42	65
69 - 72	70.5	27	92
72 - 75	73.5	8	100

a) Izračunajte uzoračku varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije K_V.

b) Nađite koeficijent asimetrije K_A i koeficijent spljoštenosti K_E (eksces), te prikažite distribuciju podataka grafički.

Rješenje:

a) Aritmetička sredina:

$$\overline{x}_{100} = \frac{1}{100}(61.5 \cdot 5 + 64.5 \cdot 18 + 67.5 \cdot 42 + 70.5 \cdot 27 + 73.5 \cdot 8) = 67.95$$

Uzoračka varijanca:

$$s_{100}^2 = \frac{1}{99}(61.5^2 \cdot 5 + 64.5^2 \cdot 18 + 67.5^2 \cdot 42 + 70.5^2 \cdot 27 + 73.5^2 \cdot 8 - 100 \cdot 67.95^2) = 8.5275$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_{100} = \sqrt{s_{100}^2} = \sqrt{8.5275} = 2.9202$$

Koeficijent varijacije:

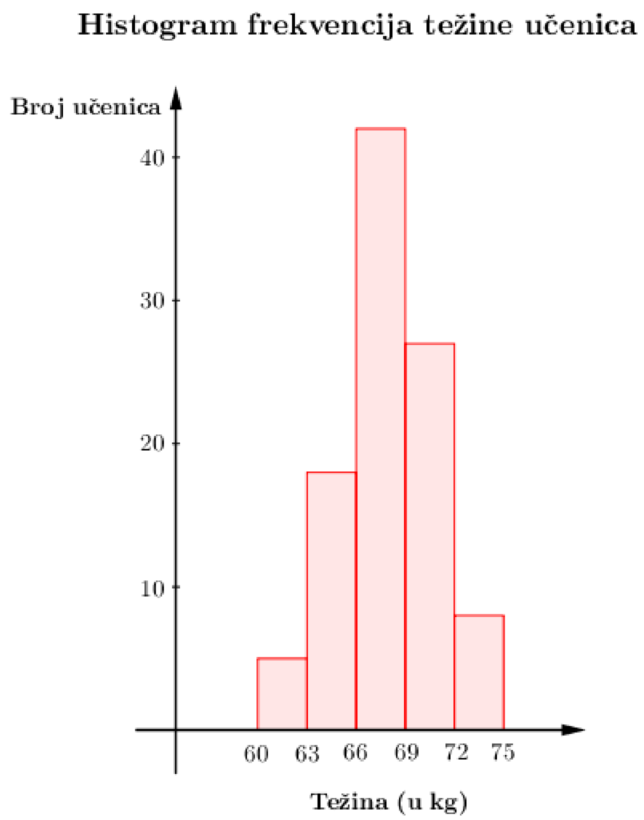
$$K_V = \frac{s_{100}}{\overline{x}_{100}} = \frac{2.9202}{67.95} = 0.0430$$

b) Koeficijent asimetrije:

$$
\begin{aligned}
K_A &= \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_{100})^3}{s_{100}^3} \\
&= \frac{\frac{1}{100}(5 \cdot (61.5 - 67.95)^3 + 18 \cdot (64.5 - 67.95)^3 + \cdots + 8 \cdot (73.5 - 67.95)^3)}{2.9349^3} \\
&= \frac{-2.6549775}{2.9202^3} = -0.1066
\end{aligned}
$$

Koeficijent spljoštenosti:

$$
\begin{aligned}
K_E &= \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} f_i(x_{sr_i} - \overline{x})^4}{s_{100}^4} - 3 \\
&= \frac{\frac{1}{100}(5 \cdot (61.5 - 67.95)^4 + 18 \cdot (64.5 - 67.95)^4 + \cdots + 8 \cdot (73.5 - 67.95)^4)}{2.9202^4} - 3 \\
&= \frac{199.3587086}{2.9202^4} - 3 = -0.2585
\end{aligned}
$$



Slika 6.6: Histogram apsolutnih frekvencija iz Zadatka 6.7

□

6.2 Intervali povjerenja i testiranja za očekivanje

6.2.1 Intervali povjerenja za očekivanje normalne razdiobe

Razlikujemo dva osnovna slučaja:

- poznata varijanca populacije σ^2:
$$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$
- nepoznata varijanca populacije σ^2:
  - veliki uzorak ($n \geq 30$):
$$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$$
  - mali uzorak ($n < 30$):
$$(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$$

Zadatak 6.8. Uzorak od 2000 mjerenja slučajne varijable X s varijancom $\sigma^2 = 20$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x} = 150$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.95$.

Rješenje:
$n = 2000, \overline{x} = 150$, $\sigma^2 = 20$, $\alpha = 0.05$

Standardna devijacija populacije je poznata, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$

Interval: $(150 - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2000}}, 150 + 1.96 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2000}}) = (149.804, 150.196)$ □

Zadatak 6.9. Poznato je da slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa standardnom devijacijom $\sigma = 4$. Na uzorku veličine $n = 18$ izračunata je aritmetička sredina $\overline{x} = 7$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.99$.

Rješenje:
$n = 18, \overline{x} = 7,\ \sigma = 4,\ \alpha = 0.01$

Standardna devijacija populacije je poznata, interval za očekivanje je dan formulom:
$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.01}{2}} = z_{0.995} = 2.58$

Interval: $(7 - 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{18}}, 7 + 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{18}}) = (4.5676, 9.4324)$ □

Zadatak 6.10. Normalno distribuirana slučajna varijabla X ima nepoznato očekivanje. Uzet je uzorak veličine $n = 20$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 1001.62$ i vrijednost uzoračke varijance $s^2 = 92.66$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.99$.

Rješenje:
$n = 20, \overline{x} = 1001.62,\ s^2 = 92.66,\ \alpha = 0.01$

σ je nepoznata, uzorak mali, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x} - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}})$

$t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(19)}_{1-\frac{0.01}{2}} = t^{(19)}_{0.995} = 2.86$

Interval: $(1001.62 - 2.86 \cdot \frac{\sqrt{92.66}}{\sqrt{20}}, 1001.62 + 2.86 \cdot \frac{\sqrt{92.66}}{\sqrt{20}}) = (995.46, 1007.78)$ □

Zadatak 6.11. Normalno distribuirana slučajna varijabla X ima nepoznato očekivanje. Uzet je uzorak veličine $n = 15$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 30$ i vrijednost korigirane uzoračke varijance $s^2 = 9$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.9$.

Rješenje:
$n = 15, \overline{x} = 30,\ s^2 = 9,\ \alpha = 0.1$

σ je nepoznata, uzorak mali, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x} - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}})$

$t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(14)}_{1-\frac{0.1}{2}} = t^{(14)}_{0.95} = 1.76$

Interval: $(30 - 1.76 \cdot \frac{3}{\sqrt{15}}, 30 + 1.76 \cdot \frac{3}{\sqrt{15}}) = (28.636, 31.364)$ $\square$

Zadatak 6.12. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu X smo uzeli uzorak veličine $n = 200$ i izračunali vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 20$ i vrijednost korigirane uzoračke varijance $s^2 = 25$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.9$.

Rješenje:
$n = 200, \overline{x} = 20,\ s^2 = 25,\ \alpha = 0.9$

σ je nepoznata, uzorak velik, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}})$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.9}{2}} = z_{0.95} = 1.65$

Interval: $(20 - 1.65 \cdot \frac{5}{\sqrt{200}}, 20 + 1.65 \cdot \frac{5}{\sqrt{200}}) = (19.4166, 20.5834)$ $\square$

Zadatak 6.13. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu X smo uzeli uzorak veličine $n = 100$ i izračunali vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 8$ i vrijednost korigirane uzoračke varijance $s^2 = 0.81$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.95$.

Rješenje:
$n = 100, \overline{x} = 8,\ s^2 = 0.81,\ 1 - \alpha = 0.95$

σ je nepoznata, uzorak velik, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}})$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$

Interval: $(8 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}}, 8 + 1.65 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}}) = (7.8236, 8.1764)$ $\square$

6.2.2 Testovi hipoteza za očekivanje normalne razdiobe

Testiranje hipoteza se provodi u sljedeća tri koraka:

(a) Određivanje kritičnog područja c_α

- $H_0 \ldots \mu \geq \mu_0$
  $H_1 \ldots \mu < \mu_0$
  Poznata varijanca populacije:
  $c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}]$
  Nepoznata varijanca populacije i velik uzorak ($n \geq 30$):
  $c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}]$
  Nepoznata varijanca populacije i mali uzorak ($n < 30$):
  $c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$
- $H_0 \ldots \mu \leq \mu_0$
  $H_1 \ldots \mu > \mu_0$
  Poznata varijanca populacije:
  $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty >$
  Nepoznata varijanca populacije i velik uzorak ($n \geq 30$):
  $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty >$
  Nepoznata varijanca populacije i mali uzorak ($n < 30$):
  $c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n-1), \infty >$
- $H_0 \ldots \mu = \mu_0$
  $H_1 \ldots \mu \neq \mu_0$
  Poznata varijanca populacije:
  $c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty >$
  Nepoznata varijanca i velik uzorak ($n \geq 30$):
  $c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty >$
  Nepoznata varijanca i mali uzorak ($n < 30$):
  $c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty >$

Razina značajnosti α predstavlja vjerojatnost pogreške 1. vrste (tj. da odbacimo ispravnu nultu hipotezu).

(b) Određivanje vrijednosti testne statistike (testa) t
Poznata varijanca populacije:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}$$

Nepoznata varijanca populacije:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}$$

(c) Izvođenje zaključka
$t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nultu hipotezu H_0
$t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nultu hipotezu H_0

Zadatak 6.14. Slučajna varijabla je normalno distribuirana uz poznatu varaijancu $\sigma^2 = 25$. Na uzorku veličine $n = 16$ dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 11$. Uz razinu značajnosti $\alpha = 0.01$ testirajte:

a) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \leq 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu > 8$.

b) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \geq 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu < 8$.

c) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu = 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu \neq 8$.

Rješenje: Varijanca je poznata ($\sigma^2 = 25$), pa testnu statistiku računamo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{16} \cdot \frac{11 - 8}{5} = 2.4$$

a) $H_0 \ldots \mu \leq 8$
$H_1 \ldots \mu > 8$
$c_\alpha = [z_{1-\alpha}, +\infty >= [2.33, \infty > \Rightarrow t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nul-hipotezu

b) $H_0 \ldots \mu \geq 8$
$H_1 \ldots \mu < 8$
$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}] =< -\infty, -2.33] \Rightarrow t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nul-hipotezu

c) $H_0 \ldots \mu = 8$
$H_1 \ldots \mu \neq 8$
$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty >=< -\infty, -z_{1-\frac{0.01}{2}}] \cup [z_{1-\frac{0.01}{2}}, \infty >$
$c_\alpha =< -\infty, -z_{0.995}] \cup [z_{0.995}, \infty >=< -\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty >$
$t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nul-hipotezu

□

Zadatak 6.15. Slučajna varijabla je normalno distribuirana uz poznatu varaijancu $\sigma^2 = 100$. Na uzorku veličine $n = 16$ dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x} = 130$. Uz razinu značajnosti $\alpha = 0.01$ testirajte:

a) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \leq 120$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu > 120$.

b) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \geq 120$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu < 120$.

Rješenje: Varijanca je poznata ($\sigma^2 = 100$), pa testnu statistiku računamo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{16} \cdot \frac{130 - 120}{10} = 4$$

a) $H_0 \ldots \mu \leq 120$
   $H_1 \ldots \mu > 120$
   $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, +\infty >= [2.33, \infty > \Rightarrow t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nul-hipotezu

b) $H_0 \ldots \mu \geq 120$
   $H_1 \ldots \mu < 120$
   $c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}] =< -\infty, -2.33] \Rightarrow t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nul-hipotezu

□

Zadatak 6.16. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 9.45$ prema alternativnoj hipotezi

a) $H_1 \ldots \mu \neq 9.45$,

b) $H_1 \ldots \mu < 9.45$.

pri čemu smo na uzorku veličine $n = 12$ dobili uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{x} = 9.9825$ i uzoračku varijancu $s^2 = 0.77438$. Razina značajnosti je $\alpha = 0.05$.

Rješenje: Varijanca je nepoznata, a uzorak mali ($n < 30$), pa računamo testnu statistiku:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{12} \cdot \frac{9.9825 - 9.45}{\sqrt{0.77438}} = 2.0962$$

a) $c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty >=< -\infty, -t_{1-\frac{0.05}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{0.05}{2}}(n-1), \infty >$
$c_\alpha =< -\infty, -t_{0.975}(11)] \cup [t_{0.975}(11), \infty >=< -\infty, -2.2] \cup [2.2, \infty >$
$t \notin c_\alpha \Rightarrow$ nulta se hipoteza ne odbacuje

b) $c_\alpha =< \infty, -z_{1-\alpha}] =< -\infty, -1.8] \Rightarrow t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nul-hipotezu

$\square$

Zadatak 6.17. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 4.5$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \ldots \mu > 4.5$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 15$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x} = 5.15933$ i uzoračku varijancu $s^2 = 1.26625$. Razina značajnosti je 0.05.

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu = 4.5$
$H_1 \ldots \mu > 4.5$

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{15} \cdot \frac{5.15933 - 4.5}{1.12528} = 2.2693$$

$c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n-1), \infty >= [t_{0.95}(14), \infty >= [1.76, \infty >$
$t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nul-hipotezu $\square$

Zadatak 6.18. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 11$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \ldots \mu \neq 11$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 100$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x} = 9$ i uzoračku varijancu $s^2 = 25$. Razina značajnosti je 0.1.

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu = 11$
$H_1 \ldots \mu \neq 11$

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{100} \cdot \frac{9 - 11}{5} = -4$$

$c_\alpha =< -\infty, -z_{0.95}] \cup [z_{0.95}, \infty >=< -\infty, -1.65] \cup [1.65, \infty >$
$t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nul-hipotezu $\square$

Zadatak 6.19. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 12$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \ldots \mu < 12$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 200$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x} = 15$ i korigiranu uzoračku varijancu $s^2 = 16$. Razina značajnosti je 0.05.

Rješenje:
$H_0 \dots \mu = 12$
$H_1 \dots \mu < 12$

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{200} \cdot \frac{15 - 12}{4} = 10.6066$$

$c_\alpha =< -\infty, -z_{0.95}] =< -\infty, -1.65]$
$t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nul-hipotezu □

Zadatak 6.20. Članak Mix Design for Optimal Strength Development of Fly Ash Concrete (Cement and Concrete Research, 1989) istražuje tlačnu čvrstoću betona s letećim pepelom (mješavina silicija, aluminija, željeza, magnezijeva oksida i ostalih sastojaka). Dane su tlačne čvrstoće devet uzoraka (u megapascalima):
40.2, 30.4, 28.9, 30.5, 22.4, 25.8, 18.4, 14.2, 15.3.

a) Nađite 95% pouzdani interval za tlačnu čvrstoću i interpretirajte ga.

b) Pretpostavimo da smo saznali da je podatak 40.2 posljedica krivog mjerenja. Pokušajte isključiti navedeni podatak i ponovno pronaći interval pouzdanosti.

Rješenje:

a) Tražimo interval oblika: $(\overline{x} - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$
$\overline{x} = \frac{1}{9}(40.2 + \cdots + 15.3) = 25.1222$
$t^8_{0.975} = 2.31$
$s = \sqrt{\frac{1}{8}(40.2^2 + \cdots + 15.3^2 - 9 \cdot 25.1222^2)} = 8.4203$
Interval: $(25.1222 - 2.31 \cdot \frac{8.4203}{\sqrt{9}}, 25.1222 + 2.31 \cdot \frac{8.4203}{\sqrt{9}}) = (18.6498, 31.5947)$

b) DZ

□

Zadatak 6.21. Proizvođač proizvodi klipne prstene za motore automobila. Poznato je da je dijametar prstena normalno distribuiran sa $\sigma = 0.001$ milimetara. Slučajni uzorak od 15 prstenova ima prosječan dijametar od 74.036 milimetara. Konstruirajte 99%-tni pouzdani interval za očekivanu vrijednost dijametra klipnog prstena.

Rješenje:

$(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\overline{x} = 74.036$

$z_{0.995} = 2.58$

$\sigma = 0.001$

Interval: $(74.036 - 2.58 \cdot \frac{0.001}{\sqrt{15}}, 74.036 + 2.58 \cdot \frac{0.001}{\sqrt{15}}) = (74.0353, 74.0367)$ $\square$

Zadatak 6.22. Snaga pucanja prediva (breaking strength of yarn) koja se koristi u proizvodnji materijala mora biti minimalno 100 psi. Iskustvo je pokazalo da je snaga pucanja normalno distribuirana i da joj je $\sigma = 2$ psi. Testiran je slučajni uzorak veličine 9 i prosječna snaga pucanja je iznosila 98 psi. Testirajte ispravnost prediva na nivou značajnosti od 5%.

Rješenje:

$H_0 \dots \mu \leq 100$

$H_1 \dots \mu > 100$

$\overline{x} = 98, \sigma = 2, n = 9$

Testna statistika:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{9} \cdot \frac{98 - 100}{2} = -3$$

Kritično područje: $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty) = [z_{0.95}, \infty) = [1.65, \infty)$

$z \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo H_0. $\square$

Zadatak 6.23. Članak u ASCE Journal of Energy Engineering ("Overview of Reservoir Release Improvements at 20 TVA Dams") sadrži podatke o koncentraciji razgrađenog kisika u tokovima ispod 20 brana u Tennessee Valley Authority sistemu. Podaci su kako slijedi (u miligramima po litri): 5.0, 3.4, 3.9, 1.3, 0.2, 0.9, 2.7, 3.7, 3.8, 4.1, 1.0, 1.0, 0.8, 0.4, 3.8, 4.5, 5.3, 6.1, 6.9 i 6.5. Odredite 95% pouzdani interval za očekivanu koncentraciju razgrađenog kisika.

Rješenje:

Tražimo interval oblika: $(\overline{x} - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$

$\overline{x} = \frac{1}{20}(5.0 + \cdots + 6.5) = 3.265$

$t^{19}_{0.975} = 2.09$

$s = \sqrt{\frac{1}{19}(5.0^2 + \cdots + 6.5^2 - 20 \cdot 3.265^2)} = 2.1273$

Interval: $(3.265 - 2.09 \cdot \frac{2.1273}{\sqrt{20}}, 3.265 + 2.09 \cdot \frac{2.1273}{\sqrt{20}}) = (2.2694, 4.2606)$ $\square$

Zadatak 6.24. Proučavano je prianjanje različitih biofilmova na čvrste podloge za potencijalno korištenje u tehnologiji za zaštitu okoliša. Za bakterijski soj Acinetobacter, dobiveno je sljedećih 5 mjerenja: 2.69, 5.76, 2.67, 1.62, 4.12 din/cm^2. Uz pretpostavku da je populacija normalno distribuirana uz standardnu devijaciju 0.66 din/cm^2, odredite 95% pouzdani interval za očekivano prianjanje. Uz 1% značajnosti testirajte tvrdnju da je očekivano prianjanje veće od 3.5 din/cm^2.

Rješenje:
$n = 5, \sigma = 0.66$
$\overline{x} = \frac{1}{5}(2.69 + \cdots + 4.12) = 3.372$
$z_{0.975} = 1.96$
95% pouzdani interval je oblika: $(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$
$(3.372 - 1.96 \cdot \frac{0.66}{\sqrt{5}}, 3.372 + 1.96 \cdot \frac{0.66}{\sqrt{5}}) = (2.7935, 3.9505)$

Testiramo hipoteze:
$H_0 \ldots \mu \leq 3.5$
$H_1 \ldots \mu > 3.5$
Testna statistika:

$$t = \sqrt{5} \cdot \frac{3.372 - 3.5}{0.66} = -0.4337$$

Kritično područje: $c_{0.01} = [z_{0.99}, \infty >= [2.33, \infty >$
$z \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo H_0. □

Zadatak 6.25. Inžinjer na 12 primjeraka testira tlačnu čvrstoću betona (koja je poznato iz normalne razdiobe) i dobiva sljedeće podatke:

2216	2237	2249	2204	2225	2301
2281	2263	2318	2255	2275	2295

Uz 5% značajnosti testirajte pretpostavku da je tlačna čvrtoća betona manja od 2500.

Rješenje:
Testiramo hipoteze:
$H_0 \ldots \mu \geq 2500$
$H_1 \ldots \mu < 2500$

$\overline{x} = 2259.917, s = 35.5693$

Testna statistika:

$$t = \sqrt{12} \cdot \frac{2259.917 - 2500}{35.5693} = -23,38177432$$

Kritično područje: $< -\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$
$t \in < -\infty, -t_{0.95}(11)] = < -\infty, -1.7959] \implies$ odbacujemo H_0

Na razini značajnosti od 5% odbacujemo pretpostavku da je tlačna čvrstoća betona veća ili jednaka 2500 (tj. možemo reći da prihvaćamo da je manja od 2500). $\square$

Zadatak 6.26. Sustavi za evakuaciju avionske posade se pokreću na čvrsti plin. Stopa izgaranja plina je važna karakteristika proizvoda. Specifikacije zahtjevaju da prosječna stopa izgaranja bude 50 centimetara po sekundi. Znamo da je standardna devijacija $\sigma = 2$ centimetara po sekundi. Uzet je slučajni uzorak veličine 25 i dobivena je prosječna stopa izgaranja od 51.3 centimetara po sekundi. Koji zaključak donosimo na razini signifikantnosti od 5%?

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu = 50$
$H_1 \ldots \mu \neq 50$

Testna statistika je

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{25} \cdot \frac{51.3 - 50}{2} = 3.25$$

Kritično područje: $c_{0.05} = < -\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty >$
$t = 3.25 \in c_\alpha$ pa odbacujemo H_0.
Uz 5% značajnosti odbacujemo hipotezu da očekivana stopa izgaranja iznosi 50 centimetara po sekundi. $\square$

Zadatak 6.27. Inžinjer koji proučava vlačnu čvrstoću (tensile strength) čelične legure namijenjene za upotrebu u osovinama golf palica zna da je čvrstoća približno normalno distribuirana sa $\sigma = 60$ psi. Slučajni uzorak od 12 jedinki ima prosječnu vlačnu čvrstoću od 3250 psi. Uz 1% značajnosti testirajte hipotezu da je očekivana vlačna čvrstoća jednaka 3500 psi.

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu = 3500$

$H_1 \dots \mu \neq 3500$

Testna statistika:

$$t = \sqrt{12} \cdot \frac{3250 - 3500}{60} = -14.4338$$

Kritično područje: $c_{0.01} =< -\infty, -z_{0.995}] \cup [z_{0.995}, \infty >=< -\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty >$
$t \in c_{0.01} \Rightarrow$ odbacujemo H_0 □

6.2.3 T-test za dva uzorka

- testiramo jednakost očekivanja dva **nezavisna** uzorka iz **normalne distribucije**

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \quad \mu_1 \neq \mu_2 \qquad (\mu_1 < \mu_2 \quad \text{ili} \quad \mu_1 > \mu_2) \end{aligned}$$

- testna statistika je

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\hat{\sigma}_D}$$

  gdje su n_1 i n_2 veličine uzoraka, a $\hat{\sigma}_D$ ovisi o tome jesu li varijance populacija poznate ili nepoznate (dodatna pretpostavka kod nepoznatih varijanci bi trebala biti njihova jednakost):

  – poznate varijance:

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

  – nepoznate varijance:

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

- Određivanje kritičnog područja c_α

  – $H_0 \dots \mu_1 \geq \mu_2$
    $H_1 \dots \mu_1 < \mu_2$
    Poznate varijance populacije:

$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}]$
Nepoznate varijance populacije i velik uzorci ($n_1, n_2 \geq 40$):
$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\alpha}]$
Nepoznate varijance populacije i mali uzorci ($n_1 < 40, n_2 < 40$):
$c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)]$

– $H_0 \ldots \mu_1 \leq \mu_2$
$H_1 \ldots \mu_1 > \mu_2$
Poznate varijance populacije:
$c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty >$
Nepoznate varijance populacije i velik uzorci ($n_1, n_2 \geq 40$):
$c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty >$
Nepoznate varijance populacije i mali uzorci ($n_1 < 40, n_2 < 40$):
$c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty >$

– $H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$
$H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$
Poznate varijance populacije:
$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty >$
Nepoznate varijance i velik uzorci ($n_1, n_2 \geq 40$):
$c_\alpha =< -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty >$
Nepoznate varijance i mali uzorci ($n_1 < 40, n_2 < 40$):
$c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2), \infty >$

Zadatak 6.28. Proučava se preciznost mjernog instrumenta mjerenjem težina dvaju različitih listova papira. Ponavljajući mjerenja više puta dobiveni su sljedeći podaci:

- Papir 1: 3.481, 3.477, 3.47, 3.448, 3.472, 3.47, 3.485, 3.464, 3.477, 3.475, 3.472, 3.473, 3.472, 3.47, 3.474.
- Papir 2: 3.258, 3.254, 3.256, 3.249, 3.241, 3.254, 3.247, 3.257, 3.239, 3.25, 3.258, 3.239, 3.245, 3.24, 3.254.

Na razini značajnosti od 5% testirajte da li su prosječne težine dva različita papira jednake. (Pretpostavite da uzorci dolaze iz normalne distribucije)

Rješenje:
Testiramo jednakost prosječnih težina:
$H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$
$H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$

Uzoračka aritmetička sredina i varijanca za papir 1 i papir 2 iznose:
$\overline{x}_1 = 3.472, s_1^2 = 6.9 \cdot 10^{-5}$
$\overline{x}_2 = 3.2494, s_2^2 = 5.1 \cdot 10^{-5}$

$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{\frac{(15-1)\cdot 6.9\cdot 10^{-5}+(15-1)\cdot 5.1\cdot 10^{-5}}{15+15-2} \cdot \frac{15+15}{15\cdot 15}} = 0.002828$

Testna statistika:

$$t = \frac{3.472 - 3.2494}{0.002828} = 78.71036$$

Kritično područje: $c_\alpha =< -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2), \infty >=< -\infty, -2.048] \cup [2.048, \infty >$
$t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo H_0 $\square$

Zadatak 6.29. Proizvođač želi smanjiti vrijeme sušenja primarne boje. Korištene su dvije različite boje, jedna standardna i jedna koja sadrži novi sastojak koji bi trebao smanjiti vrijeme sušenja. Poznato je da su standardne devijacije vremena sušenja 8 minuta. 10 uzoraka je obojeno prvom, a 10 drugom bojom. Prosječno vrijeme sušenja prve boje je $\overline{x}_1 = 121$ minuta, a druge $\overline{x}_2 = 112$ minuta. Koji zaključak možemo donjeti o efektima novog sastojka, uz $\alpha = 0.05$?

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu_1 \leq \mu_2$
$H_1 \ldots \mu_1 > \mu_2$

$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{8^2}{10}} = 3.5777$

Testna statistika:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\hat{\sigma}_D} = \frac{121 - 112}{3.5777} = 2.5156$$

Kritično područje: $c_{0.05} = [1.65, \infty >$
$t \in c_{0.05} \Rightarrow$ odbacujemo H_0 $\square$

Zadatak 6.30. Promatran je dijametar čeličnih šipki dvaju različitih proizvođača. Uzeta su dva slučajna uzorka veličine $n_1 = 15$ i $n_2 = 17$ i dobivene su aritmetičke sredine i varijance $\overline{x}_1 = 8.73$, $s_1^2 = 0.35$ i $\overline{x}_2 = 8.68$, $s_2^2 = 0.40$. Pretpostavimo da $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ i da su podaci uzeti iz normalne distribucije.

Možemo li uz 5% značajnosti tvrditi da proizvođači proizvode čelične šipke različitih dijametara?

Rješenje:
$H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$
$H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$

$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{14 \cdot 0.35 + 16 \cdot 0.40}{30} \cdot \frac{32}{15 \cdot 17}} = 0.2174$
Testna statistika:

$$t = \frac{8.73 - 8.68}{0.2174} = 0.23$$

Kritično područje: $c_\alpha =< -\infty, -t_{0.975}(30)] \cup [t_{0.975}(30), \infty >=< -\infty, 2.04] \cup [2.04, \infty >$

$t \notin c_{0.05} \Rightarrow$ ne odbacujemo H_0 $\square$

6.3 Jednostavna linearna regresija

6.3.1 Koeficijent korelacije

Podatke dobivene mjerenjem dvodimenzionalnog neprekidnog statističkog obilježja (X, Y):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

obično prikazujemo grafički, te tablicom:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Cilj nam je izmjeriti **stupanj linearne povezanosti** veličina X i Y.

S korelacijom treba oprezno! Nema smisla tražiti korelaciju između bilo koje dviju varijabli, moramo imati teoretsku podlogu.

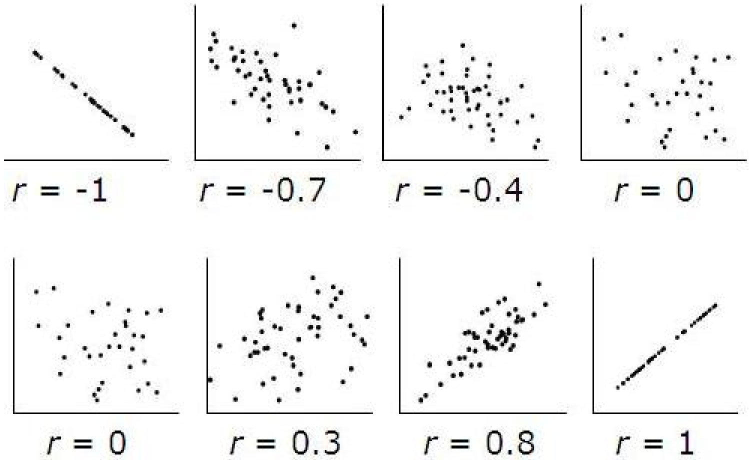
Broj

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}$$

je **koeficijent korelacije**.
Pri tome je:

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2,\ S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$



Slika 6.7: Primjeri podataka za različite koeficijente korelacije

Vrijedi:

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

- Ako je $r_{XY} < 0$, kažemo da su X i Y negativno korelirane.
- Ako je $r_{XY} > 0$, kažemo da su X i Ypozitivno korelirane.
- $r_{XY} = 0 \Rightarrow X$ i Y nisu korelirane

6.3.2 Regresijski pravac (pravac najboljeg pristajanja)

Ako postoji jaka korelacija između X i Y pitamo se koji je najbolji pravac koji ih opisuje. Metodom najmanjih kvadrata dobiva se da je to pravac:

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

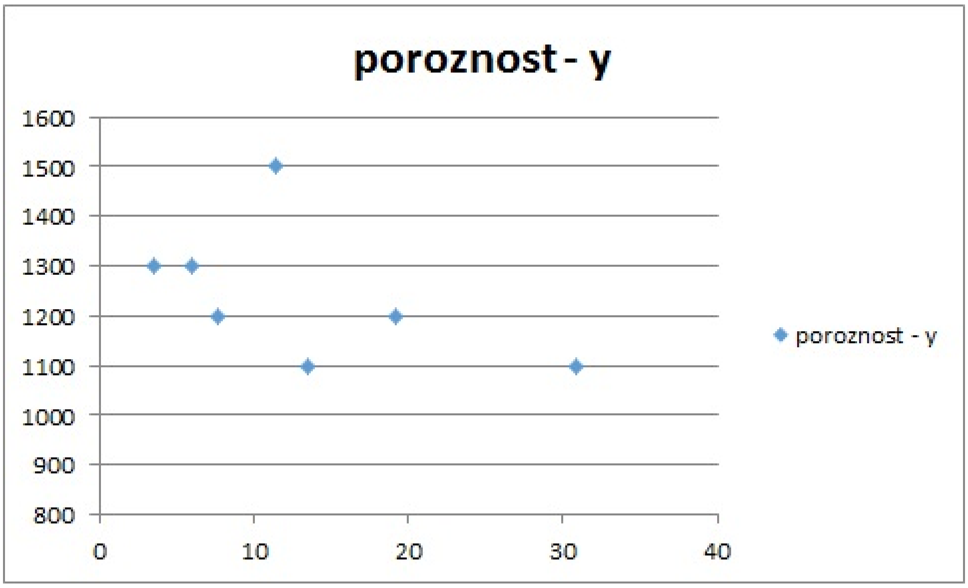
pri čemu su parametri $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad \hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

Zadatak 6.31. Članak u "Journal of the American Ceramic Society" razmatra povezanost poroznosti cirkonija s temperaturom. Dani su podaci:

Poroznost y	1100	1200	1300	1100	1500	1200	1300
Temperatura x	30.8	19.2	6.0	13.5	11.4	7.7	3.6

Dijagram raspršenja (grafički prikaz podataka) dan je na slici:



Izračunajte koeficijent korelacije i pravac najboljeg pristajanja. Što možete zaključiti?

Rješenje: Računamo

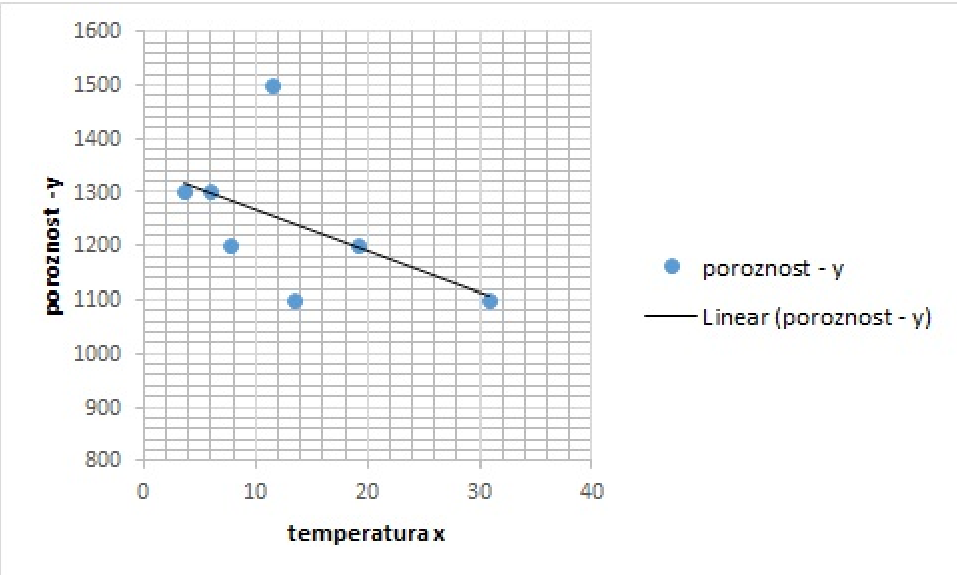
i	temperatura - x	poroznost - y	x_i - x̄	(x_i - x̄)^2	y_i - ȳ	(y_i - ȳ)^2		(x_i - x̄)(y_i - ȳ)
1	30,8	1100	17,629	310,767	-142,857	20408,163		-2518,367
2	19,2	1200	6,029	36,344	-42,857	1836,735		-258,367
3	6	1300	-7,171	51,429	57,143	3265,306		-409,796
4	13,5	1100	0,329	0,108	-142,857	20408,163		-46,939
5	11,4	1500	-1,771	3,138	257,143	66122,449		-455,510
6	7,7	1200	-5,471	29,937	-42,857	1836,735		234,490
7	3,6	1300	-9,571	91,612	57,143	3265,306		-546,939
prosjek	13,171	1242,857	**Sxx**	**523,33429**	**Syy**	**117142,9**	**Sxy**	**-4001,428571**
							r	**-0,511054914**

Kad izračunamo sve za koeficijent korelacije, lako dobivamo i koeficijente regresijskog pravca:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-4001.429}{523.334} = -7.64603,$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 1242.857 - (-7.64603) \cdot 13.171 = 1343.566.$$

Dakle, pravac najboljeg pristajanja je $\hat{y} = 1343.566 - 7.64603x$.



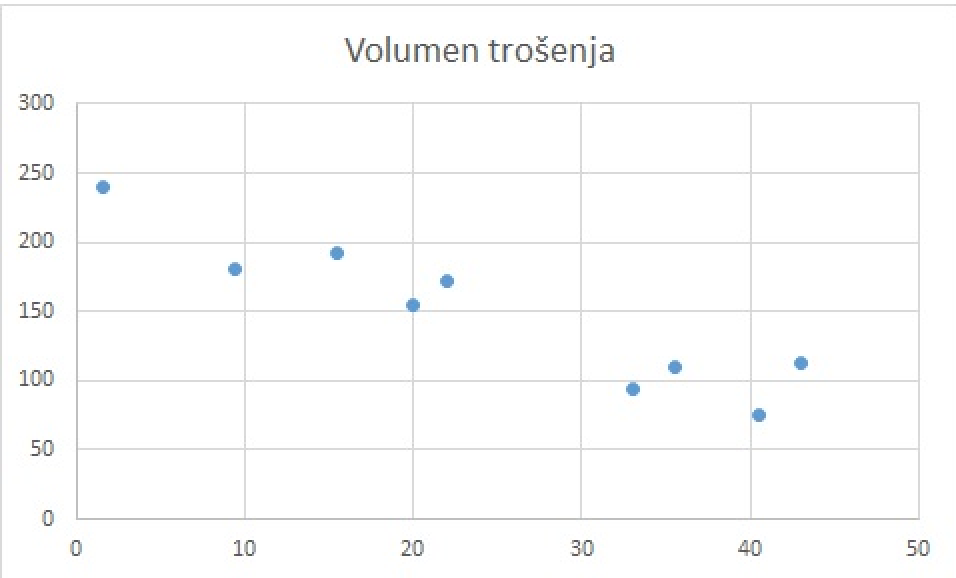
Zaključujemo da poroznost cirkonija opada s porastom temperature. □

Bitna primjena regresijskih modela je prognoziranje novih (ili budućih) vrijednosti varijable Y za određenu razinu varijable X. Ako je x_0 vrijednost za koju nas zanima vrijednost zavisne varijable, uvrštavamo x_0 u jednadžbu regresijskog pravca: $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$. Osim prognoziranja brojem, možemo naći i prognostički interval određene pouzdanosti.

Zadatak 6.32. Članak u časopisu Wear prezentira podatke o trošenju mekog čelika (volumen trošenja u 10^{-4} kubičnim milimetrima - varijabla y) i viskoznosti ulja (varijabla x) u kojem se čelik kali.

y	240	181	193	155	172	110	113	75	94
x	1.6	9.4	15.5	20.0	22.0	35.5	43.0	40.5	33.0

Dijagram raspršenja dan je na slici:



Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite koliko će biti trošenje mekog čelika uz viskoznost $x = 21.00$.

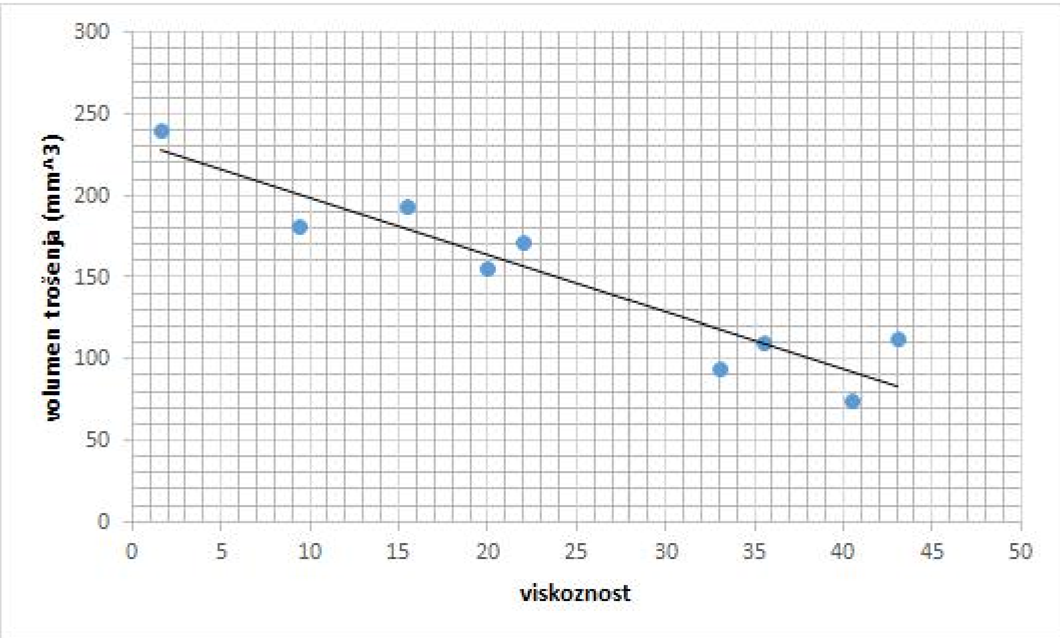
Rješenje: Računamo

i	viskoznost (X)	trošenje (Y)	x_i - $\overline{x}$	(x_i - $\overline{x}$)^2	y_i - $\overline{y}$	(y_i - $\overline{y}$)^2		(x_i - $\overline{x}$)(y_i - $\overline{y}$)
1	1,6	240	-22,9	524,410	91,889	8443,568		-2104,256
2	9,4	181	-15,1	228,010	32,889	1081,679		-496,622
3	15,5	193	-9,0	81,000	44,889	2015,012		-404,000
4	20	155	-4,5	20,250	6,889	47,457		-31,000
5	22	172	-2,5	6,250	23,889	570,679		-59,722
6	35,5	110	11,0	121,000	-38,111	1452,457		-419,222
7	43	113	18,5	342,250	-35,111	1232,790		-649,556
8	40,5	75	16,0	256,000	-73,111	5345,235		-1169,778
9	33	94	8,5	72,250	-54,111	2928,012		-459,944
prosjek	24,5	148,111	**S_XX**	**1651,420**	**S_YY**	**23116,889**	**S_XY**	**-5794,1**
							r_XY	**-0,93776177**

Računamo koeficijente regresijskog pravca: koeficijente regresijskog pravca:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-5794.1}{1651,420} = -3.5086,$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 148.111 - (-3.5086) \cdot 24.5 = 234.07.$$



Za viskoznost $x = 21$ dobivamo da će trošenje biti $y = -3.5086 \cdot 21 + 234.07 = 160.389$ mm^3. $\square$

Zadatak 6.33. Linearna regresija korištena je za analizu podataka u istraživanju veze između površinske temperature kolnika (x) i otklona/neravnosti kolnika (y). Na uzorku veličine $n = 20$ dobiveni su sljedeći sumarni podaci: $\overline{x} = 73.9, \overline{y} = 0.6375, S_{XX} = 33881.6, S_{YY} = 0.7319$ te $S_{XY} = 141.445$.

Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite kolika će biti neravnost kolnika na temperaturi $x = 85$. Interpretirajte dobiveni model.

(Temperature su u Fahrenheitima.)

Rješenje: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{141.445}{33881.6} = 0.00417$, $\hat{\beta}_0 = 0.6375 - 0.00417 \cdot 73.9 = 0.365$

$$\Rightarrow y = 0.00417x + 0.365.$$

Neravnost kolnika raste s temperaturom.

Neravnost kolnika bila bi $y(85) = 0.71945$ na temperaturi $x = 85$. □

Napomena: mali koeficijent uz x ne znači da je slaba veza između varijabli. U prethodnom zadatku možemo izračunati koeficijent korelacije $r_{XY} = 0.898$.

Zadatak 6.34. Linearna regresija korištena je za analizu podataka u istraživanju veze između tlačne čvrstoće (x) i intrinzične propusnosti (y) različitih betona. Na uzorku veličine $n = 14$ dobiveni su sljedeći sumarni podaci: $\overline{x} = 3.0714, \overline{y} = 40.8571, S_{XX} = 25.351, S_{YY} = 159.763$ te $S_{XY} = -59.039$.

Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite kolika propusnost bi bila izmjerena kad je tlačna čvrstoća $x = 4.3$.

Rješenje: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{-59.09}{25.351} = -2.331$, $\hat{\beta}_0 = 40.8571 - (-2.331) \cdot 3.0714 = 48.016$

$$\Rightarrow y = -2.331x + 48.016.$$

(Propusnost opada s rastom tlačne čvrstoće.)

$y(4.3) = 37.993$. □