1. Uvod

Cilj ove vježbe je uspostava numeričkog modela dinamike ekosustava prezentiranog sa dva člana. Prvi član predstavlja plijen-fitoplankton (prva procesna varijabla „A“) a drugi član predstavlja predator-zooplankton (druga procesna varijabla „Z“). Postavljene su dvije međusobno vezane (ovisne) obične diferencijalne jednadžbe temeljem kojih se prati dinamika rasta i odumiranja kroz nekoliko karakterističnih vremenskih ciklusa. Za rješavanje sustava sačinjenog od dvije diferencijalne jednadžbe korištena je u tehničkoj praksi vrlo često primjenjivana metoda Runge-Kutta 4. reda.

2. Procesne jadnadžbe

Početno stanje sustava je definirano s 10 jedinki fitoplanktona koji imaju konstantu produkcije (rasta) 2,5 te ratu razgradnje 1,5. Razgradnjom je obuhvaćeno prirodno odumiranje fitoplanktona i smanjenje broja jedinki uslijed aktivnosti predatora kojeg predstavlja zooplankton. Početni broj jedinki zooplanktona je usvojen s 1. Budući da zooplankton nije primarni producent (ne može stvoriti živu tvar iz anorganske tvari kroz proces fotosinteze) njegov rast ovisan je o raspoloživom plijenu odnosno koncentraciji fitoplanktona. Brzina rasta populacije zooplanktona definirana je koeficijentom konzumacije fitoplanktona 0,03. Brzina razgradnje zooplanktona definirana je koeficijentom -1, a kojim je obuhvaćen i proces prirodnog odumiranja zooplanktona i njegova podložnost da postane plijen viših predatora. Time je definiran sustav od dvije procesne varijable sa međuodnosima koji se u matematičkoj formulaciji mogu izraziti s dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{dA}{dt} = 2,5 \cdot A - 1,5 \cdot Z \cdot A \tag{2.1}$$

$$\frac{dZ}{dt} = -1 \cdot Z + 0,03 \cdot A \cdot Z \tag{2.2}$$

Početni uvjeti izraženi su jednakostima $A(0)=10$ i $Z(0)=1$.

3. Metoda Runge-Kutta 4. Reda

Diferencijalne jednadžbe dijelimo na obične diferencijalne jednadžbe (ODJ) i parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) ovisno o tome da li se radi o funkciji jedne ili više varijabli. U ovom slučaju se bavimo samo rješavanjem običnih diferencijalnih jednadžbi.

Rješenje diferencijalne jednadžbe je funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu uz određene početne i/ili rubne uvjete. Pri analitičkom rješavanju diferencijalnih jednadžbi obično se pronalaze općenita rješenja koja sadrže proizvoljne konstante koje se zatim izračunavaju na osnovu početnih uvjeta. Za rješenje diferencijalne jednadžbe *n*-tog reda mora biti poznato *n* nezavisnih uvjeta. Analitičke metode su ograničene samo na linearne jednadžbe prvog reda, te linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima ako je red jednadžbe veći od jedan.

Numeričke metode nemaju takvih ograničenja. Rješenja diferencijalnih jednadžbi numeričkim metodama se dobivaju u obliku tablice vrijednosti funkcije za različite vrijednosti jedne ili više nezavisnih varijabli, ali ne kao funkcijska ovisnost. Ako se promjene početni uvjeti potrebno je nanovo računati vrijednosti u toj tablici.

Obična diferencijalna jednadžba prvog reda većinom je zadana o obliku:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x,y\right) \qquad\qquad y\left(x_0\right) = y_0 \tag{3.1}$$

Diferencijalnu jednadžbu definiranu s:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x,y\right) \qquad\qquad y\left(x_0\right) = y_0$$

na intervalu $\left[x_0\, , x_n\right]$možemo rješavati tako da podijelimo interval [x_0 , x_n] na *n* jednakih podintervala, označivši:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}, \qquad x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

Sada y_{i+1}, aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1}, računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y\left(x+h\right) \approx y\left(x\right) + h\Phi\left(x\, , y\left(x\right), h\, , f\right)$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} \approx y_i + h\Phi\left(x_i\, , y_i\, , h\, , f\right) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \tag{3.2}$$

Funkciju Φ nazivamo funkcija prirasta, a različit izbor te funkcije definira različite metode. Uočimo da je funkcija f iz diferencijalne jednadžbe parametar od Φ (tj. Φ zavisi o f).

Metode oblika (3.2) zovemo jednokoračne metode (jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj točki x_i, tj. u jednom koraku dobijemo y_{i+1} iz y_i). Da bismo pojednostavili zapis, ubuduće ćemo f izostaviti kao argument funkcije Φ. O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode. Najpoznatije jednokoračne metode su Runge – Kutta metode. Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x,y,h)=\sum_{j=1}^{r}\omega_j k_j(x,y,h) \tag{3.3}$$

a k_j su zadani s:

$$k_j(x,y,h)=f\left(x+c_j h,\, y+h\sum_{l=1}^{r}a_{jl}k_l(x,y,h)\right), \qquad j=1,2,\dots,r \tag{3.4}$$

Broj r zovemo redom Runge - Kutta (RK) metode i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku. Različit izbor koeficijenata ω_j, c_j i a_{jl} definira različite RK metode. Ovi koeficijenti se najčešće biraju tako da red metode bude što je moguće veći. Ako je $j>l$, tada metoda postaje eksplicitna, odnosno k_j možemo računati preko $k_{i\ldots}$ yk_{j-1}.

Primjer odabira koeficijenata prikazuje se na RK metodi drugog reda:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,h)&=\omega_1 k_1(x,y,h)+\omega_2 k_2(x,y,h)\\
k_1(x,y,h)&=f(x,y)\\
k_2(x,y,h)&=f(x+ah,\,y+ahk_1)
\end{aligned}$$

Razvojem k_2 u Taylorov red te sređivanjem zapisa dobije se:

$$k_2(x,y,h)=f+h\left(f_x a+f_y af\right)+\frac{h^2}{2}\left(f_{xx}a^2+2f_{xy}a^2 f+f_{yy}a^2 f^2\right)+R_3$$

gdje su: f_x i f_y prve parcijalne derivacije funkcije $f=f(x,y)$ po x, odnosno y, a f_{xx}, f_{xy} i f_{yy} odgovarajuće druge parcijalne derivacije. Razvoj rješenja diferencijalne jednadžbe $y(x)$ ima oblik:

$$y(x+h)=y(x)+hf+\frac{h^2}{2}\left(f_x+f_y f\right)+\frac{h^3}{6}\left[f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_y\left(f_x+f_y f\right)\right]+R_4$$

Ovdje je iskorišteno da je $y(x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'(x)=f(x,y)=f$$

te su korištena pravila za deriviranje:

$$y''(x) = f'(x,y) = f' = f_x + f_y f$$
$$y'''(x) = f''(x,y) = f'' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y\left(f_x + f_y f\right)$$

Sada je pogreška odsijecanja diskretizacije jednaka:

$$\begin{aligned}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi\left(x, y(x), h\right) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \left(\omega_1 k_1(x,y,h) + \omega_2 k_2(x,y,h)\right)\\
= \left(1-\omega_1-\omega_2\right) f + h\left(f_x + f_y f\right)\left(\frac{1}{2} - \omega_2 a\right) +\\
+ h^2\left[\left(f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2\right)\times\left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2 a^2}{2}\right) + \frac{1}{6} f_y\left(f_x + f_y f\right)\right] + R_3\end{aligned}$$

Da bi metoda bila 1. reda koeficijente treba odabrati tako da se poništi prvi član u gornjem razvoju, odnosno da vrijedi:

$$1-\omega_1-\omega_2 = 0$$

Ukoliko je zadovoljeno i

$$\frac{1}{2} - \omega_2 a = 0$$

metoda će biti 2. reda. Uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1-t, \quad a = \frac{1}{2t}$$

Može se uočiti da se t ne može odabrati tako da se poništi i član uz h^2 tako da metoda bude 3. reda. Ukoliko je $\omega_2 = 0$, radi se o metodi 1. reda, i to upravo o Eulerovoj metodi. Za $t = 1/2$ dobiva se poboljšana Eulerova, odnosno Heunova metoda:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$
$$k_1 = f(x,y)$$
$$k_2 = f\left(x+h, y+hk_1\right)$$

Najraširenije su metode četvrtog reda. Odgovarajuće jednadžbe koje moraju zadovoljavati koeficijenti RK4 metoda su:

$$\begin{aligned}
&\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=1\\
&\omega_2c_2+\omega_3c_3+\omega_4c_4=\frac{1}{2}\\
&\omega_2c_2^2+\omega_3c_3^2+\omega_4c_4^2=\frac{1}{3}\\
&\omega_3c_2a_{32}+\omega_4\left(c_2a_{42}+c_3a_{43}\right)=\frac{1}{6}\\
&\omega_2c_2^3+\omega_3c_3^3+\omega_4c_4^3=\frac{1}{4}\\
&\omega_3c_2^2a_{32}+\omega_4\left(c_2^2a_{42}+c_3^2a_{43}\right)=\frac{1}{12}\\
&\omega_3c_2c_3a_{32}+\omega_4\left(c_2a_{42}+c_3a_{43}\right)c_4=\frac{1}{8}\\
&\omega_4c_2a_{32}a_{43}=\frac{1}{24}
\end{aligned} \qquad (3.5\text{-}3.12)$$

gdje je:

$$c_1=0 \quad c_2=a_{21} \quad c_3=a_{31}+a_{32} \quad c_4=a_{41}+a_{42}+a_{43}$$

Uvjet 3.5 treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 1, uvjet 3.6 za red 2, uvjeti 3.7 i 3.8 za red 3, dok za red 4 trebaju biti ispunjeni uvjeti 3.9-3.12. Ukupno ima 10 koeficijenata i 8 jednadžbi ukoliko je metoda reda 4. Za metodu reda 3 uvrštavanjem članova

$$c_4=a_{41}=a_{42}=a_{43}=\omega_4=0$$

dobiva se 9 koeficijenata i 7 jednadžbi. Metoda reda 4 može postići najviše red točnosti 4, tj. ne mogu se dva stupnja slobode iz sustava jednadžbi iskoristiti da se red točnosti metode podigne na 5.

Općenito, za metode reda jedan, dva, tri i četiri, najveći mogući red točnosti odgovara redu metode. Za metode reda 5, 6 i 7 red točnosti metode je 4, 5 i 6, dok je za metode reda 8 i više najveći mogući red točnosti za barem dva manji od reda metode. To je razlog što su metode reda 4 najpopularnije. Red točnosti je 4, a da bi se povećao na 5, mora se povećati red metode za barem 2 što povećava složenost metode.

Najpopularnija RK– 4 metoda je "klasična" Runge-Kutta metoda:

$$\Phi = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f\left(x, y\right) \quad ; \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \quad ; \quad k_4 = f\left(x + h, y + h k_3\right)$$

Pomoću jednadžbi 3.3 i 3.4 definiraju se koeficijenti: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, c_1, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{43}.

U " klasičnoj" Runge-Kutta metodi navedeni koeficijenti imaju vrijednosti:

$$\omega_1 = \frac{1}{6}, \ \omega_2 = \frac{2}{6}, \ \omega_3 = \frac{2}{6}, \ \omega_4 = \frac{1}{6}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = \frac{1}{2}, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1$$

gdje je prethodno definirano:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = a_{21} = \frac{1}{2} \quad c_3 = a_{31} + a_{32} = \frac{1}{2} \quad c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} = 1$$

Uvrštavanjem vrijednosti koeficijenata u jednadžbe 3.5-3.12 zadovoljeni su navedeni uvjeti.

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 \left(c_2 a_{42} + c_3 a_{43}\right) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

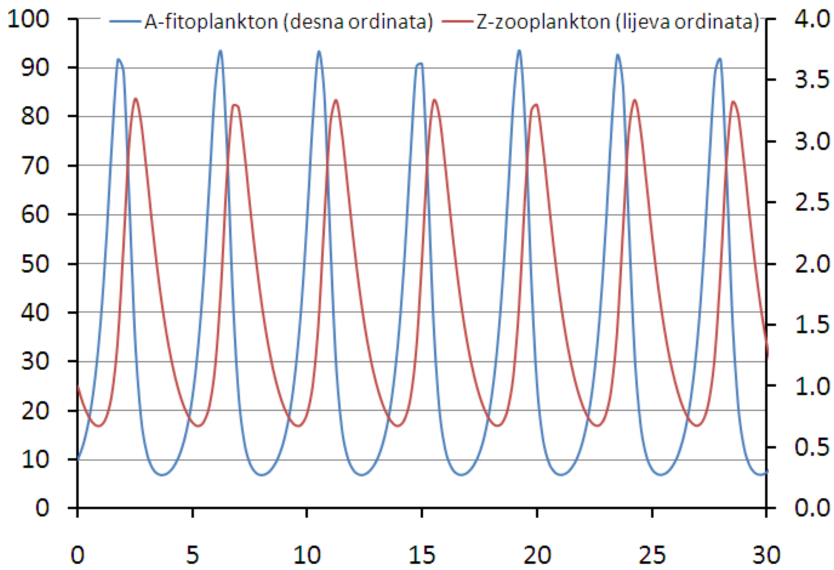
$$\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 \left(c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}\right) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1\right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 \left(c_2 a_{42} + c_3 a_{43}\right) c_4 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1\right) \times 1 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

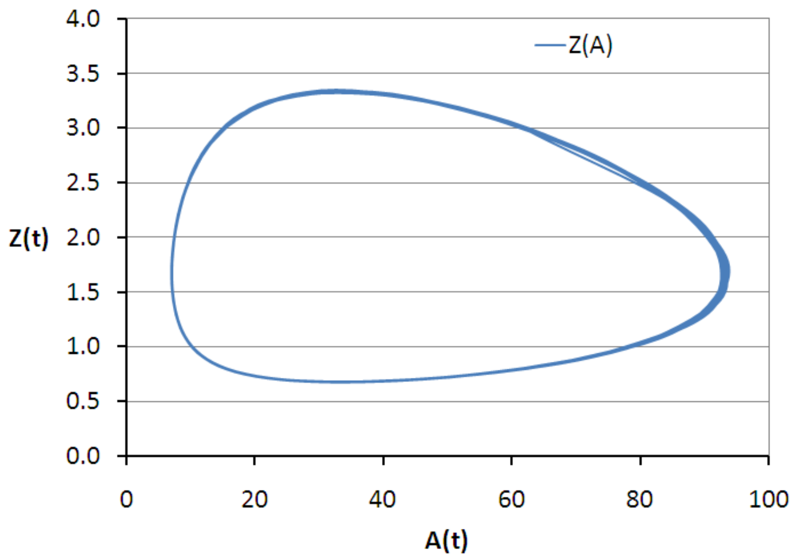
$$\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{24} \qquad (3.5\text{-}3.12)$$

4. Rezultati provedenih analiza

Rezultati rješavanja sustava jednadžbi 2.1 i 2.2 sa postavljenim početnim uvjetima prikazani su na slikama 4.1. (vremenske serije za obje procesne varijable „A“ i „Z“) i 4.2 (dijagram međuovisnosti).



Slika 4.1 Dinamike populacije fitoplanktona i zooplanktona temeljem rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi s metodom Runge-Kutta 4. Reda (prikazano je 7 cirklusa)



Slika 4.1 Dijagram međuovisnosti procesnih varijabli A (fitoplankton) i Z (zooplankton)