MATEMATIKA II

ZADACI ZA VJEŽBU - VEKTORSKA ANALIZA

1. Zadano je skalarno polje $u(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ i točka $A(2,1,1)$.

   a) Izračunajte $(grad\ u)_A$

   b) Nađite skup točaka u prostoru u kojima je $grad\ u$ okomit na os z.

   Rješenje:

   a) $9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

   b) $z^2 = xy$

2. Izračunajte $div\,\vec{a}(x,y,z)$ u točki $A(1,1,1)$ ako je $\vec{a}(x,y,z) = 2x^2y\vec{i} + e^x y\vec{j} - \vec{k}$.
   Rješenje: $4 + e$

3. Nađite $div(grad(x^2 + y^2 + z^2))$.
   Rješenje: 6

4. Zadano je skalarno polje $\varphi(x,y,z) = 3x^2 - 4yz$, vektor $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ i točka $T(3,-2,1)$. Nađite usmjerenu derivaciju skalarnog polja $\varphi(x,y,z)$ u smjeru vektora $\vec{s}$ u točki T.
   Rješenje: $4\sqrt{14}$

5. Odredite kut između rotora vektorskog polja
   $\vec{a}(x,y,z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$
   u točkama $A(-1,2,3)$ i $B(19,-4,9)$.
   Rješenje: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

6. Dano je vektorsko polje $\vec{A}(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$.
   Pokažite da je polje potencijalno i nađite njegov potencijal $\varphi(x,y,z)$.
   Rješenje: $\varphi(x,y,z) = -xy - xz - yz + c$

7. Odredite konstante a, b, c tako da polje
   $\vec{A}(x,y,z) = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$
   bude potencijalno, te odredite njegov potencijal.
   Rješenje: $\varphi(x,y,z) = -\dfrac{x^2}{2} - 2xy - 4zx + 3\dfrac{y^2}{2} + zy - z^2 + c$

8. Odredite funkcije $f(x)$ tako da polje
$\vec{A}(x,y,z) = f(x)\vec{i} + \frac{2xy}{1+x^2} f(x)\vec{j} - \frac{3z}{1+x^2}\vec{k}$
bude solenoidalno.
Rješenje: $f(x) = \dfrac{3x+c}{1+x^2}$

KRIVULJNI INTEGRALI

1. Nađite duljinu luka prvog svoda cikloide
   $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ za $t \in [0, 2\pi]$
   Rješenje: 16

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = t, y = t^2, z = \frac{2t^3}{3},\ t \in [0, 2]$
   Rješenje: $\dfrac{22}{3}$

3. Izračunajte $\displaystyle\int_C yds$ gdje je C luk parabole
   $y^2 = 2x$ od točke $0(0, 0)$ do točke $A(4, \sqrt{8})$
   Rješenje: $\dfrac{26}{3}$

4. Izračunajte integral $\displaystyle\int_C xyds$ gdje je C izlomljena crta $y = |x|$
   od točke $A(-1, 1)$ do točke $B(1, 1)$.
   Rješenje: 0

5. Izračunajte $\displaystyle\int_C (x + y)ds$ gdje je C kontura trokuta $0(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$.
   Rješenje: $1 + \sqrt{2}$

6. Izračunajte $\displaystyle\int_\Gamma e^{x+y-z}ds$ gdje je Γ dio pravca $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$
   od točke $A(0, 1, 0)$ do $B(2, 3, 3)$.
   Rješenje: $\sqrt{17}(e^2 - e)$

7. Izračunajte $\displaystyle\int_\Gamma xds$ gdje je Γ dio parabole $z = 4 - x^2$
   od točke $A(0, 0, 4)$ do $B(2, 0, 0)$.
   Rješenje: $\dfrac{5\sqrt{5} - 1}{2}$

8. Izračunajte $\displaystyle\int_\Gamma xyds$ gdje je Γ dio presječne krivulje cilindra $x^2 + y^2 = 1$
   i ravnine $z = y$ od točke $A(1, 0, 0)$ do $B(0, 1, 1)$.
   Rješenje: $\dfrac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

9. Izračunajte $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}d\vec{r}$ ako je $\vec{a} = y\vec{i} - (y + x^2)\vec{j}$,
   a $\vec{\Gamma}$ je luk parabole $y = 2x - x^2$ orijentiran od točke $A(0, 0)$ do $B(2, 0)$.
   Rješenje: 4

10. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} -y^3 dx + x^3 dy$ gdje je $\vec{\Gamma}$ polukružnica
$y = \sqrt{4 - x^2}$ orjentirana od točke $A(2, 0)$ prema $B(-2, 0)$.
Rješenje: 12π

11. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$ gdje je $\vec{\Gamma}$
dio pravca orjentiran od točke $A(3, 2, 1)$ do točke $B(0, 0, 0)$.
Rješenje: $-\dfrac{87}{4}$

12. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} d\vec{r}$ gdje je $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$,
a $\vec{\Gamma}$ je presječna krivulja ploha $z = x^2 + y^2$ i $z = 4$ pozitivno orjentirana
gledano iz točke $T(0, 0, 10)$.
Rješenje: 0

13. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$
po cilindričnoj spirali $x = 2\cos\ t, y = 2\sin\ t, z = \frac{3}{2\pi}t$
od točke $A(2, 0, 0)$ do točke $B(2, 0, 3)$.
Rješenje: 9

14. Pomoću Greenove formule izračunajte $\oint_{\vec{\Gamma}} -y^3 dx + x^3 dy$ gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orjentirana krivulja $x^2 + y^2 = 1$.
Rješenje: $\dfrac{3\pi}{2}$

15. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} y^2 dx + x dy$ gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orjentiran
rub kvadrata $[0, 2] \times [0, 2]$.
Rješenje: -4

16. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} x^2 y dx + x^3 dy$ gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orjentirana krivulja
koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.
Rješenje: $\dfrac{3}{35}$

17. Pomoću Greenove formule izračunajte $\oint_{\vec{\Gamma}} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$ gdje je
$\vec{\Gamma}$ pozitivno orjentirani trokut s vrhovima $A(1, 1), B(2, 2), C(1, 3)$.
Rješenje: $-\dfrac{4}{3}$

18. Pomoću Greenove formule izračunajte $\oint_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin\ y - 2y)dx + (e^x \cos\ y - 2)dy$ gdje je
$\vec{\Gamma}$ pozitivno orjentirana krivulja sastavljena iz gornje polukružnice $x^2 + y^2 = ax$,
$(y \geq 0)$ i dijela pravca $y = 0$ od točke $A(0, 0)$ do točke $B(a, 0)$.
Rješenje: $\dfrac{a^2\pi}{4}$

PLOŠNI INTEGRALI

I VRSTE

1. Izračunajte $\int\int_{\Sigma} z dS$, ako je Σ dio ravnine $x + y + z = 1$ u I oktantu.

   Rješenje: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

2. Izračunajte $\int\int_{\Sigma} x dS$, ako je Σ dio paraboličnog cilindra $z = 1 - x^2$ u I oktantu $(0 \le y \le 1)$.

   Rješenje: $\frac{5\sqrt{5} - 1}{12}$

3. Izračunajte $\int\int_{\Sigma} xy dS$, ako je Σ dio paraboloida $z = x^2 + y^2$ omeđen ravninom $z = 1$.

   Rješenje: 0

4. Izračunajte $\int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, ako je Σ dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u I oktantu.

   Rješenje: $\frac{\pi}{3}$

5. Izračunajte $\int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, ako je Σ dio plašta stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ omeđen ravninom $z = 1$.

   Rješenje: $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

6. Izračunajte površinu dijela stožaste plohe $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ između ravnina $z = 0$ i $z = 1$.

   Rješenje: $5\sqrt{2}\pi$

II VRSTE

7. Izračunajte $\int\int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ gdje je $\vec{a} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ je krug u ravnini $z = 4$ koji iz ravnine isijeca stožac $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ orjentiran tako da $\vec{n}$ čini s $\vec{k}$ šiljasti kut.

   Rješenje: 0

8. Izračunajte $\int\int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ gdje je $\vec{a} = z\vec{i} + 2x\vec{j} + 4y\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ je dio ravnine $x + y + z = 1$ u I oktantu orjentiran tako da $\vec{n}$ čini šiljasti kut s $\vec{k}$.

   Rješenje: 2

9. Izračunajte $\int\int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ ako je $\vec{a} = z\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ je dio paraboloida $z = x^2 + y^2$ u I oktantu omeđen ravninom $z = 1$ orjentiran tako da $\vec{n}$ čini tupi kut s $\vec{k}$.

   Rješenje: $-\frac{2\pi}{3}$

10. Izračunajte $\int\int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ gdje je $\vec{a} = xz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ je sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, orjentirana u smjeru vanjske normale.

    Rješenje: 0

11. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = xy\vec{j} + yz\vec{k}$ kroz zatvorenu prema van orjentiranu plohu kocke $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

    Rješenje: 1

12. Izračunajte $\int\int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$ ako je $\vec{a} = z^2\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ je zatvorena, prema van orjentirana ploha, koju čine cilindar $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ i dijelovi ravnina $z = 0$ i $z = 1$ koje iz njih izrezuje cilindar.

    Rješenje: π