

# METODA KONAČNIH ELEMENATA

Mladen Meštrović

Zagreb, 2020.

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Motivacija . . . . .	1
1.2. Razvoj metode konačnih elemenata . . . . .	1
1.3. Proračun konstrukcije pomoću MKE . . . . .	2
1.4. Izbor konačnog elementa . . . . .	3
1.5. Greška rješenja metodom konačnih elemenata . . . . .	4
<b>2. Matematički model konstrukcije</b>	<b>6</b>
2.1. Materijalni kontinuum . . . . .	6
2.2. Geometrijske (kinematičke) ovisnosti . . . . .	6
2.3. Uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti) . . . . .	7
2.4. Uvjeti ravnoteže . . . . .	8
2.5. Zakoni ponašanja (konstitucije) . . . . .	9
2.6. Rubni uvjeti . . . . .	9
<b>3. Jednadžbe teorije elastičnosti</b>	<b>11</b>
3.1. Uzdužno opterećena greda . . . . .	11
3.2. Poprečno opterećena greda, savijanje . . . . .	12
3.3. Savijanje grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja . . . . .	14
3.4. Zidni nosač . . . . .	14
3.5. Jednadžba ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja ploča (teorija savijanja tankih ploča) . . . . .	16
3.6. Jednadžba ploče prema Mindlin-Reissnerovoj teoriji savijanja ploča . . . . .	20
3.7. Teorija elastičnosti II. reda . . . . .	20
<b>4. Konačni element za uzdužno opterećenu gredu</b>	<b>23</b>
4.1. Osnovne jednadžbe uzdužno opterećene grede . . . . .	23
4.2. Linearni konačni element za uzdužno opterećenu gredu . . . . .	24
4.3. Kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede . . . . .	27
4.4. Proračun uzdužne sile u uzdužno opterećenoj gredi . . . . .	29
4.5. Transformacija elementarne matrice krutosti u globalni koordinatni sustav . . . . .	30
4.6. Matrica krutosti konačnog elementa uzdužno opterećene grede u globalnom koordinatnom sustavu . . . . .	31
4.7. Proračun uzdužnih sila u konačnom elementu uzdužno opterećene grede u globalnom koordinatnom sustavu . . . . .	31
4.8. Primjeri . . . . .	32
4.9. Zadaci . . . . .	45
<b>5. Gredni konačni element</b>	<b>47</b>
5.1. Osnovne jednadžbe savijanja grede . . . . .	47
5.2. Kubični gredni konačni element . . . . .	48
5.3. Proračun unutarnjih sila po duljini $i$ u čvorovima grednog konačnog elementa . . . . .	54
5.4. Primjeri . . . . .	55
5.5. Zadaci . . . . .	67
<b>6. Konačni element za okvirne konstrukcije</b>	<b>69</b>
6.1. Elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije . . . . .	69
6.2. Elementarni vektor opterećenja konačnog elementa za okvirne konstrukcije . . . . .	70
6.3. Proračun sila u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije . . . . .	70
6.4. Transformacija elementarne matrice krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije u globalni koordinatni sustav . . . . .	71
6.5. Statička kondenzacija matrice krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije . . . . .	72
6.6. Modeliranje zglobnih veza . . . . .	74
6.7. Kinematička kondenzacija matrice krutosti za okvirne konstrukcije . . . . .	76
6.8. Primjeri . . . . .	77
6.9. Zadaci . . . . .	86

<b>7. Gredni konačni elementi prema Timošenkovoj teoriji savijanja</b>	<b>88</b>
7.1. Osnovne jednačbe savijanja grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja . . . . .	88
7.2. Primjena principa virtualnog rada . . . . .	88
7.3. Osnovni gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja . . . . .	89
7.4. Gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja s reduciranom integracijom	91
7.5. Egzaktni gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja . . . . .	92
7.6. Primjeri . . . . .	96
7.7. Zadaci . . . . .	103
<b>8. Ravninski zidni konačni element</b>	<b>105</b>
8.1. Osnovne jednačbe zidnog nosača . . . . .	105
8.2. Diskretizacija na zidnom ravninskom konačnom elementu . . . . .	106
8.3. Linearni trokutni ravninski konačni element . . . . .	108
8.4. Linearni pravokutni ravninski konačni element . . . . .	113
8.5. Ravninski zidni konačni elementi višeg reda . . . . .	118
8.6. Serendipity pravokutni zidni konačni elementi . . . . .	122
8.7. Primjeri . . . . .	125
8.8. Zadaci . . . . .	133
<b>9. Konačni elementi za ploče (Kirchhoffova teorija savijanja)</b>	<b>134</b>
9.1. Osnovne jednačbe savijanja ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja . . . . .	134
9.2. Diskretizacija polja na konačnom elementu . . . . .	136
9.3. Pravokutni konačni elementi za ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja . . . . .	138
9.4. Osnovni nekomforni trokutni konačni element . . . . .	147
9.5. Primjeri . . . . .	149
<b>10. Gredni konačni element prema Teoriji elastičnosti II. reda</b>	<b>155</b>
10.1. Osnovne jednačbe savijanja grede prema Teoriji elastičnosti II. reda . . . . .	155
10.2. Matrica krutosti tlačnog grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda . .	155
10.3. Matrica krutosti grede proizvoljne krutosti i duljine . . . . .	160
10.4. Proračun kritične sile i duljine izvijanja . . . . .	161
10.5. Primjeri . . . . .	162
10.6. Zadaci . . . . .	184
<b>A Koordinatni sustavi</b>	<b>187</b>
A1. Osnovni koordinatni sustavi na pravcu, u ravnini i prostoru . . . . .	187
A2. Koordinatni sustavi na pravcu . . . . .	187
A3. Koordinatni sustavi dvodimenzionalnih rubnih zadaća . . . . .	187
A4. Volumenski koordinatni sustav za tetraedarske konačne elemente . . . . .	191
<b>B Osnovni pojmovi matrične algebre</b>	<b>193</b>
B1. Notacija . . . . .	193
B2. Vektori . . . . .	193
B3. Matrice . . . . .	198
<b>C Rješavanje sustava jednačbi</b>	<b>202</b>
C1. Egzistencija rješenja . . . . .	202
C2. Postupci eliminacija . . . . .	202
C3. Iterativni postupci . . . . .	205
C4. Numerički primjer . . . . .	207
<b>D Numerička integracija</b>	<b>213</b>
D1. Numerička integracija funkcija jedne varijable . . . . .	213
D2. Numerička integracija funkcija dviju varijabli . . . . .	214
D3. Numerički primjeri . . . . .	220

# 1. Uvod

## 1.1. Motivacija

Mnoge se fizikalne pojave u prirodi mogu izraziti pripadnim matematičkim jednadžbama i rubnim uvjetima. Pripadne su jednadžbe najčešće u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (PDJ), običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) ili integralnih jednadžbi (IJ). Matematički, metoda konačnih elemenata numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih diferencijalnih jednadžbi.

Inženjerski, metoda konačnih elemenata (MKE) numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih jednadžbi dobivenih aproksimacijom nepoznatih varijabli kontinuiranog područja skupom nepoznatih varijabli u konačnom broju diskretnih točaka (čvorova) tog polja. U proračunu konstrukcija, povezane jednadžbe su jednadžbe ravnoteže, a skup varijabli su pomaci čvorova. Postupak rješavanja MKE svodi se na kompletnu transformaciju diferencijalnih jednadžbi (stacionarne zadaće) ili transformaciju PDJ u ekvivalentne ODJ pogodne za rješavanje metodom konačnih elemenata.

Mnoge inženjerske zadaće imaju vrlo složenu geometriju i rubne uvjete, što dovodi do nemogućnosti dobivanja analitičkih (zatvorenih) rješenja polaznih jednadžbi. Analitičko rješenje rubnih zadaća u zatvorenom obliku moguće je iskazati samo za pojedine posebne slučajeve s nizom pojednostavljenja u odnosu na izvornu zadaću. Zbog toga su osmišljene mnoge numeričke metode, (MKE, engl. FEM - finite element method), metoda konačnih traka (MKT, engl. FSM - finite strip method), metoda konačnih razlika (MKR, engl. FDM - finite difference method), metoda konačnih volumena (MKV, engl. FVM - finite volume method), metoda rubnih elemenata (MRE, engl. BEM - boundary element method), hibridna RE-KE metoda, za dobivanje uporabom računala približnog rješenja polazne zadaće koje je zadovoljavajuće točnosti. Numeričke metode daju rješenje u obliku skupa rješenja jednadžbi koje matematički opisuju fizikalnu pojavu u pojedinim točkama područja nad kojim je postavljena zadaća. Polazna jednadžba ne rješava se izravno nego se tijekom procedure rješavanja svodi na konačni sustav algebarskih jednadžbi. Rješenje sustava jednadžbi približno je rješenje polazne jednadžbe u konačnom broju točaka.

Između svih navedenih metoda, MKE je najrasprostranjenija, najprimijenjenija, ali i najprimjerenija metoda koja je i sastavni dio većine komercijalnih programskih paketa u području inženjerske analize. S obzirom da MKE može biti prilagođena zadacima velike složenosti i neuobičajene geometrije područja zadaće, posebno je značajno i korisno sredstvo u rješavanju kritičnih zadaća proračuna konstrukcija, provođenja topline ili mehanike fluida. Dostupnost računala omogućuje inženjerima svakodnevno rješavanje inženjerskih zadaća metodom konačnih elemenata. MKE aktualno je najdominantnija metoda za numerički proračun rubnih zadaća nastalih kao matematički model fizikalnih pojava. Razvoj računalnih procesora omogućio je rješavanje velikih sustava jednadžbi u kratkom proračunskom vremenu. Na taj način suvremeni proračun daje mogućnost optimalnog dimenzioniranja i projektiranja konstrukcija. Proračun konstrukcije zapravo je pokušaj proračuna teoretske konstrukcije što sličnije stvarnoj, izvedenoj konstrukciji. Metoda konačnih elemenata i suvremeni proračunski programski paketi značajno olakšavaju inženjerski posao, ali uz nužnu ispravnu procjenu realnosti odabranog numeričkog modela i kvalitete dobivenih rezultata proračuna.

## 1.2. Razvoj metode konačnih elemenata

Razvoj proračuna konstrukcija prvenstveno može biti promatran kroz prizmu razvoja proračuna greda i okvira. U početku proračuni su temeljeni na Metodi sila pri čemu su nepoznanice bile nepoznate sile u oslobođenim vezama konstrukcije. Takav pristup nije mogao mnogo pridonijeti razvoju proračuna zbog načina provedbe postupka. Za svaku novu konstrukciju potrebno je provesti niz proračunskih procedura koje su kod složenijih konstrukcije zahtijevale značajan opseg proračunskog posla.

Iskorak u proračunu konstrukcija dogodio se definiranjem metode pomaka ili metode deformacija. Nepoznanice u postupku proračuna nepoznati su pomaci (translatorni pomaci u smjeru koordinatnih osi i kutevi zaokreta) definiranih čvorova konstrukcije. Metoda pomaka zapravo je prethodnica metodi konačnih elemenata. To se posebno odražava kod proračuna greda i okvira pri čemu metoda pomaka i metoda konačnih elemenata vode do istih sustava jednadžbi. Matrična formulacija jednadžbi dodatno doprinosi razvoju numeričkih proračunskih metoda. Istovremeno dolazi do izuma prvih računala i pripadnih kodova za proračunske postupke. Prednost i primjenjivost metode pomaka pritom dolazi do punog izražaja. Takvo okruženje posebno je pogodno za razvoj numeričkih postupaka s naglaskom na metodu konačnih elemenata. Razvojem računalnih procesora veliki broj jednadžbi u sustavu više ne predstavlja nikakav računski problem. Potpunim preuzimanjem numeričkih proračunskih postupaka metoda konačnih

elemenata nametnula se kao najkvalitetniji aparat za proračun konstrukcija. Varijacijska formulacija, princip virtualnog rada pojavili su se kao podloga za postavljanje teorijskih temelja za metodu konačnih elemenata. Iz tih osnovnih teorijskih postavki proizlazi razvoj matematičke formulacije metode konačnih elemenata. Postavljeni su nužni teoremi kojima je dokazana egzistencija rješenja, a posebno jedinstvenost rješenja metodom konačnih elemenata i pripadne ocjene pogreške proračuna za rubne zadaće postavljene za razne fizikalne pojave (savijanje grede, savijanje ploče, proračun zidova, ...).

U numeričkom smislu metoda konačnih elemenata izravno je poboljšanje Ritzove metode. Ritzova metoda je zbog zahtjeva prema koordinatnim funkcijama bila relativno ograničena. Na glatkim rubnim zadaćama rješenja su bila prihvatljiva, ali već kod malo zahtjevnijih zadaća (koncentrirane sile, otvori, ...), za dobivanje kvalitetnih rješenja potrebno je uložiti značajan trud u dobar izbor koordinatnih funkcija. Problem je riješen metodom konačnih elemenata. Područje je podijeljeno na niz dijelova, elemenata i svaki element je promatran kao zasebna rubna zadaća koju rješavamo Ritzovom metodom. Rubni uvjeti su ujedno bile i nepoznanice na krajevima elemenata. Koordinatne funkcije su odabrane tako da su te nepoznanice na krajevima elemenata koeficijenti linearne kombinacije koordinatnih funkcija. Zbog uvjeta kompatibilnosti i uklapanjem svih elemenata u jednu cjelinu proizlazi sustav jednadžbi s nepoznatim pomacima u točkama između elemenata (čvorovima).

### 1.3. Proračun konstrukcije pomoću MKE

Osnovni korak proračuna metodom konačnih elemenata diskretizacija je područja. Konstrukcija je diskretizirana podjelom na mrežu konačnih elemenata. U odnosu na stvarno ponašanje konstrukcije imamo dvije pogreške, pogrešku modela i pogrešku diskretizacije. Pogrešku modela možemo smanjiti boljim modelom konstrukcije koji bude kvalitetnije opisivao stvarno ponašanje konstrukcije. Pogrešku diskretizacije možemo smanjiti kvalitetnijom, finijom mrežom konačnih elemenata ili povećanjem stupnjeva slobode (polinomi višeg stupnja) konačnih elemenata za opis polja pomaka.

Jednodimenzionalna mreža  $K^h$  otvorenog skupa  $\Omega$ , familija je dužina ( $K_i$ ), takvih da je  $\forall K_i, K_j \in K^h$  zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \bar{\Omega}. \quad (1.3.2)$$

To znači da u jednodimenzionalnom slučaju (npr. greda) mreža konačnih elemenata mora pokriti cijelu gredu, a da dva elementa mogu imati zajednički čvor, ili nemaju nikakvih zajedničkih točaka, ili je to jedan te isti element. Lagrangeov konačni element je trojka  $(K, \Sigma_K, P)$ , gdje je  $K$  dužina,  $\Sigma_K$  skup čvorova na  $K$  i  $P$  prostor polinoma definiranih na  $K$ .

Dvodimenzionalna mreža  $K^h$  otvorenog skupa  $\Omega$ , familija je trokuta ili četverokuta ( $K_i$ ), takvih da je  $\forall K_i, K_j \in K^h$  zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednička stranica} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \bar{\Omega}. \quad (1.3.4)$$

Za dvodimenzionalne elemente to znači da dva elementa imaju ili zajednički čvor, ili zajedničku stranicu, ili nemaju nijednu zajedničku točku ili je to jedan te isti element. Kod mreže dvodimenzionalnih konačnih elemenata sa složenim oblikom ruba (npr zakrivljeni rub), mrežom konačnih elemenata potpuno je pokriveno područje aproksimirano poligonalnim rubom između čvorova definiranih na rubu područja. Lagrangeov konačni element je trojka  $(K, \Sigma_K, P)$ , gdje je  $K$  trokut ili četverokut,  $\Sigma_K$  skup čvorova na  $K$  i  $P$  prostor polinoma definiranih na  $K$ .

Trodimenzionalna mreža  $K^h$  otvorenog skupa  $\Omega$ , familija je tetraedara ili heksaedara ( $K_i$ ), takvih da je  $\forall K_i, K_j \in K^h$  zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednička stranica} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički brid} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \bar{\Omega}. \tag{1.3.6}$$

Za trodimenzionalne elemente to znači da dva elementa imaju ili zajednički čvor, ili zajednički brid, ili zajedničku stranicu, ili nemaju nijednu zajedničku točku ili je to jedan te isti element. Lagrangeov konačni element je trojka  $(K, \Sigma_K, P)$ , gdje je  $K$  tetraedar ili heksaedar,  $\Sigma_K$  skup čvorova na  $K$  i  $P$  prostor polinoma definiranih na  $K$ .

Uporabom računala dolazi i do moguće numeričke pogreške. Numerička pogreška je uobičajeno mala, ovisi o mogućnosti spremanja numeričkih veličina u memoriju (spremanje određenog broja značajnih znamenki). U posebnim slučajevima, npr. velike razlike u krutostima pojedinih dijelova konstrukcije, numerička pogreška može imati i veći utjecaj. Numerička i diskretizacijska pogreška su zapravo računalna pogreška.

## 1.4. Izbor konačnog elementa

### 1.4.1. Klasa nepoznatog polja pomaka, uvjet integrabilnosti

Rješenje metodom konačnih elemenata mora zadovoljiti određene uvjete za konvergenciju prema analitičkom rješenju pripadne rubne zadaće. Zbog fizikalne prirode rubnih zadaća, osnovni uvjet za izbor polja pomaka je neprekidnost duž konačnog elementa. Polinomijalna aproksimacija nepoznatog polja izravno ispunjava potreban uvjet neprekidnosti. Polinomijalna aproksimacija mora imati derivaciju reda koji se javlja u podintegralnoj funkciji za dobivanje elementarne matrice krutosti.

Podintegralna funkcija mora imati primitivnu funkciju. Za integrabilnost podintegralne funkcije potrebno je definirati vezu s redom derivacije u formulaciji rubne zadaće primjenom principa virtualnog rada. Ako se u principu virtualnog rada za pripadnu rubnu zadaću javlja  $m$ -ta derivacija polja pomaka, polje pomaka mora imati neprekidnu derivaciju reda  $(m - 1)$ , polje pomaka mora biti klase  $C^{m-1}$  na području na kojem je definirana rubna zadaća. Najjednostavniji primjeri su uzdužno i poprečno opterećena greda. Za uzdužno opterećenu gredu u principu virtualnog rada javlja se prva derivacija polja pomaka što znači da je nužno da je na elementu aproksimacija polja pomaka klase  $C^0$ , da je aproksimacija polja pomaka neprekidna na elementu što je izravna posljedica polinomijalne aproksimacije. Za poprečno opterećene grede u principu virtualnog rada javlja se druga derivacija što znači da je nužno da aproksimacija polja pomaka ima neprekidnu prvu derivaciju na zadanom području, odnosno da je klase  $C^1$ .

### 1.4.2. Uvjet krutog tijela i uvjet konstantne deformacije

Polje pomaka ne može dozvoliti deformaciju unutar elementa nastalu zbog pomaka čvorova kao pomaka krutog tijela. To je jednostavni fizikalni uvjet, zapravo znači da ako fizički premjestamo konstrukciju kao cjelinu nema naprezanja i deformacija unutar same konstrukcije. Ako promatramo najjednostavniji element s dva čvora koji imaju jednak pomak onda i svi pomaci unutar elementa imaju istu tu vrijednost pomaka. Matematički je taj uvjet zadovoljen ako je zbroj vrijednosti funkcija oblika,  $N_i$ , u svakoj točki unutar elementa ( $e$ ) jednak 1,  $\sum_i N_i(x) = 1, \forall x \in (e)$ .

Polje pomaka mora biti takvo da su pomaci čvorova kompatibilni s poljem konstantnih deformacija. Smanjivanjem dimenzije elementa deformacije bliske konstantnim postaju konstantne. Uvjet konstantne deformacije zapravo je poseban slučaj uvjeta krutog tijela kad je polje deformacija jednako nuli. Ispunjavanje ova dva uvjeta daje kvalitetnije i konvergentno rješenje.

### 1.4.3. Uvjet kompatibilnosti, uvjet potpunosti i geometrijska invarijantnost

Konačni elementi trebaju biti kompatibilni. To znači da polje pomaka klase  $C^m$  mora imati neprekidnu  $m$ -tu derivaciju na dodiru elemenata (u zajedničkom čvoru u 1D, na zajedničkoj stranici u 2D). Takve

elemente nazivamo konformni elementi. Ovaj uvjet načelno je zadovoljen kad je polje pomaka definirano polinomima s jediničnom vrijednosti u čvorovima konačnih elemenata. U posebnim slučajevima (neki elementi za ploče) to nije dovoljno za kompatibilnost. Elemente koji ne ispunjavaju uvjet kompatibilnosti nazivamo nekonformni elementi. Rješenja dobivena uporabom nekonformnih elemenata konvergiraju ako elementi zadovoljavaju patch-test. To znači da vrijednosti na rubu konvergiraju ispunjenju uvjeta ako progustimo mrežu konačnih elemenata.

Rješenje metodom konačnih elemenata zapravo je jednako konačnom dijelu Taylorovog reda analitičkog rješenja. Polinomijalna aproksimacija rješenja polinomom stupnja  $m$  može dati analitičko rješenje istog stupnja samo ako polinomijalna aproksimacija sadrži sve članove polinoma  $m$ -tog stupnja. U tom slučaju rješenje konvergira redom  $(m+1)$ . Nepotpuni polinomi uobičajena su pojava kod višedimenzionalnih zadataka zbog manje nepoznanica. Poželjno je polinomijalnu aproksimaciju provesti potpunim polinomima, a ako se provodi s nepotpunim polinomima treba pokušati da budu što je moguće potpuniji. Korištenje nepotpunih polinoma ne isključuje konvergenciju rješenja.

Za konačne elemente poželjno je, ali ne i nužno da budu geometrijski invarijantni. To znači da su svi stupnjevi slobode izraženi istim polinomima i ne ovise o promjeni koordinatnog sustava. Za geometrijsku invarijantnost dovoljno je uzimati kompletne interpolacijske polinome.

#### 1.4.4. Konačni elementi višeg reda ili više konačnih elemenata manjeg reda

Konačni element mora omogućiti dostizanje rješenja koje odgovara početnoj fizikalnoj zadaći. Izbor elementa višeg reda ili većeg broja elemenata manjeg reda standardna je dvojba na početku rješavanja zadatka. Rješenje elementima višeg reda imaju veći red konvergencije, ali i veći broj računskih operacija za dobivanje sustava jednadžbi. Elementi višeg reda s većim brojem nepoznanica u čvorovima zahtijevaju i strože uvjete za neprekinutost derivacije u čvorovima što na mjestu koncentriranih sila ili promjena krutosti ne mora uvijek biti u prirodi fizikalne zadatka koju rješavamo (npr. kvintički element za poprečno opterećenu gredu kao rješenje daje progib s neprekinutom drugom derivacijom u čvorovima što u točkama u kojima je zadana promjena krutosti grede na savijanje uopće nije fizikalno točno). Načelni parametar za odluku o izboru između elemenata može biti odnos točnosti i broja nepoznanica po čvoru. Problem je jer kod rješavanja rubnih zadataka ne znamo unaprijed rješenje, pa ne možemo uvijek eksplicitno izraziti točnost. Razvojem računala čime proračun većih sustava linearnih jednadžbi ne predstavlja problem, može se uvijek početna rješenja dobiti s većim brojem elemenata manjeg reda. U dvojbi između dva elementa različitog reda, načelno treba uzeti jednostavniji konačni element što je zapravo konačni element manjeg reda.

### 1.5. Greška rješenja metodom konačnih elemenata

#### 1.5.1. Greška diskretizacije

Greška diskretizacije izravna je posljedica uzimanja konačnog dijela Taylorovog reda. Greška je reda jednakog potenciji prvog izostavljenog člana Taylorovog reda. Za jednodimenzionalnu zadaću uz polinomijalnu aproksimaciju polinomom stupnja  $m$  ograda greške iznosi

$$err = CL^{(e)m+1}M_{(m+1),(e)}, \quad (1.5.1)$$

pri čemu je  $L^{(e)}$  duljina elementa  $(e)$ ,  $M_{(m+1),(e)}$  maksimalna vrijednost  $m+1$ -ve derivacije na elementu  $(e)$ , a  $C$  konstanta ovisna o tipu elementa. Iz izraza za grešku, (1.5.1) očito je da grešku možemo smanjiti profinjenjem mreže elemenata ili povećanjem stupnja polinoma aproksimacije.

#### 1.5.2. Greška aproksimacije geometrije

Takva greška se javlja uglavnom kod aproksimacije zakrivljenih rubova poligonalnim rubom. Mreža konačnih elemenata i definirani tipovi elemenata izravno definiraju aproksimaciju ruba područja koji je ujedno i rub elementa. U slučajevima kad se taj aproksimirani rub ne poklapa sa stvarnom geometrijom ruba područja zapravo dobivamo rješenje za približno područje. Očito da će uzimanjem više čvorova na rubu aproksimacija biti kvalitetnija. Takva greška se ne javlja kod linijskih konstrukcija i ravninskih konstrukcija s pravilnim (poligonalnim) rubovima zbog poklapanja ruba elemenata s rubom zadanog područja.



### 1.5.3. Greške povezane s definiranim zakonima ponašanja

Takve su greške posljedica pogrešno definiranih svojstava materijala. Proračunske jednadžbe definirane su za linearno elastično ponašanje materijala, a stvarno ponašanje materijala pod djelovanjem opterećenja u određenim područjima može odstupati od pretpostavljenih odnosa. Pretpostavljena homogenost i izotropnost materijala ne mora u potpunosti odgovarati stvarnom materijalu konstrukcije. Greške u definiranim svojstvima materijala mogu biti veće od svih ostalih spomenutih grešaka u proračunskoj proceduri.

### 1.5.4. Greške proračuna

Greške proračuna su greške u algoritmima definiranim u proračunskoj proceduri. Takve greške se javljaju kod numeričke integracije, rješavanja sustava jednadžbi.

Za egzaktnu numeričku integraciju potrebno je imati dovoljan broj točaka integracije sukladno stupnju podintegralne funkcije. Nedovoljan broj točaka integracije dovodi do greške već kod proračuna elementarnih matrica krutosti. U nekim slučajevima egzaktna integracija nije niti moguća ako su podintegralne funkcije racionalne funkcije. Povećanje broja točaka integracije dovodi do točnije vrijednosti integrala, ali može i značajno povećati broj proračunskih operacija čime opet neizravno (zaokruživanje, oduzimanje bliskih brojeva, ...) dobivamo dodatna odstupanja od egzaktnih vrijednosti. U nekim slučajevima uzimanje manjeg broja točaka integracije može čak dovesti i do kvalitetnijeg rješenja.

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi standardni je dio proračunske procedure kod rješavanja rubnih zadataka metodom konačnih elemenata. Neovisno o metodi rješavanja sustava jednadžbi greške se javljaju zbog loše uvjetovanosti (engl. ill-conditioning) matrice sustava, zaokruživanja vrijednosti ili odbacivanja dijela brojeva izvan proračunske memorije računala. Loša uvjetovanost matrice sustava znači da mala promjena matrice krutosti ili vektora opterećenja uzrokuje bitnu promjenu rješenja. Uzrok loše uvjetovanosti može biti povezanost elemenata velike i male krutosti. U tom slučaju postoje velike razlike u redu veličine članova matrice krutosti i matrica postaje bliska singularnoj matrici. Kod velikih razlika između članova proračunskih operacija, manja veličina, zbog zaokruživanja ili odbacivanja nakon nekih proračunskih operacija, može u potpunosti izgubiti utjecaj na rješenje. Zaokruživanje proračunatih vrijednosti najmanje je utjecajno na rješenje, razlika zbog zaokruživanja je zapravo samo u zadnjoj znamenki brojeva koje računalo memorira za daljnji proračun. Uzimanjem u obzir dvostruke preciznosti (double precision) takva odstupanja praktično su zanemariva. Veći utjecaj ima greška zbog odbacivanja znamenki nakon značajnog broja znamenki koje računalo memorira. To je posebno uočljivo kod operacija s brojevima bitno različitog reda veličine, pri čemu broj manjeg reda više ne utječe na međubroj (posebno kod zbrajanja ili oduzimanja) ili kod oduzimanja bliskih brojeva pri čemu su značajne znamenke rezultat iz područja odbacivanja ili zaokruživanja.

Uvjetovanost matrice možemo izračunati prema izrazu

$$\text{cond}\mathbf{K} = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}, \quad (1.5.2)$$

gdje su  $\lambda_{max}$  i  $\lambda_{min}$  najveća i najmanja svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{K}$ .



## 2. Matematički model konstrukcije

### 2.1. Materijalni kontinuum

Promatramo područje  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ . Rub područja  $\Omega$  označimo  $\partial\Omega = \Gamma$ . Položaj svake točke unutar područja  $\Omega$  jednoznačno je određen uređenom trojkom  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Između proizvoljne dvije točke područja  $\Omega$  uvijek postoji još barem jedna točka. Takvo područje zovemo **kontinuum**. Kontinuum sadrži beskonačno mnogo točaka. Proizvoljne dvije točke kontinuuma možemo uvijek spojiti proizvoljnom neprekidnom krivuljom.

Stvarno stanje konstrukcija zapravo je drugačije. Materija je sastavljena od vrlo bliskih atoma i molekula. U mikroskopskim uvjetima znači da model kontinuuma ne vrijedi. Između dvije čestice možemo naći prazninu. Kod nekih gradiva diskontinuiteti su i makroskopski očit, npr. pukotine u drvetu, pukotine u betonu, diskontinuitet stjenovitog temeljnog tla.

Idealizacija konstrukcija kontinuumom svejedno je dobra. Rješenja diferencijalnih jednadžbi temeljenih na kontinuumu pokazala su poklapanja s rezultatima pokusa uz relativno mala rasipanja oko prosječnih vrijednosti. To zapravo znači da materija na makroskopskoj razini teži uprosječenju svojih svojstava na mikroskopskoj razini. Znakovit primjer za takav stav su rezultati dobiveni ispitivanjem betonskih uzoraka, pri čemu je razdioba rezultata betonskih uzoraka pripremljenih u istim uvjetima načelno grupirana oko prosječne vrijednosti s vrlo malim odstupanjima. Na temelju takvih razmišljanja možemo pretpostaviti da će kontinuum dovoljno dobro aproksimirati mikroskopske konfiguracije konstruktivnih gradiva. Takvom idealizacijom značajno možemo smanjiti broj nepoznanica u standardnim zadaćama proračuna konstrukcije.

U praktičnom proračunu možemo uvesti i dodatna pojednostavljenja. Pretpostavljamo da kontinuum ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim svojim točkama - kontinuum je **homogen**. Kod nekih gradiva možemo pretpostaviti da ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim smjerovima - kontinuum je **izotropan**.

### 2.2. Geometrijske (kinematičke) ovisnosti

Konstrukcija se pod djelovanjem opterećenja deformira. Nastaje tenzorsko polje deformacija,  $\epsilon$ , matrica skalarnih funkcija,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ ili } \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Za posmične komponente deformacija vrijedi odnos  $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ . Točke deformabilnog tijela, točke unutar područja (konstrukcije) mijenjaju svoj položaj. Na taj način nastaje vektorsko polje pomaka,  $\mathbf{w}$ , vektor skalarnih funkcija,

$$\mathbf{w} = [w_x \quad w_y \quad w_z]^T. \quad (2.2.2)$$

Očito je da između deformacija i pomaka postoji međusobna ovisnost. Ovisnost deformacije i pomaka nazivamo **geometrijska ovisnost**. Komponente deformacija možemo izraziti kao funkcije pomaka,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i} \right) + \sum_{k \in \{x, y, z\}} \frac{\partial w_k}{\partial i} \frac{\partial w_k}{\partial j}, \quad i, j \in x, y, z. \quad (2.2.3)$$

Matrica tenzora deformacije je simetrična (simetričnost očito slijedi prema definiciji geometrijske ovisnosti pojedinih komponenata),  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ,  $i, j \in x, y, z$ , pa tenzor deformacije možemo prikazati preko 6 komponenti

$$\epsilon = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{zx}]^T, \quad (2.2.4)$$

ili

$$\epsilon = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T. \quad (2.2.5)$$

Kod realnih konstrukcija relativne su dužinske deformacije ( $\partial w_x / \partial x, \dots$ ) i kutovi zaokreta ( $\partial w_z / \partial x, \dots$ ) mali (u odnosu na dimenzije konstrukcije), što povlači da možemo zanemariti kvadratne članove te slijede poznate linearne komponente Cauchyjevog tenzora deformacija

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \quad i, j \in x, y, z. \quad (2.2.6)$$

Sustav jednažbi, (2.2.3), možemo zapisati i u matričnom obliku, uz uporabu  $\gamma_{ij}$  oznaka za posmičnu deformaciju

$$\epsilon = \mathbf{L}w, \quad (2.2.7)$$

gdje je  $\mathbf{L}$  diferencijalni operator

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.2.8)$$

### 2.3. Uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti)

Konstrukcija pod djelovanjem opterećenja postaje deformirana. Uvjet kompatibilnosti zahtijeva da je polje deformacija nastalih zbog djelovanja opterećenja neprekidno i jednoznačno određeno. To zapravo znači da kontinuum i nakon deformiranja ostaje kontinuum. Ako je polje deformacija neprekidno onda su i komponente polja deformacija integrabilne što povlači da je i polje pomaka neprekidno.

Neprekidnost i jednoznačnost nužni su uvjeti koje mora zadovoljiti polje deformacija. Derivacijom neprekidnog i jednoznačnog polja pomaka jednostavno možemo odrediti polje deformacija. Međutim, ako iz polja deformacija želimo integriranjem dobiti polje pomaka zadaća postaje matematički preodređena, iz 6 komponenti polja deformacija potrebno je odrediti 3 komponente polja pomaka. To znači da su komponente deformacija međusobno ovisne. Postoje tri dodatna uvjeta, tri jednažbe koje će odrediti međusobnu ovisnost komponenti deformacija. Deriviranjem jednažbi (2.2.6) dobivamo tri jednažbe

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jj}}{\partial i^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial i \partial j} = 0, \quad (i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}, \quad (2.3.1)$$

koje predstavljaju ponašanje polja deformacija u pripadnim koordinatnim ravninama  $xy$ ,  $yz$  i  $zx$ . Na isti način kombiniranjem derivacija jednažbi (2.2.6) dobivamo nove tri jednažbe

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial j \partial k} + 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial i^2} - \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial k} + \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial \epsilon_{ki}}{\partial j} \right) = 0, \quad (i, j, k) \in \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\}, \quad (2.3.2)$$

koje predstavljaju ponašanje polja deformacija u prostoru. Jednažbe (2.3.1) i (2.3.2) nazivamo uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti) deformacija.

Sustave jednažbi (2.3.1) i (2.3.2) možemo zapisati i u matričnom obliku pomoću pripadnih diferencijalnih operatora,  $\mathbf{L}_r$  za ravninske uvjete i  $\mathbf{L}_p$  za prostorne uvjete

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.3.3)$$

$$(2.3.4)$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.3.5)$$

a sustavi jednostavno slijede

$$\mathbf{L}_r \epsilon = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_p \epsilon = \mathbf{0}. \quad (2.3.6)$$

Deformacije (2.2.7) uz jednu od grupa jednažbi neprekinutosti (2.3.6) daju jedinstveno polje pomaka. Uz devet nepoznanica (tri komponente vektora pomaka i šest komponenti tenzora deformacija) imamo i devet jednažbi. Polje pomaka je dovoljno puta derivabilno, klase  $C^3$ , pa vrijedi i obrat.

Uvjet neprekinutosti ne dozvoljava proizvoljan izbor polja deformacija. Komponente deformacija moraju biti međusobno povezane. Struktura realnih konstrukcija ne odgovara u potpunosti definiciji kontinuuma. To znači da niti uvjet neprekinutosti ne može biti zadovoljen. Uprosječenje pogrešaka u strukturi omogućuje primjenu uvjeta neprekinutosti.

## 2.4. Uvjeti ravnoteže

Prema poznatom I. Newtonovom zakonu tijelo u inercijalnom sustavu miruje samo ako na njega ne djeluje sila. Tijelo miruje ako je rezultanta svih sila i momenata jednaka nul-vektoru

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{0} , \quad (2.4.1)$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \mathbf{0} , \quad (2.4.2)$$

gdje su  $\mathbf{f}_i$  sile,  $\mathbf{m}_j$  koncentrirani momenti koji djeluju na tijelo, a  $\mathbf{r}_i$  radijus vektori hvatišta sila. Jednadžbe (2.4.1) i (2.4.2) predstavljaju uvjete ravnoteže.

U opterećenju konstrukciji dolazi do pojave naprezanja. Nastaje tenzorsko polje naprezanja,  $\boldsymbol{\sigma}$ , matrica skalarnih funkcija,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} . \quad (2.4.3)$$

Za posmične komponente naprezanja često se koristi oznaka  $\tau_{ij}$ . Komponente naprezanja moraju zadovoljiti i diferencijalne uvjete ravnoteže koje možemo izvesti iz jednadžbe (2.4.1)

$$\sum_{l=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial l} + f_i = 0 , \quad i = x, y, z , \quad (2.4.4)$$

pri čemu su  $f_x, f_y, f_z$  komponente vektora volumenskih sila unutar konstrukcije,

$$\mathbf{f}^T = [f_x \quad f_y \quad f_z] . \quad (2.4.5)$$

Iz jednadžbi (2.4.2) možemo izvesti zakon o uzajamnosti posmičnih naprezanja, što povlači simetričnost tenzora naprezanja  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $i, j \in x, y, z$ . Tenzor naprezanja možemo prikazati pomoću 6 komponenti vektora

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}] . \quad (2.4.6)$$

Sustav jednadžbi ravnoteže (2.4.4) možemo prikazati matrično

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} , \quad (2.4.7)$$

ili tenzorski

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (2.4.8)$$

Ako je opterećeno tijelo u mirovanju, tada miruje i svaki dio opterećenog tijela. Tada i svaki izdvojeni dio opet možemo promatrati kao opterećeno tijelo koje miruje i za taj dio opet vrijedi prvi Newtonov zakon. To znači da i svaki izdvojeni dio tijela mora biti u ravnoteži, rezultanta svih sila i momenata koji djeluju na taj izdvojeni dio tijela mora biti jednaka nul-vektoru.

Nakon opterećenja tijelo poprimi deformirani položaj i nalazi se u stanju ravnoteže. To znači da bi uvjete ravnoteže morali postaviti na deformiranom stanju. Ali, deformirano stanje nije unaprijed poznato. Deformirano stanje je rezultat proračuna. Jednadžbe ravnoteže su nelinearne. Kod relativno malih deformacija uvjete ravnoteže možemo linearizirati, možemo prethodno nepoznati deformirani oblik tijela aproksimirati početnim nedeformiranim oblikom tijela.

Za nepoznatih šest komponenti naprezanja imamo samo tri jednadžbe ravnoteže. To znači, kao i kod deformacija, da su naprezanja međusobno zavisna. Tri dodatne jednadžbe možemo dobiti ako u jedan od uvjeta neprekinutosti, jednadžbe (2.3.6), uvrstimo zakon ponašanja. Dobivamo uvjete kompatibilnosti naprezanja (Beltrami-Michellove jednadžbe).

## 2.5. Zakoni ponašanja (konstitucije)

Uvjeti kompatibilnosti odnose se na polje deformacija, a uvjeti ravnoteže na polje napreznja. Očito postoji veza između napreznja i deformacija. Veza između napreznja i deformacija ovisi o mehaničkim svojstvima materijala utemeljenim na silama između elementarnih čestica.

### 2.5.1. Elastični modeli

Najjednostavniji model veze između napreznja i deformacija je linearno elastičan model - Hookeov zakon. Prema Hookeovom zakonu napreznja su proporcionalna deformacijama

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.5.1)$$

gdje je  $\mathbf{C}$  matrica materijalnih konstanti

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (2.5.3)$$

pri čemu je  $E$  modul elastičnosti, a  $\nu$  Poissonov koeficijent. Za ravninsko stanje napreznja matrica proporcionalnosti glasi

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.5.4)$$

Za jednoosno stanje napreznja, umjesto matrice  $\mathbf{C}$  imamo skalarnu vrijednost, konstantu proporcionalnosti, modul elastičnosti materijala  $E$

$$\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.5.5)$$

Postoji i nelinearno elastičan model. Odnos napreznja i deformacija je elastičan, ali nije proporcionalan. Jednadžba nelinearno elastičnog modela glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (2.5.6)$$

### 2.5.2. Neelastični modeli

Idealno elastično ponašanje većine materijala ostvarivo je samo pod djelovanjem malih opterećenja. Za realne materijale uobičajena su odstupanja krivulje opterećenja i rasterećenja i kod malih opterećenja. Potrebno je poznavati trenutni prirast deformacije  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , a u složenijim slučajevima i cijelu povijest ponašanja materijala. Takav odnos napreznja i deformacije možemo prikazati jednadžbom

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}). \quad (2.5.7)$$

## 2.6. Rubni uvjeti

### 2.6.1. Rubni uvjeti na rubu područja

Uvjeti ravnoteže i uvjeti kompatibilnosti moraju vrijediti i na rubu tijela. Uvjet ravnoteže i kompatibilnosti na rubu tijela zajednički nazivamo rubnim uvjetima. Uvjet ravnoteže zovemo prirodnim ili Neumannovim uvjetima, a uvjet kompatibilnosti zovemo geometrijskim ili Dirichletovim rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \mathbf{w}|_{\Gamma_w} = \mathbf{w}_0, \quad (2.6.1)$$

gdje su  $\Gamma_\sigma$  i  $\Gamma_w$  područja ruba sa zadanim napreznjima  $\boldsymbol{\sigma}_0$  i pomacima  $\mathbf{w}_0$  pri čemu mora vrijediti

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_w = \Gamma, \Gamma_\sigma \cap \Gamma_w = \emptyset. \quad (2.6.2)$$

To znači da ne može biti preklapanja rubnih uvjeta u nekoj točki. Rubni uvjet mora u svakoj točki biti jednoznačno definiran. U slučaju da su zadana napreznja i pomaci na rubu jednaki 0,  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ , govorimo o **homogenim rubnim uvjetima**.

Na slobodnom rubu mora biti zadovoljen prirodni rubni uvjet, uvjet ravnoteže. Nema susjednog tijela, pa nema potrebe za kompatibilnosti. Napreznja u smjeru normale  $\sigma_{nn}$  i komponente posmičnih napreznja  $\sigma_{\xi n}$  i  $\sigma_{\eta n}$  moraju odgovarati komponentama zadanog napreznja u tim smjerovima. Ostale komponente  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\eta\eta}$ ,  $\sigma_{\xi\eta}$  i  $\sigma_{\eta\xi}$  nisu određene rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{nn} \quad \sigma_{\xi n} \quad \sigma_{\eta n}]^T = \boldsymbol{\sigma}_0 = [\sigma_{nn,0} \quad \sigma_{\xi n,0} \quad \sigma_{\eta n,0}]^T, \quad (2.6.3)$$

pri čemu je  $\boldsymbol{\sigma}$  vektor totalnog napreznja, a  $\boldsymbol{\sigma}_0$  vektor vanjskog djelovanja u promatranj točki. Ako je slobodni rub neopterećen onda su i napreznja na rubu jednaka nuli (na neopterećenom slobodnom kraju konzolne grede, moment i poprečna sila jednaki su nuli, ako na slobodnom kraju konzolne grede djeluje koncentrirana sila okomito na gredu ili koncentrirani moment onda su poprečna sila i moment jednaki iznosima zadanih sile i momenta).

### 2.6.2. Rubni uvjeti na spoju

Ako je tijelo u ravnoteži tada je i svaki izdvojeni dio u ravnoteži. Možemo promatrati izdvojeni dio koji sadrži plohu spoja dvaju susjednih tijela. Smanjivanjem promatranog dijela možemo zadaću svesti na ravnotežu sustava dvije bliske točke. Napreznja među njima moraju biti u ravnoteži jer ne može postojati neuravnotežena komponenta napreznja zbog ravnoteže cijelog sustava. Analogno vrijedi i za deformacije, ako shvatimo cijeli sustav kao sastavljen od niza malih dijelova, možemo opet svesti zadaću na dvije bliske točke. Za takve dvije točke moraju opet vrijediti uvjeti kompatibilnosti, ne može doći do odvajanja točaka na spoju. Na spoju tijela moraju vrijediti prirodni i geometrijski rubni uvjeti.

Ako je spoj dvaju tijela elastičan, nepoznati su i pomaci i napreznja. Tada mora nužno biti zadana veza između pomaka i napreznja na spoju. Takav rubni uvjet zovemo mješovit ili Robinov rubni uvjet. Primjer za takvu vezu su tijela koja u nekoj točki spoja u smjeru normale imaju definiranu elastičnu oprugu zadane krutosti.

U proračunu znamo uvesti idealizaciju da je neko susjedno tijelo apsolutno kruto i nepomično. Takvo tijelo ne može se niti deformirati niti gibati na takvom spoju. Promatrano tijelo ne može se gibati, ali se može deformirati. Za deformabilno tijelo u mirovanju vrijedi prvi Newtonov zakon. Na spoju se moraju pojaviti reakcije koje za zadana opterećenja moraju zadovoljiti uvjete ravnoteže. Prirodni rubni uvjeti automatski su tako zadovoljeni uslijed pojave reakcija. Pomaci apsolutno krutog i nepomičnog tijela jednaki su nuli. Uvjet kompatibilnosti vrijedi i na spoju što povlači da točke promatranog tijela spojene za točke apsolutno krutog tijela moraju pri deformiranju imati pomake jednake nuli (homogeni uvjet).

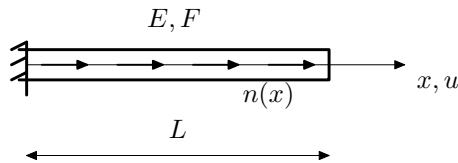
### 3. Jednadžbe teorije elastičnosti

#### 3.1. Uzdužno opterećena greda

##### 3.1.1. Diferencijalna jednadžba uzdužno opterećene grede

Promatramo gredu duljine  $L$ ,  $\Omega = [0, L]$ , uzdužne krutosti  $EF(x)$ , pri čemu je  $E$  modul elastičnosti, a  $F$  površina poprečnog presjeka grede, opterećene u smjeru svoje težišne osi, osi  $x$ , opterećenjem  $n(x)$ .

Polje pomaka u smjeru uzdužne osi grede skalarno je polje  $\mathbf{u} = [u] = u(x)$ . Relativnu deformaciju štapa



Slika 3.1.1: Uzdužno opterećena greda

u smjeru uzdužne osi (relativnu uzdužnu deformaciju) označimo  $\epsilon_{xx} = \epsilon$ , a pripadno jednoosno uzdužno naprezanje  $\sigma_{xx} = \sigma$ . Veza relativne deformacije i pomaka (kinematička ovisnost) uzdužno opterećene grede glasi

$$\epsilon = \frac{du}{dx}. \quad (3.1.1)$$

Za jednoosno stanje naprezanja, u zakon ponašanja,  $\sigma = \mathbf{C}\epsilon$ , umjesto matrice  $\mathbf{C}$  imamo konstantu proporcionalnosti, modul elastičnosti materijala  $E$

$$\sigma = E\epsilon. \quad (3.1.2)$$

Veza naprezanja i relativnih deformacija dovodi do odnosa

$$\sigma(x) = E(x)\epsilon(x) = E(x)\frac{du}{dx} = E(x)u'(x). \quad (3.1.3)$$

Iz jednadžbe ravnoteže slijedi diferencijalna jednadžba uzdužno opterećene grede

$$(E(x)F(x)u'(x))' + n(x) = 0. \quad (3.1.4)$$

Uzdužna sila u gredi slijedi prema izrazu

$$N(x) = \sigma(x)F(x) = E(x)F(x)u'(x), \quad (3.1.5)$$

što daje standardni diferencijalni odnos između uzdužnog opterećenja  $n(x)$  i uzdužne sile  $N(x)$ ,

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x). \quad (3.1.6)$$

Rubni uvjeti moraju biti zadani na rubu područja  $\Omega$ , u krajnjim točkama  $x = 0$  i  $x = L$ . Rubni uvjeti mogu biti zadani kao pomaci ili kao naprezanja u krajnjim točkama, a barem jedan rubni uvjet mora biti zadan kao pomak, geometrijski rubni uvjet. Rubne uvjete zapisujemo u obliku

$$\sigma|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_0, \quad u|_{\Gamma_u} = u_0, \quad (3.1.7)$$

gdje je  $\Gamma_\sigma$  područje ruba sa zadanim naprezanjima  $\sigma_0$ , a  $\Gamma_u$  područje ruba sa zadanim pomacima  $u_0$ . Jedan od primjera zadanih rubnih uvjeta je da je greda spojena na podlogu u točki  $x = 0$ ,  $u_0 = 0$ , a u točki  $x = L$  je zadana sila  $K$ , što znači da je poznato naprezanje,  $\sigma(L) = \sigma_L = K/F$ .

U slučaju uzdužno opterećene grede konstantne uzdužne krutosti,  $EF(x) = EF = const.$ , jednadžba uz pripadne rubne uvjete glasi

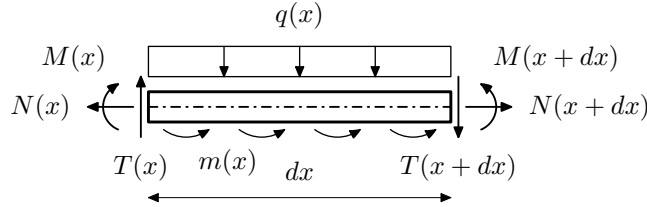
$$EFu''(x) + n(x) = 0. \quad (3.1.8)$$

## 3.2. Poprečno opterećena greda, savijanje

### 3.2.1. Ravnoteža nedeformirane grede

Promatramo gredu duljine  $L$ ,  $\Omega = [0, L]$ , zadane krutosti na savijanje  $EI(x)$ , pri čemu je  $E$  modul elastičnosti, a  $I$  moment inercije poprečnog presjeka, opterećenu u poprečnom smjeru  $z$  opterećenjem  $q(x)$  i distribuiranim momentnim opterećenjem  $m(x)$  duž grede.

Promatramo izdvojeni dio grede duljine  $dx$  s pripadnim opterećenjem poprečno na os grede  $q(x)$  i distribuiranim momentnim opterećenjem  $m(x)$ , (Slika 3.2.1). Iz osnovnih jednadžbi ravnoteže slijede



Slika 3.2.1: Izdvojeni dio poprečno opterećene grede

diferencijalni odnosi

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x) - m(x), \quad (3.2.1)$$

pri čemu je  $T(x)$  poprečna sila, a  $M(x)$  moment u točki  $x$ . Iz zadnja dva odnosa jasno slijedi diferencijalna veza opterećenja i momenta

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) - \frac{dm(x)}{dx}. \quad (3.2.2)$$

### 3.2.2. Pomaci grede

Kod ravninskih modela, svaka točka konstrukcije ima tri stupnja slobode, dva translatorna pomaka  $u(x, z)$  i  $w(x, z)$  u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $z$  i kut zaokreta  $\varphi(x)$ . U proračunskom modelu promatramo težišnu os. Kut zaokreta  $\varphi(x)$  predstavlja nagib tangente na težišnu os u promatranom poprečnom presjeku, a kut zaokreta  $\vartheta(x)$  predstavlja kut zaokreta poprečnog presjeka, (Slika 3.2.2). Svakoj točki težišne osi pridružimo pripadni poprečni presjek čija je ravnina okomita na težišnu os u toj točki težišne osi štapa. Prema Bernoullijevoj hipotezi ravnih poprečnih presjeka (Bernoullijeva teorija savijanja), poprečni presjek ostaje u ravnini nakon deformacije, u ravnini okomitoj na deformiranu težišnu os (okomitoj na tangentu na deformiranu težišnu os) u svakoj točki štapa, (Slika 3.2.2). To znači da je zaokret presjeka,  $\vartheta(x, z)$ , konstantan za sve točke po visini poprečnog presjeka (zaokret poprečnog presjeka ne ovisi o  $z$  koordinati po visini poprečnog presjeka nego samo o položaju duž težišne osi),

$$\vartheta(x, z) = \vartheta(x). \quad (3.2.3)$$

Zbog pretpostavke malih pomaka, pomak okomito na težišnu os svake točke po visini poprečnog presjeka je jednak (zanemarujemo razliku poprečnog pomaka zbog zaokreta poprečnog presjeka),

$$w(x, z) = w(x). \quad (3.2.4)$$

Uzdužni pomak točaka po visini poprečnog presjeka očito ovisi i o zaokretu poprečnog presjeka (točke udaljenije od težišne osi u smjeru  $z$  poprime, od zaokreta težišne osi grede, proporcionalno veću promjenu uzdužnog pomaka u odnosu na uzdužni pomak težišne osi grede),

$$u(x, z) = u(x) + z\theta(x). \quad (3.2.5)$$

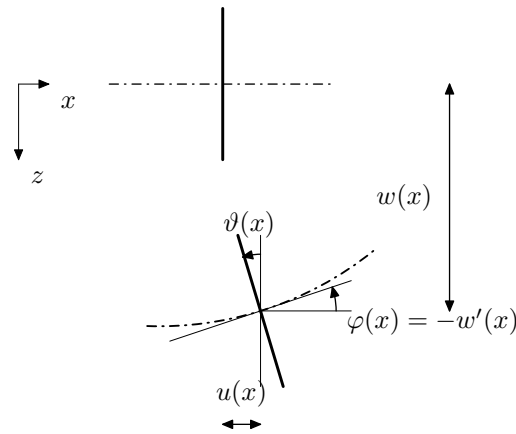
Pretpostavka da je ravnina poprečnog presjeka okomita na težišnu os i nakon deformacije zapravo je zanemarivanje utjecaja relativne posmične deformacije, a rezultira činjenicom da je kut zaokreta tada jednak negativnoj derivaciji pomaka okomitog na konstrukciju

$$\vartheta(x) = \varphi(x) = -\frac{dw}{dx} = -w'(x), \quad (3.2.6)$$

što povlači izraz za uzdužni pomak po visini poprečnog presjeka

$$u(x, z) = u(x) - zw'(x). \quad (3.2.7)$$





Slika 3.2.2: Pomaci poprečnog presjeka grede

### 3.2.3. Veza pomaka i relativnih deformacija kod poprečno opterećene grede

Relativna uzdužna deformacija grede  $\epsilon(x)$  deformacija je težišne osi grede. Odnos relativne uzdužne deformacije i uzdužnog pomaka slijedi smanjenjem duljine izdvojenog dijela grede duljine  $dx$  ( $dx \rightarrow 0$ ),

$$\epsilon(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} = u'(x). \quad (3.2.8)$$

Ako uzmemo prethodno definirani izraz za pomak po visini poprečnog presjeka, (3.2.7), slijedi izraz za relativnu uzdužnu deformaciju po visini poprečnog presjeka,

$$\epsilon(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{dw'(x)}{dx} = u'(x) - zw''(x). \quad (3.2.9)$$

Deformacije okomite na os grede ne uzimamo u obzir. Posmična deformacija u ravnini  $xz$ ,  $\gamma_{xz}$ , zbog Bernoullijeve hipoteze ravnih poprečnih presjeka jednaka je nuli. Jednadžbe (3.2.4), (3.2.7) i (3.2.9) izražavaju sve veličine pomaka težišne osi grede.

### 3.2.4. Veza unutarnjih sila i naprezanja, zakon konstitucije za unutarnje sile

Ako na izdvojenom dijelu grede duljine  $dx$  promatramo sva pripadna djelovanja (zadano vanjsko opterećenje, unutarnje sile i naprezanja) iz ravnoteže svih sila u smjeru  $x$  i ravnoteže momenata oko osi  $y$  slijedi odnos naprezanja i unutarnjih sila

$$M = \int_F z \sigma(x, z) dF. \quad (3.2.10)$$

Na temelju prethodnog izraza, (3.2.10), zakona elastičnosti, (3.1.2) i veze pomaka i relativnih deformacija (3.2.9), slijede zakoni konstitucije za unutarnje sile

$$\begin{aligned} M &= \int_F z \sigma(x, z) dF = \int_F z E \epsilon(x, z) dF = \int_F E z (u'(x) - zw''(x)) dF \\ &= - \int_F z^2 E w''(x) dF = -EI w''(x). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Veza naprezanja i relativnih deformacija dovodi do odnosa

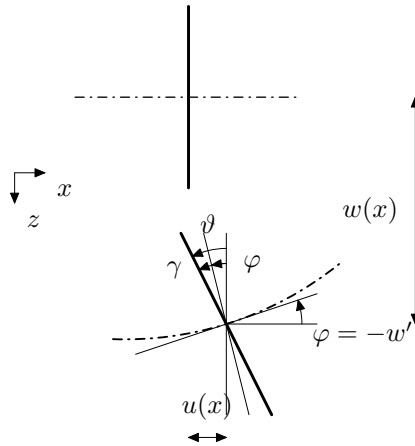
$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \kappa, \quad (3.2.12)$$

gdje je  $\kappa = -w''$  deformacija savijanja. Iz jednadžbe ravnoteže slijedi diferencijalna jednadžba savijanja poprečno opterećene grede prema Bernoullijevoj teoriji savijanja

$$(EI w'')'' = q. \quad (3.2.13)$$

### 3.3. Savijanje grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Za razliku od Bernoullijeve teorije savijanja, Timošenkova teorija savijanja ne isključuje relativne posmične deformacije. Zaokret ravnine poprečnog presjeka,  $\vartheta$ , i zaokret tangente na težišnu os,  $\varphi$ , nisu jednaki i razlikuju se za posmični kut zaokreta,  $\gamma$ .



Slika 3.3.1: Pomaci poprečnog presjeka grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Za uzdužni pomak proizvoljne točke po visini poprečnog presjeka vrijedi

$$u(x, z) = u(x) + z\vartheta(x). \quad (3.3.1)$$

Na temelju tog izraza slijedi izraz za relativnu posmičnu deformaciju

$$\gamma = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \vartheta - \varphi. \quad (3.3.2)$$

Za sile u proizvoljnom poprečnom presjeku vrijedi

$$M = EI \frac{d\vartheta}{dx} = D_s \frac{d\vartheta}{dx}, \quad T = kGF\gamma = kGF(\vartheta - \varphi) = D_p \left( \vartheta + \frac{dw}{dx} \right), \quad (3.3.3)$$

gdje je  $EI = D_s$  krutost grede na savijanje, a  $kGF = D_p$  posmična krutost grede uz korekcijski posmični koeficijent  $k$  koji ovisi o obliku poprečnog presjeka. Uz standardne diferencijalne odnose između unutarnjih sila, u poprečnom presjeku slijede jednačbe

$$\frac{dM}{dx} = T \Rightarrow D_s \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = D_p \left( \vartheta + \frac{dw}{dx} \right), \quad (3.3.4)$$

$$\frac{dT}{dx} + q = 0 \Rightarrow D_p \left( \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} \right) + q = 0, \quad (3.3.5)$$

diferencijalne jednačbe savijanja poprečno opterećene grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja.

### 3.4. Zidni nosač

Određeni tipovi konstrukcija u linearnoj teoriji elastičnosti mogu biti promatrani kao dvodimenzionalne rubne zadaće. Ovisno o dimenzijama i opterećenju razlikujemo ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacija.

Ravninsko stanje naprezanja je stanje kod kojeg je jedna dimenzija, debljina  $d$ , značajno manja u odnosu na ostale dvije dimenzije. Konstrukcija je opterećena u svojoj ravnini. Područje proračuna je pripadna središnja ravnina zadanih dimenzija sa zadanim opterećenjem u toj ravnini. Standardne konstrukcije takvog tipa su zidni nosači, zidovi opterećeni u svojoj ravnini.

Ravninsko stanje deformacija je stanje kod kojeg je jedna dimenzija, duljina, značajno veća u odnosu na ostale dvije dimenzije. Konstrukcija je opterećena okomito na uzdužnu os. Područje proračuna je karakteristični poprečni presjek sa zadanim opterećenjem u ravnini poprečnog presjeka. Standardne konstrukcije takvog tipa su cijevi i tuneli.

Promatramo zidni nosač debljine  $d$  u ravni  $xy$  opterećen u svojoj srednjoj ravni sa zadanim fizikalnim svojstvima, modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ . Takav zidni nosač je u ravninskom stanju naprezanja, ( $\sigma_{iz} = \sigma_{zi} = 0, i = x, y, z$ ). Deformacija u smjeru osi  $z$ ,  $\epsilon_{zz}$ , nije jednaka nuli, ali navedenu komponentu deformacije nije potrebno uzeti u daljnje razmatranje jer je pripadni rad,  $\sigma_{zz}\epsilon_{zz}$ , naprezanja na deformaciji u tom smjeru jednak nuli. U svakoj točki zida definiramo vektor pomaka  $\mathbf{u}$ , tenzor relativnih deformacija  $\boldsymbol{\epsilon}$  i tenzor naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Za odnos relativnih deformacija i pomaka vrijede odnosi

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.4.2)$$

odnosno u matričnom obliku

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.4.3)$$

Zakon ponašanja za ravninsko stanje naprezanja zidnog nosača glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.4.4)$$

pri čemu je pripadna matrica elastičnosti  $\mathbf{D}$  jednaka

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{RN}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Za izotropne materijale matrica elastičnosti simetrična je matrica. Posmični član, koeficijent  $G$  koji daje izravnu vezu posmičnog naprezanja i posmične deformacije zovemo modul posmika,

$$G = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.4.6)$$

Transformacija naprezanja i relativnih deformacija u lokalnim osima pod proizvoljnim kutem  $\alpha$  slijedi prema

$$\boldsymbol{\epsilon}^{lok} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.4.7)$$

za relativne deformacije pri čemu je matrica transformacije  $\mathbf{T}$  definirana

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

a za naprezanje slijedi prema

$$\boldsymbol{\sigma}^{lok} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-\text{T}}\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.4.9)$$

Zbog jednakosti rada u oba koordinatna sustava slijedi izraz za naprezanja u lokalnom koordinatnom sustavu,

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{T}}\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\epsilon}^{lok})^{\text{T}}\boldsymbol{\sigma}^{lok} = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{T}}\mathbf{T}^{\text{T}}\boldsymbol{\sigma}^{lok} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{lok} = \mathbf{T}^{-\text{T}}\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.4.10)$$

Odnos naprezanja i relativnih deformacija u lokalnim osima slijedi prema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{lok} &= \mathbf{T}^{-\text{T}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^{-\text{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbf{T}^{-\text{T}}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}^{lok} = \mathbf{D}^{lok}\boldsymbol{\epsilon}^{lok}, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

pri čemu je matrica elastičnosti u lokalnom koordinatnom sustavu definirana

$$\mathbf{D}^{lok} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1} . \quad (3.4.12)$$

Jednadžba ravnoteže,  $\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ , za zidni nosač daje sustav jednadžbi

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 , \quad (3.4.13)$$

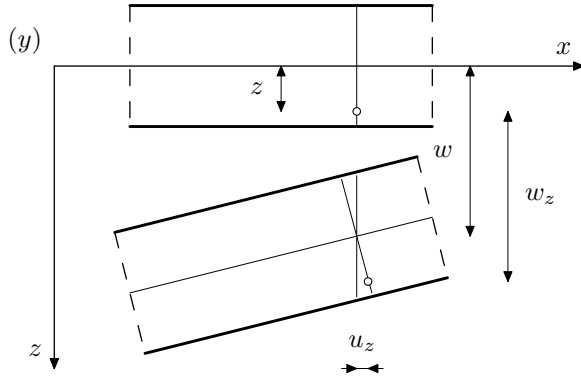
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + q_y = 0 . \quad (3.4.14)$$

Sile u presjeku zida dobivamo integriranjem komponenti naprezanja po debljini zida

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot d = \boldsymbol{\sigma} \cdot d . \quad (3.4.15)$$

### 3.5. Jednadžba ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja ploča (teorija savijanja tankih ploča)

Promatramo ravninski nosač opterećen okomito na svoju središnju ravninu. Takav nosač nazivamo ploča. Pretpostavljamo da je debljina ploče konstantna i jednaka  $d$ . Debljina ploče je manjeg reda veličine u odnosu na preostale dvije dimenzije ploče, duljinu i širinu. Ako su progibi ploče mali u odnosu na debljinu ploče, možemo dobiti zadovoljavajuće približno rješenje zadaće određivanja progiba i momenata savijanja poprečno opterećene ploče na temelju određenih pretpostavki. Temeljne pretpostavke su da u središnjoj ravnini nema relativnih deformacija, da se točke okomice na središnju ravninu i nakon savijanja ploče nalaze na jednom pravcu okomitom na deformiranu središnju ravninu, odnosno da vrijedi Bernoullijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka i da možemo zanemariti naprezanja okomita na ploču. Tada za sve točke središnje ravnine možemo pretpostaviti da se njihov progib ostvaruje samo okomito na središnju ravninu ploče.



Slika 3.5.1: Prikaz izdvojenog dijela ploče prije i poslije deformacije

Koordinatni sustav postavljamo tako da se središnja ravnina podudara s ravninom  $xy$ . Točke središnje ravnine imaju koordinate  $(x, y, 0)$ , a nakon deformacije imaju koordinate  $(x, y, w)$ . Proizvoljna točka na udaljenosti  $z$  od središnje ravnine,  $(x, y, z)$ , a nakon deformacije ima koordinate  $(x + u_z, y + v_z, z + w_z)$ , što znači da dobiva pomake u smjeru sve tri koordinatne osi. Na temelju pretpostavke o debljini ploče kao dimenziji manjeg reda veličine od ostale dvije dimenzije slijedi

$$w(x, y, z) = w(x, y) , \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} , \quad u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} . \quad (3.5.1)$$

Promatramo ploču opterećenu okomito na svoju ravninu opterećenjem  $q(x, y)$  po gornjoj plohi. Na temelju geometrijskih uvjeta možemo iskazati komponente relativne deformacije proizvoljne točke ploče  $(x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} , & \epsilon_{zz} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 . \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Prema pretpostavci o djelovanju opterećenja po gornjoj plohi imamo sljedeće rubne uvjete za komponente naprezanja

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = -q(x, y), \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0 \quad \text{na } z = -\frac{d}{2}, \\ \sigma_{zz} = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0 \quad \text{na } z = +\frac{d}{2}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Komponente naprezanja  $\sigma_{zz}$  poprimaju male vrijednosti u usporedbi s komponentama  $\sigma_{xx}$  i  $\sigma_{yy}$ . To znači da možemo komponente  $\sigma_{zz}$  zanemariti. Sada dobivamo sljedeće odnose komponenti tenzora relativnih deformacija i komponenti tenzora naprezanja,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (3.5.4)$$

Komponente tenzora naprezanja možemo izraziti preko komponenti tenzora relativnih deformacija,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$ ,

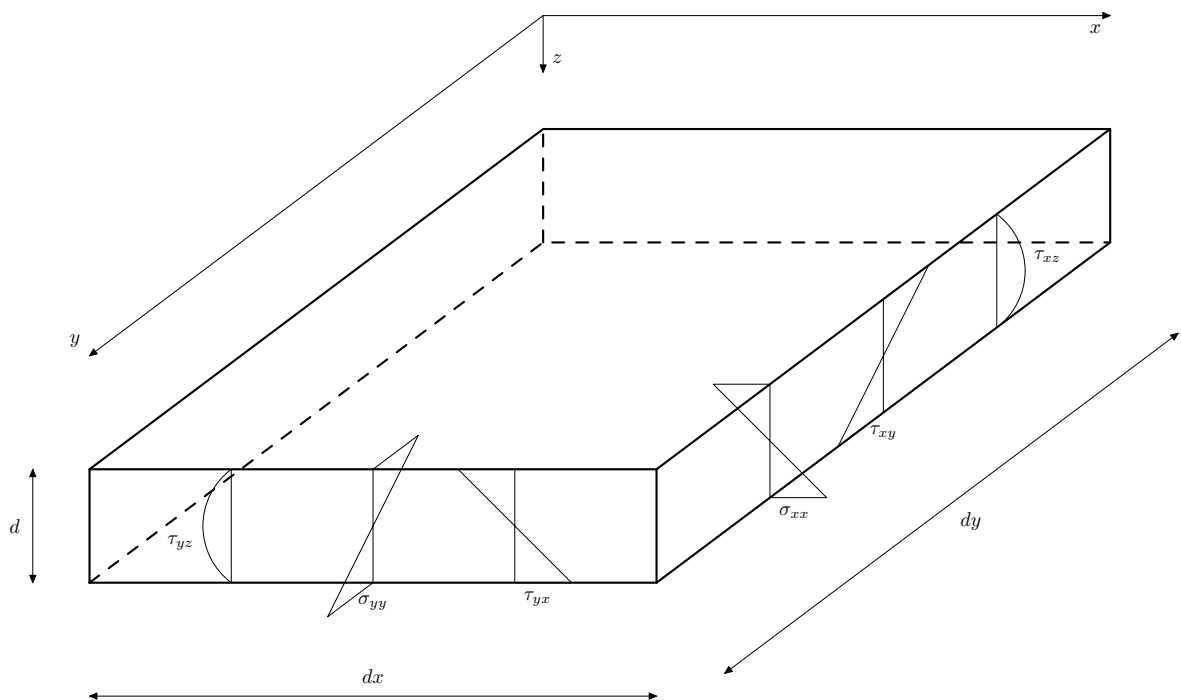
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (3.5.5)$$

Ako uvrstimo komponente relativnih deformacija izražene preko parcijalnih derivacija progiba  $w$ , dobivamo izraze za komponente naprezanja iskazane preko parcijalnih derivacija progiba  $w$  i  $z$  koordinate točke u kojoj promatramo naprezanja

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Na temelju ovih izraza možemo uočiti da su naprezanja ovisna o udaljenosti promatrane točke od središnje ravnine i da se naprezanja mijenjaju linearno duž osi  $z$ .

Za daljnju analizu ploče izdvojimo jedan infinitezimalni dio ploče i promatrajmo sva unutarnja i vanjska djelovanja na taj izdvojeni dio, (slika 3.5.2). Umjesto komponenti naprezanja, uobičajeno je dalje



Slika 3.5.2: Izdvojeni dio ploče sa svim pripadnim djelovanjima

provoditi proračun pomoću momenata savijanja i poprečnih sila dobivenih kao resultantna djelovanja

uslijed naprezanja

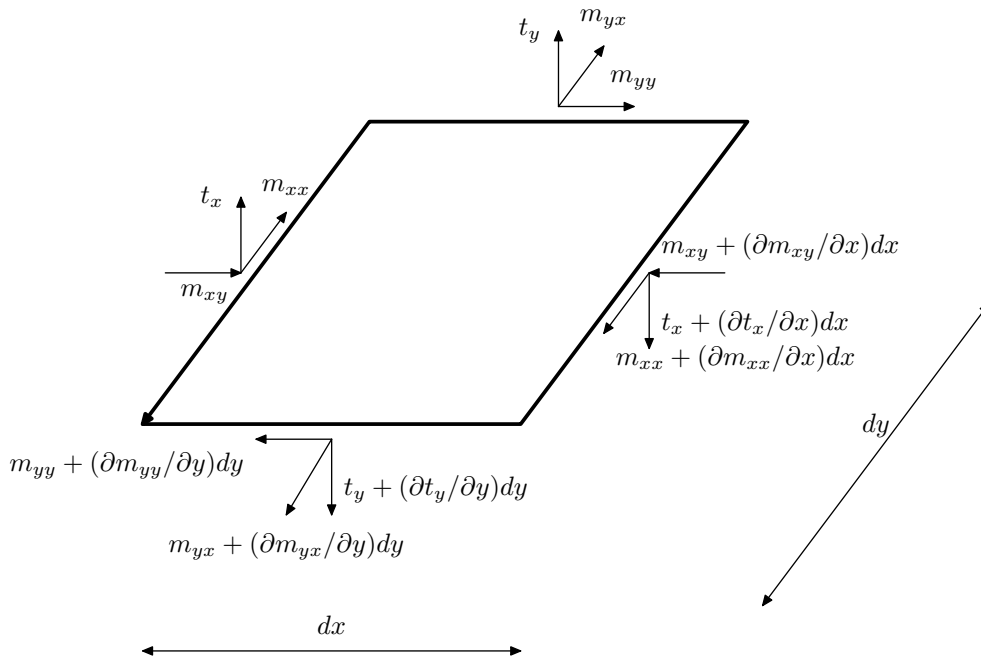
$$\begin{aligned}
 m_{xx} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{xx} z dz, & m_{yy} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{yy} z dz, \\
 m_{xy} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{xy} z dz, & m_{yx} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{yx} z dz, \\
 t_x &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{zx} dz, & t_y &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{zy} dz.
 \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Na temelju prethodnih izraza za komponente naprezanja izraženih preko parcijalnih derivacija progiba, integracijom dobivamo momente ploče izražene preko funkcije progiba u obliku

$$\begin{aligned}
 m_{xx} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 m_{yy} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 m_{xy} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
 \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

gdje je  $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$  krutost ploče na savijanje.

Promatramo izdvojeni infinitezimalni ravninski dio ploče sa svim pripadnim djelovanjima, (Slika 3.5.3). Stanje naprezanja nije isto u svim točkama ploče što znači da je potrebno iskazati vrijednosti



Slika 3.5.3: Izdvojeni infinitezimalni ravninski dio ploče sa svim pripadnim djelovanjima

definiranih veličina u presjecima  $x + dx$  i  $y + dy$ . Raspisivanjem Taylorovog reda u okolini točke  $x$  i zanemarivanjem viših derivacija dobivamo približni izraz za vrijednosti funkcija u točki  $x + dx$  izraženih preko vrijednosti funkcija u točki  $x$

$$m_{xx} + dm_{xx} = m_{xx} + \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx. \tag{3.5.9}$$

Na isti način možemo prikazati i sve ostale potrebne izraze u navedenim presjecima. Uzimanjem u obzir jednadžbi ravnoteže u smjeru  $x$  i  $y$  dobivamo sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - t_x dy dx &= 0, \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} dy dx - t_y dy dx &= 0.\end{aligned}\quad (3.5.10)$$

Sređivanjem izraza i koristeći se prethodno dobivenim izrazima za momente preko parcijalnih derivacija progiba slijede izrazi za poprečne sile,

$$t_x = -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x}, \quad t_y = -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y}, \quad (3.5.11)$$

gdje je  $\Delta$  Laplaceov operator

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3.5.12)$$

Primjenom jednadžbe ravnoteže svih sila u smjeru osi  $z$  proizlazi jednadžba

$$q dx dy + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial t_y}{\partial y} dy dx = 0. \quad (3.5.13)$$

Uvrštavanjem izraza za poprečne sile, (3.5.11), slijedi jednadžba

$$\Delta(D\Delta w) = q. \quad (3.5.14)$$

Uz konstantne fizikalne i geometrijske karakteristike ploče, jednadžbu (3.5.14) možemo raspisati u obliku

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (3.5.15)$$

ili prikazati pomoću Laplaceovog operatora u obliku

$$\Delta(\Delta w) = \Delta^2 w = \frac{q}{D}. \quad (3.5.16)$$

Ovako dobivenu linearnu nehomogenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu četvrtog reda nazivamo diferencijalnom jednadžbom savijanja ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja (teoriji savijanja tankih ploča).

### 3.5.1. Rubni uvjeti

Razlika u pojedinim rubnim uvjetima je u načinu oslanjanja rubova ploče. Osnovni mogući uvjeti oslanjanja rubova ploče su slobodno oslonjeni rub ploče, upeti rub ploče i slobodan rub ploče. Za slobodno oslonjeni rub ploče paralelan osi  $x$  vrijede rubni uvjeti

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.5.17)$$

Ako je slobodno oslonjeni rub paralelan osi  $y$  vrijede rubni uvjeti

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.5.18)$$

Za upeti rub ploče paralelan osi  $x$  vrijede rubni uvjeti

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (3.5.19)$$

a za rub paralelan osi  $y$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.5.20)$$

Za slobodan rub ploče paralelan osi  $x$  vrijede rubni uvjeti

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0, \quad (3.5.21)$$

a za slobodan rub paralelan osi  $y$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (3.5.22)$$



### 3.6. Jednadžba ploče prema Mindlin-Reissnerovoj teoriji savijanja ploča

Za razliku od Kirchhoffove teorije savijanja, Mindlin-Reissnerova teorija savijanja ne isključuje relativne posmične deformacije (odnos analogan odnosu između Bernoullijeve i Timošenkove teorije savijanja grede). Zaokreti ravnina poprečnih presjeka,  $\vartheta_x$  i  $\vartheta_y$ , i zaokreti pripadnih tangenti na težišnu ravninu,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ , nisu jednaki i razlikuju se za pripadne posmične kuteve zaokreta,  $\gamma_x$  i  $\gamma_y$ , ( $\vartheta_i = \varphi_i + \gamma_i$ ,  $i = x, y$ ). Za pomake u ravnini ploče proizvoljne točke po visini poprečnog presjeka ploče, uz pretpostavku da točke težišne ravnine imaju samo poprečne pomake, ( $w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w(x, y)$ ), vrijede izrazi

$$u(x, y, z) = z\vartheta_x, \quad v(x, y, z) = z\vartheta_y. \quad (3.6.1)$$

Na temelju geometrijskih uvjeta možemo iskazati komponente relativne deformacije proizvoljne točke ploče  $(x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = z \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta_x - \varphi_x, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta_y - \varphi_y. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Komponente naprezanja možemo izraziti preko komponenti relativnih deformacija koje su iskazane preko parcijalnih derivacija kuteva zaokreta i progiba  $w$  i  $z$  koordinate točke u kojoj promatramo naprezanja,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = Gz \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left( \vartheta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G \left( \vartheta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Na temelju prethodnih izraza za komponente naprezanja izraženih preko parcijalnih derivacija kuteva zaokreta i progiba, integracijom dobivamo momente i poprečne sile ploče izražene preko funkcija zaokreta u obliku

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right), \\ m_{yy} &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right), \\ m_{xy} &= \frac{Gd^3}{12} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right), \\ t_x &= kGd (\vartheta_x - \varphi_x), \\ t_y &= kGd (\vartheta_y - \varphi_y), \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

pri čemu je  $k$  korekcijski posmični koeficijent ( $k = \frac{5}{6}$  za pune ploče). Prikazani odnos momenata i poprečnih sila prema kutevima zaokreta možemo prikazati i u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{sm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \\ \vartheta_x - \varphi_x \\ \vartheta_y - \varphi_y \end{bmatrix}, \quad (3.6.5)$$

gdje su matrica krutosti ploče na savijanje  $\mathbf{D}_{sm}$  i matrica posmične krutosti ploče  $\mathbf{D}_{pq}$  definirane

$$\mathbf{D}_{sm} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{pq} = \frac{kEd}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = kGd\mathbf{I}_2. \quad (3.6.6)$$

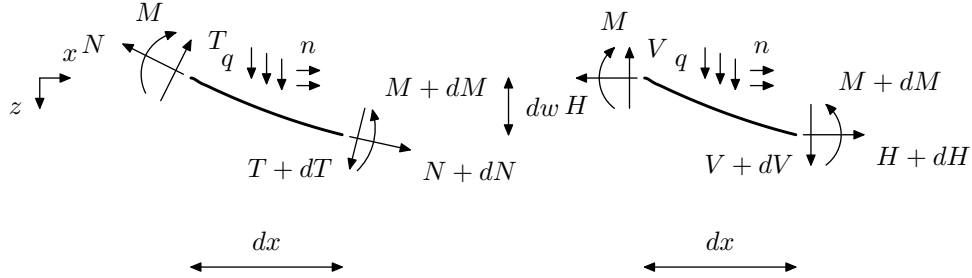
### 3.7. Teorija elastičnosti II. reda

#### 3.7.1. Osnovne pretpostavke

Proračun po Teoriji II. reda ima smisla ako dodatni momenti  $\Delta M$ , nastali kao produkt uzdužnog opterećenja i pomaka uslijed djelovanja poprečnog opterećenja, značajno doprinose povećanju osnovnih

momenata na konstrukciji uslijed djelovanja poprečnog opterećenja. Možemo razlikovati dva osnovna slučaja. U prvom slučaju, to su konstrukcije bez pomaka čvorova pri čemu uzdužne sile moraju biti prilično velike jer su pomaci neznatni. U drugom slučaju, to su konstrukcije sa značajnim pomacima čvorova kod kojih onda i manje vrijednosti uzdužnih sila proizvode znatne dodatne momente.

Iz praktičnih razloga možemo definirati osnovne smjerove unutarnjih sila na konstrukciji nakon deformacije u smjeru globalnih koordinatnih osi, a ne u smjeru lokalnih koordinatnih osi u presjeku konstrukcije.



Slika 3.7.1: Unutarnje sile u presjeku

Umjesto uzdužne i poprečne sile  $(N, T)$ , sada promatramo horizontalnu i vertikalnu silu  $(H, V)$ , a moment ostaje isti jer je treća koordinatna os  $y$  jednaka i u lokalnom i u globalnom koordinatnom sustavu. Na taj način formulacija diferencijalnih jednadžbi i rubnih uvjeta postaje jednostavnija.

### 3.7.2. Diferencijalni odnosi pomaka i opterećenja

Iz jednadžbi ravnoteže na izdvojenom deformiranom dijelu konstrukcije, Slika 3.7.1., slijedi

$$\sum K_x = 0 \Rightarrow dH + ndx = 0 \Rightarrow H' = -n, \quad (3.7.1)$$

$$\sum K_z = 0 \Rightarrow dV + qdx = 0 \Rightarrow V' = -q, \quad (3.7.2)$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &\Rightarrow dM + Hdw - Vdx - \int_x^{x+dx} q(\xi) \cdot \xi d\xi + \int_w^{w+dw} n(\zeta) \cdot \zeta d\zeta = 0 \\ &\Rightarrow M' + Hw' = V. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Kod malih deformacija ( $\sin w' = w'$ ,  $\cos w' = 1$ ) slijede izrazi za sile u lokalnim osima kao funkcije sila u globalnim osima

$$\begin{aligned} N &= H \cos w' + V \sin w' \approx H + Vw', \\ T &= V \cos w' - H \sin w' \approx V - Hw', \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

ili sile u globalnim osima kao funkcije sila u lokalnim osima

$$\begin{aligned} H &= N \cos w' - T \sin w' \approx N - Tw', \\ V &= T \cos w' + N \sin w' \approx T + Nw'. \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Uz pretpostavku malih pomaka i deformacija, za moment savijanja vrijedi jednak odnos kao i u linearnoj teoriji elastičnosti,

$$M''(x) = -(EIw''')'' . \quad (3.7.6)$$

Iz jednadžbe (3.7.3) dodatno slijedi i veza momenta i poprečne sile kao i u linearnoj teoriji elastičnosti

$$\begin{aligned} M' &= V - Hw' = T + Nw' - (N - Tw')w' \\ &= T + Nw' - Nw' + T(w')^2 \approx T. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Za vertikalnu silu očito slijedi odnos

$$V = T + Hw' = -EIw'''' + Hw', \quad (3.7.8)$$

pri čemu je uočljiva razlika u odnosu na izraz za poprečnu silu zbog definiranja smjera poprečne sile na konstrukciji nakon deformacije. Ako jednadžbu (3.7.3) deriviramo po  $x$  proizlazi

$$M'' + Hw'' + H'w' = V' . \quad (3.7.9)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (3.7.9) odnose iz jednadžbi (3.7.1) i (3.7.2), slijedi

$$M'' + Hw'' - nw' = -q . \quad (3.7.10)$$

Na temelju prethodnih jednadžbi slijedi diferencijalna veza pomaka i opterećenja

$$(EIw'')'' - Hw'' + nw' = q . \quad (3.7.11)$$

Diferencijalna jednadžba (3.7.11) opisuje geometrijski nelinearnu teoriju u smislu Teorije II. reda. Diferencijalna jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba ako su koeficijenti konstantni.

### 3.7.3. Rješenje diferencijalne jednadžbe

Pretpostavljamo da je krutost grede na savijanje konstantna,  $EI = const.$ , po cijeloj duljini grede (pretpostavka je smisljena i za grede po dijelovima konstantne krutosti) i da je horizontalna sila u gredi konstantna

$$H = const. , n = 0 . \quad (3.7.12)$$

Diferencijalna jednadžba (3.7.11) sada glasi

$$w'''' - \frac{H}{EI}w'' = \frac{q}{EI} . \quad (3.7.13)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (3.7.13) ovisi o predznaku horizontalne sile  $H$ , (tlak ili vlak). Uz definiranje koeficijenta  $h$ , uzdužne karakteristike elementa konstrukcije,

$$h = \left| \sqrt{\frac{|H|L^2}{EI}} \right| , h^2 = \frac{|H|L^2}{EI} , \quad (3.7.14)$$

jednadžba glasi

$$\begin{array}{ll} H < 0 & H > 0 \\ w'''' + \frac{h^2}{L^2}w'' = \frac{q}{EI} & w'''' - \frac{h^2}{L^2}w'' = \frac{q}{EI} , \end{array} \quad (3.7.15)$$

pa slijede pripadne homogene jednadžbe za oba slučaja

$$\begin{array}{ll} H < 0 & H > 0 \\ w'''' + \frac{h^2}{L^2}w'' = 0 & w'''' - \frac{h^2}{L^2}w'' = 0 . \end{array} \quad (3.7.16)$$

Homogena rješenja sada slijede za tlačnu horizontalnu silu ( $H < 0$ )

$$w^H(x) = c_1 + c_2x + c_3 \sin \frac{hx}{L} + c_4 \cos \frac{hx}{L} , \quad (3.7.17)$$

te za vlačnu silu ( $H > 0$ )

$$w^H(x) = c_1 + c_2x + c_3 \operatorname{sh} \frac{hx}{L} + c_4 \operatorname{ch} \frac{hx}{L} . \quad (3.7.18)$$

Nepoznate koeficijente  $c_1, c_2, c_3, c_4$  odredimo iz rubnih uvjeta promatrane grede duljine  $L$ . Konačno rješenje zbroj je homogenog i partikularnog rješenja

$$w(x) = w^H(x) + w^P(x) . \quad (3.7.19)$$

Partikularno rješenje za konstantno opterećenje ( $q = const.$ ) glasi

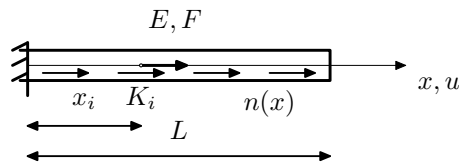
$$w^P(x) = -\frac{1}{2} \frac{q}{H} x^2 = \pm \frac{1}{2} \frac{q}{EI} \frac{L^2}{h^2} x^2 . \quad (3.7.20)$$

## 4. Konačni element za uzdužno opterećenu gredu (”Štapni” konačni element)

### 4.1. Osnovne jednačbe uzdužno opterećene grede

#### 4.1.1. Rubna zadaća uzdužno opterećene grede

Štapni konačni element (”štap” uobičajeni naziv za element konstrukcije koji preuzima samo uzdužnu silu, zglobno spojen za konstrukciju ili podlogu na oba kraja, bez poprečnog opterećenja, npr. element rešetkaste konstrukcije) opisuje uzdužno opterećenu gredu, gredu opterećenu samo u smjeru svoje uzdužne osi (osi  $x$ ). Kod takvih greda duljina je značajno dominantnija u odnosu na dimenzije poprečnog presjeka ( $b, h \ll L$ ). Opterećenje grede isključivo je u smjeru uzdužne osi grede, koncentrirane uzdužne sile  $K_i$  u točkama  $x_i$  i distribuirano uzdužno opterećenje  $n(x)$ . Pretpostavljamo samo ravne (ne i zakrivljene) grede.



Slika 4.1.1: Primjer jednostavne grede opterećene u smjeru svoje uzdužne osi

Uz zadane fizikalne, modul elastičnosti grede  $E = E(x)$ , i geometrijske, površina poprečnog presjeka grede  $F = F(x)$ , karakteristike  $(E(x)F(x))$  uzdužna krutost grede) i uzdužno distribuirano opterećenje  $n = n(x)$ , diferencijalna jednačba ravnoteže grede opterećene u smjeru uzdužne osi glasi

$$(EFu')' + n = 0, \quad (4.1.1)$$

uz pripadne rubne uvjete, zadani pomak na jednom kraju i zadana uzdužna sila (posljedično poznato naprezanje) na drugom kraju,

$$u(0) = u_0, \quad N(L) = N_L. \quad (4.1.2)$$

Slaba formulacija rubne zadaće uzdužno opterećene grede, uz zadane rubne uvjete, glasi

$$R(u, v) = \int_0^L EFu' \cdot v' dx - \int_0^L n \cdot v dx = 0. \quad (4.1.3)$$

#### 4.1.2. Primjena principa virtualnog rada

Integracijom uzdužnog naprezanja po poprečnom presjeku definiramo uzdužnu silu u poprečnom presjeku,

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F E\epsilon dF = EF \frac{du}{dx}. \quad (4.1.4)$$

Uz virtualnu deformaciju  $\delta\epsilon$  i virtualni uzdužni pomak  $\delta u$  slijedi princip virtualnog rada za uzdužno opterećenu gredu

$$\int_V \delta\epsilon \sigma dV = \int_0^L \delta u n dx + \sum_{i=1}^p \delta u_i K_i, \quad (4.1.5)$$

odnosno iskazano pomoću uzdužne sile u gredi umjesto naprezanja,  $N = \int_F \sigma dF$ ,

$$\int_0^L \delta\epsilon N dx = \int_0^L \delta u n dx + \sum_{i=1}^p \delta u_i K_i. \quad (4.1.6)$$

### 4.1.3. Aproksimacija polja pomaka i deformacija

Jednadžba ravnoteže vodi prema polju uzdužnih pomaka grede koje zadovoljava princip virtualnog rada i rubne uvjete. Aproksimacija konačnim elementima znači da tražimo približno rješenje  $\bar{u}(x)$  koje zadovoljava rubne uvjete i princip virtualnog rada. Između svih takvih polja uzdužnih pomaka pretpostavimo polje pomaka polinomijalnog oblika

$$u(x) \approx \bar{u}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad (4.1.7)$$

gdje je  $n$  broj točaka s poznatim uzdužnim pomakom. Takve točke na gredi zovemo čvorovi konačnog elementa. Aproksimaciju polinomom  $n - 1$ -og stupnja možemo prikazati i u obliku

$$u(x) \approx \bar{u}(x) = N_1^{(e)}(x)u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)u_2^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x)u_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x)u_i^{(e)}, \quad (4.1.8)$$

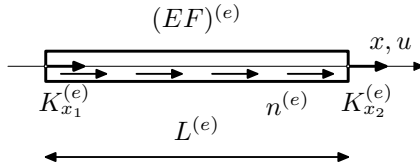
gdje su  $N_i^{(e)}(x)$  interpolacijski polinomi stupnja  $(n-1)$  definirani na konačnom elementu  $(e)$ ,  $u_i^{(e)}$  uzdužni pomaci (ili aproksimacije uzdužnih pomaka)  $i$ -tog čvora. Funkcije  $N_i^{(e)}(x)$  zovemo funkcije oblika (form function, shape function) u čvoru  $i$  i vrijedi

$$N_i^{(e)}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (4.1.9)$$

## 4.2. Linearni konačni element za uzdužno opterećenu gred

### 4.2.1. Ravnoteža izdvojenog elementa

Na izdvojenom elementu  $(e) = [x_1, x_2]$ , duljine  $L^{(e)}$ , (Slika 4.2.1), uz uzdužnu silu u elementu  $N^{(e)}$ , iz jednadžbe ravnoteže elementa, (4.1.6), slijedi



Slika 4.2.1: Izdvojeni element  $(e)$  uzdužno opterećene grede

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta \varepsilon^{(e)} N^{(e)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta u^{(e)} n^{(e)} dx + \delta u_1^{(e)} K_{x_1}^{(e)} + \delta u_2^{(e)} K_{x_2}^{(e)}. \quad (4.2.1)$$

Za virtualno polje uzdužnog pomaka pretpostavimo linearnu razdiobu duž elementa  $(e)$ . Uzdužni pomak u proizvoljnoj točki konačnog elementa iskazan je kao linearna kombinacija uzdužnih pomaka čvorova elementa, što daje linearni izraz za virtualno polje uzdužnih pomaka i konstantne vrijednosti virtualnog polja uzdužnih deformacija duž elementa  $(e)$

$$\delta u^{(e)} = N_1^{(e)} \delta u_1^{(e)} + N_2^{(e)} \delta u_2^{(e)}, \quad \delta \varepsilon^{(e)} = \frac{d(\delta u^{(e)})}{dx} = \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \delta u_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \delta u_2^{(e)}. \quad (4.2.2)$$

Prikazane izraze uvrstimo u jednadžbu ravnoteže, (4.2.1), koja je onda iskazana u obliku

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \delta u_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \delta u_2^{(e)} \right) N^{(e)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( N_1^{(e)} \delta u_1^{(e)} + N_2^{(e)} \delta u_2^{(e)} \right) n^{(e)} dx + \delta u_1^{(e)} K_{x_1}^{(e)} + \delta u_2^{(e)} K_{x_2}^{(e)}. \quad (4.2.3)$$

Grupiranjem članova uz virtualne pomake čvorova slijedi jednačžba

$$\begin{aligned} \delta u_1^{(e)} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} N^{(e)} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_1^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_1}^{(e)} \right] + \\ \delta u_2^{(e)} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2^{(e)}}{dx} N^{(e)} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_2^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_2}^{(e)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Jednačžba vrijedi za proizvoljne odabrane virtualne pomake čvorova  $\delta u_1^{(e)}$  i  $\delta u_2^{(e)}$  što znači da izrazi u zagradama moraju biti jednaki nuli,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} N^{(e)} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_1^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_1}^{(e)} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2^{(e)}}{dx} N^{(e)} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_2^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_2}^{(e)} = 0. \quad (4.2.6)$$

U dobivene jednačžbe uvrstimo izraz za linearnu aproksimaciju uzdužne sile u uzdužno opterećenoj gredi

$$N^{(e)} = (EF)^{(e)} \left( \frac{dN_1^{(e)}}{dx} u_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} u_2^{(e)} \right), \quad (4.2.7)$$

pa slijede dvije jednačžbe

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} (EF)^{(e)} \left( \frac{dN_1^{(e)}}{dx} u_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} u_2^{(e)} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} N_1^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_1}^{(e)} = 0, \quad (4.2.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2^{(e)}}{dx} (EF)^{(e)} \left( \frac{dN_1^{(e)}}{dx} u_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} u_2^{(e)} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} N_2^{(e)} n^{(e)} dx - K_{x_2}^{(e)} = 0. \quad (4.2.9)$$

Takav sustav jednačžbi možemo zapisati u obliku

$$\left\{ \int_{x_1}^{x_2} (EF)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} n^{(e)} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} K_{x_1}^{(e)} \\ K_{x_2}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.2.10)$$

što je zapravo matrična jednačžba standardnog oblika

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}, \quad (4.2.11)$$

gdje je  $\mathbf{K}^{(e)}$  elementarna matrica krutosti elementa ( $e$ ),  $\mathbf{u}^{(e)}$  elementarni vektor nepoznatih pomaka (uzdužnih pomaka čvorova elementa ( $e$ )),  $\mathbf{q}^{(e)}$  elementarni vektor opterećenja elementa ( $e$ ) i  $\mathbf{k}^{(e)}$  vektor zadanih koncentriranih sila u čvorovima elementa ( $e$ ). Elementarni vektor opterećenja za konačni element uzdužno opterećene grede ( $e$ ) općenito glasi

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_{(e)} n^{(e)} \mathbf{N}^{(e)\text{T}} dx, \quad (4.2.12)$$

a elementarnu matricu krutosti možemo izraziti, uz definiranu matricu elastičnosti  $\mathbf{D}^{(e)} = [EF]^{(e)}$  i deformacijsku matricu  $\mathbf{B}^{(e)}$  linearnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede ( $e$ )

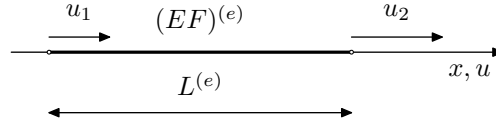
$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx} = \left[ \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \quad \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \right], \quad (4.2.13)$$

pomoću općenitog izraza

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)\text{T}} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx. \quad (4.2.14)$$

#### 4.2.2. Elementarna matrica krutosti linearnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede

Promatramo linearni konačni element uzdužno opterećene grede duljine  $L^{(e)}$  i zadane uzdužne krutosti  $(EF)^{(e)}$ . Stupnjevi slobode tog elementa uzdužni su pomaci krajeva elementa,  $u_1 = u(x_1) = u(0)$  i



Slika 4.2.2: Linearni konačni element uzdužno opterećene grede

$u_2 = u(x_2) = u(L^{(e)})$ . Pomake unutar elementa izražavamo kao polinom prvog stupnja,

$$u(x) = c_0 + c_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi} \mathbf{c} . \quad (4.2.15)$$

Uvrštavanjem vrijednosti u jednadžbu (4.2.15) dobivamo sustav jednadžbi za nepoznate koeficijente vektora  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.2.16)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} . \quad (4.2.17)$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi vektor nepoznatih koeficijenata,

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^{(e)} . \quad (4.2.18)$$

Uvrštavanjem izraza (4.2.18) u jednadžbu (4.2.15) slijedi

$$u(x) = \mathbf{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} . \quad (4.2.19)$$

Uzdužne pomake točaka duž konačnog elementa ( $e$ ) zapravo smo izrazili kao linearnu kombinaciju pomaka čvorova elementa

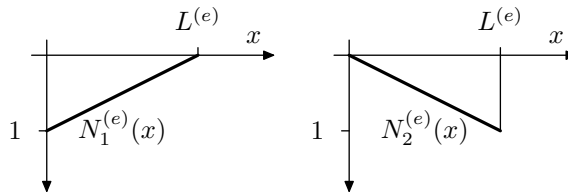
$$u(x) = N_1^{(e)}(x) u_1 + N_2^{(e)}(x) u_2 = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} , \quad (4.2.20)$$

pri čemu je elementarna matrica funkcija oblika  $\mathbf{N}^{(e)}$  eksplicitno izražena u obliku

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)}(x) & N_2^{(e)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^{(e)} - x}{L^{(e)}} & \frac{x}{L^{(e)}} \end{bmatrix} . \quad (4.2.21)$$

Za funkcije oblika  $N_i^{(e)}$  vrijedi da je vrijednost u pripadnom čvoru  $x_i$  konačnog elementa ( $e$ ) jednaka 1, a u ostalim čvorovima ( $x_j, j \neq i$ ) jednaka 0,

$$N_i^{(e)}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . \quad (4.2.22)$$



Slika 4.2.3: Funkcije oblika  $N_1^{(e)}$  i  $N_2^{(e)}$

Linearna funkcija uzdužnih pomaka točaka unutar elementa ( $e$ ) sada glasi

$$u(x) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \frac{L^{(e)} - x}{L^{(e)}} u_1 + \frac{x}{L^{(e)}} u_2 . \quad (4.2.23)$$



Deriviranjem funkcija oblika,  $N_1^{(e)}(x)$  i  $N_2^{(e)}(x)$  slijedi, u varijacijskoj formulaciji potrebna prva derivacija za linearni konačni element uzdužno opterećene grede,  $\mathbf{B}^{(e)} = \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx}$ , ( $\epsilon = \frac{du}{dx}$ ,  $\epsilon^{(e)} = \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx}\mathbf{u}^{(e)}$ ),

$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^{(e)}} & \frac{1}{L^{(e)}} \end{bmatrix} . \quad (4.2.24)$$

Uz matricu elastičnosti,  $\mathbf{D}^{(e)} = [EF]^{(e)}$ , konačnog elementa ( $e$ ) slijedi elementarna matrica krutosti za linearni konačni element uzdužno opterećene grede,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_0^{L^{(e)}} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \\ &= \frac{(EF)^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

U slučaju linearnog konačnog elementa kod kojeg geometrijske i/ili fizikalne karakteristike nisu konstantne slijedi integralni izraz za elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)2}} \int_0^{L^{(e)}} \begin{bmatrix} E(x)F(x) & -E(x)F(x) \\ -E(x)F(x) & E(x)F(x) \end{bmatrix} dx . \quad (4.2.26)$$

Prikazani integral za proračun elementarne matrice potrebno je numerički integrirati. Za uzdužno opterećenu gredu konstantnog modula elastičnosti i linearno promjenjivog poprečnog presjeka dovoljna je numerička integracija samo s jednom integracijskom točkom (u sredini elementa). Za takvu gredu, uz linearnu promjenu površine poprečnog presjeka po funkciji  $F(x) = F(L^{(e)} + x)/L^{(e)}$ , slijedi elementarna matrica krutosti

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EF\left(\frac{L^{(e)}}{2}\right)}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3EF}{2L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.2.27)$$

#### 4.2.3. Elementarni vektor opterećenja linearnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede

Elementarni vektor opterećenja linearnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede izračunamo prema izrazu (4.2.12),

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} n(x) [\mathbf{N}^{(e)}]^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} n(x) \frac{L^{(e)}-x}{L^{(e)}} dx \\ \int_0^{L^{(e)}} n(x) \frac{x}{L^{(e)}} dx \end{bmatrix} . \quad (4.2.28)$$

Za poseban slučaj jednoliko kontinuiranog opterećenja duž elementa,  $n(x) = n$ , slijedi elementarni vektor opterećenja

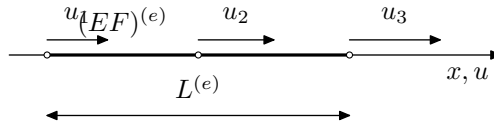
$$\mathbf{q}^{(e)} = n \begin{bmatrix} \frac{L^{(e)}}{2} \\ \frac{L^{(e)}}{2} \end{bmatrix} . \quad (4.2.29)$$

### 4.3. Kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede

#### 4.3.1. Elementarna matrica krutosti kvadratnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede

Promatramo kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede duljine  $L^{(e)}$  i zadane uzdužne krutosti  $(EF)^{(e)}$ . Stupnjevi slobode kvadratnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede uzdužni su pomaci krajnjih čvorova elementa,  $u_1 = u(x_1)$  i  $u_3 = u(x_3)$  i uzdužni pomak središnje točke (središnjeg čvora) konačnog elementa  $u_2 = u(x_2)$ . Pomake unutar elementa izražavamo kao polinom drugog stupnja u obliku,

$$u(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 . \quad (4.3.1)$$

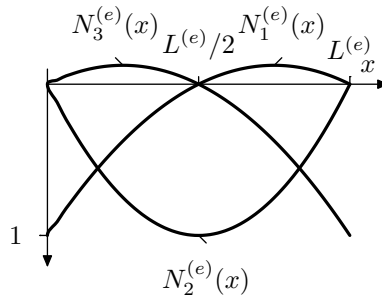


Slika 4.3.1: Kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede

Uvrštavanjem nepoznatih vrijednosti pomaka u čvorovima elementa,  $u(0) = u_1$ ,  $u(L^{(e)}/2) = u_2$  i  $u(L^{(e)}) = u_3$ , slijedi kvadratna funkcija pomaka točaka unutar elementa kao linearna kombinacija pomaka čvorova kvadratnog konačnog elementa

$$u(x) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \left( \frac{2x^2}{L^{(e)2}} - \frac{3x}{L^{(e)}} + 1 \right) u_1 + \left( -\frac{4x^2}{L^{(e)2}} + \frac{4x}{L^{(e)}} \right) u_2 + \left( \frac{2x^2}{L^{(e)2}} - \frac{x}{L^{(e)}} \right) u_3. \quad (4.3.2)$$

Za funkcije oblika kvadratnog konačnog elementa vrijedi  $N_i^{(e)}(x_j) = \delta_{ij}$ .

Slika 4.3.2: Funkcije oblika  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$  i  $N_3^{(e)}$ 

Deriviranjem funkcija oblika za kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede slijedi, u varijacijskoj formulaciji potrebna derivacija funkcije oblika kvadratnog konačnog elementa,  $\mathbf{B}^{(e)} = \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(e)} &= \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_3^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} \\ &= \left[ \left( \frac{4x}{L^{(e)2}} - \frac{3}{L^{(e)}} \right) \quad \left( -\frac{8x}{L^{(e)2}} + \frac{4}{L^{(e)}} \right) \quad \left( \frac{4x}{L^{(e)2}} - \frac{1}{L^{(e)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Uz matricu elastičnosti  $\mathbf{D}^{(e)} = [EF]^{(e)}$  slijedi elementarna matrica krutosti kvadratnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_0^{L^{(e)}} \left[ \mathbf{B}^{(e)} \right]^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \\ &= \frac{(EF)^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

### 4.3.2. Elementarni vektor opterećenja kvadratnog konačnog elementa uzdužno opterećene grede

Za kvadratni konačni element uzdužno opterećene grede slijedi pripadni elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} n(x) [\mathbf{N}^{(e)}]^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} n(x) \left( \frac{2x^2}{L^{(e)2}} - \frac{3x}{L^{(e)}} + 1 \right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} n(x) \left( -\frac{4x^2}{L^{(e)2}} + \frac{4x}{L^{(e)}} \right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} n(x) \left( \frac{2x^2}{L^{(e)2}} - \frac{x}{L^{(e)}} \right) dx \end{bmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Za jednoliko kontinuirano opterećenje duž elementa,  $q(x) = q$ , elementarni vektor opterećenja glasi

$$\mathbf{q}^{(e)} = q \begin{bmatrix} \frac{L^{(e)}}{6} \\ \frac{2L^{(e)}}{3} \\ \frac{L^{(e)}}{6} \end{bmatrix}. \quad (4.3.6)$$

### 4.4. Proračun uzdužne sile u uzdužno opterećenoj gredi

Za uzdužnu silu u nekom presjeku uzdužno opterećene grede vrijedi

$$N(x) = EFu'(x). \quad (4.4.1)$$

Vrijednost sile u bilo kojoj točki konačnog elementa uzdužno opterećene grede možemo izračunati uvrštavanjem koordinate presjeka  $x$  u lokalnom koordinatnom sustavu tog konačnog elementa u izraz

$$N^{(e)}(x) = [EF]^{(e)}(x) \left( \mathbf{B}^{(e)}(x) \right) \mathbf{u}^{(e)}, \quad (4.4.2)$$

gdje je  $\mathbf{u}^{(e)}$  vektor pomaka čvorova promatranog konačnog elementa. Pozitivna proračunata vrijednost predstavlja vlačnu silu, a negativna vrijednost tlačnu silu u elementu.

Kod linearnog konačnog elementa dobivena funkcija daje konstantnu silu duž konačnog elementa. Kod izravno neopterećenih elemenata takva razdioba jednaka je analitičkoj funkciji za silu. Kod izravno opterećenih elemenata analitička funkcija za silu nije konstantna što dovodi do odstupanja ovakvog prikaza od analitičke funkcije. Povećanjem broja elemenata dobivamo točnije rješenje s linearnom konvergencijom (dvostruko manja duljina konačnog elementa povlači dva puta manju pogrešku). Iznos uzdužne sile u točki integracije (u sredini linearnog konačnog elementa) jednak je analitičkom iznosu uzdužne sile u točki integracije. Linearna interpolacija funkcije između iznosa u točkama integracije rezultirat će linearnom razdiobom uzdužne sile jednako analitičkoj razdiobi uzdužne sile u jednoliko uzdužno opterećenoj gredi.

Kod uzdužno opterećenih elemenata možemo dobiti funkciju jednaku analitičkoj funkciji ako izraz (4.4.2) korigiramo sa  $N_0^{(e)}(x)$ , utjecajem opterećenja i elementarnog vektora opterećenja na funkciju za silu duž elementa,

$$N^{(e)}(x) = (EF)^{(e)}(x) \left( \mathbf{B}^{(e)}(x) \right) \mathbf{u}^{(e)} + N_0^{(e)}(x). \quad (4.4.3)$$

Za jednoliko kontinuirano opterećenje  $n(x) = n$  duž elementa taj utjecaj iznosi

$$N_0^{(e)}(x) = \frac{nL^{(e)}}{2} - nx, \quad (4.4.4)$$

a općenito možemo iskazati kao

$$N_0^{(e)}(x) = \int_0^{L^{(e)}} n(\zeta) N_1(\zeta) d\zeta - \int_0^x n(\zeta) d\zeta. \quad (4.4.5)$$

Korekcijski član, u stvari, slijedi iz lokalne jednadžbe ravnoteže promatranog konačnog elementa ( $e$ ).

Kod kvadratnog konačnog elementa dobivena funkcija daje linearnu razdiobu sile duž konačnog elementa. Takvim konačnim elementom, i za grede uzdužno opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem, izraz dobiven numeričkim proračunom jednak je analitičkom izrazu za razdiobu sile duž elementa.

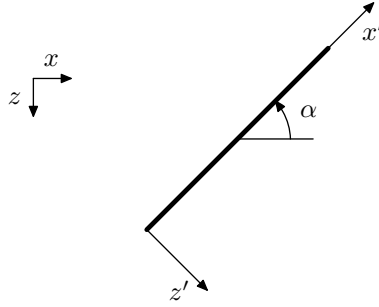
Sile u čvorovima konačnog elementa slijede iz jednadžbe ravnoteže

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_{ik}^{(e)} \\ N_{ki}^{(e)} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)} = \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(EF)^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -(u_2 - u_1) \\ (u_2 - u_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Na taj način proračunate pozitivne vrijednosti uzdužne sile u početnom čvoru predstavljaju tlačnu uzdužnu silu, a u krajnjem čvoru vlačnu uzdužnu silu. Ako je uzdužna sila duž grede konstantna, proračunate vrijednosti u čvorovima bit će jednake, ali suprotnog predznaka.

#### 4.5. Transformacija elementarne matrice krutosti u globalni koordinatni sustav

Promatramo konačni element uzdužno opterećene grede duljine  $L^{(e)}$  i uzdužne krutosti  $(EF)^{(e)}$  u proizvoljnom položaju u ravnini  $xz$  pod kutem  $\alpha$  u odnosu na os  $x$ . Kut  $\alpha$  predstavlja zaokret lokalnog



Slika 4.5.1: Uzdužno opterećena greda u proizvoljnom položaju u ravnini

koordinatnog sustava  $x'z'$  prema globalnom koordinatnom sustavu  $xz$ .

Neka su  $n_1$  i  $n_2$  pomaci čvorova elementa u lokalnom koordinatnom sustavu, a  $u_1, v_1, u_2, v_2$  pomaci čvorova u globalnom koordinatnom sustavu,

$$\mathbf{u}^{lokT} = [n_1 \quad n_2] \quad , \quad \mathbf{u}^{glT} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2] \quad . \quad (4.5.1)$$

Pomake čvorova u globalnom koordinatnom sustavu možemo izraziti kao funkciju pomaka čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu,

$$u_i = n_i \cos \alpha, \quad v_i = -n_i \sin \alpha, \quad i = 1, 2, \quad (4.5.2)$$

a pomake čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu možemo izraziti kao funkciju pomaka čvorova u globalnom koordinatnom sustavu,

$$n_i = u_i \cos \alpha - v_i \sin \alpha, \quad i = 1, 2. \quad (4.5.3)$$

Iskazane relacije možemo prikazati i u matričnom zapisu

$$\mathbf{u}^{gl} = \mathbf{T}^{lok \rightarrow gl} \mathbf{u}^{lok}, \quad \mathbf{u}^{lok} = \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{u}^{gl}, \quad (4.5.4)$$

pri čemu su matrice transformacije

$$\mathbf{T}^{lok \rightarrow gl} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.5.5)$$

Kod numeričkog proračuna na računalu za konstrukciju upisujemo koordinate čvorova, pa prethodne transformacije možemo izraziti i bez trigonometrijskih funkcija, samo pomoću koordinata čvorova. Za koordinatni sustav  $xz$  matrice transformacije glase

$$\mathbf{T}^{lok \rightarrow gl} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ z_2 - z_1 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}, \quad (4.5.6)$$

pri čemu i duljinu konačnog elementa,  $L^{(e)}$ , možemo izraziti preko koordinata čvorova

$$L^{(e)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4.5.7)$$

Transformacija elementarnog vektora opterećenja u globalni vektor opterećenja ide po načelu transformacije elementarnog vektora pomaka čvorova

$$\mathbf{q}^{gl} = \mathbf{T}^{lok \rightarrow gl} \mathbf{q}^{lok}, \quad \mathbf{q}^{lok} = \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{q}^{gl}, \quad (4.5.8)$$

uz iste matrice transformacije kao i kod transformacija pomaka čvorova.

#### 4.6. Matrica krutosti konačnog elementa uzdužno opterećene grede u globalnom koordinatnom sustavu

Deformaciju proizvoljnog elementa možemo izraziti preko pomaka čvorova u globalnom koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{lok} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{u}^{gl} \\ &= \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{L^{(e)^2} } \begin{bmatrix} -(x_2 - x_1) & -(z_2 - z_1) & x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}^{gl} \mathbf{u}^{gl}. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Elementarna matrica krutosti uzdužno opterećene grede u globalnom koordinatnom sustavu glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)gl} &= \int_0^{L^{(e)}} \mathbf{B}^{glT} (EF)^{(e)} \mathbf{B}^{gl} dx \\ &= \frac{EF}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\cos \alpha \cos \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \sin \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \cos \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{EF}{L^{(e)^3}} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 & (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & -(x_2 - x_1)^2 & -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \\ (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & (z_2 - z_1)^2 & -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & -(z_2 - z_1)^2 \\ -(x_2 - x_1)^2 & -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & (x_2 - x_1)^2 & (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \\ -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & -(z_2 - z_1)^2 & (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & (z_2 - z_1)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

#### 4.7. Proračun uzdužnih sila u konačnom elementu uzdužno opterećene grede u globalnom koordinatnom sustavu

Kod konačnog elementa uzdužno opterećene grede u proizvoljnom položaju dobivene vrijednosti pomaka čvorova iskazane su u globalnom koordinatnom sustavu. Za dobivanje iznosa uzdužne sile u elementu

potrebno je promatrati dobivene vrijednosti pomaka čvorova elementa u lokalnom koordinatnom sustavu. Izraz za proračun sila u elementu slijedi prema (4.4.2),

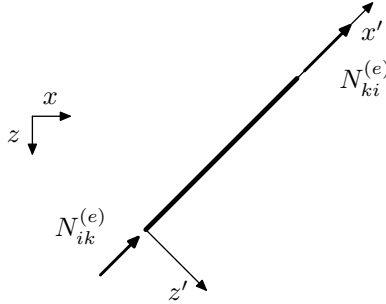
$$\begin{aligned} N^{(e)}(x) &= (EF)^{(e)}(x) \left( \mathbf{B}^{(e)}(x) \right) \mathbf{u}^{(e)} \\ &= (EF)^{(e)}(x) \left( \mathbf{B}^{(e)}(x) \right) \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{u}^{gl}, \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

gdje je  $\mathbf{u}^{(e)}$  vektor pomaka čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu promatranog konačnog elementa, a  $\mathbf{u}^{gl}$  vektor pomaka čvorova promatranog konačnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu.

Za dobivanje iznosa uzdužnih sila u čvorovima potrebno je također promatrati dobivene vrijednosti pomaka čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu. Uzdužne sile u čvorovima konačnog elementa slijede prema izrazu

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(e)} &= \begin{bmatrix} N_{ik}^{(e)} \\ N_{ki}^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{u}^{gl} - \mathbf{q}^{(e)} \\ &= \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} (v_2 - v_1) \sin \alpha - (u_2 - u_1) \cos \alpha \\ (u_2 - u_1) \cos \alpha - (v_2 - v_1) \sin \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)^2}} \begin{bmatrix} -(v_2 - v_1)(z_2 - z_1) - (u_2 - u_1)(x_2 - x_1) \\ (u_2 - u_1)(x_2 - x_1) - (v_2 - v_1)(z_2 - z_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Na taj način proračunate pozitivne vrijednosti sile u početnom čvoru predstavljaju tlačnu uzdužnu silu, a u krajnjem čvoru vlačnu uzdužnu silu.



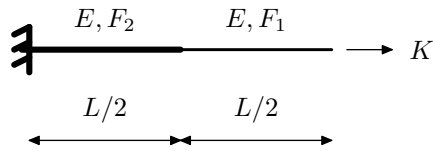
Slika 4.7.1: Pozitivne vrijednosti uzdužnih sila u čvorovima uzdužno opterećene grede

## 4.8. Primjeri

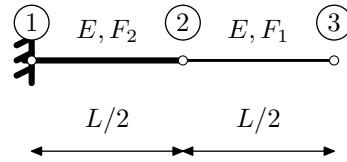
**Primjer 4.8.1.** Zadana je greda duljine  $L$  sastavljena iz dva dijela različitih geometrijskih karakteristika opterećena uzdužnom vlačnom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti uzdužni pomak slobodnog kraja grede i uzdužnu silu u gredi i definiranim čvorovima grede.

Podijelimo gredu na dva linearna konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki je element duljine  $L^{(e)} = \frac{L}{2}$ . Za svaki element možemo napisati pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{1-2} = \frac{2EF_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{2-3} = \frac{2EF_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8.1.1)$$



Slika 4.8.1.1: Sastavljena greda opterećena uzdužnom vlačnom silom na slobodnom kraju



Slika 4.8.1.2: Podjela grede na konačne elemente

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti slijedi globalna matrica krutosti zadanog sustava

$$\mathbf{K} = \frac{2E}{L} \begin{bmatrix} F_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & F_2 + F_1 & -F_1 \\ 0 & -F_1 & F_1 \end{bmatrix}. \quad (4.8.1.2)$$

Uz rubne uvjete, nepomičan ležaj u početnom čvoru,  $u_1 = 0$  i opterećenje silom  $K$  u krajnjem čvoru,  $S_3 = K$ , sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E(F_2+F_1)}{L} & -\frac{2EF_1}{L} \\ 0 & -\frac{2EF_1}{L} & \frac{2EF_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.1.3)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = \left[ 0 \quad \frac{KL}{2EF_2} \quad \frac{KL(F_1+F_2)}{2EF_1F_2} \right]^T. \quad (4.8.1.4)$$

Sile u definiranim konačnim elementima zadane grede za svaki element slijede prema izrazu

$$N^{(e)}(x) = [EF]^{(e)} (\mathbf{B}^{(e)}) \mathbf{u}^{(e)} = [EF]^{(e)} \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}}, \quad (4.8.1.5)$$

što za elemente 1-2 i 2-3 daje vrijednosti sila

$$N^{1-2} = EF_2 \frac{\frac{KL}{2EF_2}}{\frac{L}{2}} = K$$

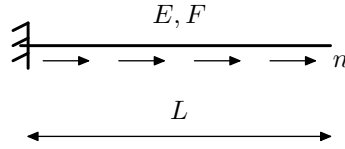
$$N^{2-3} = EF_1 \frac{\frac{KL(F_1+F_2)}{2EF_1F_2} - \frac{KL}{2EF_2}}{\frac{L}{2}} = K \quad (4.8.1.6)$$

Uzdužne sile u čvorovima slijede, prema jednadžbi (4.4.6),

$$\begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{bmatrix} = \frac{2EF_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KL}{2EF_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}, \quad (4.8.1.7)$$

$$\begin{bmatrix} N_{23} \\ N_{32} \end{bmatrix} = \frac{2EF_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{KL}{2EF_2} \\ \frac{KL(F_1+F_2)}{2EF_1F_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.1.8)$$

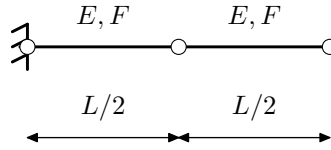




Slika 4.8.2.1: Greda opterećena jednoliko kontinuiranim uzdužnim vlačnim opterećenjem

**Primjer 4.8.2.** Zadana je greda duljine  $L$ , konstantne uzdužne krutosti  $EF$ , opterećena jednoliko kontinuiranim uzdužnim vlačnim opterećenjem  $n$  duž svoje uzdužne osi. Potrebno je odrediti uzdužni pomak slobodnog kraja grede i uzdužnu silu u gredi i definiranim čvorovima grede.

Podijelimo gredu na dva linearna konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L/2$ . Elementarna matrica krutosti i elementarni vektor opterećenja jednaki su za oba konačna elementa



Slika 4.8.2.2: Podjela grede na konačne elemente

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.8.2.1)$$

$$\mathbf{q}^{1-2} = \mathbf{q}^{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{nL}{4} \\ \frac{nL}{4} \end{bmatrix}.$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i elementarnih vektora opterećenja slijede globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja zadanog sustava

$$\mathbf{K} = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.8.2.2)$$

$$\mathbf{q} = \left[ \frac{nL}{4} \quad \frac{nL}{2} \quad \frac{nL}{4} \right]^T. \quad (4.8.2.3)$$

Uz rubni uvjet, nepomičan ležaj u početnom čvoru,  $u_1 = 0$ , sustav jednačbi glasi

$$\frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{nL}{2} \\ \frac{nL}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.8.2.4)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = \left[ 0 \quad \frac{3nL^2}{8EF} \quad \frac{nL^2}{2EF} \right]^T. \quad (4.8.2.5)$$

Ako želimo izračunati pomak neke točke grede izvan definiranih čvorova, uzmemo pripadnu aproksimaciju na onom elementu na kojem se nalazi promatrana točka. Neka je tražen pomak točke  $x = 3L/4$  slijedi

$$u\left(\frac{3L}{4}\right) = u^{2-3}\left(x = \frac{L^{(e)}}{2}\right) = \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}}\right)u_2 + \frac{x}{L^{(e)}}u_3 \quad (4.8.2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3nL^2}{8EF} + \frac{1}{2} \frac{nL^2}{2EF} = \frac{7nL^2}{16EF}. \quad (4.8.2.7)$$

Analičko rješenje za zadanu točku iznosi  $15nL^2/(32EF)$  što znači da je numerički dobiveno rješenje s pogreškom od 6.7%. Odstupanje od analitičkog rješenja posljedica je linearne aproksimacije (aproksimacije polinomom prvog stupnja) kvadratne funkcije pomaka (polinoma drugog stupnja).

Uzdužne sile na svakom elementu slijede prema izrazu (4.4.2),

$$N^{1-2}(x) = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3nL^2}{8EF} \end{bmatrix} = \frac{3nL}{4}, \quad (4.8.2.8)$$

$$N^{2-3}(x) = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3nL^2}{8EF} \\ \frac{nL^2}{2EF} \end{bmatrix} = \frac{nL}{4}. \quad (4.8.2.9)$$

Na taj način dobivene su konstantne vrijednosti uzdužnih sila na elementima, a iz prirode zadane fizikalne zadaće jasno je da je uzdužna sila duž grede linearno promjenjiva. Uvedbom korekcijskog faktora prema izrazu (4.4.3) slijede analitičke vrijednosti uzdužnih sila duž konačnih elemenata,

$$N^{1-2}(x) = \frac{3nL}{4} + \frac{nL}{4} - nx = n(L - x), \quad (4.8.2.10)$$

$$N^{2-3}(x) = \frac{nL}{4} + \frac{nL}{4} - nx = \frac{n}{2}(L - 2x). \quad (4.8.2.11)$$

$$(4.8.2.12)$$

Uzdužne sile u čvorovima konačnih elemenata slijede prema izrazima

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{bmatrix} = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{nL}{4} \\ \frac{nL}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -nL \\ \frac{nL}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.8.2.13)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \begin{bmatrix} N_{23} \\ N_{32} \end{bmatrix} = \frac{2EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{nL}{4} \\ \frac{nL}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{nL}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8.2.14)$$

Ako za rješavanje uzmemo kvadratni konačni element, dovoljno je uzeti jedan konačni element duljine  $L^{(e)}$ . Globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja jednaki su elementarnoj matrici krutosti, (4.3.4), i elementarnom vektoru opterećenja, (4.3.6), uz  $L^{(e)} = L$ , te uvrštavanjem rubnog uvjeta  $u_1 = 0$  slijedi sustav

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2L}{3} \\ \frac{L}{6} \end{bmatrix}. \quad (4.8.2.15)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3nL^2}{8EF} & \frac{nL^2}{2EF} \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.2.16)$$

Funkcija pomaka kvadratna je funkcija jednoznačno određena s vrijednostima u čvorovima, što znači da je za jednoliko kontinuirano opterećenje već s jednim kvadratnim konačnim elementom dobivena zapravo analitička funkcija,

$$\begin{aligned} u(x) &= \left( \frac{2x^2}{L^{(e)^2} - \frac{3x}{L^{(e)}} + 1} \right) u_1 + \left( -\frac{4x^2}{L^{(e)^2} + \frac{4x}{L^{(e)}}} \right) u_2 + \left( \frac{2x^2}{L^{(e)^2} - \frac{x}{L^{(e)}}} \right) u_3 \\ &= \left( \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 \right) \cdot 0 + \left( -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right) \frac{3nL^2}{8EF} + \left( \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right) \frac{nL^2}{2EF} \\ &= \frac{n}{EF} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.8.2.17)$$

Uvrštavanjem  $x = 3L/4$ , za prethodno odabranu točku, u prethodnu jednadžbu, slijedi proračunati pomak točke  $u(3L/4) = 15nL^2/(32EF)$  što je jednako analitičkoj vrijednosti pomaka u toj točki.

Uzdužna sila na kvadratnom konačnom elementu slijedi prema izrazu

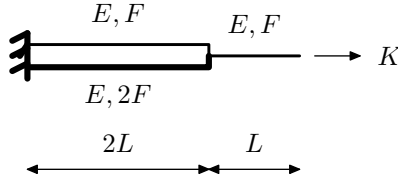
$$\begin{aligned} N^{(e)}(x) &= [EF]^{(e)} \left( \mathbf{B}^{(e)} \right) \mathbf{u}^{(e)} \\ &= [EF]^{(e)} \left[ \left( \frac{4x}{L^{(e)2}} - \frac{3}{L^{(e)}} \right) u_1 + \left( -\frac{8x}{L^{(e)2}} + \frac{4}{L^{(e)}} \right) u_2 + \left( \frac{4x}{L^{(e)2}} - \frac{1}{L^{(e)}} \right) u_3 \right], \end{aligned} \quad (4.8.2.18)$$

što u ovom primjeru znači

$$N(x) = EF \left[ \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \cdot 0 + \left( -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \frac{3nL^2}{8EF} + \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \frac{nL^2}{2EF} \right] = n(L-x). \quad (4.8.2.19)$$

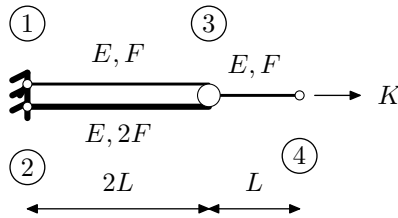
Na taj način dobivena je razdioba uzdužne sile jednaka analitičkoj funkciji razdiobe uzdužne sile duž grede.

**Primjer 4.8.3.** Zadana je složena, iz tri dijela, greda opterećena koncentriranom uzdužnom vlačnom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti uzdužni pomak točke na spoju grede i slobodnog kraja grede i uzdužnu silu u elementima i čvorovima grede.



Slika 4.8.3.1: Složena greda opterećena koncentriranom vlačnom silom na slobodnom kraju

Podijelimo gredu na tri konačna elementa (elementi 1-3, 2-3 i 3-4). Elementarne matrice krutosti za



Slika 4.8.3.2: Podjela grede na konačne elemente

pojedine elemente su

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{1-3} &= \frac{EF}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^{2-3} &= \frac{2EF}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^{3-4} &= \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8.3.1)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti slijedi globalna matrica krutosti zadanog sustava

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} + 1 + 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8.3.2)$$

Uz rubne uvjete  $u_1 = 0, u_2 = 0$  i opterećenje silom  $K$  u čvoru 4, sustav jednačbi glasi

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.3.3)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka u definiranim čvorovima,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{2KL}{3EF} \quad \frac{5KL}{3EF} \right]^T. \quad (4.8.3.4)$$

Uzdužne sile na konačnim elementima za svaki element slijede prema izrazu

$$N^{(e)}(x) = EF^{(e)} \left( \mathbf{B}^{(e)} \right) \mathbf{u}^{(e)} = EF^{(e)} \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}}, \quad (4.8.3.5)$$

što daje vrijednosti sila u elementima

$$\begin{aligned} N^{1-2} &= EF \frac{\frac{2KL}{3EF}}{2L} = \frac{K}{3}, \\ N^{1-3} &= 2EF \frac{\frac{2KL}{3EF}}{2L} = \frac{2K}{3}, \\ N^{3-4} &= EF \frac{\frac{5KL}{3EF} - \frac{2KL}{3EF}}{L} = K. \end{aligned} \quad (4.8.3.6)$$

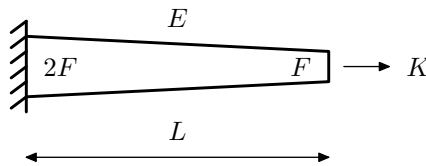
Uzdužne sile u čvorovima konačnih elemenata slijede prema izrazima

$$\mathbf{S}^{1-3} = \begin{bmatrix} N_{13} \\ N_{31} \end{bmatrix} = \frac{EF}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{3} \\ \frac{K}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.8.3.7)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \begin{bmatrix} N_{23} \\ N_{32} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{3} \\ \frac{2K}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.8.3.8)$$

$$\mathbf{S}^{3-4} = \begin{bmatrix} N_{34} \\ N_{43} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.3.9)$$

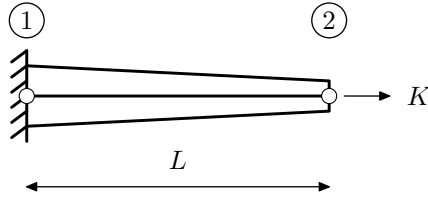
**Primjer 4.8.4.** Zadana je greda duljine  $L$  s definiranom linearno promjenjivom površinom poprečnog presjeka  $F(x) = F(2L - x)/L$  opterećena uzdužnom vlačnom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti uzdužni pomak slobodnog kraja grede i uzdužnu silu u gredi.



Slika 4.8.4.1: Greda linearno promjenjivog poprečnog presjeka opterećena uzdužnom vlačnom silom na slobodnom kraju

Očito je da je uzdužna sila duž grede konstantna, jednaka  $K$ , a analitička rješenja za funkciju pomaka i vrijednost pomaka slobodnog kraja iznose

$$u(x) = \frac{KL}{EF} \ln \left( \frac{2L}{2L - x} \right), \quad u(L) = \frac{KL}{EF} \ln 2 = \frac{KL}{EF} 0.693147. \quad (4.8.4.1)$$



Slika 4.8.4.2: Greda kao jedan konačni element

Cijelu gredu definiramo kao jedan konačni element (1-2) duljine  $L$ . Za takav konačni element možemo izračunati pripadnu elementarnu matricu krutosti numeričkom integracijom pomoću jedne točke integracije,  $I(F) = L^{(e)} F\left(\frac{L^{(e)}}{2}\right) = \frac{3FL}{2}$ ,

$$\mathbf{K}^{1-2} = \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.2)$$

Uz rubni uvjet  $u_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3EF}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.3)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka u definiranim čvorovima,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2KL}{3EF} \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.4.4)$$

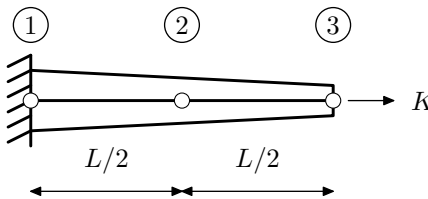
Dobiveni rezultat na slobodnom kraju grede razlikuje se od analitičkog rješenja za 3.82%. Razdioba sile duž grede prema jednadžbi (4.4.2) slijedi kao izraz

$$N^{(e)}(x) = EF \frac{2L-x}{L} \frac{1}{L} \frac{2KL}{3EF} = \frac{2(2L-x)}{3L} K. \quad (4.8.4.5)$$

To znači da iznosi sila u čvorovima,  $N(0) = \frac{4}{3}K$  i  $N(L) = \frac{2}{3}K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 33.33%. Iznos sile u točki integracije,  $N(L/2) = K$ , jednak je analitičkoj vrijednosti sile. Sile u čvorovima konačnog elementa slijede prema izrazu, (4.7.2),

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.6)$$

Za dobivanje točnije vrijednosti uzdužnog pomaka slobodnog kraja grede, podijelit ćemo gredu na dva konačna elementa duljine  $L^{(e)} = L/2$ . Za takvu podjelu možemo izračunati pripadne elementarne



Slika 4.8.4.3: Podjela grede na dva konačna elementa

matrice krutosti numeričkom integracijom pomoću jedne točke integracije na svakom konačnom elementu

$$\mathbf{K}^{1-2} = \frac{E}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.8.4.7)$$

$$\mathbf{K}^{2-3} = \frac{E}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \int_{L/2}^L \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.8)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti slijedi globalna matrica krutosti zadanog sustava

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.9)$$

Uz rubni uvjet, nepomičan ležaj u početnom čvoru,  $u_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.10)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2KL}{7EF} & \frac{24KL}{35EF} \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.4.11)$$

Dobiveni rezultat na slobodnom kraju grede razlikuje se od analitičkog rješenja za 1.084%, a u sredini grede za 0.684%. Razdioba sile duž grede prema jednadžbi (4.4.2) slijedi za svaki od elemenata u obliku,

$$N^{1-2}(x) = EF \frac{2L-x}{L} \frac{2}{L} \frac{2KL}{7EF} = \frac{4(2L-x)}{7L} K, \quad (4.8.4.12)$$

$$N^{2-3}(x) = EF \frac{2L-x}{L} \frac{2}{L} \left( \frac{24KL}{35EF} - \frac{2KL}{7EF} \right) = \frac{4(2L-x)}{5L} K. \quad (4.8.4.13)$$

To znači da iznosi sile u čvorovima elementa 1–2,  $N(0) = \frac{8}{7}K$  i  $N(L/2) = \frac{6}{7}K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 14.3%, a iznosi sile u čvorovima elementa 2–3,  $N(L/2) = \frac{6}{5}K$  i  $N(L) = \frac{4}{5}K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 20%. Iznos sile u točka integracije oba elementa,  $N(L/4) = N(3L/4) = K$ , jednak je analitičkoj vrijednosti sile. Sile u čvorovima definiranih konačnih elemenata slijede prema izrazima, (4.7.2),

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}, \quad (4.8.4.14)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \begin{bmatrix} N_{23} \\ N_{32} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.15)$$

Ako za rješavanje uzmemo jedan kvadratni konačni element duljine  $L^{(e)} = L$ , globalna matrica krutosti jednaka je elementarnoj matrici krutosti, (4.3.4). Elementarna matrica krutosti, uz matricu elastičnosti  $\mathbf{D} = EF \frac{2L-x}{L}$ , uz nužne dvije točke integracije jer je podintegralna funkcija polinom 3. stupnja, iznosi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & -\frac{14}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{14}{3} & 8 & -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{10}{3} & \frac{17}{6} \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.16)$$

Uvrštavanjem rubnog uvjeta  $u_1 = 0$  slijedi sustav

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -\frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{17}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.4.17)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova

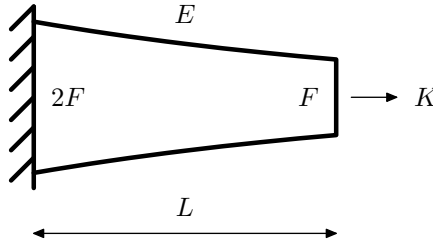
$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{15KL}{52EF} & \frac{9KL}{13EF} \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.4.18)$$

Dobiveni rezultat na slobodnom kraju grede razlikuje se od analitičkog rješenja za 0.121%, a u sredini grede za 0.271%. Razdioba sile duž grede prema jednadžbi (4.4.2) slijedi kao izraz

$$\begin{aligned} N^{(e)}(x) &= EF \frac{2L-x}{L} \frac{1}{L} \left[ \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \cdot 0 + \left( -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \frac{15KL}{32EF} + \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \frac{9KL}{13EF} \right] \\ &= K \frac{6(2L-x)(L+x)}{13L^2}. \end{aligned} \quad (4.8.4.19)$$

To znači da iznosi sile u čvorovima,  $N(0) = \frac{12}{13}K$ ,  $N(L/2) = \frac{14}{13}K$ ,  $N(L) = \frac{12}{13}K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 7.7%. Iznos sile u točkama integracije,  $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}L$ ,  $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}L$ , jednak je analitičkoj vrijednosti uzdužne sile  $K$ .

**Primjer 4.8.5.** Zadana je greda duljine  $L$  s nelinearno (eksponencijalno) promjenjivom površinom poprečnog presjeka  $F(x) = F2^{\frac{L-x}{L}}$ ,  $F(0) = 2F$ ,  $F(L) = F$  opterećena uzdužnom vlačnom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti uzdužni pomak slobodnog kraja grede i uzdužnu silu u gredi.



Slika 4.8.5.1: Greda nelinearno promjenjivog poprečnog presjeka opterećena uzdužnom vlačnom silom na slobodnom kraju

Očito je da je uzdužna sila duž grede konstantna, jednaka  $K$ , a analitička rješenja za funkciju pomaka i iznos pomaka slobodnog kraja iznose

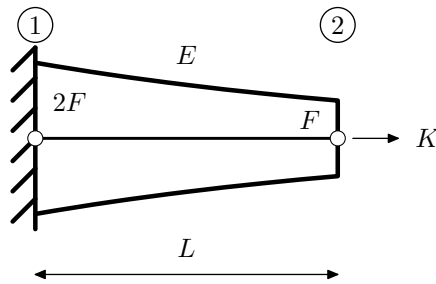
$$u(x) = \frac{KL}{EF \ln 2} \left( 2^{\frac{x-L}{L}} - \frac{1}{2} \right), \quad u(L) = \frac{KL}{EF \ln 2} = \frac{KL}{EF} 0.721348. \quad (4.8.5.1)$$

Cijelu gredu definiramo kao jedan konačni element (1-2) duljine  $L$ . Za takav konačni element možemo izračunati pripadnu elementarnu matricu krutosti numeričkim integriranjem pomoću jedne točke integracije,  $I(F) = L^{(e)} F \left( \frac{L^{(e)}}{2} \right) = FL\sqrt{2}$ ,

$$\mathbf{K}^{1-2} = \frac{E}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.2)$$

Uz rubni uvjet  $u_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.3)$$



Slika 4.8.5.2: Gređa kao jedan konačni element

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}KL}{2EF} \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.5.4)$$

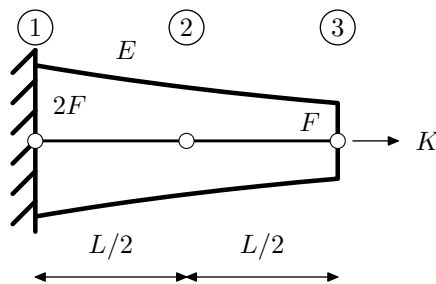
Dobiveni rezultat za uzdužni pomak slobodnog kraja gređe,  $u(L) = \frac{KL}{EF} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707107 \frac{KL}{EF}$ , razlikuje se od analitičkog rješenja za 1.974%. Razdioba sile duž gređe prema jednadžbi (4.4.2) slijedi kao izraz

$$N^{(e)}(x) = EF 2^{\frac{L-x}{L}} \frac{1}{L} \frac{\sqrt{2}KL}{2EF} = 2^{\frac{L-2x}{2L}} K. \quad (4.8.5.5)$$

To znači da iznosi sila u čvorovima,  $N(0) = \sqrt{2}K$  i  $N(L) = \frac{\sqrt{2}}{2}K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 41.4%. Iznos sile u točki integracije,  $N(L/2) = K$ , jednak je analitičkoj vrijednosti sile. Sile u čvorovima konačnog elementa slijede prema izrazu

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.6)$$

Za dobivanje točnijih rezultata podijelit ćemo gređu na dva konačna elementa jednake duljine,  $L^{(e)} = L/2$ . Za takvu podjelu možemo izračunati pripadne elementarne matrice krutosti numeričkom integraci-



Slika 4.8.5.3: Podjela gređe na dva konačna elementa

jom pomoću jedne točke integracije na svakom konačnom elementu

$$\mathbf{K}^{1-2} = \frac{E}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{4EF}{L} \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{4}} & -2^{-\frac{1}{4}} \\ -2^{-\frac{1}{4}} & 2^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}, \quad (4.8.5.7)$$

$$\mathbf{K}^{2-3} = \frac{E}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \int_{L/2}^L \begin{bmatrix} F(x) & -F(x) \\ -F(x) & F(x) \end{bmatrix} dx = \frac{4EF}{L} \begin{bmatrix} 2^{-\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{3}{4}} \\ -2^{-\frac{3}{4}} & 2^{-\frac{3}{4}} \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.8)$$



Uklapanjem elementarnih matrica krutosti slijedi globalna matrica krutosti zadanog sustava

$$\mathbf{K} = \frac{4EF}{L} \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{4}} & -2^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ -2^{-\frac{1}{4}} & 2^{-\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{3}{4}} \\ 0 & -2^{-\frac{3}{4}} & 2^{-\frac{3}{4}} \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.9)$$

Uz rubni uvjet  $u_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$\frac{4EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{3}{4}} \\ 0 & -2^{-\frac{3}{4}} & 2^{-\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}. \quad (4.8.5.10)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih uzdužnih pomaka čvorova,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{KL}{EF} 2^{-\frac{7}{4}} & \frac{KL}{EF} \left( 2^{-\frac{5}{4}} + 2^{-\frac{7}{4}} \right) \end{bmatrix}^T. \quad (4.8.5.11)$$

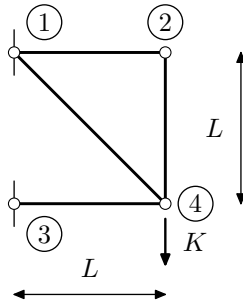
Dobiveni rezultat na slobodnom kraju grede,  $u(L) = 0.71775 \frac{KL}{EF}$ , razlikuje se od analitičkog rješenja za 0.499%, što ukazuje na kvadratnu konvergenciju niza rješenja, dvostruko manja duljina konačnog elementa rezultira četiri puta manjim odstupanjem od analitičkog rješenja. Razdioba sile duž grede prema jednadžbi (4.4.2) slijedi za svaki od elemenata u obliku,

$$N^{1-2}(x) = EF 2^{\frac{L-x}{L}} \frac{2}{L} 2^{-\frac{7}{4}} \frac{KL}{EF} = 2^{\frac{L-4x}{4L}} K, \quad (4.8.5.12)$$

$$N^{2-3}(x) = EF 2^{\frac{L-x}{L}} \frac{2}{L} \left( 2^{-\frac{5}{4}} + 2^{-\frac{7}{4}} \frac{KL}{EF} - 2^{-\frac{7}{4}} \frac{KL}{EF} \right) = 2^{\frac{3L-4x}{4L}} K. \quad (4.8.5.13)$$

To znači da iznosi sila u čvorovima elementa 1 – 2,  $N(0) = 2^{\frac{1}{4}} K = 1.19K$  i  $N(L/2) = 2^{-\frac{1}{4}} K = 0.81K$ , i u čvorovima elementa 2 – 3,  $N(L/2) = 2^{-\frac{1}{4}} K = 0.81K$  i  $N(L) = 2^{\frac{1}{4}} K = 1.19K$ , odstupaju od stvarnog iznosa sile za 19%. Iznos sile u točka integracije oba elementa,  $N(L/4) = N(3L/4) = K$ , jednak je analitičkoj vrijednosti sile.

**Primjer 4.8.6.** Zadan je rešetkasti nosač opterećen koncentriranom silom  $K$  u desnom čvoru donjeg pojasa. Potrebno je odrediti pomake čvorova i uzdužne sile u elementima (štapovima) rešetkastog nosača. Svi su štapovi jednakog modula elastičnosti  $E$  i poprečnog presjeka  $F$ .



Slika 4.8.6.1: Zadani rešetkasti nosač opterećen koncentriranom silom

Na zadatku su označeni (numerirani) čvorovi konačnih elemenata. Vektor nepoznatih pomaka čvorova je

$$\mathbf{w}^T = [ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 ]. \quad (4.8.6.1)$$

Elementarne matrice krutosti štapova 1 – 2 i 3 – 4 su

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{3-4} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8.6.2)$$

Štap 2 – 4 (čvor 2 je početni čvor, a čvor 4 je krajnji čvor) pod kutem je od  $3\pi/2$  u odnosu na os  $x$  globalnog koordinatnog sustava što daje pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{2-4} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8.6.3)$$

Štap 1 – 4 (čvor 1 je početni čvor, a čvor 4 je krajnji čvor) pod kutem je  $7\pi/4$ , ili  $-\pi/4$  u odnosu na os  $x$  globalnog koordinatnog sustava što daje pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{1-4} = \frac{EF}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (4.8.6.4)$$

Uklapanjem elementarnih matrica slijedi matrica krutosti zadanog rešetkastog nosača

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.8.6.5)$$

Koncentrirana sila zadana je u čvoru 4 u pozitivnom smjeru osi  $z$ . Vektor opterećenja glasi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K]^T. \quad (4.8.6.6)$$

Rubni uvjeti su  $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$ . Izdvajanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednažbi za preostale nepoznanice

$$\frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} \quad (4.8.6.7)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor pomaka čvorova

$$\mathbf{w}^T = \frac{KL}{EF} [0 \ 0 \ 0 \ (1 + 2\sqrt{2}) \ 0 \ 0 \ -1 \ (1 + 2\sqrt{2})]. \quad (4.8.6.8)$$

Na temelju proračunatog vektora pomaka čvorova možemo izračunati sile u štapovima zadanog rešetkastog nosača prema izrazu (4.7.1),

$$\mathbf{S}^T = [S^{1-2} \ S^{2-4} \ S^{3-4} \ S^{1-4}]^T \quad (4.8.6.9)$$

$$= [0 \ 0 \ -K \ K\sqrt{2}]^T. \quad (4.8.6.10)$$

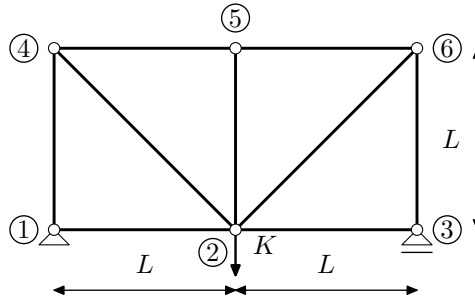
**Primjer 4.8.7.** Zadan je rešetkasti nosač opterećen koncentriranom silom  $K$  u srednjem čvoru donjeg pojasa. Potrebno je odrediti pomake čvorova i uzdužne sile u štapovima rešetkastog nosača. Svi su štapovi jednakog modula elastičnosti  $E$  i poprečnog presjeka  $F$ .

Na zadatku su označeni (numerirani) čvorovi konačnih elemenata. Vektor nepoznatih pomaka čvorova je

$$\mathbf{w}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6]. \quad (4.8.7.1)$$

Elementarne matrice krutosti štapova 1 – 2, 2 – 3, 4 – 5 i 5 – 6 su

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = \mathbf{K}^{4-5} = \mathbf{K}^{5-6} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8.7.2)$$



Slika 4.8.7.1: Zadani rešetkasti nosač opterećen koncentriranom silom

Štapovi 1 – 4, 2 – 5 i 3 – 6 pod kutem su od  $\pi/2$  zbog čega slijede pripadne elementarne matrice krutosti

$$\mathbf{K}^{1-4} = \mathbf{K}^{2-5} = \mathbf{K}^{3-6} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.8.7.3)$$

Štap 2 – 4 pod kutem je  $3\pi/4$ , a štap 2 – 6 pod kutem je  $\pi/4$ , a pripadne elementarne matrice krutosti su

$$\mathbf{K}^{2-4} = \frac{EF}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{2-6} = \frac{EF}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (4.8.7.4)$$

Uklapanjem elementarnih matrica slijedi matrica krutosti rešetkastog nosača

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8.7.5)$$

Koncentrirana sila zadana je u čvoru 2 u smjeru osi  $z$ . Vektor opterećenja glasi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (4.8.7.6)$$

Rubni uvjeti su  $u_1 = v_1 = v_3 = 0$ . Rješenjem sustava slijedi vektor pomaka čvorova

$$\mathbf{w}^T = \frac{KL}{EF} [0 \ 0 \ 0 \ (1 + \sqrt{2}) \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1/2 \ 0 \ (1 + \sqrt{2}) \ -1/2 \ 1/2]. \quad (4.8.7.7)$$

Na temelju proračunatog vektora pomaka čvorova možemo izračunati sile u štapovima zadanog rešetkastog

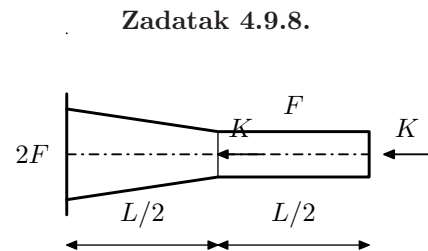
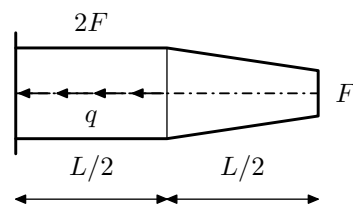
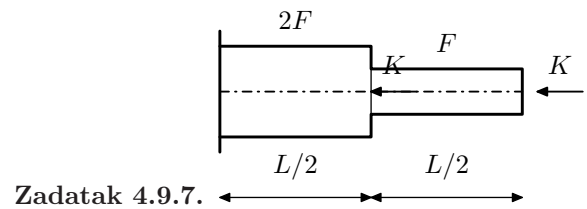
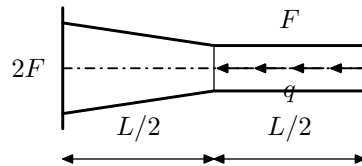
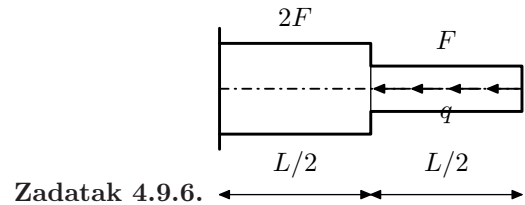
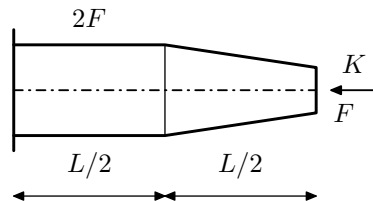
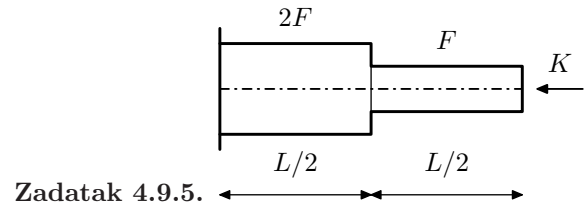
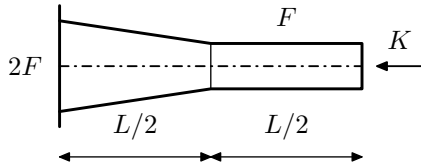
nosača prema izrazu (4.7.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T &= [S^{1-2} \quad S^{2-3} \quad S^{4-5} \quad S^{5-6} \quad S^{1-4} \quad S^{2-5} \quad S^{3-6} \quad S^{2-4} \quad S^{2-6}]^T \\ &= \left[ 0 \quad 0 \quad -\frac{K}{2} \quad -\frac{K}{2} \quad -\frac{K}{2} \quad 0 \quad -\frac{K}{2} \quad \frac{K\sqrt{2}}{2} \quad \frac{K\sqrt{2}}{2} \right]^T. \end{aligned} \quad (4.8.7.8)$$

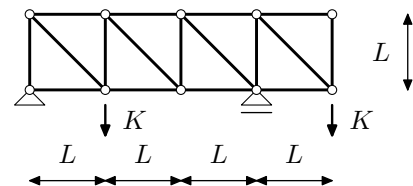
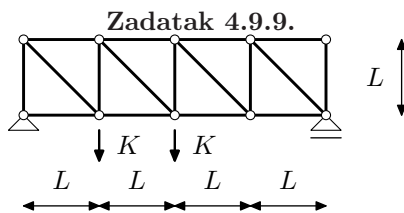
#### 4.9. Zadaci

U zadacima je potrebno za zadane uzdužno opterećene grede, odrediti uzdužne pomake čvorova, funkciju pomaka duž grede i uzdužne sile u elementima i čvorovima grede.

**Zadatak 4.9.1.**

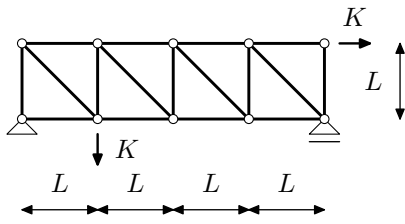


U zadacima je potrebno za zadane rešetkaste nosače, odrediti pomake čvorova i uzdužne sile u štapovima.

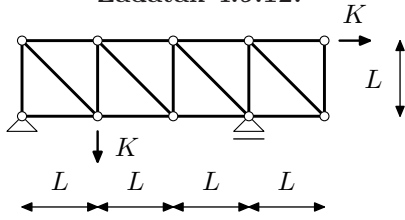


**Zadatak 4.9.10.**

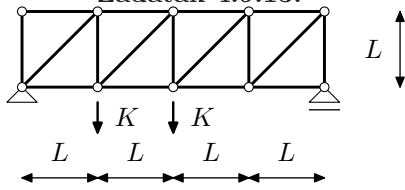
**Zadatak 4.9.11.**



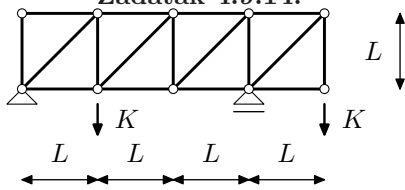
Zadatak 4.9.12.



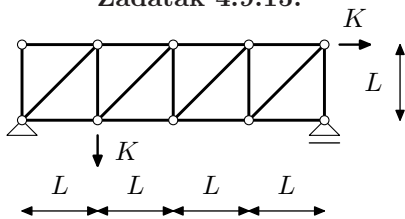
Zadatak 4.9.13.



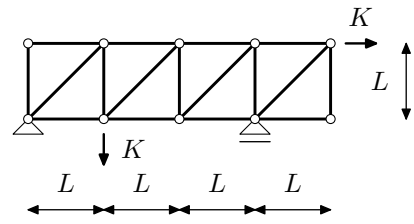
Zadatak 4.9.14.



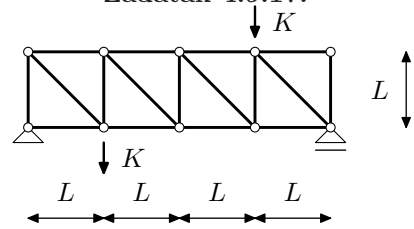
Zadatak 4.9.15.



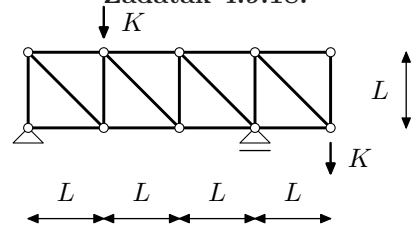
Zadatak 4.9.16.



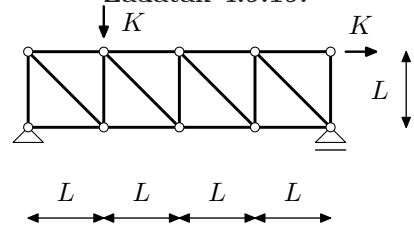
Zadatak 4.9.17.



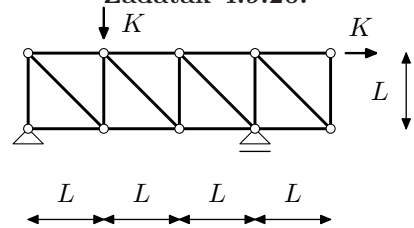
Zadatak 4.9.18.



Zadatak 4.9.19.



Zadatak 4.9.20.

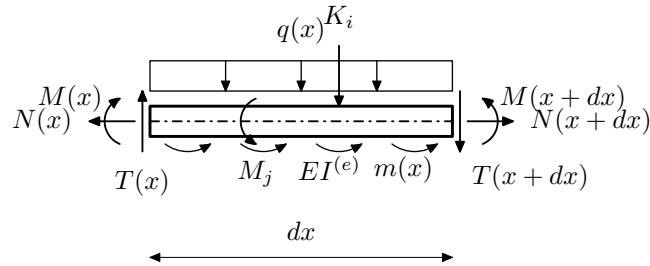


## 5. Gredni konačni element

### 5.1. Osnovne jednačbe savijanja grede

#### 5.1.1. Rubna zadaća savijanja grede

Gredni konačni element opisuje savijanje grede opterećene poprečno na svoju težišnu os. Kod takvih greda duljina grede značajno je dominantna u odnosu na dimenzije poprečnog presjeka grede ( $b, h \ll L$ ). Opterećenje grede isključivo je u smjeru poprečne osi grede, koncentrirane poprečne sile  $K_i$  u točkama  $x_i$ , koncentrirani momenti savijanja  $M_j$  u točkama  $x_j$ , distribuirano poprečno opterećenje  $q(x)$  i distribuirano momentno opterećenje  $m(x)$  na pojedinim dijelovima grede.



Slika 5.1.1: Poprečno opterećena greda

Uz zadanu krutost grede na savijanje,  $EI = EI(x)$ , i poprečno distribuirano opterećenje  $q = q(x)$ , diferencijalna jednačba ravnoteže poprečno opterećene grede prema Bernoullijevoj teoriji savijanja glasi

$$(EIw'')'' = q, \quad (5.1.1)$$

uz pripadne rubne uvjete (4 rubna uvjeta, po dva rubna uvjeta na svakom kraju grede, nužno barem jedan geometrijski rubni uvjet). Slaba formulacija rubne zadaće poprečno opterećene grede, uz zadane rubne uvjete, glasi

$$R(w, v) = \int_0^L EIw'' \cdot v'' dx - \int_0^L q \cdot v dx = 0. \quad (5.1.2)$$

#### 5.1.2. Primjena principa virtualnog rada

Integracijom naprezanja po poprečnom presjeku definiramo moment savijanja u promatranom poprečnom presjeku,

$$M = \int_F z \sigma dF = \int_F z E \epsilon dF = \int_F z E (u - zw'') dF = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.1.3)$$

Uz virtualnu deformaciju  $\delta \varepsilon$ , virtualni poprečni pomak (progib)  $\delta w$  i virtualni kut zaokreta  $\delta \varphi$ , slijedi princip virtualnog rada za poprečno opterećenu gredu,

$$\int_V \delta \varepsilon \sigma dV = \int_0^L (\delta w q + \delta \varphi m) dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i K_i + \sum_{j=1}^r \delta \varphi_j M_j. \quad (5.1.4)$$

#### 5.1.3. Aproksimacija polja pomaka i deformacija

Jednačba ravnoteže vodi prema polju poprečnih pomaka grede koje zadovoljava princip virtualnog rada i rubne uvjete. Aproksimacija konačnim elementima znači da tražimo približno rješenje  $\bar{w}(x)$  koje zadovoljava rubne uvjete i princip virtualnog rada. Između svih takvih polja poprečnih pomaka pretpostavimo polje pomaka polinomijalnog oblika

$$w(x) \approx \bar{w}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i. \quad (5.1.5)$$

Aproksimaciju polinomom stupnja  $n - 1$  možemo prikazati i u obliku

$$w(x) \approx \bar{w}(x) = N_1^{(e)}(x)w_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)w_2^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x)w_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x)w_i^{(e)}, \quad (5.1.6)$$

gdje su  $N_i^{(e)}(x)$  interpolacijski polinomi stupnja  $n - 1$  definirani na konačnom elementu  $(e)$ ,  $w_1^{(e)}$  nepoznati pomaci (poprečni pomaci ili zaokreti) čvorova ili aproksimacije tih pomaka.

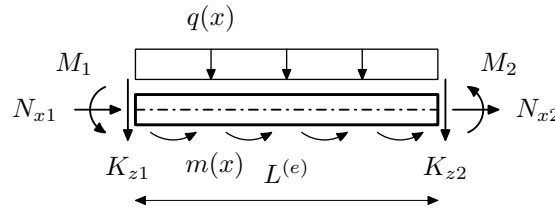
U linearnoj teoriji elastičnosti polje pomaka poprečno opterećene grede ima neprekinutu vrijednost pomaka i neprekinute derivacije polja pomaka. U čvorovima konačnog elementa  $(e)$  nepoznanice su poprečni pomak  $w_i$  i kut zaokreta ravnine poprečnog presjeka  $\varphi_i$ . To znači da na krajevima svakog promatranog elementa imamo zapravo dva lokalna rubna uvjeta (uvjeta kompatibilnosti) koja moraju biti jednaka, zbog prirode promatrane fizikalne zadaće, i na elementima koji se nastavljaju na promatrani element. Zbog toga za nepoznato polje poprečnog pomaka pretpostavimo kubičnu razdiobu duž konačnog elementa  $(e)$ , linearnu kombinaciju poprečnih pomaka,  $w_i^{(e)}$ , i zaokreta čvorova elementa  $\varphi_i^{(e)}$ , pri čemu su funkcije oblika, kao koeficijenti linearne kombinacije vrijednosti u čvorovima, kubični polinomi. Takvom razdiobom slijede kubična razdioba progibne funkcije, kvadratna razdioba kuta zaokreta i linearna razdioba deformacije savijanja,

$$\begin{aligned} w(x) &= N_1^{(e)}w_1 + N_2^{(e)}\varphi_1 + N_3^{(e)}w_2 + N_4^{(e)}\varphi_2, \\ \varphi(x) &= -\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dN_1^{(e)}}{dx}w_1 - \frac{dN_2^{(e)}}{dx}\varphi_1 - \frac{dN_3^{(e)}}{dx}w_2 - \frac{dN_4^{(e)}}{dx}\varphi_2, \\ \kappa(x) &= -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{d^2N_1^{(e)}}{dx^2}w_1 - \frac{d^2N_2^{(e)}}{dx^2}\varphi_1 - \frac{d^2N_3^{(e)}}{dx^2}w_2 - \frac{d^2N_4^{(e)}}{dx^2}\varphi_2. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

## 5.2. Kubični gredni konačni element

### 5.2.1. Ravnoteža izdvojenog elementa

Promatramo izdvojeni konačni gredni element  $(e) = [0, L^{(e)}]$ , duljine  $L^{(e)}$ . Element možemo tako definirati da koncentrirana opterećenja,  $N_{xi}$ ,  $K_{zi}$ ,  $i = 1, 2$  djeluju isključivo u čvorovima, a ne i unutar elementa. Na konačnom elementu  $(e)$  iz ravnoteže elementa slijedi



Slika 5.2.1: Izdvojeni element  $(e)$  poprečno opterećene grede

$$\int_V \delta\varepsilon^{(e)}\sigma^{(e)}dV = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)}q^{(e)} + \delta\varphi^{(e)}m^{(e)} \right) dx + \sum_{i=1,2} \left( \delta w_i^{(e)}K_{zi}^{(e)} + \delta\varphi_i^{(e)}M_i^{(e)} \right). \quad (5.2.1)$$

Uvrštavanjem izraza za virtualnu deformaciju,  $\delta\varepsilon^{(e)} = \delta u^{(e)'} - z\delta w^{(e)''}$ , i naprezanje,  $\sigma^{(e)} = E\varepsilon^{(e)}$ , uz definirani izraz za moment savijanja grede,  $M^{(e)} = -(EI)^{(e)}w^{(e)''}$ , i virtualnu deformaciju savijanja grede,  $\delta\kappa^{(e)} = -\delta w^{(e)''}$ , slijedi

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon^{(e)}\sigma^{(e)}dV &= \int_0^{L^{(e)}} \delta w^{(e)''} E^{(e)} \left( \int_F z^2 dF \right) w^{(e)''} dx \\ &= \int_0^{L^{(e)}} \delta w^{(e)''} (EI)^{(e)} w^{(e)''} dx = \int_0^{L^{(e)}} \delta\kappa^{(e)} M^{(e)} dx. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Uz ovu supstituciju princip virtualnih pomaka na konačnom elementu ( $e$ ) glasi

$$\int_0^{L^{(e)}} \delta \kappa^{(e)} M^{(e)} dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)} q^{(e)} + \delta \varphi^{(e)} m^{(e)} \right) dx + \sum_{i=1,2} \left( \delta w_i K_{z_i}^{(e)} + \delta \varphi_i^{(e)} M_i^{(e)} \right). \quad (5.2.3)$$

Za virtualno polje poprečnih pomaka pretpostavimo kubičnu razdiobu duž elementa ( $e$ ), linearnu kombinaciju poprečnih pomaka,  $w_i^{(e)}$ , i zaokreta čvorova elementa  $\varphi_i^{(e)}$ , pri čemu su funkcije oblika, kao koeficijenti linearne kombinacije vrijednosti u čvorovima, kubični polinomi. Takvom razdiobom slijede kubična razdioba virtualne progibne funkcije, kvadratna razdioba virtualnog kuta zaokreta i linearna razdioba virtualne deformacije savijanja,

$$\delta w^{(e)} = N_1^{(e)} \delta w_1^{(e)} + N_2^{(e)} \delta \varphi_1^{(e)} + N_3^{(e)} \delta w_2^{(e)} + N_4^{(e)} \delta \varphi_2^{(e)}, \quad (5.2.4)$$

$$\delta \varphi^{(e)} = -\frac{dN_1^{(e)}}{dx} \delta w_1^{(e)} - \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \delta \varphi_1^{(e)} - \frac{dN_3^{(e)}}{dx} \delta w_2^{(e)} - \frac{dN_4^{(e)}}{dx} \delta \varphi_2^{(e)}, \quad (5.2.5)$$

$$\delta \kappa^{(e)} = -\frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} \delta w_1^{(e)} - \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \delta \varphi_1^{(e)} - \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} \delta w_2^{(e)} - \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \delta \varphi_2^{(e)}. \quad (5.2.6)$$

Uvrštavanjem prethodnih razdioba u princip virtualnih pomaka na konačnom elementu ( $e$ ), (5.2.3), slijedi jednažba

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^{(e)}} \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} \delta w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \delta \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} \delta w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \delta \varphi_2^{(e)} \right) M^{(e)} dx \\ & = \int_0^{L^{(e)}} \left( N_1^{(e)} \delta w_1^{(e)} + N_2^{(e)} \delta \varphi_1^{(e)} + N_3^{(e)} \delta w_2^{(e)} + N_4^{(e)} \delta \varphi_2^{(e)} \right) q^{(e)} dx \\ & - \int_0^{L^{(e)}} \left( \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \delta w_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \delta \varphi_1^{(e)} + \frac{dN_3^{(e)}}{dx} \delta w_2^{(e)} + \frac{dN_4^{(e)}}{dx} \delta \varphi_2^{(e)} \right) m^{(e)} dx \\ & + \delta w_1^{(e)} K_{z_1}^{(e)} + \delta w_2^{(e)} K_{z_2}^{(e)} + \delta \varphi_1^{(e)} M_1^{(e)} + \delta \varphi_2^{(e)} M_2^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Grupiranjem članova uz virtualne poprečne pomake i pripadne virtualne zaokrete čvorova konačnog elementa ( $e$ ) slijedi jednažba

$$\begin{aligned} & \delta w_1^{(e)} \left[ \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_1^{(e)} q^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} m^{(e)} dx + K_{z_1}^{(e)} \right] + \\ & \delta \varphi_1^{(e)} \left[ \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_2^{(e)} q^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \frac{dN_2^{(e)}}{dx} m^{(e)} dx + M_1^{(e)} \right] + \\ & \delta w_2^{(e)} \left[ \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_3^{(e)} q^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \frac{dN_3^{(e)}}{dx} m^{(e)} dx + K_{z_2}^{(e)} \right] + \\ & \delta \varphi_2^{(e)} \left[ \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_4^{(e)} q^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \frac{dN_4^{(e)}}{dx} m^{(e)} dx + M_2^{(e)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Jednažba (5.2.8) vrijedi za proizvoljne virtualne poprečne pomake  $\delta w_1^{(e)}$ ,  $\delta w_2^{(e)}$  i proizvoljne virtualne



kuteve zaokrete čvorova  $\delta\varphi_1^{(e)}$ ,  $\delta\varphi_2^{(e)}$  što znači da izrazi u zagradama moraju biti jednaki nuli,

$$\int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \left( N_1^{(e)} q^{(e)} + \frac{dN_1^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx - K_{z_1}^{(e)} = 0, \quad (5.2.9)$$

$$\int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \left( N_2^{(e)} q^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx - M_1^{(e)} = 0, \quad (5.2.10)$$

$$\int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \left( N_3^{(e)} q^{(e)} + \frac{dN_3^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx - K_{z_2}^{(e)} = 0, \quad (5.2.11)$$

$$\int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} M^{(e)} dx - \int_0^{L^{(e)}} \left( N_4^{(e)} q^{(e)} + \frac{dN_4^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx - M_2^{(e)} = 0. \quad (5.2.12)$$

U dobivene jednadžbe možemo uvrstiti izraz za moment s uvrštenom drugom derivacijom pretpostavljene kubične razdiobe polja poprečnih pomaka, (5.2.6),

$$M^{(e)}(x) = -(EI)^{(e)}(x) \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2^{(e)} \right), \quad (5.2.13)$$

pa slijede četiri jednadžbe

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} (EI)^{(e)}(x) \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2^{(e)} \right) dx \\ & + \int_0^{L^{(e)}} \left( N_1^{(e)} q^{(e)} - \frac{dN_1^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx + K_{z_1}^{(e)} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} (EI)^{(e)}(x) \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2^{(e)} \right) dx \\ & + \int_0^{L^{(e)}} \left( N_2^{(e)} q^{(e)} - \frac{dN_2^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx + M_1^{(e)} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} (EI)^{(e)}(x) \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2^{(e)} \right) dx \\ & + \int_0^{L^{(e)}} \left( N_3^{(e)} q^{(e)} - \frac{dN_3^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx + K_{z_2}^{(e)} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^{(e)}} \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} (EI)^{(e)}(x) \left( \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1^{(e)} + \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1^{(e)} + \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2^{(e)} + \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2^{(e)} \right) dx \\ & + \int_0^{L^{(e)}} \left( N_4^{(e)} q^{(e)} - \frac{dN_4^{(e)}}{dx} m^{(e)} \right) dx + M_2^{(e)} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Takav sustav jednadžbi možemo zapisati u obliku

$$\left\{ \int_0^{L^{(e)}} (EI)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} w_1^{(e)} \\ \varphi_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \varphi_2^{(e)} \end{bmatrix} = \int_0^{L^{(e)}} \begin{bmatrix} q^{(e)} N_1^{(e)} - m^{(e)} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \\ q^{(e)} N_2^{(e)} - m^{(e)} \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \\ q^{(e)} N_3^{(e)} - m^{(e)} \frac{dN_3^{(e)}}{dx} \\ q^{(e)} N_4^{(e)} - m^{(e)} \frac{dN_4^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} K_{z_1}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ K_{z_2}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (5.2.18)$$

što je zapravo jednadžba standardnog oblika

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}. \quad (5.2.19)$$

gdje je  $\mathbf{w}^{(e)}$  elementarni vektor nepoznatih pomaka (poprečnih pomaka i kuteva zaokreta čvorova konačnog elementa  $(e)$ ),  $\mathbf{q}^{(e)}$  elementarni vektor opterećenja elementa  $(e)$  i  $\mathbf{k}^{(e)}$  vektor zadanih koncentriranih sila i koncentriranih momenata savijanja u čvorovima elementa  $(e)$ . Elementarni vektor opterećenja za gredni konačni element  $(e)$  općenito glasi

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_{(e)} \left[ q^{(e)} (\mathbf{N}^{(e)})^T - m^{(e)} \left( \frac{d\mathbf{N}^{(e)}}{dx} \right)^T \right] dx, \quad (5.2.20)$$

a elementarnu matricu krutosti grednog konačnog elementa  $\mathbf{K}^{(e)}$  možemo izraziti, uz definiranu matricu konstitucije  $(EI)^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)}$  i matricu deformacije savijanja  $\mathbf{B}^{(e)}$  grednog konačnog elementa  $(e)$

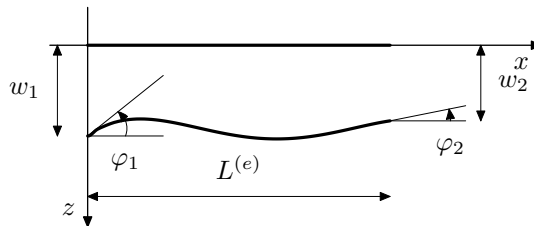
$$\mathbf{B}^{(e)} = -\frac{d^2 \mathbf{N}^{(e)}}{dx^2} = -\begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} & \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad (5.2.21)$$

pomoću općenitog izraza

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{(e)} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx. \quad (5.2.22)$$

### 5.2.2. Elementarna matrica krutosti grednog konačnog elementa

Gredni konačni element  $(e)$  duljine  $L^{(e)}$  konačni je element koji ima četiri stupnja slobode, poprečne pomake (progibe) i kuteve zaokreta oba krajnja čvora elementa. Lokalni koordinatni sustav postavljamo



Slika 5.2.2: Gredni konačni element duljine  $L^{(e)}$

tako da je ishodište u početnom čvoru konačnog elementa  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L^{(e)}$ , a lokalna je koordinatna os  $x$  usmjerena u smjeru težišne osi elementa. Lokalna poprečna os  $z$  zajedno s lokalnom osi  $y$  (usmjerenom od ravnine promatranja prema nama) predstavlja desni koordinatni sustav. Za funkciju pomaka točaka unutar elementa pretpostavljamo da je kubični polinom

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{a}, \quad (5.2.23)$$

a za kut zaokreta

$$\varphi(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = -(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} -a_1 \\ -2a_2 \\ -3a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \Phi \bar{\mathbf{a}}. \quad (5.2.24)$$

Polje pomaka je klase  $C^1$  na području konstrukcije (neprekidno i neprekidna derivacija). Koeficijente polinoma odredimo iz vrijednosti pomaka i zaokreta u čvorovima konačnog elementa ( $w(0) = w_1, w(L^{(e)}) = w_2, \varphi(0) = \varphi_1, \varphi(L^{(e)}) = \varphi_2$ ). Uvrštavanjem vrijednosti u jednadžbe (5.2.23) i (5.2.24) dobivamo sustav jednadžbi za nepoznate koeficijente vektora  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (5.2.25)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L^{(e)} & L^{(e)2} & L^{(e)3} \\ 0 & -1 & -2L^{(e)} & -3L^{(e)2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (5.2.26)$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi vektor nepoznatih koeficijenata

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (5.2.27)$$

Uvrštavanjem izraza (5.2.27) u jednadžbu (5.2.23) slijedi

$$w = \Phi \mathbf{A}^{-1} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (5.2.28)$$

Poprečne pomake točaka duž konačnog elementa ( $e$ ) zapravo smo izrazili kao linearnu kombinaciju poprečnih pomaka i zaokreta čvorova

$$w(x) = N_1^{(e)}(x)w_1 + N_2^{(e)}(x)\varphi_1 + N_3^{(e)}(x)w_2 + N_4^{(e)}(x)\varphi_2 = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (5.2.29)$$

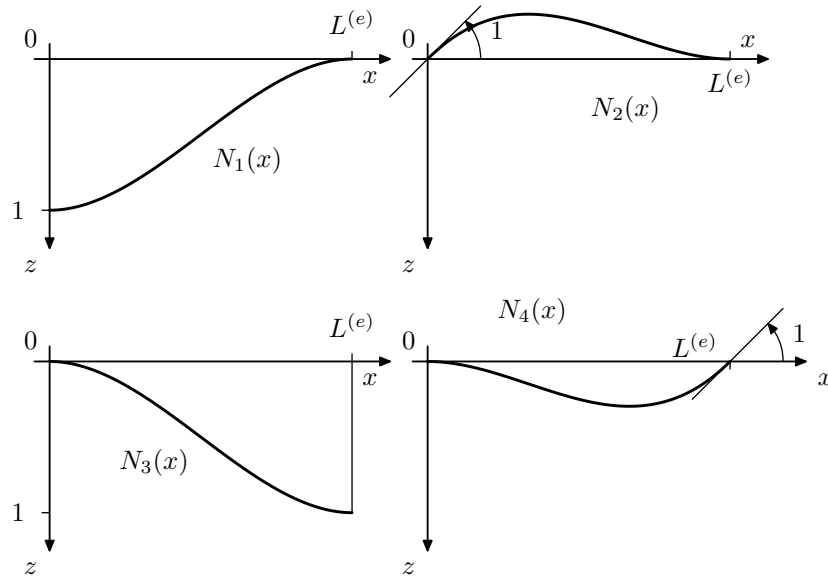
pri čemu je elementarna matrica funkcija oblika  $\mathbf{N}^{(e)}$  eksplicitno izražena u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(e)} &= \begin{bmatrix} N_1^{(e)}(x) & N_2^{(e)}(x) & N_3^{(e)}(x) & N_4^{(e)}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}} & -x + \frac{2x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}} & \frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}} & \frac{x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Elementarni vektor deformacije savijanja  $\mathbf{B}^{(e)}$  potreban za proračun elementarne matrice krutosti na temelju varijacijske formulacije dobivamo kao negativnu drugu derivaciju matrice  $\mathbf{N}^{(e)}$

$$\mathbf{B}^{(e)} = -\frac{d^2 \mathbf{N}^{(e)}}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^{(e)2}} - \frac{12x}{L^{(e)3}} & -\frac{4}{L^{(e)}} + \frac{6x}{L^{(e)2}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} + \frac{12x}{L^{(e)3}} & -\frac{2}{L^{(e)}} + \frac{6x}{L^{(e)2}} \end{bmatrix}. \quad (5.2.31)$$

Uz matricu elastičnosti,  $\mathbf{D}^{(e)} = [EI]^{(e)}$ , konstantnu duž konačnog elementa ( $e$ ) podintegralne funkcije

Slika 5.2.3: Elementarne funkcije oblika  $N_1, N_2, N_3, N_4$  za gredni konačni element

su polinomi drugog stupnja, uz dvije točke integracije, slijedi elementarna matrica krutosti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(e)} &= \int_0^{L(e)} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \\
 &= [EI]^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L(e)^3} & -\frac{6}{L(e)^2} & -\frac{12}{L(e)^3} & -\frac{6}{L(e)^2} \\ -\frac{6}{L(e)^2} & \frac{4}{L(e)} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{2}{L(e)} \\ -\frac{12}{L(e)^3} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{12}{L(e)^3} & \frac{6}{L(e)^2} \\ -\frac{6}{L(e)^2} & \frac{2}{L(e)} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{4}{L(e)} \end{bmatrix}. \quad (5.2.32)
 \end{aligned}$$

### 5.2.3. Elementarni vektor opterećenja grednog konačnog elementa

Elementarni vektor opterećenja grednog konačnog elementa izračunamo prema izrazu (5.2.20),

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_0^{L(e)} q(x) [\mathbf{N}^{(e)}]^T dx, \quad (5.2.33)$$

Za kubični gredni konačni element slijedi elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} q(x) [\mathbf{N}^{(e)}]^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(-x + \frac{2x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(\frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(\frac{x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \end{bmatrix}. \quad (5.2.34)$$

Za poseban slučaj jednoliko kontinuiranog opterećenja duž konačnog elementa  $(e)$ ,  $q(x) = q$ , pod-integralne funkcije su polinomi trećeg stupnja, uz dvije točke integracije, slijedi elementarni vektor opterećenja,

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{qL^{(e)}}{2} \\ -\frac{qL^{(e)2}}{12} \\ \frac{qL^{(e)}}{2} \\ \frac{qL^{(e)2}}{12} \end{bmatrix}. \quad (5.2.35)$$

### 5.3. Proračun unutarnjih sila po duljini i u čvorovima grednog konačnog elementa

Za moment u nekom poprečnom presjeku grede prema linearnoj teoriji elastičnosti vrijedi izraz

$$M(x) = -EIw''(x). \quad (5.3.1)$$

Potrebnu deformaciju savijanja imamo iskazanu vektorom deformacije savijanja,  $\mathbf{B}^{(e)}$ , (5.2.21). Zbog toga vrijednost momenta u bilo kojoj točki grednog konačnog elementa možemo izračunati uvrštavanjem lokalne koordinate presjeka  $x$  u izraz

$$M^{(e)}(x) = [EI]^{(e)}(x) \left(\mathbf{B}^{(e)}(x)\right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad (5.3.2)$$

gdje je  $\mathbf{w}^{(e)}$  vektor pomaka (progiba i zaokreta) čvorova promatranog konačnog elementa, a  $\mathbf{B}^{(e)}$  vektor deformacije savijanja. Dobivena momentna funkcija prikazuje linearnu razdiobu momenta duž konačnog elementa. Kod izravno poprečno neopterećenih elemenata takva linearna razdioba jednaka je analitičkoj momentnoj funkciji. Kod izravno poprečno opterećenih elemenata analitička momentna funkcija nije linearna što dovodi do odstupanja ovakvog prikaza od analitičke funkcije. Povećanjem broja konačnih elemenata dobivamo točnije rješenje s kvadratnom konvergencijom (dvostruko manja duljina konačnog elementa povlači četiri puta manju pogrešku). Kod opterećenih elemenata možemo dobiti momentnu funkciju jednaku analitičkoj funkciji ako izraz (5.3.2) korigiramo korekcijskim članom  $M_0(x)$ , utjecajem opterećenja i elementarnog vektora opterećenja na momentnu funkciju,

$$M^{(e)}(x) = [EI]^{(e)}(x) \left(\mathbf{B}^{(e)}(x)\right) \mathbf{w}^{(e)} + M_0(x). \quad (5.3.3)$$

Za jednoliko kontinuirano opterećenje  $q(x) = q$  taj utjecaj iznosi

$$M_0(x) = -\frac{qL^{(e)2}}{12} + \frac{qL^{(e)}}{2}x - \frac{qx^2}{2}, \quad (5.3.4)$$

a općenito korekcijski član možemo iskazati kao

$$M_0(x) = \int_0^{L^{(e)}} q(\zeta)N_2(\zeta)d\zeta + x \cdot \int_0^{L^{(e)}} q(\zeta)N_1(\zeta)d\zeta - \int_0^x q(\zeta)\zeta d\zeta. \quad (5.3.5)$$

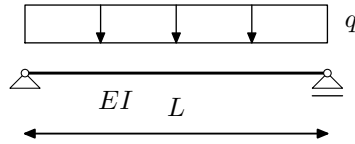
Korekcijski član slijedi izravno iz lokalne jednadžbe ravnoteže promatranog grednog konačnog elementa ( $e$ ).

Za dobivanje iznosa sila (poprečnih sila i momenata) u čvorovima grednog konačnog elementa potrebno je promatrati ravnotežu pripadnog elementa. Sile u čvorovima grednog konačnog elementa slijede prema izrazu

$$\mathbf{S}^{(e)} = \begin{bmatrix} T_{ik}^{(e)} \\ M_{ik}^{(e)} \\ T_{ki}^{(e)} \\ M_{ki}^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)}. \quad (5.3.6)$$

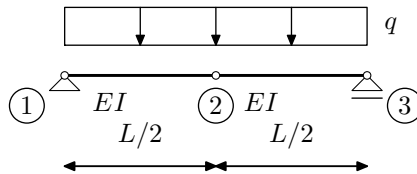
#### 5.4. Primjeri

**Primjer 5.4.1.** Zadana je slobodno oslonjena greda raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ . Potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona grede i sile u defniranim čvorovima.



Slika 5.4.1.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$

Zadanu slobodno oslonjenu gredu podijelimo na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L/2$ . Za svaki element možemo, prema (5.2.32) i (5.2.35), uz  $L^{(e)} = L/2$ , napisati



Slika 5.4.1.2: Podjela grede na konačne elemente

pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \quad (5.4.1.1)$$

i elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{1-2} = \mathbf{q}^{2-3} = \left[ \frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2}{48} \quad \frac{qL}{4} \quad \frac{qL^2}{48} \right]^T. \quad (5.4.1.2)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i elementarnih vektora opterećenja slijede globalna matrica

krutosti i globalni vektor opterećenja zadanog sustava

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.4.1.3)$$

$$\mathbf{q} = \left[ \frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2}{48} \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL}{4} \quad \frac{qL^2}{48} \right]^T. \quad (5.4.1.4)$$

Uz rubne uvjete  $w_1 = w_3 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 \\ \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^2}{48} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{48} \end{bmatrix}. \quad (5.4.1.5)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [\varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T = \left[ -\frac{qL^3}{24EI} \quad \frac{5qL^4}{384EI} \quad 0 \quad \frac{qL^3}{24EI} \right]^T. \quad (5.4.1.6)$$

Sile u elementima izračunamo prema (5.3.6),

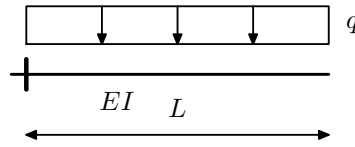
$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^3}{24EI} \\ \frac{5qL^4}{384EI} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2}{48} \\ \frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} \end{bmatrix}, \quad (5.4.1.7)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5qL^4}{384EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^3}{24EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2}{48} \\ \frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.1.8)$$

**Primjer 5.4.2.** Zadana je konzolna greda raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ . Potrebno je odrediti progib slobodnog kraja grede i moment na upetom ležaju grede.

Gredu možemo promatrati kao jedan konačni element duljine  $L$ . Elementarne matrice krutosti i elementarni vektor opterećenja ujedno su i globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja. Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$  i  $\varphi_1 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} \\ \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (5.4.2.1)$$



Slika 5.4.2.1: Konzolna greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

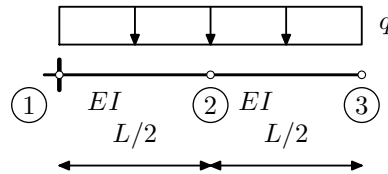
Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [w_2 \quad \varphi_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{qL^4}{8EI} & -\frac{qL^3}{6EI} \end{bmatrix}^T. \quad (5.4.2.2)$$

Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} & -\frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} \\ -\frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^4}{8EI} \\ -\frac{qL^3}{6EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qL \\ \frac{qL^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.2.3)$$

Za izravno dobivanje progiba i zaokreta u sredini konzolne grede možemo podijeliti gredu na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki duljine  $L^{(e)} = L/2$ . Za svaki element možemo, prema



Slika 5.4.2.2: Podjela grede na konačne elemente

(5.2.32) i (5.2.35), uz  $L^{(e)} = L/2$ , napisati pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.4)$$

i elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{1-2} = \mathbf{q}^{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{4} & -\frac{qL^2}{48} & \frac{qL}{4} & \frac{qL^2}{48} \end{bmatrix}^T. \quad (5.4.2.5)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i elementarnih vektora opterećenja slijede globalna matrica



krutosti i globalni vektor opterećenja zadanog sustava,

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.4.2.6)$$

$$\mathbf{q} = \left[ \frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2}{48} \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL}{4} \quad \frac{qL^2}{48} \right]^T. \quad (5.4.2.7)$$

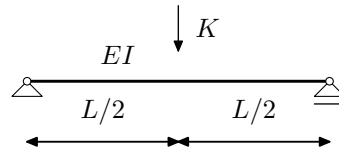
Uz rubne uvjete  $w_1 = 0$  i  $\varphi_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2}{48} \end{bmatrix}. \quad (5.4.2.8)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [w_2 \quad \varphi_2 \quad w_3 \quad \varphi_3]^T = \left[ \frac{17qL^4}{384EI} \quad -\frac{7qL^3}{48EI} \quad \frac{qL^4}{8EI} \quad -\frac{qL^3}{6EI} \right]^T. \quad (5.4.2.9)$$

**Primjer 5.4.3.** Zadana je slobodno oslonjena greda raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini raspona. Potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona grede.



Slika 5.4.3.1: Slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Podijelimo gredu na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L/2$ . Elementarne matrice krutosti i globalna matrica krutosti ne ovise o opterećenju što povlači da su elementarne matrice krutosti i globalna matrica krutosti jednake kao i u slučaju slobodno oslonjene grede opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.3.1)$$

Za koncentrirano djelovanje u globalnom vektoru opterećenja stavljamo iznos koncentriranog djelovanja u redak koji odgovara pripadnom stupnju slobode (u ovom primjeru to znači u smjeru progiba  $w_2$ ). Uz rubne uvjete  $w_1 = w_3 = 0$ , sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 \\ \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.3.2)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

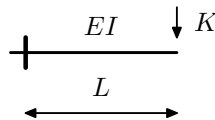
$$\mathbf{w} = [\varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16EI} & \frac{KL^3}{48EI} & 0 & \frac{KL^2}{16EI} \end{bmatrix}^T. \quad (5.4.3.3)$$

Sile u elementima izračunamo prema (5.3.6),

$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{KL^2}{16EI} \\ \frac{KL^3}{48EI} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ 0 \\ \frac{K}{2} \\ \frac{KL}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.4.3.4)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{48EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{4} \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.3.5)$$

**Primjer 5.4.4.** Zadana je konzolna greda raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećena koncentriranom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti progib slobodnog kraja grede i moment na upetom ležaju grede.



Slika 5.4.4.1: Konzolna greda opterećena koncentriranom silom na slobodnom kraju

Gredu možemo promatrati kao jedan konačni element duljine  $L$ . Elementarne matrice krutosti i globalna matrica krutosti ne ovise o opterećenju što povlači da su elementarne matrice krutosti i globalna matrica krutosti jednake kao i u slučaju slobodno oslonjene grede opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem. Za koncentrirano djelovanje u globalnom vektoru opterećenja stavljamo iznos koncentriranog djelovanja u redak koji odgovara pripadnom stupnju slobode (u ovom primjeru to znači u smjeru progiba  $w_2$ ). Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$  i  $\varphi_1 = 0$ , slijedi sustav jednažbi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.4.1)$$

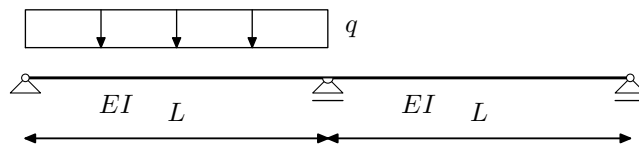
Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [w_2 \quad \varphi_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{3EI} & -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix}^T. \quad (5.4.4.2)$$

Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

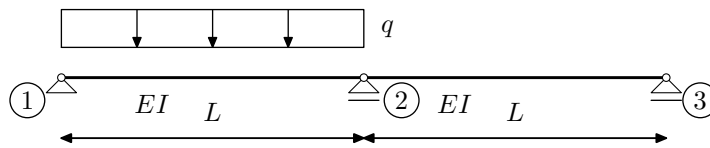
$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{KL^3}{3EI} \\ -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ KL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.4.3)$$

**Primjer 5.4.5.** Zadan je dvopoljni kontinuirani nosač, oba polja raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećen jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$  u prvom polju. Potrebno je odrediti moment nad srednjim ležajem.



Slika 5.4.5.1: Dvopoljni kontinuirani nosač

Podijelimo nosač na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L$ . Za svaki



Slika 5.4.5.2: Podjela nosača na konačne elemente

element možemo, prema (5.2.32), uz  $L^{(e)} = L$ , napisati pripadnu elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.5.1)$$

Elementarni vektor opterećenja za prvi, opterećeni element prema jednadžbi (5.2.35) glasi

$$\mathbf{q}^{1-2} = \left[ \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \right]^T, \quad (5.4.5.2)$$

dok je za drugi neopterećeni element jednak nul-vektoru,  $\mathbf{q}^{2-3} = \mathbf{0}$ . Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i elementarnih vektora opterećenja slijede globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja

zadanog sustava

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{8}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.4.5.3)$$

$$\mathbf{q} = \left[ \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad 0 \quad 0 \right]^T. \quad (5.4.5.4)$$

Uz rubne uvjete  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & \frac{2}{L} & 0 \\ \frac{2}{L} & \frac{8}{L} & \frac{2}{L} \\ 0 & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.5.5)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T = \left[ -\frac{qL^3}{32EI} \quad \frac{qL^3}{48EI} \quad -\frac{qL^3}{96EI} \right]^T. \quad (5.4.5.6)$$

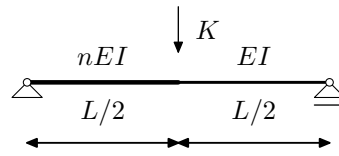
Sile u elementima izračunamo prema jednadžbi (5.3.6),

$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} & -\frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} \\ -\frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^3}{32EI} \\ 0 \\ \frac{qL^3}{48EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7qL}{16} \\ 0 \\ -\frac{9qL}{16} \\ -\frac{qL^2}{16} \end{bmatrix}, \quad (5.4.5.7)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} & -\frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} \\ -\frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} \\ -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{2}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^3}{48EI} \\ 0 \\ -\frac{qL^3}{96EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{16} \\ \frac{qL^2}{16} \\ \frac{qL}{16} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.5.8)$$

**Primjer 5.4.6.** Zadana je složena slobodno oslonjena greda raspona  $L$ , krutosti  $nEI$  na dijelu  $[0, L/2]$  i krutosti  $EI$  na dijelu  $[L/2, L]$ , opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini raspona. Potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona grede.

Zbog promjene krutosti u sredini raspona, gredu podijelimo gredu na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L/2$ . Elementarne matrice krutosti za svaki dio grede slijede prema



Slika 5.4.6.1: Složena slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

(5.2.32),

$$\mathbf{K}^{1-2} = nEI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.4.6.1)$$

$$\mathbf{K}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.6.2)$$

Uklapanjem elementarnih matrica, uz rubne uvjete  $w_1 = w_3 = 0$ , sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{8n}{L} & \frac{24n}{L^2} & \frac{4n}{L} & 0 \\ \frac{24n}{L^2} & \frac{96(n+1)}{L^3} & \frac{24(n-1)}{L^2} & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{4n}{L} & \frac{24(n-1)}{L^2} & \frac{8(n+1)}{L} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.6.3)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [\varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T = \left[ -\frac{KL^2(n+2)}{48nEI} \quad \frac{KL^3(n+1)}{96nEI} \quad -\frac{KL^2(n-1)}{48nEI} \quad \frac{KL^2(2n+1)}{48nEI} \right]^T. \quad (5.4.6.4)$$

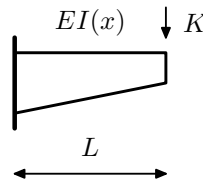
Dobivene vrijednosti jednake su analitičkom rješenju.

Sile u elementima izračunamo prema (5.3.6),

$$\mathbf{S}^{1-2} = nEI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KL^2(n+2)}{48nEI} \\ \frac{KL^3(n+1)}{96nEI} \\ -\frac{KL^2(n-1)}{48nEI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ 0 \\ \frac{K}{2} \\ \frac{KL}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.4.6.5)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{KL^3(n+1)}{96nEI} \\ -\frac{KL^2(n-1)}{48nEI} \\ 0 \\ \frac{KL^2(2n+1)}{48nEI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{4} \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.6.7)$$

**Primjer 5.4.7.** Zadana je konzolna greda raspona  $L$ , opterećena koncentriranom silom  $K$  na slobodnom kraju, linearno promjenljive visine poprečog presjeka,  $H(x) = H_0 \frac{2L-x}{L}$ . Potrebno je odrediti progib slobodnog kraja grede i moment na upetom ležaju grede.



Slika 5.4.7.1: Konzolna greda linearno promjenljive visine poprečog presjeka opterećena koncentriranom silom na slobodnom kraju

Analitička vrijednost progiba na slobodnom kraju konzole iznosi

$$w_L = \frac{KL^3}{EI_0} \left( \log 2 - \frac{5}{8} \right) = 0.0681472 \frac{KL^3}{EI_0}. \quad (5.4.7.1)$$

Linearna promjena visine poprečog presjeka znači kubičnu promjenu momenta inercije  $I(x) = I_0 \frac{(2L-x)^3}{L^3}$  i kubičnu promjenu krutosti. Greda možemo promatrati kao jedan konačni element duljine  $L$ . Elementarna matrica krutosti slijedi prema (5.2.32). Podintegralne funkcije su polinomi petog stupnja i analitička vrijednost integrala slijedi uz tri točke integracije. Elementarna matrica krutosti za zadanu greda linearno promjenljive visine poprečog presjeka iznosi

$$\mathbf{K}^{(e)} = EI_0 \begin{bmatrix} \frac{243}{5L^3} & -\frac{156}{5L^2} & -\frac{243}{5L^3} & -\frac{87}{5L^2} \\ -\frac{156}{5L^2} & \frac{114}{5L} & \frac{156}{5L^2} & \frac{42}{5L} \\ -\frac{243}{5L^3} & \frac{156}{5L^2} & \frac{243}{5L^3} & \frac{87}{5L^2} \\ -\frac{87}{5L^2} & \frac{42}{5L} & \frac{87}{5L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.7.2)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$  i  $\varphi_1 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$EI_0 \begin{bmatrix} \frac{243}{5L^3} & \frac{87}{5L^2} \\ \frac{87}{5L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.7.3)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [w_2 \quad \varphi_2]^T = \left[ \frac{25KL^3}{324EI} \quad -\frac{145KL^2}{1122EI} \right]^T. \quad (5.4.7.4)$$

Dobiveni iznos progiba kraja konzole,  $w_2 = 0.0668449 \frac{KL^3}{EI_0}$ , odstupa 1.91% od analitičkog rješenja.

Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{243}{5L^3} & -\frac{156}{5L^2} & -\frac{243}{5L^3} & -\frac{87}{5L^2} \\ -\frac{156}{5L^2} & \frac{114}{5L} & \frac{156}{5L^2} & \frac{42}{5L} \\ -\frac{243}{5L^3} & \frac{156}{5L^2} & \frac{243}{5L^3} & \frac{87}{5L^2} \\ -\frac{87}{5L^2} & \frac{42}{5L} & \frac{87}{5L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{25KL^3}{324EI} \\ -\frac{145KL^2}{1122EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ KL \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.7.5)$$

Za dobivanje točnije vrijednosti progiba možemo gredu podijeliti na dva konačna elementa. Za element 1 – 2 elementarna krutosti slijedi, uz  $L^{(e)} = \frac{L}{2}$  i  $I(x) = I_0 \frac{(2L-x)^3}{L^3}$  (jer je ishodište lokalnog koordinatnog sustava jednako ishodištu globalnog koordinatnog sustava),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{1-2} &= \int_0^{\frac{L}{2}} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \\ &= EI_0 \begin{bmatrix} \frac{2667}{5L^3} & -\frac{759}{5L^2} & -\frac{2667}{5L^3} & -\frac{1149}{10L^2} \\ -\frac{759}{5L^2} & \frac{107}{2L} & \frac{759}{5L^2} & \frac{112}{5L} \\ -\frac{2667}{5L^3} & \frac{759}{5L^2} & \frac{2667}{5L^3} & \frac{1149}{10L^2} \\ -\frac{1149}{10L^2} & \frac{112}{5L} & \frac{1149}{10L^2} & \frac{701}{20L} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.7.6)$$

Za element 2 – 3 potrebno je definirati funkciju promjene krutost grede uzevši u obzir da je ishodište lokalnog sustava pomaknuto u čvor 2. Moment inercije za element 2 – 3 u lokalnom koordinatnom sustavu glasi  $I(x) = I_0 \frac{(3L/2-x)^3}{L^3}$ . Elementarna krutosti slijedi, uz  $L^{(e)} = \frac{L}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{2-3} &= \int_0^{\frac{L}{2}} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \\ &= EI_0 \begin{bmatrix} \frac{201}{L^3} & -\frac{597}{10L^2} & -\frac{201}{L^3} & -\frac{204}{5L^2} \\ -\frac{597}{10L^2} & \frac{427}{20L} & \frac{597}{10L^2} & \frac{17}{2L} \\ -\frac{201}{L^3} & \frac{597}{10L^2} & \frac{201}{L^3} & \frac{204}{5L^2} \\ -\frac{204}{5L^2} & \frac{17}{2L} & \frac{204}{5L^2} & \frac{119}{10L} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.7.7)$$

Uklapanjem elementarnih matrica, uz rubne uvjete  $w_1 = \varphi_1 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$EI_0 \begin{bmatrix} \frac{3672}{5L^3} & \frac{276}{5L^2} & -\frac{201}{L^3} & -\frac{204}{5L^2} \\ \frac{276}{5L^2} & \frac{282}{5L} & \frac{597}{10L^2} & \frac{17}{2L} \\ -\frac{201}{L^3} & \frac{597}{10L^2} & \frac{201}{L^3} & \frac{204}{5L^2} \\ -\frac{204}{5L^2} & \frac{17}{2L} & \frac{204}{5L^2} & \frac{119}{10L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.7.8)$$

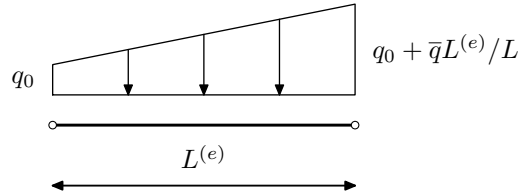
Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \left[ 0.0168736 \frac{KL^3}{EI_0} \quad -0.0694619 \frac{KL^2}{EI_0} \quad 0.0679313 \frac{KL^3}{EI_0} \quad -0.125563 \frac{KL^2}{EI_0} \right]^T. \quad (5.4.7.9)$$

Dobiveni iznos progiba kraja konzole,  $w_3 = 0.0679313 \frac{KL^3}{EI_0}$ , odstupa 0.32% od analitičkog rješenja.

**Primjer 5.4.8.** *Odrediti vektor upetoati grednog konačnog elementa za trapezno opterećenje.*

Promatramo konačni element duljine  $L^{(e)}$  na koji djeluje trapezno opterećenje  $q(x) = q_0 + \frac{\bar{q}}{L}x$ .



Slika 5.4.8.1: Konačni element duljine  $L^{(e)}$  opterećen trapeznim opterećenjem

Elementarni vektor opterećenja izračunamo prema izrazu (5.2.20),

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(e)} &= \int_0^{L^{(e)}} q(x) [\mathbf{N}^{(e)}]^T dx = \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(-x + \frac{2x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(\frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q(x) \left(\frac{x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} q_0 \left(1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q_0 \left(-x + \frac{2x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q_0 \left(\frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} q_0 \left(\frac{x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^{L^{(e)}} \frac{\bar{q}x}{L} \left(1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} \frac{\bar{q}x}{L} \left(-x + \frac{2x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} \frac{\bar{q}x}{L} \left(\frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}}\right) dx \\ \int_0^{L^{(e)}} \frac{\bar{q}x}{L} \left(\frac{x^2}{L^{(e)}} - \frac{x^3}{L^{(e)2}}\right) dx \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.8.1)$$

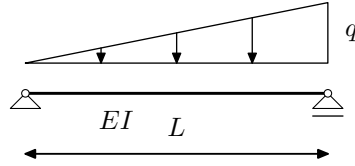
Za dobivanje analitičkih vrijednosti prikazanih integrala, podintegralne funkcije polinomi su četvrtog stupnja, nužna je integracija s tri točke integracije. Iz toga slijedi elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{q_0 L^{(e)}}{2} + \frac{3\bar{q}L^{(e)2}}{20L} \\ -\frac{q_0 L^{(e)2}}{12} - \frac{\bar{q}L^{(e)3}}{30L} \\ \frac{q_0 L^{(e)}}{2} + \frac{7\bar{q}L^{(e)2}}{20L} \\ \frac{q_0 L^{(e)2}}{12} + \frac{\bar{q}L^{(e)3}}{20L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.8.2)$$

**Primjer 5.4.9.** *Zadana je slobodno oslonjena greda raspona  $L$ , krutosti  $EI$ , opterećena linearno distribuiranim (trokutnim) opterećenjem  $q(x) = \frac{qx}{L}$ . Potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona grede i sile u definiranim čvorovima.*

Podijelimo gredu na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L/2$ . Elementarne matrice krutosti i globalna matrica krutosti ne ovise o opterećenju što povlači da su elementarne matrice



Slika 5.4.9.1: Slobodno oslonjena greda opterećena trokutnim opterećenjem  $\frac{qx}{L}$ 

krutosti i globalna matrica krutosti jednake kao i u slučaju slobodno oslonjene grede opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}. \quad (5.4.9.1)$$

Vektor opterećenja za svaki konačni element možemo izračunati prema izrazu u prethodnom primjeru, 5.4.8.2, uz  $L^{(e)} = L/2$ ,  $\bar{q} = q$ , a  $q_0 = 0$  za element 1 – 2 te  $q_0 = q/2$  za element 2 – 3,

$$\mathbf{q}^{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{3qL}{80} \\ -\frac{qL^2}{240} \\ \frac{7qL}{80} \\ \frac{qL^2}{160} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{8} + \frac{3qL}{80} \\ -\frac{qL^2}{96} - \frac{qL^2}{120} \\ \frac{qL}{8} + \frac{7qL}{80} \\ \frac{qL^2}{96} + \frac{qL^2}{160} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13qL}{80} \\ -\frac{7qL^2}{480} \\ \frac{17qL}{80} \\ \frac{qL^2}{60} \end{bmatrix}. \quad (5.4.9.2)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i elementarnih vektora opterećenja slijede globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja zadanog sustava

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.4.9.3)$$

$$\mathbf{q} = \left[ \frac{3qL}{80} \quad -\frac{qL^2}{240} \quad \frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2}{120} \quad \frac{17qL}{80} \quad \frac{qL^2}{60} \right]^T. \quad (5.4.9.4)$$

Uz rubne uvjete  $w_1 = w_3 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 \\ \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^2}{240} & \frac{qL}{4} & -\frac{qL^2}{120} & \frac{qL^2}{60} \end{bmatrix}. \quad (5.4.9.5)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [\varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T = \begin{bmatrix} -\frac{7qL^3}{360EI} & \frac{5qL^4}{768EI} & -\frac{7qL^3}{5760EI} & \frac{qL^3}{45EI} \end{bmatrix}^T. \quad (5.4.9.6)$$

Sile u elementima izračunamo prema (5.3.6),

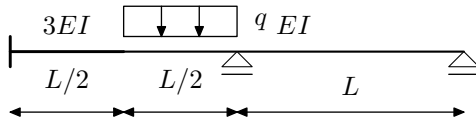
$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7qL^3}{360EI} \\ \frac{5qL^4}{768EI} \\ -\frac{7qL^3}{5760EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3qL}{80} \\ -\frac{qL^2}{240} \\ \frac{7qL}{80} \\ \frac{qL^2}{160} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{6} \\ 0 \\ \frac{qL}{24} \\ \frac{qL^2}{16} \end{bmatrix}, \quad (5.4.9.7)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5qL^4}{768EI} \\ -\frac{7qL^3}{5760EI} \\ 0 \\ \frac{qL^3}{45EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{qL}{5} \\ -\frac{7qL^2}{480} \\ \frac{17qL}{80} \\ \frac{qL^2}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{24} \\ -\frac{qL^2}{16} \\ -\frac{qL}{3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.9.8)$$

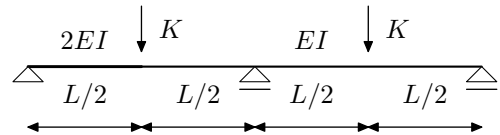
## 5.5. Zadaci

U zadacima je potrebno za zadane poprečno opterećene grede, odrediti poprečne pomake i zaokrete čvorova te sile u čvorovima definiranih konačnih elemenata.

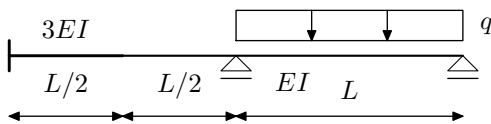
**Zadatak 5.5.1.**



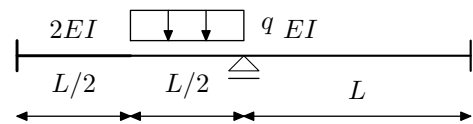
**Zadatak 5.5.4.**



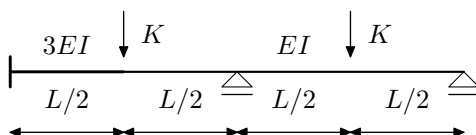
**Zadatak 5.5.2.**



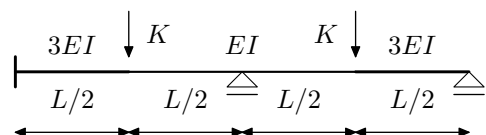
**Zadatak 5.5.5.**



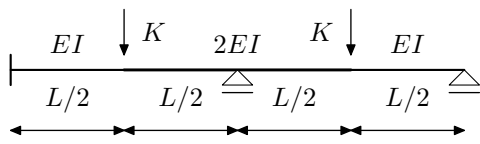
**Zadatak 5.5.3.**



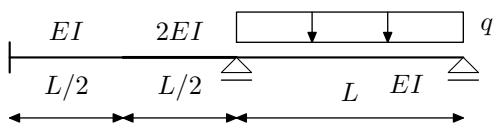
**Zadatak 5.5.6.**



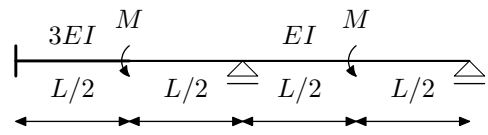
Zadatak 5.5.7.



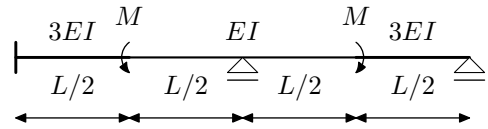
Zadatak 5.5.8.



Zadatak 5.5.9.



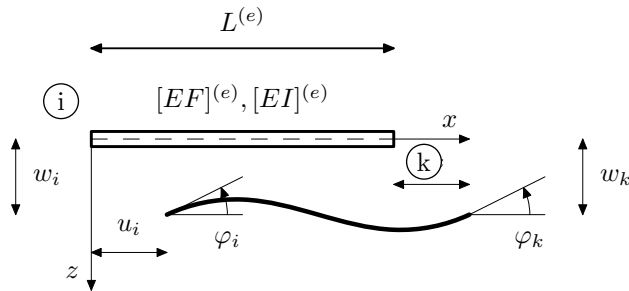
Zadatak 5.5.10.



## 6. Konačni element za okvirne konstrukcije

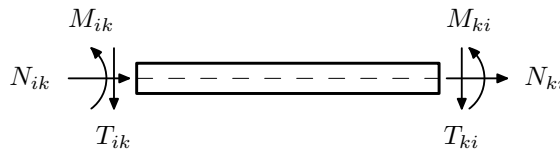
### 6.1. Elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije

Konačni element za okvirne konstrukcije ( $e$ ) duljine  $L^{(e)}$ , uzdužne krutosti  $[EF]^{(e)}$  i krutosti na savijanje  $[EI]^{(e)}$  konačni je element sa šest stupnjeva slobode, uzdužnim pomacima, poprečnim pomacima i kutevima zaokreta oba krajnja čvora konačnog elementa.



Slika 6.1.1: Pomaci čvorova okvirnog konačnog elementa

U čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije djeluju uzdužna sila, poprečna sila i moment savijanja. Elementarna matrica krutosti za konačni element okvirne konstrukcije matrica je uklopljena



Slika 6.1.2: Sile u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije

od elementarnih matrica krutosti konačnog elementa uzdužno opterećene grede i konačnog elementa poprečno opterećene grede iste duljine  $L^{(e)}$ , uzdužne krutosti  $[EF]^{(e)}$  i krutosti na savijanje  $[EI]^{(e)}$ . Lokalni koordinatni sustav postavljamo tako da je ishodište u početnom čvoru konačnog elementa i slijedi elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (6.1.1)$$

Prikazana elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije, (6.1.1), slijedi iz principa virtualnog rada, prema definiranim operatorima za uzdužnu i poprečno opterećenu gredu. Prirodne aproksimacije, uzdužnog pomaka linearnim polinomom, a poprečnog pomaka kubičnim polinomom,

mogü se prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ w^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^s & N_2^s & 0 & N_3^s & N_4^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (6.1.2)$$

pri čemu su  $N_i^u$  polinomi uzdužno opterećenog konačnog elementa, (4.2.21), a  $N_i^s$  polinomi poprečno opterećenog gređnog elementa, (5.2.30). Deformacijsku matricu  $\mathbf{B}^{(e)}$  definiramo kombiniranjem pripadnih diferencijalnih operatora uzdužno i poprečno opterećene gređe

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^u}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_1^u}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2N_1^s}{dx^2} & -\frac{d^2N_2^s}{dx^2} & 0 & -\frac{d^2N_3^s}{dx^2} & -\frac{d^2N_4^s}{dx^2} \end{bmatrix}. \quad (6.1.3)$$

Uz definiranu matricu elastičnosti za konačni element za okvirne konstrukcije,

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} [EF]^{(e)} & 0 \\ 0 & [EI]^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (6.1.4)$$

elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije slijedi sukladno prethodnim izrazima

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \quad (6.1.5)$$

## 6.2. Elementarni vektor opterećenja konačnog elementa za okvirne konstrukcije

Elementarni vektor opterećenja konačnog elementa za okvirne konstrukcije izračunamo kombiniranjem prethodno izračunatih vektora za uzdužno i poprečno opterećenu gređu, uz uzdužno opterećenje  $n^{(e)}$ , poprečno opterećenje  $q^{(e)}$  i distribuirani moment  $m^{(e)}$ ,

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \left( n^{(e)} \begin{bmatrix} N_1^u \\ 0 \\ 0 \\ N_2^u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q^{(e)} \begin{bmatrix} 0 \\ N_1^s \\ N_2^s \\ 0 \\ N_3^s \\ N_4^s \end{bmatrix} - m^{(e)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dN_1^s}{dx} \\ \frac{dN_2^s}{dx} \\ 0 \\ \frac{dN_3^s}{dx} \\ \frac{dN_4^s}{dx} \end{bmatrix} \right) dx. \quad (6.2.1)$$

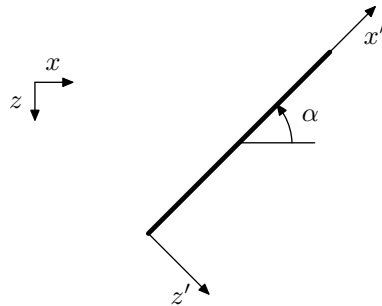
## 6.3. Proračun sila u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije

Za dobivanje iznosa sila (uzdužnih sila, poprečnih sila i momenata) u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije potrebno je promatrati ravnotežu pripadnog elementa. Sile u čvorovima slijede prema izrazu

$$\mathbf{S}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_{ik}^{(e)} \\ T_{ik}^{(e)} \\ M_{ik}^{(e)} \\ N_{ki}^{(e)} \\ T_{ki}^{(e)} \\ M_{ki}^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)}. \quad (6.3.1)$$

#### 6.4. Transformacija elementarne matrice krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije u globalni koordinatni sustav

Promatramo konačni element za okvirne konstrukcije duljine  $L^{(e)}$  u ravnini, u proizvoljnom položaju pod kutem  $\alpha$  u odnosu na os  $x$ , (Slika 6.4.1).



Slika 6.4.1: Okvirni element u ravnini

Neka su  $u_i^l, w_i^l, \varphi_i^l$  pomaci čvorova konačnog elementa za okvirne konstrukcije u lokalnom koordinatnom sustavu, a  $u_i^g, w_i^g, \varphi_i^g$  pomaci čvorova u globalnom koordinatnom sustavu,

$$\mathbf{w}^{(e)lok} = [u_i^l \quad w_i^l \quad \varphi_i^l \quad u_k^l \quad w_k^l \quad \varphi_k^l]^T, \quad \mathbf{w}^{(e)gl} = [u_i^g \quad w_i^g \quad \varphi_i^g \quad u_k^g \quad w_k^g \quad \varphi_k^g]^T. \quad (6.4.1)$$

Ako pomake čvorova u globalnom koordinatnom sustavu izrazimo pomoću pomaka čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu vrijedi odnos

$$w_j^g = u_j^l \cos \alpha + w_j^l \sin \alpha, \quad w_j^g = -u_j^l \sin \alpha + w_j^l \cos \alpha, \quad j = i, k, \quad (6.4.2)$$

a ako pomake čvorova u lokalnom koordinatnom sustavu izrazimo pomoću pomaka čvorova u globalnom koordinatnom sustavu pripadni odnos glasi

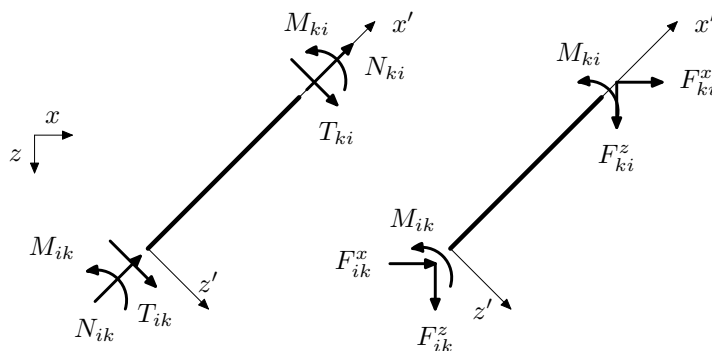
$$u_j^l = u_j^g \cos \alpha - w_j^g \sin \alpha, \quad w_j^l = u_j^g \sin \alpha + w_j^g \cos \alpha, \quad j = i, k. \quad (6.4.3)$$

Kutevi zaokreta čvorova jednaki su u oba koordinatna sustava zbog istog smjera koordinatne osi  $y$ .

Neka su vektori sila u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije definirani za lokalni koordinatni sustav,  $\mathbf{S}^{lok}$ , i za globalni koordinatni sustav,  $\mathbf{S}^{gl}$ ,

$$\mathbf{S}^{lokT} = [N_{ik} \quad T_{ik} \quad M_{ik} \quad N_{ki} \quad T_{ki} \quad M_{ki}], \quad \mathbf{S}^{glT} = [F_{ik}^x \quad F_{ik}^z \quad M_{ik} \quad F_{ki}^x \quad F_{ki}^z \quad M_{ki}]. \quad (6.4.4)$$

Za odnos definiranih sila u oba sustava vrijedi odnos kao i za pomake čvorova. Ako prebacujemo pomake



Slika 6.4.2: Sile okvirnog elementa u ravnini

čvorova iz lokalnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav slijedi

$$F_{ik}^x = N_{ik} \cos \alpha + T_{ik} \sin \alpha, \quad F_{ik}^z = -N_{ik} \sin \alpha + T_{ik} \cos \alpha, \quad (6.4.5)$$

ili ako pomake čvorova u globalnom koordinatnom sustavu prebacujemo u lokalni koordinatni sustav slijedi

$$N_{ik} = F_{ik}^x \cos \alpha - F_{ik}^z \sin \alpha, \quad T_{ik} = F_{ik}^x \sin \alpha + F_{ik}^z \cos \alpha. \quad (6.4.6)$$

Momenti u čvorovima jednaki su u oba koordinatna sustava zbog istog smjera koordinatne osi  $y$ . Prikazane relacije možemo prikazati i u matičnom zapisu

$$\mathbf{w}^{(e)gl} = \mathbf{R}^{lok \rightarrow gl} \mathbf{w}^{(e)lok}, \quad \mathbf{w}^{(e)lok} = \mathbf{R}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{w}^{(e)gl}, \quad (6.4.7)$$

pri čemu su matrice transformacije jednake (matrice transformacije su međusobno transponirane, ortogonalne matrice),

$$\mathbf{R}^{gl \rightarrow lok} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.4.8)$$

$$\mathbf{R}^{lok \rightarrow gl} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.4.9)$$

Transformacija elementarnog vektora opterećenja u globalni vektor opterećenja ide po načelu transformacije elementarnog vektora pomaka čvorova

$$\mathbf{q}^{gl} = \mathbf{R}^{lok \rightarrow gl} \mathbf{q}^{lok}, \quad \mathbf{q}^{lok} = \mathbf{R}^{gl \rightarrow lok} \mathbf{q}^{gl}, \quad (6.4.10)$$

uz iste matrice transformacije kao i kod transformacija pomaka čvorova.

U jednadžbu ravnoteže u lokalnom koordinatnom sustavu uvrstimo pripadne transformacije, uz  $\mathbf{R}^{gl \rightarrow lok} = \mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)lok} = \mathbf{q}^{(e)lok} \Rightarrow \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{w}^{(e)gl} = \mathbf{R} \mathbf{q}^{(e)gl}, \quad (6.4.11)$$

što možemo izraziti i u obliku

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{w}^{(e)gl} = \mathbf{q}^{(e)gl}. \quad (6.4.12)$$

Na taj način proizlazi elementarna matrica krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije ( $e$ ) u globalnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{K}^{(e)gl} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{R}. \quad (6.4.13)$$

Za vektor pomaka čvorova konačnog elementa za okvirne konstrukcije možemo definirati elemente vektora sukladno smjerovima globalnih koordinatnih osi

$$\mathbf{w}^{(e)gl} = [x_i \quad z_i \quad \varphi_i \quad x_k \quad z_k \quad \varphi_k]^T. \quad (6.4.14)$$

Za dobivanje iznosa sila (uzdužnih sila, poprečnih sila i momenata) u čvorovima konačnog elementa za okvirne konstrukcije potrebno je primijeniti ravnotežu pripadnog elementa pri čemu je matrica krutosti elementa u lokalnom koordinatnom sustavu, a dobiveni vektor pomaka čvorova tog elementa potrebno je transformirati iz globalnog u lokalni koordinatni sustav. Sile u čvorovima slijede prema izrazu

$$\mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{w}^{(e)gl} - \mathbf{q}^{lok}. \quad (6.4.15)$$

## 6.5. Statička kondenzacija matrice krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije

### 6.5.1. Postupak statičke kondenzacije matrice krutosti konačnog elementa za okvirne konstrukcije

Konstrukcija može imati čvorove kod kojih su neke od statičkih veličina poznate prema samoj definiciji konstrukcije (zglobni ili klizni ležajevi, zglobne veze između dijelova konstrukcije). Konstrukcija je u tim

čvorovima definirana oslobođenim vezama u nekom od smjerova globalnih ili lokalnih koordinatnih osi. Oslobođena veza znači da je sila u smjeru te veze jednaka nuli. Zbog toga iz jednadžbe ravnoteže u smjeru te sile (zbroy svih sila u tom čvoru mora biti jednak nuli zbog oslobođene veze) možemo pripadni pomak u tom smjeru izraziti preko pomaka susjednog čvora iz lokalne matrice krutosti priključnog elementa konstrukcije. Taj pomak je ovisan o ostalim pomacima tog elementa konstrukcije i možemo smanjiti broj jednadžbi ravnoteže i broj nepoznanica u konstrukciji. Smanjenje broja jednadžbi ravnoteže zbog oslobođenih veza u čvorovima konstrukcije predstavlja statičku kondenzaciju matrice krutosti.

Postupak statičke kondenzacije matrice krutosti možemo objasniti na razini statičke kondenzacije lokalne matrice krutosti koju onda možemo, tako statički kondenziranu, uklopiti u matricu krutosti sustava i smanjiti broj nepoznanica i jednadžbi ravnoteže u cijelom sustavu. Ako je oslobođena neka od veza u čvoru grede, sila u smjeru te veze jednaka je nuli, a pomak u smjeru oslobođene veze možemo izraziti kao funkciju preostalih pomaka čvorova grede. Ako je oslobođena  $k$ -ta veza grede, tada je, umnožak  $k$ -tog retka matrice krutosti i vektora pomaka, sila u smjeru  $k$ -te veze, jednaka nuli,

$$f_k = \sum_j k_{kj} w_j = 0. \quad (6.5.1)$$

Pomak  $w_k$  u smjeru oslobođene veze  $k$  možemo izraziti preko ostalih pomaka jednadžbom

$$w_k = -\frac{\sum_{j \neq k} k_{kj} w_j}{k_{kk}}. \quad (6.5.2)$$

Sada taj pomak  $w_k$ , izražen preko ostalih pomaka, možemo uvrstiti u izraze za ostale sile u čvorovima grede

$$f_i = \sum_{j \neq k} k_{ij} w_j + k_{ik} \left( -\frac{\sum_{j \neq k} k_{kj} w_j}{k_{kk}} \right), \quad i \neq k. \quad (6.5.3)$$

Grupiranjem koeficijenata uz svaki pomak slijedi izraz

$$f_i = \sum_{j \neq k} \left( k_{ij} - k_{ik} \frac{k_{kj}}{k_{kk}} \right) w_j, \quad i \neq k. \quad (6.5.4)$$

Ako statički kondenziranu matricu krutosti označimo  $\mathbf{K}^c$ , pripadne članove statički kondenzirane matrice krutosti  $k_{ij}^c$  možemo izraziti kao funkciju članova osnovne matrice krutosti,  $k_{ij}$ , uz oslobođenu  $k$ -tu vezu,

$$k_{ij}^c = k_{ij} - \frac{k_{ik} k_{kj}}{k_{kk}}. \quad (6.5.5)$$

### 6.5.2. Postupak statičke kondenzacije elementarnog vektora opterećenja

Postupak statičke kondenzacije vektora sila upetosti zbog oslobođene neke od veza na kraju grede jednak je postupku statičke kondenzacije vektora sila upetosti dobivenih prema linearnoj teoriji elastičnosti. Komponente statički kondenziranog vektora sila upetosti, uz oslobođenu vezu  $k$ , možemo izraziti pomoću komponenti vektora sila upetosti i matrice krutosti obostrano upete grede prema izrazu

$$\bar{f}_i^c = \bar{f}_i - \frac{k_{ik}}{k_{kk}} \bar{f}_k, \quad i \neq k. \quad (6.5.6)$$

Prethodni izraz, (6.5.6), slijedi jednostavnim Gaussovima eliminacijama za svaku silu u čvoru grede. To načelno vrijedi i za silu u smjeru oslobođene veze. Sila u oslobođenoj vezi jednaka je nuli,

$$f_k = \sum_j k_{kj} w_j + \bar{f}_k = 0. \quad (6.5.7)$$

Proizvoljna sila u čvoru jednaka je

$$f_i = \sum_j k_{ij} w_j + \bar{f}_i, \quad i \neq k. \quad (6.5.8)$$



Množenjem jednadžbe (6.5.7) s koeficijentom  $\left(-\frac{k_{ik}}{k_{kk}}\right)$  i zbrajanjem s jednadžbom (6.5.8) slijedi jednadžba za sile u čvorovima grede

$$f_i = \sum_{j \neq k} \left( k_{ij} - \frac{k_{ik}}{k_{kk}} \right) w_j + \left( \bar{f}_i - \frac{k_{ik}}{k_{kk}} \bar{f}_k \right), \quad i \neq k. \quad (6.5.9)$$

Jednadžba (6.5.9) prikazuje izraz za ukupnu silu u smjeru veze  $i$  nakon statičke kondenzacije zbog oslobađanja pomaka (poprečni pomak ili zaokret) u smjeru veze  $k$  uzimanjem u obzir koeficijenata iz kondenzirane matrice krutosti i sila iz kondenziranog vektora upetosti.

### 6.5.3. Matrična formulacija statičke kondenzacije matrice krutosti sustava

Neka je zadani okvirni sustav iskazan jednadžbom u standardnom obliku,  $\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{q}$  uzimajući u obzir da nema oslobođenih veza. Vektor nepoznatih pomaka možemo iskazati kao blok-vektor,  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{w}_c \end{bmatrix}$ , pri čemu je  $\mathbf{w}_c$  vektor nepoznatih pomaka koji sadrži nepoznate pomake u smjeru svih oslobođenih veza u sustavu, a vektor  $\mathbf{w}_p$  vektor nepoznatih pomaka čvorova u koji nisu uzeti u obzir pomaci u smjeru oslobođenih veza. Tada i matricu sustava možemo iskazati kao blok-matricu,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pc} \\ \mathbf{K}_{pc}^T & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}, \quad (6.5.10)$$

pri čemu blok-matrica  $\mathbf{K}_{pp}$  predstavlja sile u čvorovima u smjerovima u kojima nisu oslobođene veze uslijed pomaka u čvorovima u smjerovima u kojima nisu oslobođene veze, blok-matrica  $\mathbf{K}_{pc}$  predstavlja sile u čvorovima u smjerovima u kojima nisu oslobođene veze uslijed pomaka u čvorovima u smjerovima oslobođenih veza, a blok-matrica  $\mathbf{K}_{cc}$  predstavlja sile u čvorovima u smjerovima u kojima su oslobođene veze uslijed pomaka u čvorovima u smjerovima tih oslobođenih veza. U istom smislu i vektor opterećenja može biti iskazan kao blok-vektor,  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}$ , pri čemu je  $\mathbf{q}_c$  vektor sila koji sadrži sile u smjeru svih oslobođenih veza u sustavu, a vektor  $\mathbf{q}_p$  vektor sila u koji nisu uzete u obzir sile u smjeru oslobođenih veza. Sustav jednadžbi sada ima oblik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pc} \\ \mathbf{K}_{pc}^T & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{w}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}. \quad (6.5.11)$$

Zbog očitog  $\det \mathbf{K}_{cc} \neq 0$ , iz donjeg dijela prethodne jednadžbe, (6.5.11), slijedi

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1} (\mathbf{q}_c - \mathbf{K}_{pc}^T \mathbf{w}_p). \quad (6.5.12)$$

Uvrštavanjem tog izraza, (6.5.12), u gornji dio matričnog zapisa, (6.5.11), slijedi jednadžba

$$\mathbf{K}_{pp} \mathbf{w}_p + \mathbf{K}_{pc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} (\mathbf{q}_c - \mathbf{K}_{pc}^T \mathbf{w}_p) = \mathbf{q}_p. \quad (6.5.13)$$

Grupiranjem članova uz vektor nepoznatih pomaka  $\mathbf{w}_p$  i prebacivanjem ostalih članova na desnu stranu slijedi jednadžba

$$(\mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{pc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{pc}^T) \mathbf{w}_p = \mathbf{q}_p - \mathbf{K}_{pc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{q}_c, \quad (6.5.14)$$

odnosno novi sustav u obliku

$$\mathbf{K}^c \mathbf{w}_p = \mathbf{q}^c, \quad (6.5.15)$$

pri čemu je  $\mathbf{K}^c = \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{pc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{pc}^T$  statički kondenzirana matrica sustava, a  $\mathbf{q}^c = \mathbf{q}_p - \mathbf{K}_{pc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{q}_c$  statički kondenzirani vektor opterećenja sustava.

## 6.6. Modeliranje zglobnih veza

### 6.6.1. Modeliranje zglobnih (nepomičnih) ležajeva

Nepomični zglobni ležaj ima dva spriječena stupnja slobode, spriječene pomake u smjeru dva pravca te dopušten kut zaokreta ležaja. Standardno je definirati spriječenost pomaka u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $z$ . Zglobni ležaj može biti definiran u proračunskom modelu na dva načina.

Prvi način je da se u ležajnom čvoru spriječe pomaci u smjeru dvije globalne koordinatne osi. U tom slučaju pripadni je ležajni kut zaokreta i dalje jedna od nepoznanica zadanog sustava. Proračun sustava

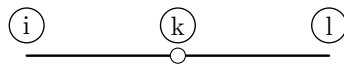
jednadžbi rezultira eksplicitnim iskazom vrijednosti ležajnog kuta zaokreta. Postavljanjem izraza za sile u čvorovima pripadnog konačnog elementa, moment u ležajnom čvoru jednostavno proizlazi jednak nuli.

Drugi način je da se za pripadni konačni element provede statička kondenzacija matrice krutosti. Na taj način ležajni kut zaokreta nije više jedna od nepoznanica sustava. Proračunom sustava ne dobivamo eksplicitno izraženu vrijednost ležajnog kuta zaokreta. Ležajni kut zaokreta izračunamo kao linearnu kombinaciju preostalih pomaka pripadnog konačnog elementa prema izrazu (6.5.2), pri čemu su koeficijenti linearne kombinacije elementi matrice krutosti prije statičke kondenzacije, a pomaci čvorova izraženi u lokalnom koordinatnom sustavu pripadnog konačnog elementa,

$$\begin{aligned}\varphi_k &= -\frac{k_{61}u_1 + k_{62}w_1 + k_{63}\varphi_1 + k_{64}u_2 + k_{65}w_2}{k_{66}} \\ &= -\frac{\frac{6EI}{L^{(e)^2}}w_1 + \frac{2EI}{L^{(e)}}\varphi_1 + \frac{6EI}{L^{(e)^2}}w_2}{\frac{4EI}{L^{(e)}}} = -\left(\frac{3}{2L^{(e)}}w_1 + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{3}{2L^{(e)}}w_2\right).\end{aligned}\quad (6.6.1)$$

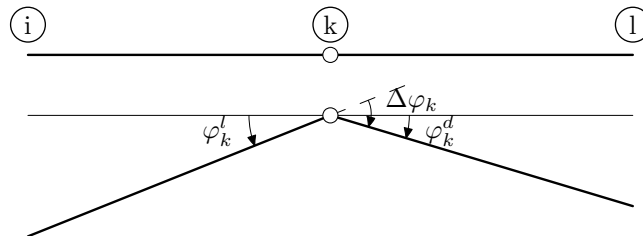
### 6.6.2. Modeliranje zglobnih veza između elemenata konstrukcije

Promatramo dva elementa konstrukcije, element  $ik$  i element  $kl$ , zglobno spojena u čvoru  $k$ , (Slika 6.6.1). Važno je za svaki element znati koji čvor je početni, a koji čvor je krajnji. Zglobna veza u čvoru



Slika 6.6.1: Zglobna veza između elemenata konstrukcije

$k$  dozvoljava relativni zaokret,  $\Delta\varphi_k$ , između definiranih elemenata. Kod modeliranja zglobne veze dva elementa nužno je za jedan (samo jedan, ne oba elementa) provesti statičku kondenzaciju odnosno definirati da je u pripadnom čvoru tog elementa oslobođen kut zaokreta. Nepoznanica  $\varphi_k$  tada je kut zaokreta onog elementa kojem nismo oslobodili zaokret u čvoru  $k$ . Nakon djelovanja opterećenja, (Slika 6.6.2), kut zaokreta čvora  $k$  moramo promatrati kao kut zaokreta elementa kojem nismo oslobodili kut zaokreta. Rješenjem sustava jednadžbi dobivena vrijednost  $\varphi_k$  predstavlja kut zaokreta elementa kojem



Slika 6.6.2: Pomaci nakon opterećenja

nismo oslobodili kut zaokreta, a kut zaokreta u tom čvoru elementa kojem smo oslobodili kut zaokreta možemo izračunati prema izrazu za proračun pomaka u smjeru oslobođenih veza, (6.5.2). Promatranu zglobnu vezu, (Slika 6.6.1), možemo definirati na dva načina, ili oslobađanjem kuta zaokreta krajnjeg čvora elementa  $ik$ , ili oslobađanjem kuta zaokreta početnog čvora elementa  $kl$ . Ako smo oslobodili kut zaokreta krajnjeg čvora elementa  $ik$ , rješenjem sustava slijedi kut zaokreta  $\varphi_k^d$ , kut zaokreta čvora  $k$  elementa  $kl$ . Kut zaokreta  $\varphi_k^l$  tada slijedi prema izrazu (6.5.2), uz pomake izražene u lokalnom koordinatnom sustavu,

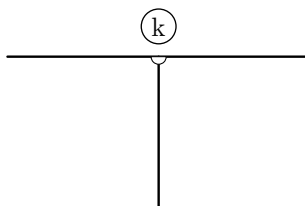
$$\varphi_k^l = -\frac{\frac{6EI}{L_{ik}^2}w_i + \frac{2EI}{L_{ik}}\varphi_i + \frac{6EI}{L_{ik}^2}w_k}{\frac{4EI}{L_{ik}}} = -\left(\frac{3}{2L_{ik}}w_i + \frac{1}{2}\varphi_i + \frac{3}{2L_{ik}}w_k\right).\quad (6.6.2)$$

Ako smo oslobodili kut zaokreta početnog čvora elementa  $kl$ , rješenjem sustava slijedi kut zaokreta  $\varphi_k^l$ , kut zaokreta čvora  $k$  elementa  $ik$ . Kut zaokreta  $\varphi_k^d$  tada slijedi prema izrazu (6.5.2), uz pomake izražene u lokalnom koordinatnom sustavu,

$$\varphi_k^d = -\frac{-\frac{6EI}{L_{kl}^2}w_k + \frac{6EI}{L_{kl}^2}w_l + \frac{2EI}{L_{kl}}\varphi_l}{\frac{4EI}{L_{kl}}} = -\left(-\frac{3}{2L_{kl}}w_k + \frac{3}{2L_{kl}}w_l + \frac{1}{2}\varphi_l\right).\quad (6.6.3)$$

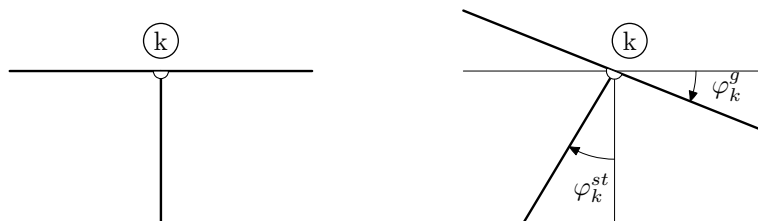
Kod zglobnih veza između  $n$  konačnih elemenata nužno je za  $n - 1$  konačni element provesti statičku kondenzaciju elementarne matrice krutosti, oslobađanjem kuta zaokreta u tom čvoru, prije uklapanja u globalni sustav. Svaki konačni element u takvom zglobnom čvoru ima svoj kut zaokreta. Nepoznati kut zaokreta tog čvora u globalnom sustavu tada je kut zaokreta tog čvora onog konačnog elementa kojem elementarna matrica krutosti nije statički kondenzirana. Iznos tog kuta zaokreta eksplicitno slijedi rješanjem sustava jednadžbi. Kuteve zaokreta ostalih elemenata u tom čvoru proračunamo kao linearna kombinacija ostalih pomaka promatranog elementa u lokalnom koordinatnom sustavu prema izrazu za proračun pomaka u smjeru oslobođene veze (6.5.2).

Ako u čvoru imamo kombinaciju veza između elemenata, npr. kontinuirana greda i zglobno povezan stup, (Slika 6.6.3), tada je potrebno osloboditi kut zaokreta stupa u pripadnom čvoru, statički kondenzirati matricu krutosti stupa. Nepoznanica je kut zaokreta grede u tom čvoru,  $\varphi_k = \varphi_k^g$ , (Slika 6.6.4).



Slika 6.6.3: Zglobna veza stupa i kontinuirane grede

Rješanjem sustava jednadžbi slijedi kut zaokreta grede u tom čvoru, a kut zaokreta stupa,  $\varphi_k^{st}$ , slijedi



Slika 6.6.4: Pomaci nakon opterećenja

prema izrazu (6.5.2), uz pomake u lokalnom koordinatnom sustavu i ovisno o tome da li je čvor  $k$  početni ili krajnji čvor stupa.

## 6.7. Kinematička kondenzacija matrice krutosti za okvirne konstrukcije

Pomaci pojedinih čvorova konstrukcije mogu biti ovisni o pomacima drugih čvorova konstrukcije. Takve veze između pomaka čvorova su kinematičke veze. Pomake čvorova možemo izraziti kao funkcije pomaka drugih čvorova. U jednadžbi koja karakterizira vezu pomaka čvorova jedan od čvorova definiramo kao vodeći čvor (engl. master), a ostale čvorove kao prateće čvorove (engl. slave). Zbog toga pomaci tih čvorova više nisu neovisne nepoznanice i možemo u proračunu smanjiti broj nepoznanica i broj jednadžbi ravnoteže u sustavu. Smanjenje broja jednadžbi ravnoteže zbog definiranih kinematičkih veza predstavlja kinematičku kondenzaciju matrice konstrukcije.

Kinematičke veze između definiranih čvorova konstrukcije iskazane su zajedničkim pomacima u smjeru elemenata konstrukcije koji spajaju takve čvorove (zanemarujemo uzdužne deformacije elemenata konstrukcije - realna pretpostavka kod stvarnih konstrukcija) ili zajedničkim kutem zaokreta kod čvorova povezanim krutim plošnim elementima konstrukcije. Matrica krutosti sustava kod inženjerske metode pomaka zapravo je kinematički kondenzirana matrica krutosti metode pomaka zbog zanemarivanja uzdužnih deformacija elemenata konstrukcije. Vezu između svih čvorova konstrukcije i pomaka vodećih čvorova možemo iskazati relacijom

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{w}_v, \quad (6.7.1)$$

pri čemu je vektor  $\mathbf{w}$  vektor pomaka svih čvorova konstrukcije, vektor  $\mathbf{w}_v$  vektor pomaka vodećih čvorova, a matrica  $\mathbf{P}$  prijenosna matrica, matrica koja definira kinematičku vezu između pomaka čvorova. Ako je ukupan broj nepoznatih pomaka čvorova jednak  $n$ , a ukupan broj vodećih pomaka čvorova jednak  $m$ ,

prijenosna matrica je dimenzije  $n \times m$ . Takav odnos zapravo znači da smo stupac u matrici krutosti koji predstavlja pripadni pomak pratećeg čvora pomnožili s prijenosnom matricom i pribrojili stupcu pripadnog pomaka vodećeg čvora. Na isti način je potrebno i redak koji karakterizira pripadni pomak pratećeg čvora pomnožiti s transponiranom prijenosnom matricom i pribrojiti retku pripadnog pomaka vodećeg čvora. Na taj način smo dobili novi sustav  $m$  linearnih jednadžbi sa  $m$  nepoznanica. Matrica krutosti sustava,  $\mathbf{K}^K$  sada je dimenzije  $m \times m$  i slijedi prema jednadžbi,

$$\mathbf{K}^K = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} . \quad (6.7.2)$$

U postupku eliminacije redaka osnovne matrice krutosti sustava možemo provesti i eliminaciju redaka u vektoru opterećenja. Množenjem vektora opterećenja transponiranom prijenosnom matricom slijedi vektor opterećenja nakon kinematičke kondenzacije,

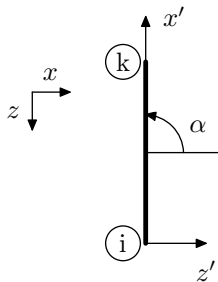
$$\mathbf{q}^K = \mathbf{P}^T \mathbf{q} . \quad (6.7.3)$$

Sustav jednadžbi  $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{q}$  sada glasi  $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{w}_v = \mathbf{P}^T \mathbf{q}$  odnosno  $\mathbf{K}^K \mathbf{w}_v = \mathbf{q}^K$ .

## 6.8. Primjeri

**Primjer 6.8.1.** *Transformacija matrice krutosti stupa u globalnom koordinatnom sustavu*

Neka je zadan vertikalni stup visine  $L$ , uzdužne krutosti  $EF$  i krutosti na savijanje  $EI$ , pri čemu je donji čvor početni čvor, a gornji čvor krajnji čvor. Potrebno je matricu krutosti stupa izraziti u globalnom koordinatnom sustavu.



Slika 6.8.1.1: Vertikalni stup

Matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu izražena je jednadžbom (6.1.1). Identifikacijom početnog i krajnjeg čvora jasno slijedi da je  $\alpha = \pi/2$  što određuje matrice transformacije

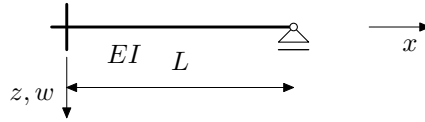
$$\mathbf{R}^{l \rightarrow g} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{g \rightarrow l} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.8.1.1)$$

Matrica krutosti vertikalnog stupa s donjim početnim čvorom u globalnom koordinatnom sustavu slijedi prema izrazu (6.4.13),

$$\mathbf{K}_{ik}^{gl} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.1.2)$$

**Primjer 6.8.2.** Definirati matricu krutosti jednostrano upete grede statičkom kondenzacijom matrice krutosti obostrano upete grede

Promatramo jednostrano upetu gredu s oslobođenom upetom vezom u krajnjem čvoru grede (dopušten kut zaokreta krajnjeg čvora), (Slika 6.8.2.1). Potrebno je odrediti matricu krutosti jednostrano upete grede kondenzacijom matrice krutosti obostrano upete grede.



Slika 6.8.2.1: Jednostrano upeta greda

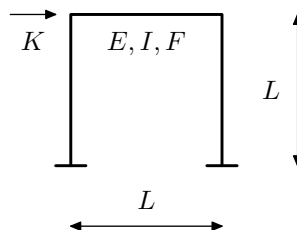
Matrica krutosti obostrano upete grede izražena je jednadžbom (6.1.1). Kod jednostrano upete grede, (Slika 6.8.2.1), oslobođen je kut zaokreta u krajnjem čvoru grede,  $\varphi_k$ , a pripadni moment jednak je nuli,  $M_{ki} = 0$ . Iz zadnjeg retka matrice krutosti možemo izraziti kut zaokreta  $\varphi_k$  kao funkciju ostalih pomaka,  $u_i, w_i, \varphi_i, u_k, w_k$ , (6.5.2) ,

$$\varphi_k = -\frac{-\frac{6EI}{L^2}w_i + \frac{2EI}{L}\varphi_i + \frac{6EI}{L^2}w_k}{\frac{4EI}{L}}. \quad (6.8.2.1)$$

Statički kondenziranu matricu krutosti jednostrano upete grede u lokalnom koordinatnom sustavu možemo sada dobiti uvrštavanjem izraza za kut  $\varphi_k$  u ostale retke matrice krutosti, (6.5.5),  $k_{ik}^C = k_{ik} - \frac{k_{i6}k_{6k}}{k_{66}}$ ,

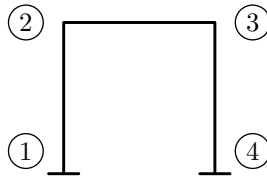
$$\mathbf{K}^{(e)C} = \begin{bmatrix} \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & 0 \\ 0 & -\frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 \\ -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{3[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8.2.2)$$

**Primjer 6.8.3.** Zadan je upeti okvir, (Slika 6.8.3.1), opterećen u visini grede horizontalnom koncentriranom silom  $K$ . Greda i stupovi okvira jednakog su modula elastičnosti,  $E$ , jednakih površina poprečnog presjeka,  $F$ , i momenata inercije poprečnog presjeka,  $I$ . Potrebno je odrediti pomake i momente u čvorovima okvira.



Slika 6.8.3.1: Zadani okvir, upet u ležajevima, opterećen horizontalnom silom

Okvir podijelimo na konačne elemente (gredu 2-3 i stupove 1-2 i 3-4). Za svaki element pripadna



Slika 6.8.3.2: Oznake čvorova okvira

elementarna matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu, prema (6.1.1), glasi

$$\mathbf{K}_{1-2}^{(e)} = \mathbf{K}_{2-3}^{(e)} = \mathbf{K}_{3-4}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.1)$$

Jasno je da je za gredu elementarna matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu jednaka elementarnoj matrici krutosti u globalnom koordinatnom sustavu,  $\mathbf{K}_{2-3} = \mathbf{K}^{(e)}_{2-3}$ . Za stupove je potrebno provesti postupak transformacije pripadnih matrica krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sustav. Za stup 1–2 pripadni je kut zaokreta za  $\alpha_{1-2} = \pi/2$ , a za stup 3–4 pripadni je kut zaokreta  $\alpha_{3-4} = 3\pi/2$ . Uz pripadne matrice transformacije,

$$\mathbf{R}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.8.3.2)$$

matrice krutosti stupova u globalnom koordinatnom sustavu slijede, (6.4.13),

$$\mathbf{K}_{1-2} = \mathbf{R}_{1-2}^{-1} \mathbf{K}_{1-2}^{(e)} \mathbf{R}_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}, \quad (6.8.3.3)$$

$$\mathbf{K}_{3-4} = \mathbf{R}_{3-4}^{-1} \mathbf{K}_{3-4}^{(e)} \mathbf{R}_{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.4)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti svih definiranih konačnih elemenata slijedi globalna matrica krutosti zadanog okvira,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EF}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EF}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EF}{L} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.5)$$

Vektor nepoznatih pomaka čvorova glasi

$$\mathbf{w} = [x_1 \quad z_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad z_2 \quad \varphi_2 \quad x_3 \quad z_3 \quad \varphi_3 \quad x_4 \quad z_4 \quad \varphi_4]^T. \quad (6.8.3.6)$$

Uz rubne uvjete upetih ležajeva, ( $x_1 = z_1 = \varphi_1 = x_4 = z_4 = \varphi_4 = 0$ ), sustav linearnih jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{EF}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EF}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EF}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EF}{L} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \\ \varphi_2 \\ x_3 \\ z_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.7)$$

Rješenjem definiranog sustava linearnih jednadžbi slijedi vektor nepoznatih pomaka čvorova zadanog okvira

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \\ \varphi_2 \\ x_3 \\ z_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{12EI} \frac{216(EI)^2 + 84(EI)(EFL^2) + 5(EFL^2)^2}{(3EI + EFL^2)(24EI + 7EFL^2)} \\ -\frac{3KL^3}{24EI + 7EFL^2} \\ -\frac{KL^2}{4EI} \frac{96(EI)^2 + 34(EI)(EFL^2) + (EFL^2)^2}{(3EI + EFL^2)(24EI + 7EFL^2)} \\ \frac{KL^3}{12EI} \frac{72(EI)^2 + 42(EI)(EFL^2) + 5(EFL^2)^2}{(3EI + EFL^2)(24EI + 7EFL^2)} \\ \frac{3KL^3}{24EI + 7EFL^2} \\ -\frac{KL^2}{4EI} \frac{48(EI)^2 + 20(EI)(EFL^2) + (EFL^2)^2}{(3EI + EFL^2)(24EI + 7EFL^2)} \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.8)$$



Sile u elementima izračunamo prema jednadžbi (6.4.15),  $S_{i-k} = \mathbf{K}_{i-k}^{(e)} \mathbf{R}_{i-k} \mathbf{w}_{i-k}^{gl}$ ,

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} -\frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ -\frac{K(6EI+EFL^2)}{2(3EI+EFL^2)} \\ \frac{KL[60(EI)^2+25(EI)(EFL^2)+2(EFL^2)^2]}{(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \\ \frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ \frac{K(6EI+EFL^2)}{2(3EI+EFL^2)} \\ \frac{KL[24(EI)^2+16(EI)(EFL^2)+3(EFL^2)^2]}{2(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \end{bmatrix}, \quad (6.8.3.9)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{KEFL^2}{2(3EI+EFL^2)} \\ \frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ -\frac{KL[24(EI)^2+16(EI)(EFL^2)+3(EFL^2)^2]}{2(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \\ -\frac{KEFL^2}{2(3EI+EFL^2)} \\ -\frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ -\frac{KL[-24(EI)^2+2(EI)(EFL^2)+3(EFL^2)^2]}{2(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \end{bmatrix}, \quad (6.8.3.10)$$

$$\mathbf{S}^{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ -\frac{KEFL^2}{2(3EI+EFL^2)} \\ \frac{KL[-24(EI)^2+2(EI)(EFL^2)+3(EFL^2)^2]}{2(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \\ -\frac{3KEFL^2}{24EI+7EFL^2} \\ \frac{KEFL^2}{2(3EI+EFL^2)} \\ \frac{KL[12(EI)^2+11(EI)(EFL^2)+2(EFL^2)^2]}{(3EI+EFL^2)(24EI+7EFL^2)} \end{bmatrix}. \quad (6.8.3.11)$$

**Primjer 6.8.4.** Okvir iz prethodnog zadatka riješiti kinematičkom kondenzacijom matrice krutosti sustava zbog zanemarivanja uzdužnih deformacija elemenata konstrukcije. Potrebno je odrediti pomake i momente u čvorovima okvira.

Zanemarivanjem uzdužnih deformacija grede i stupova jasno slijede relacije između pripadnih pomaka u smjeru osi grede i stupova. Ako zanemarimo uzdužnu deformaciju grede slijedi da je horizontalni pomak oba čvora grede jednak,  $x_2 = x_3$ , a ako zanemarimo uzdužnu deformaciju stupova slijede relacije,  $z_2 = z_1$  i  $z_3 = z_4$ . Vektor vodećih pomaka čvorova glasi

$$\mathbf{w}_v = [x_1 \quad z_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad x_4 \quad z_4 \quad \varphi_4]^T, \quad (6.8.4.1)$$

a pripadna prijenosna matrica

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.8.4.2)$$

Matrica sustava slijedi prema jednadžbi (6.7.2),

$$\mathbf{K}^K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.4.3)$$

Uz rubne uvjete upetih ležajeva,  $x_1 = z_1 = \varphi_1 = x_4 = z_4 = \varphi_4 = 0$ , sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8.4.4)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w}_v = \begin{bmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5KL^3}{84EI} \\ -\frac{KL^2}{28EI} \\ -\frac{KL^2}{28EI} \end{bmatrix}. \quad (6.8.4.5)$$

Pomaci pratećih čvorova slijede iz prethodno definiranih odnosa  $z_2 = z_1$ ,  $z_3 = z_4$ ,  $x_3 = x_2$ , prema jednadžbi (6.7.1). Dobiveni relativni uzdužni pomaci čvorova jednaki su nuli. To znači da ne možemo izravno izračunati uzdužne sile u elementima konstrukcije. Poprečne sile i momenti u elementima konstrukcije

slijede prema jednadžbi (6.4.15) izuzimajući retke i stupce koje određuju uzdužne sile i pomake,

$$\mathbf{S}^{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \sin \alpha_{12} + z_1 \cos \alpha_{12} \\ \varphi_1 \\ x_2 \sin \alpha_{12} + z_2 \cos \alpha_{12} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ \frac{2KL}{7} \\ \frac{K}{2} \\ \frac{3KL}{14} \end{bmatrix}, \quad (6.8.4.6)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \sin \alpha_{23} + z_2 \cos \alpha_{23} \\ \varphi_2 \\ x_3 \sin \alpha_{23} + z_3 \cos \alpha_{23} \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3K}{7} \\ -\frac{3KL}{14} \\ -\frac{3K}{7} \\ -\frac{3KL}{14} \end{bmatrix}, \quad (6.8.4.7)$$

$$\mathbf{S}^{3-4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \sin \alpha_{34} + z_3 \cos \alpha_{34} \\ \varphi_3 \\ x_4 \sin \alpha_{34} + z_4 \cos \alpha_{34} \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ \frac{3KL}{14} \\ \frac{K}{2} \\ \frac{2KL}{7} \end{bmatrix}. \quad (6.8.4.8)$$

Uzdužne sile potrebno je odrediti iz ravnoteže čvorova. Ako u čvoru 2 postavimo jednadžbe ravnoteže u smjeru osi  $x$  i  $z$  slijedi

$$\sum_2 x = 0 \Rightarrow -N_{23} - T_{21} + K = 0 \Rightarrow N_{23} = K - T_{21} = \frac{K}{2}, \quad (6.8.4.9)$$

$$\sum_2 z = 0 \Rightarrow N_{21} - T_{23} = 0 \Rightarrow N_{21} = T_{23} = \frac{3K}{7}. \quad (6.8.4.10)$$

Na isti način iz ravnoteže čvora 3 slijedi

$$\sum_3 x = 0 \Rightarrow -N_{32} + T_{34} = 0 \Rightarrow N_{32} = T_{34} = -\frac{K}{2}, \quad (6.8.4.11)$$

$$\sum_3 z = 0 \Rightarrow -N_{34} - T_{32} = 0 \Rightarrow N_{34} = -T_{32} = \frac{3K}{7}. \quad (6.8.4.12)$$

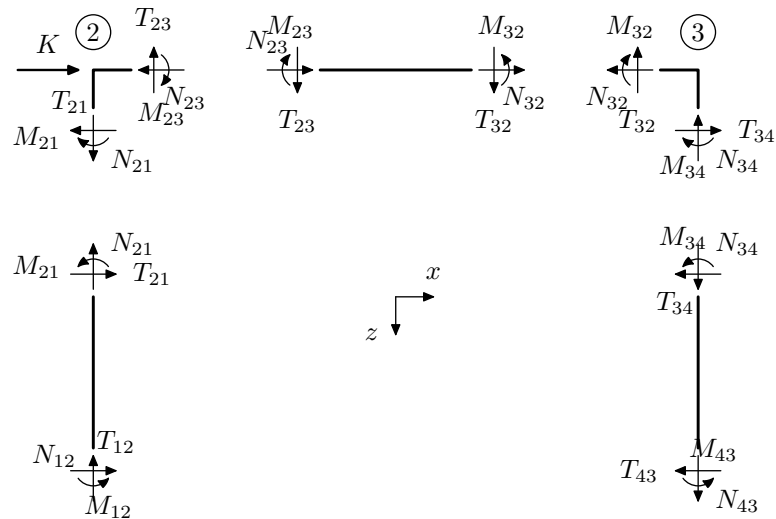
Uzdužne sile u suprotnim čvorovima elemenata slijede iz lokalne ravnoteže elemenata,

$$\sum_{1-2} x' = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = -N_{21} = -\frac{3K}{7}, \quad (6.8.4.13)$$

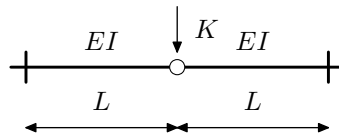
$$\sum_{3-4} x' = 0 \Rightarrow N_{34} - N_{43} = 0 \Rightarrow N_{43} = -N_{34} = -\frac{3K}{7}. \quad (6.8.4.14)$$

Prema dobivenim rezultatima za pomake čvorova i sile u elementima konstrukcije pomoću kinematički kondenzirane matrice krutosti vidljivo je da su rješenja jednaka rješenjima iz prethodnog primjera kad  $EF \rightarrow \infty$ , odnosno kad su elementi konstrukcije apsolutno uzdužno kruti elementi pri čemu je uzdužna deformacija jednaka nuli.

**Primjer 6.8.5.** *Zadana je složena obostrano upeta greda sastavljena od dva zglobno spojena elementa raspona  $L$  i krutosti  $EI$ ., opterećena koncentriranom silom  $K$  u zglobu. Potrebno je odrediti progib i kut zaokreta svakog elementa u sredini raspona grede i ležajne momente.*



Slika 6.8.4.1: Ravnoteža čvorova i elemenata okvira

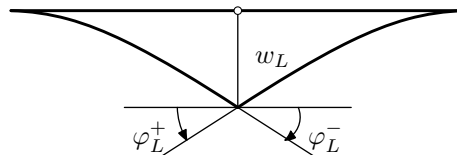


Slika 6.8.5.1: Složena obostrano upeta grede zglobno spojena u sredini raspona i opterećena koncentriranom silom u zglobu

Zbog zglobne veze u sredini grede,  $x = L$ , u toj točki nije definiran kut zaokreta. Kut zaokreta lijevog dijela grede i kut zaokreta desnog dijela grede u zglobu nisu jednaki. Analitička vrijednost progiba i kuteva zaokreta iznosi

$$w_L = \frac{KL^3}{6EI}, \quad \varphi_L^+ = -\frac{KL^2}{4EI}, \quad \varphi_L^- = \frac{KL^2}{4EI}, \quad (6.8.5.1)$$

što se vidi i na grafičkom prikazu progibne linije, 6.8.5.2.



Slika 6.8.5.2: Progibna linija zadane složene grede

Zbog toga kut zaokreta u zglobu ne može biti promatran kao jedna nepoznanica. Nužno je za jedan (ali samo za jedan) od elemenata provesti kondenzaciju matrice krutosti. Tada je nepoznati kut zaokreta zapravo kut zaokreta drugog elementa, a kut zaokreta elementa kojem smo kondenzirali matricu krutosti dobijemo kao linearna kombinacija ostalih vrijednosti pomaka tog elementa, (6.5.2).

Zbog zglobne veze u sredini raspona, gredu moramo podijeliti gredu na dva konačna elementa (elementi 1-2 i 2-3), svaki element duljine  $L$ . Elementarne matrice krutosti za svaki dio grede slijede prema (5.2.32),

$$\mathbf{K}^{1-2} = \mathbf{K}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.8.5.2)$$

Statičkom kondenzacijom matrice krutosti elementa 1 – 2 slijedi pripadna statički kondenzirana elementarna matrica krutosti

$$\mathbf{K}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{3}{L^3} & -\frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L^3} & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & \frac{3}{L^2} & 0 \\ -\frac{3}{L^3} & \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8.5.3)$$

Uklapanjem elementarnih matrica, uz rubne uvjete  $w_1 = w_3 = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$ , sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{15}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8.5.4)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{w} = [w_2 \quad \varphi_2^+]^T = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{6EI} & \frac{KL^2}{4EI} \end{bmatrix}^T. \quad (6.8.5.5)$$

Dobivene vrijednosti jednake su analitičkom rješenju.

Kut zaokreta elementa 1 – 2 u zglobu, prema (6.5.2), iznosi

$$\varphi_2^- = -\frac{k_{65}w_2}{k_{66}} = -\frac{\frac{6EI}{L^2} \frac{KL^3}{6EI}}{\frac{4EI}{L}} = -\frac{KL^2}{4EI}. \quad (6.8.5.6)$$

Sile u elementima izračunamo prema (5.3.6),

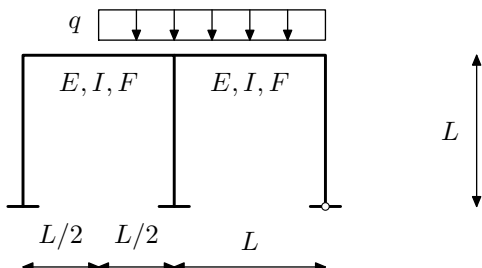
$$\mathbf{S}^{1-2} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{KL^3}{6EI} \\ -\frac{KL^2}{4EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ \frac{KL}{2} \\ \frac{K}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.8.5.7)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{6EI} \\ \frac{KL^2}{4EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ 0 \\ -\frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.8.5.9)$$

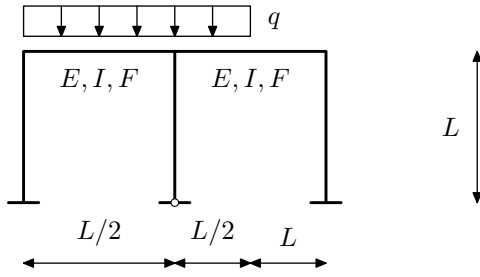
## 6.9. Zadaci

U zadacima je potrebno za zadane okvirne konstrukcije, odrediti pomake (translatorne pomake i kuteve zaokreta) čvorova i sile u čvorovima definiranih konačnih elemenata.

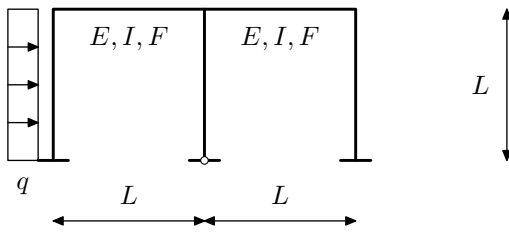
### Zadatak 6.9.1.



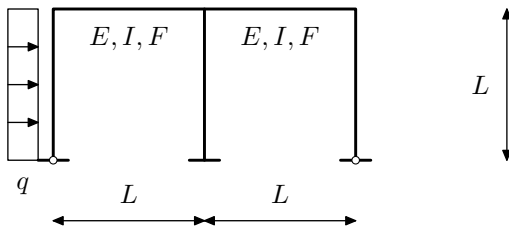
Zadatak 6.9.2.



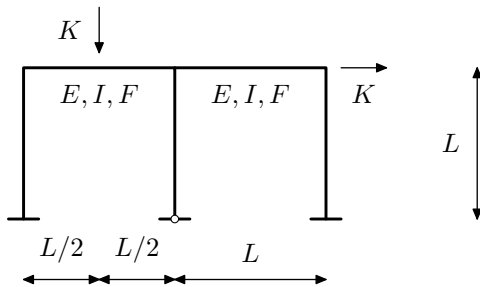
Zadatak 6.9.3.



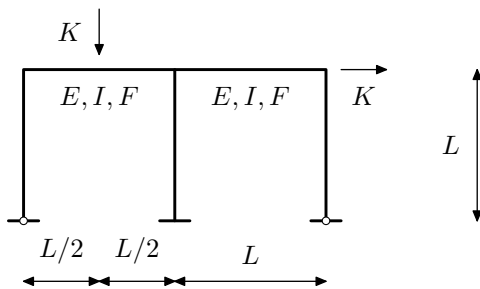
Zadatak 6.9.4.



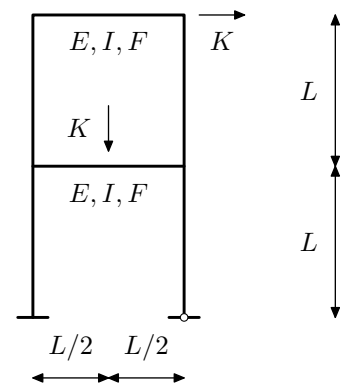
Zadatak 6.9.5.



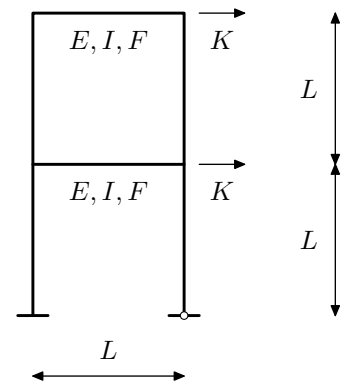
Zadatak 6.9.6.



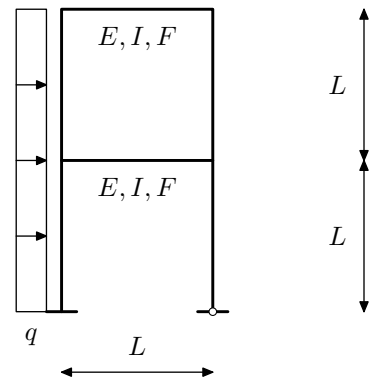
Zadatak 6.9.7.



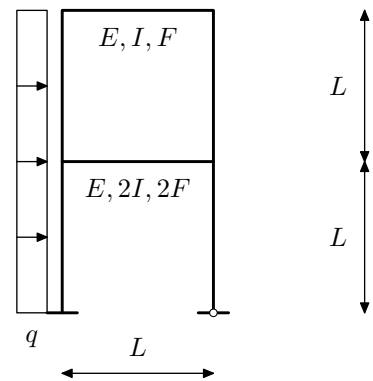
Zadatak 6.9.8.



Zadatak 6.9.9.



Zadatak 6.9.10.

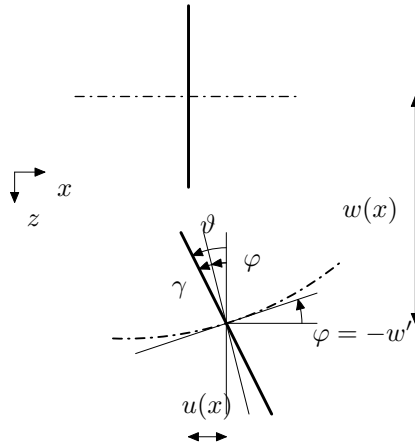


## 7. Gredni konačni elementi prema Timošenkovoj teoriji savijanja

### 7.1. Osnovne jednadžbe savijanja grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja

#### 7.1.1. Rubna zadaća savijanja grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Za razliku od Bernoullijeve teorije savijanja, Timošenkova teorija savijanja ne isključuje posmične deformacije. Kut zaokreta ravnine poprečnog presjeka,  $\vartheta$ , i kut zaokreta tangente na težišnu os,  $\varphi$ , nisu jednaki i razlikuju se za posmični kut zaokreta,  $\gamma$ .



Slika 7.1.1: Pomaci poprečnog presjeka grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Uz definirana fizikalna,  $E$  modul elastičnosti i  $G$  modul posmika, i geometrijska,  $F$  površina poprečnog presjeka i  $I$  moment inercije, svojstva grede možemo definirati  $D_s = EI$  krutost grede na savijanje i  $D_p = kGF$  posmičnu krutost grede pri čemu je  $k$  korekcijski posmični koeficijent. Diferencijalne jednadžbe savijanja poprečno opterećene grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja su

$$D_s \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = D_p \left( \vartheta + \frac{dw}{dx} \right), \quad (7.1.1)$$

$$D_p \left( \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + q = 0. \quad (7.1.2)$$

### 7.2. Primjena principa virtualnog rada

Uz virtualnu deformaciju savijanja  $\delta\kappa$ , virtualnu posmičnu deformaciju  $\delta\gamma$ , virtualni poprečni pomak (progib)  $\delta w$  i virtualni kut zaokreta poprečnog presjeka  $\delta\vartheta$  slijedi princip virtualnog rada

$$\int_V (\delta\varepsilon\sigma + \delta\gamma\tau) dV = \int_0^L (\delta w q + \delta\vartheta m) dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i K_{z_i} + \sum_{j=1}^r \delta\vartheta_j M_j. \quad (7.2.1)$$

Uvrštavanjem izraza za virtualnu deformaciju,  $\delta\varepsilon = \delta u' + z\delta\frac{d\vartheta}{dx}$ , i naprezanja,  $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\tau = G\gamma$ , uz poznati izraz za moment,  $M = EI\frac{d\vartheta}{dx}$ , slijedi

$$\begin{aligned} \int_V (\delta\varepsilon\sigma + \delta\gamma\tau) dV &= \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right) E \left( \int_F z^2 dF \right) \frac{d\vartheta}{dx} + \delta\gamma G \left( \int_F dF \right) \gamma \right] dx \\ &= \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right) (EI) \frac{d\vartheta}{dx} + \delta\gamma (kGF) \gamma \right] dx \\ &= \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right) M + \delta\gamma T \right] dx . \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

### 7.2.1. Aproximacija polja pomaka i deformacija

U čvorovima konačnog elementa ( $e$ ) nepoznanice su poprečni pomak  $w_i$  i kut zaokreta ravnine poprečnog presjeka  $\vartheta_i$ . Za nepoznata polja pretpostavimo linearnu razdiobu duž konačnog elementa

$$w(x) = N_1^{(e)}(x)w_1 + N_2^{(e)}(x)w_2, \quad \vartheta(x) = N_1^{(e)}(x)\vartheta_1 + N_2^{(e)}(x)\vartheta_2, \quad (7.2.3)$$

pri čemu su  $N_1^{(e)}, N_2^{(e)}$  standardne linearne funkcije oblika, (4.2.21). Prethodnu jednadžbu možemo zapisati i u standardnom matričnom obliku,

$$\begin{bmatrix} w \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{t}^{(e)}, \quad (7.2.4)$$

uz  $\mathbf{t}^{(e)} = [w_1 \quad \vartheta_1 \quad w_2 \quad \vartheta_2]^T$  definirani vektor pomaka čvorova promatarnog elementa ( $e$ ).

Na temelju ove aproksimacije polja pomaka i zaokreta možemo iskazati deformaciju savijanja i posmičnu deformaciju grede,

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{dN_1^{(e)}}{dx}\vartheta_1 + \frac{dN_2^{(e)}}{dx}\vartheta_2 = \mathbf{B}_s^{(e)} \mathbf{t}^{(e)}, \quad (7.2.5)$$

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \vartheta = \frac{dN_1^{(e)}}{dx}w_1 + \frac{dN_2^{(e)}}{dx}w_2 + N_1^{(e)}\vartheta_1 + N_2^{(e)}\vartheta_2 = \mathbf{B}_p^{(e)} \mathbf{t}^{(e)}, \quad (7.2.6)$$

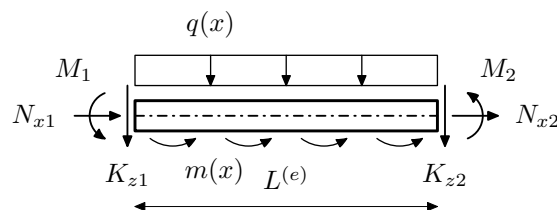
uz definirane diferencijalne operatore savijanja i posmika

$$\mathbf{B}_s^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L^{(e)}} & 0 & \frac{1}{L^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_p^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^{(e)}} & \frac{L^{(e)}-x}{L^{(e)}} & \frac{1}{L^{(e)}} & \frac{x}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (7.2.7)$$

## 7.3. Osnovni gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja

### 7.3.1. Ravnoteža izdvojenog elementa

Na izdvojenom elementu ( $e$ ) =  $[0, L^{(e)}]$ , duljine  $L^{(e)}$ , iz ravnoteže slijedi



Slika 7.3.1: Izdvojeni element ( $e$ ) poprečno opterećene grede



$$\int_0^{L^{(e)}} \left[ \delta \left( \frac{d\vartheta^{(e)}}{dx} \right) M^{(e)} + \delta\gamma^{(e)} T^{(e)} \right] dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)} q^{(e)} + \delta\theta^{(e)} m^{(e)} \right) dx + \sum_{i=1,2} \left( \delta w_i^{(e)} K_{z_i}^{(e)} + \delta\theta_i^{(e)} M_i^{(e)} \right). \quad (7.3.1)$$

Uvrštavanjem izraza za virtualnu deformaciju savijanja i virtualnu posmičnu deformaciju,

$$\delta \frac{d\vartheta^{(e)}}{dx} = \mathbf{B}_s^{(e)} \delta \mathbf{t}^{(e)}, \quad \delta\gamma^{(e)} = \mathbf{B}_p^{(e)} \delta \mathbf{t}^{(e)}, \quad (7.3.2)$$

izraza za sile na konačnom elementu  $(e)$ ,

$$M^{(e)} = [EI]^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} \mathbf{t}^{(e)}, \quad T^{(e)} = [kGF]^{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)} \mathbf{t}^{(e)}, \quad (7.3.3)$$

krutosti na savijanje  $\mathbf{D}_s^{(e)} = [EI]^{(e)}$  i posmične krutosti  $\mathbf{D}_p^{(e)} = [kGF]^{(e)}$  u jednadžbu ravnoteže slijedi

$$\int_0^{L^{(e)}} \left( \delta \mathbf{t}^{(e)} \right)^T \left[ \mathbf{B}_s^{(e)T} \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} + \mathbf{B}_p^{(e)T} \mathbf{D}_p^{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)} \right] \mathbf{t}^{(e)} dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta \mathbf{t}^{(e)} \right)^T \mathbf{N}^{(e)T} \begin{bmatrix} q^{(e)} \\ m^{(e)} \end{bmatrix} dx + \left( \delta \mathbf{t}^{(e)} \right)^T \begin{bmatrix} K_{z_1}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ K_{z_2}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (7.3.4)$$

Jednadžba vrijedi za proizvoljni vektor virtualnih pomaka,  $\delta \mathbf{t}^{(e)}$ , što znači da dobivamo jednadžbu

$$\int_0^{L^{(e)}} \left[ \left( \mathbf{B}_s^{(e)} \right)^T \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} + \left( \mathbf{B}_p^{(e)} \right)^T \mathbf{D}_p^{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)} \right] \mathbf{t}^{(e)} dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \mathbf{N}^{(e)} \right)^T \begin{bmatrix} q^{(e)} \\ m^{(e)} \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} K_{z_1}^{(e)} \\ M_1^{(e)} \\ K_{z_2}^{(e)} \\ M_2^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (7.3.5)$$

Dobivena jednadžba je zapravo jednadžba standardnog oblika

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{t}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}, \quad (7.3.6)$$

gdje je  $\mathbf{t}^{(e)}$  elementarni vektor nepoznatih pomaka (poprečnih pomaka i kuteva zaokreta čvorova konačnog elementa  $(e)$ ),  $\mathbf{q}^{(e)}$  elementarni vektor opterećenja elementa  $(e)$  i  $\mathbf{k}^{(e)}$  vektor zadanih koncentriranih sila i momenata u čvorovima elementa  $(e)$ . Elementarni vektor opterećenja za gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja  $(e)$  općenito glasi

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_{(e)} \mathbf{N}^{(e)T} \begin{bmatrix} q^{(e)} \\ m^{(e)} \end{bmatrix} dx, \quad (7.3.7)$$

a elementarnu matricu krutosti  $\mathbf{K}^{(e)}$  možemo izraziti, kao zbroj elementarne matrice krutosti savijanja  $\mathbf{K}_s^{(e)}$  i elementarne matrice krutosti posmika  $\mathbf{K}_p^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_s^{(e)} + \mathbf{K}_p^{(e)}$ , uz definirane pripadne matrice

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)T} \mathbf{D}_s^{(e)} \mathbf{B}_s^{(e)} dx, \quad \mathbf{K}_p^{(e)} = \int_{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)T} \mathbf{D}_p^{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)} dx. \quad (7.3.8)$$

### 7.3.2. Elementarna matrica krutosti grednog konačnog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Promatramo gredni konačni element  $(e)$  duljine  $L^{(e)}$  prema Timošenkovoj teoriji savijanja. Takav konačni element ima četiri stupnja slobode, poprečne pomake  $w_i$  i kuteve zaokreta  $\vartheta_i$  oba krajnja čvora. Kartezijev koordinatni sustav postavljamo tako da je ishodište u početnom čvoru konačnog elementa. Elementarnu matricu krutosti možemo dobiti kao zbroj elementarne matrice krutosti savijanja i elementarne matrice posmika ili izravno

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx, \quad (7.3.9)$$

uz definirane pripadne matrice elastičnosti i matrice deformacija

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s^{(e)} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_p^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s^{(e)} \\ \mathbf{B}_p^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (7.3.10)$$

Elementarna matrica krutosti, uz numeričku integraciju s dvije točke integracije (podintegralna funkcija je polinom maksimalno drugog stupnja), slijedi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{3} + \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{6} - \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{6} - \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{3} + \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (7.3.11)$$

Dobivenu elementarnu matricu krutosti možemo prikazati i kroz odnos krutosti na savijanje,  $D_s^{(e)} = [EI]^{(e)}$ , i posmične krutosti,  $D_p^{(e)} = [kGF]^{(e)}$ ,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{D_p^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L^{(e)}}{2} & -1 & -\frac{L^{(e)}}{2} \\ -\frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{3} + \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} & \frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{6} - \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} \\ -1 & \frac{L^{(e)}}{2} & 1 & \frac{L^{(e)}}{2} \\ -\frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{6} - \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} & \frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{3} + \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (7.3.12)$$

#### 7.4. Gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja s reduciranom integracijom

Kod proračuna s grednim konačnim elementom prema Timošenkovoj teoriji savijanja i pripadnom elementarnom matricom krutosti, (7.3.11), dobivena rješenja korektna su i konvergiraju analitičkim rješenjima kod greda sa značajnim utjecajem posmične krutosti ( $L \approx H$ ). Kod greda koje se ponašaju bliže Bernoullijevoj teoriji, ( $L \gg H$ ), rješenja bitno odstupaju od analitičkih rješenja i teže prema nuli za veće odnose raspona i visine poprečnog presjeka. Takva pojava naziva se *shear locking* (zadržavanje utjecaja posmika). Fizikalno, utjecaj posmika ostaje dominantan i kod greda kod kojih je posmična deformacija bitno manja od deformacije savijanja. Taj učinak možemo jasno uočiti ako sustav jednadžbi, uz uvođenje koeficijenta  $\beta = \frac{12D_s}{D_p L^{(e)2}}$ , te prikaza elementarnih matrica krutosti savijanja i posmika,

$\mathbf{K}_s^{(e)} = D_s \bar{\mathbf{K}}_s^{(e)}$  i  $\mathbf{K}_p^{(e)} = D_p \bar{\mathbf{K}}_p^{(e)}$ , napišemo u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \Rightarrow \left( \bar{\mathbf{K}}_s^{(e)} + \frac{12}{\beta L^{(e)2}} \bar{\mathbf{K}}_p^{(e)} \right) \mathbf{t}^{(e)} = \frac{\mathbf{q}^{(e)}}{D_s}. \quad (7.4.1)$$

Prema definiciji koeficijenta  $\beta$ , slijedi  $H/L \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0$ , što znači da tada  $1/\beta \rightarrow \infty$ , odnosno posmični dio matrice krutosti znatno više doprinosi u matrici krutosti. Utjecaj se može smanjiti u slučaju da matrica  $\bar{\mathbf{K}}_p^{(e)}$  postane singularna.

Za izbjegavanje pojave shear-lockinga možemo koristiti reduciranu integraciju podintegralnih funkcija elementarne matrice krutosti. Za elemente matrice krutosti  $k_{22}, k_{24}, k_{42}, k_{44}$  podintegralna funkcija polinom je drugog stupnja i u proračunu elementarne matrice krutosti, (7.3.11), provedena je integracija s dvije točke integracije što je dovelo do egzaktne vrijednosti integrala. Integracijom podintegralnih funkcija s jednom točkom integracije slijedi elementarna matrica krutosti konačnog elementa s reducira-

nom integracijom

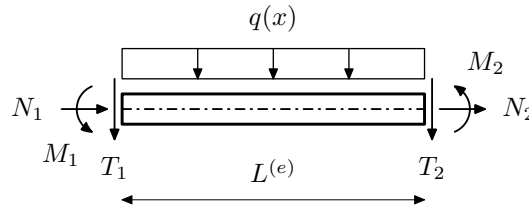
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{4} + \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{4} - \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} \\ -\frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{4} - \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{[kGF]^{(e)}}{2} & \frac{[kGF]^{(e)}L^{(e)}}{4} + \frac{[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad (7.4.2)$$

ili zapisano kroz odnos krutosti na savijanje i posmične krutosti,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{D_p^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L^{(e)}}{2} & -1 & -\frac{L^{(e)}}{2} \\ -\frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{4} + \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} & \frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{4} - \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} \\ -1 & \frac{L^{(e)}}{2} & 1 & \frac{L^{(e)}}{2} \\ -\frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{4} - \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} & \frac{L^{(e)}}{2} & \frac{L^{(e)2}}{4} + \frac{D_s^{(e)}}{D_p^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (7.4.3)$$

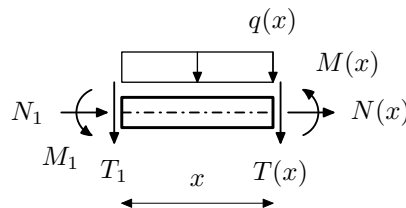
## 7.5. Egzaktni gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja

Za postizanje kvalitetnijih numeričkih rješenja kod proračuna grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja možemo definirati egzaktni gredni konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja izravno iz ravnoteže elementa. Za definirane izraze za moment i poprečnu silu, (3.3.3), i pripadne diferencijalne



Slika 7.5.1: Ravnoteža proizvoljnog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja

odnose, (3.3.4), (3.3.5), možemo postaviti jednadžbe ravnoteže na elementu. Promatramo poprečni presjek elementa na udaljenosti  $x$  od početnog čvora, (Slika 7.5.2). Za poprečnu silu u proizvoljnom presjeku



Slika 7.5.2: Ravnoteža elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja u proizvoljnom poprečnom presjeku na udaljenosti  $x$  od početnog čvora

vrijedi izraz

$$T(x) = -T_1 - \int_0^x q(\xi) d\xi = -T_1 - Q(x), \quad (7.5.1)$$

pri čemu je  $T_1$  poprečna sila u početnom čvoru elementa, a  $Q(x)$  rezultantni iznos zadanog opterećenja na području između početnog čvora i promatranog presjeka  $x$ . Za poprečnu silu u početnom čvoru elementa

onda vrijedi izraz

$$\begin{aligned}
T_1 &= -T(x) - Q(x) = -\frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} T(x) dx - \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} Q(x) dx \\
&= -\frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} D_p \left( \vartheta + \frac{dw}{dx} \right) dx - \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} Q(x) dx \\
&= -\frac{D_p}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} \vartheta dx - \frac{D_p}{L^{(e)}} (w_2 - w_1) - \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} Q(x) dx .
\end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Iz diferencijalnog odnosa momenta i poprečne sile, (3.3.4), slijedi odnos

$$D_s \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = T(x) \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{T(x)}{D_s} = \frac{-T_1 - Q(x)}{D_s} . \tag{7.5.3}$$

Za zaokret  $\vartheta$  možemo pretpostaviti raspodjelu

$$\vartheta = N_1 \vartheta_1 + N_2 \vartheta_2 + N_s \vartheta_s , \tag{7.5.4}$$

pri čemu su  $N_1$  i  $N_2$  standardni linearni interpolacijski polinomi, (4.2.21),  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  iznosi zaokreta u čvorovima elementa,  $\vartheta_s$  zaokret u sredini elementa, a  $N_s = N_1 \cdot N_2$  kvadratni interpolacijski polinom. Za kvadratni interpolacijski polinom  $N_s$  vrijedi

$$N_s(x) = \frac{x(L^{(e)} - x)}{L^{(e)2}} , \quad \frac{dN_s}{dx} = \frac{L^{(e)} - 2x}{L^{(e)2}} , \quad \frac{d^2 N_s}{dx^2} = -\frac{2}{L^{(e)2}} , \quad \int_0^{L^{(e)}} N_s dx = \frac{L^{(e)}}{6} . \tag{7.5.5}$$

Množenjem jednadžbe (7.5.3) s kvadratnim interpolacijskim polinomom  $N_s$  i integriranjem duž konačnog elementa slijedi

$$\int_0^{L^{(e)}} N_s \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = -\frac{T_1}{D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s dx - \frac{1}{D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx = -\frac{T_1 L^{(e)}}{6 D_s} - \frac{1}{D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx . \tag{7.5.6}$$

Lijevu stranu jednadžbe možemo uzastopno parcijalno integrirati,

$$\begin{aligned}
\int_0^{L^{(e)}} N_s \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} dv = \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx & v = \frac{d\vartheta}{dx} \\ u = N_s & du = \frac{dN_s}{dx} dx \end{array} \right| = \left( N_s \frac{d\vartheta}{dx} \right) \Big|_0^{L^{(e)}} - \int_0^{L^{(e)}} \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dN_s}{dx} dx \\
&= \left| \begin{array}{ll} dv = \frac{d\vartheta}{dx} dx & v = \vartheta \\ u = \frac{dN_s}{dx} & du = \frac{d^2 N_s}{dx^2} dx \end{array} \right| = - \left( \vartheta \frac{dN_s}{dx} \right) \Big|_0^{L^{(e)}} + \int_0^{L^{(e)}} \vartheta \frac{d^2 N_s}{dx^2} dx \\
&= \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{L^{(e)}} - \frac{2}{L^{(e)2}} \int_0^{L^{(e)}} \vartheta dx ,
\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

nakon čega slijedi jednadžba (7.5.6) u obliku

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{L^{(e)}} - \frac{2}{L^{(e)2}} \int_0^{L^{(e)}} \vartheta dx = -\frac{T_1 L^{(e)}}{6 D_s} - \frac{1}{D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx , \tag{7.5.8}$$

iz čega možemo izraziti integral zaokreta potreban u jednadžbi (7.5.2),

$$\int_0^{L^{(e)}} \vartheta dx = \frac{L^{(e)}}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{T_1 L^{(e)3}}{12 D_s} + \frac{L^{(e)2}}{2 D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx . \tag{7.5.9}$$

Uvrštavanjem iskazanog integrala zaokreta duž konačnog elementa u jednadžbu za poprečnu silu u početnom čvoru, (7.5.2), slijedi

$$T_1 = -\frac{D_p}{L^{(e)}} \left[ \frac{L^{(e)}}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{T_1 L^{(e)^3}}{12D_s} + \frac{L^{(e)^2}}{2D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx \right] - \frac{D_p}{L^{(e)}} (w_2 - w_1) - \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} Q(x) dx, \quad (7.5.10)$$

iz čega proizlazi konačan izraz za poprečnu silu u početnom čvoru,

$$T_1 \left[ 1 + \frac{D_p L^{(e)^2}}{12D_s} \right] = -\frac{D_p}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{D_p}{L^{(e)}} (w_2 - w_1) - \frac{D_p L^{(e)^2}}{2D_s} \int_0^{L^{(e)}} N_s Q(x) dx - \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} Q(x) dx. \quad (7.5.11)$$

Uvođenjem koeficijenta  $\beta = \frac{12D_s}{D_p L^{(e)^2}}$  konačni izraz za poprečnu silu u početnom čvoru konačnog elementa možemo zapisati u obliku

$$T_1 = \frac{D_s}{1 + \beta} \left[ \frac{12}{L^{(e)^3} (w_1 - w_2)} - \frac{6}{L^{(e)^2} (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right] - \frac{1}{(1 + \beta)L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx. \quad (7.5.12)$$

Iz ravnoteže svih sila u smjeru osi  $z$ ,  $T_2 = -T_1 - \int_0^{L^{(e)}} q(x) dx$ , jednostavno slijedi izraz za poprečnu silu u krajnjem čvoru konačnog elementa

$$T_2 = \frac{D_s}{1 + \beta} \left[ \frac{12}{L^{(e)^3} (w_2 - w_1)} + \frac{6}{L^{(e)^2} (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right] + \frac{1}{(1 + \beta)L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx - \int_0^{L^{(e)}} q(x) dx. \quad (7.5.13)$$

Za dobivanje momenta u početnom čvoru elementa,  $M_1$ , pomnožimo diferencijalni odnos, (3.3.4) s funkcijom  $N_1$  i integriramo duž konačnog elementa,

$$\int_0^{L^{(e)}} N_1(x) \frac{dM}{dx} dx - \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) T(x) dx = 0. \quad (7.5.14)$$

Parcijalnom integracijom prvog člana prethodnog izraza slijedi jednadžba

$$(N_1(x)M(x))|_0^{L^{(e)}} - \int_0^{L^{(e)}} M(x) \frac{dN_1}{dx} dx - \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) T(x) dx = 0, \quad (7.5.15)$$

iz čega možemo izraziti  $M_1$ ,  $((N_1(x)M(x))|_0^{L^{(e)}} = M_1)$ ,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{L^{(e)}} M(x) \frac{dN_1}{dx} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) T(x) dx \\ &= -\frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} M(x) dx + \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) T(x) dx \\ &= -\frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} D_s \frac{d\vartheta}{dx} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) (-T_1 - Q(x)) dx \\ &= \frac{D_s}{L^{(e)}} (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{L^{(e)}}{2} T_1' \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) Q(x) dx. \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

Na sličan način možemo dobiti i moment u krajnjem čvoru elementa,  $M_2$ . Pomnožimo diferencijalni odnos, (3.3.4) s funkcijom  $N_2$  i integriramo duž konačnog elementa,

$$\int_0^{L^{(e)}} N_2(x) \frac{dM}{dx} dx - \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) T(x) dx = 0. \quad (7.5.17)$$

Parcijalnom integracijom prvog člana prethodne jednadžbe slijedi jednadžba

$$(N_2(x)M(x))\Big|_0^{L^{(e)}} - \int_0^{L^{(e)}} M(x) \frac{dN_2}{dx} dx - \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) T(x) dx = 0, \quad (7.5.18)$$

iz čega možemo izraziti  $M_2$ ,  $((N_2(x)M(x))\Big|_0^{L^{(e)}} = M_2)$ ,

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_0^{L^{(e)}} M(x) \frac{dN_2}{dx} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) T(x) dx \\ &= \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} M(x) dx + \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) T(x) dx \\ &= \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} D_s \frac{d\vartheta}{dx} dx + \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) (T_1 - Q(x)) dx \\ &= \frac{D_s}{L^{(e)}} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{L^{(e)}}{2} T_1 - \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) Q(x) dx. \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Uvrštavanjem izraza za poprečnu silu u početnom čvoru, (7.5.12), slijede izrazi za momente na krajevima elementa izraženi preko poprečnih pomaka i kuteva zaokreta,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{D_s}{(1+\beta)L^{(e)}} \left[ (2-\beta)\vartheta_2 + (4+\beta)\vartheta_1 + \frac{6}{L^{(e)}}(w_2 - w_1) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2(1+\beta)} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx - \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) Q(x) dx, \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{D_s}{(1+\beta)L^{(e)}} \left[ (2-\beta)\vartheta_1 + (4+\beta)\vartheta_2 + \frac{6}{L^{(e)}}(w_2 - w_1) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2(1+\beta)} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx - \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) Q(x) dx. \end{aligned} \quad (7.5.21)$$

Iz standardnog odnosa za sile na krajevima elementa,  $\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{w}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)}$ , uz definirani vektor sila na krajevima elementa  $\mathbf{f} = [T_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad M_2]^T$ , slijedi elementarna matrica krutosti

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{D_s}{(1+\beta)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^{(e)^3} & -\frac{6}{L^{(e)^2} & -\frac{12}{L^{(e)^3} & -\frac{6}{L^{(e)^2} \\ -\frac{6}{L^{(e)^2} & \frac{4+\beta}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)^2} & \frac{2-\beta}{L^{(e)}} \\ -\frac{12}{L^{(e)^3} & \frac{6}{L^{(e)^2} & \frac{12}{L^{(e)^3} & \frac{6}{L^{(e)^2} \\ -\frac{6}{L^{(e)^2} & \frac{2-\beta}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)^2} & \frac{4+\beta}{L^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad (7.5.22)$$

i elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+\beta)L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx \\ -\frac{1}{2(1+\beta)} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx + \int_0^{L^{(e)}} N_1(x) Q(x) dx \\ \frac{1}{(1+\beta)L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx \\ -\frac{1}{2(1+\beta)} \int_0^{L^{(e)}} (6N_s + \beta) Q(x) dx + \int_0^{L^{(e)}} N_2(x) Q(x) dx \end{bmatrix}, \quad (7.5.23)$$

egzaktog konačnog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja. Za jednoliko kontinuirano opterećenje,  $q = const.$ , složene podintegralne funkcije nakon integracije daju jednake vrijednosti članova elementarnog vektora opterećenja kao i kod grede prema Bernoullijevoj teoriji savijanja,

$$\mathbf{q}^{(e)} = \left[ \frac{qL^{(e)}}{2} \quad -\frac{qL^{(e)2}}{12} \quad \frac{qL^{(e)}}{2} \quad \frac{qL^{(e)2}}{12} \right]^T. \quad (7.5.24)$$

Jednoliko kontinuirano opterećenje i koncentrirana sila u sredini elementa su opterećenja elementa za koja vrijednosti članova elementarnog vektora opterećenja ne ovise o koeficijentu  $\beta$ . Za proizvoljna opterećenja vrijednosti članova elementarnog vektora opterećenja ovisit će o koeficijentu  $\beta$ , npr. za linearno promjenjivo (trokutasto) opterećenje,  $q(x) = \frac{qx}{L^{(e)}}$ , elementarni vektor opterećenja glasi

$$\mathbf{q}^{(e)} = \left[ \frac{qL^{(e)}(9+10\beta)}{60(1+\beta)} \quad -\frac{qL^{(e)2}(4+5\beta)}{120(1+\beta)} \quad \frac{qL^{(e)}(21+20\beta)}{60(1+\beta)} \quad \frac{qL^{(e)2}(6+5\beta)}{120(1+\beta)} \right]^T. \quad (7.5.25)$$

Ako promatramo proračunatu elementarnu matricu krutosti zapisanu u obliku (7.5.22) jasno slijedi da elementarna matrica krutosti grede koja uslijed svojih dimenzija teži ponašanju prema Bernoullijevoj teoriji savijanja, ( $\beta \rightarrow 0$ ), poprima oblik iskazan u jednadžbi (5.2.32).

## 7.6. Primjeri

**Primjer 7.6.1.** Zadana je konzolna greda raspona  $L$ , krutosti na savijanje  $D_s = EI$ , posmične krutosti  $D_p = kGF$ , ( $\beta = \frac{12EI}{kGFL^2} = \frac{12D_s}{D_p L^2}$ ), opterećena koncentriranom silom  $K$  na slobodnom kraju. Potrebno je odrediti progib slobodnog kraja grede i sile u definiranim čvorovima.



Slika 7.6.1.1: Konzolna greda raspona  $L$  opterećena koncentriranom silom  $K$  na slobodnom kraju

Analitičko rješenje progiba slobodnog kraja grede iznosi  $w_L = \frac{KL^3}{12D_s} (4 + \beta)$ :

Prvo ćemo zadanu konzolnu gredu riješiti pomoću osnovnog grednog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja, (potpoglavlje 7.3.). Gredu možemo promatrati kao jedan konačni element duljine  $L$ . Elementarna matrica krutosti je definirana jednadžbom (7.3.11). Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$  i  $\vartheta_1 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.1)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 3EI}{kGFL^2 + 12EI} \\ -\frac{6KL^2}{kGFL^2 + 12EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{12EI} \frac{\beta(4+\beta)}{1+\beta} \\ -\frac{KL^2}{2EI} \frac{\beta}{1+\beta} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.2)$$

Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = \frac{kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 3EI}{kGFL^2 + 12EI} \\ -\frac{6KL^2}{kGFL^2 + 12EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ KL \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.3)$$

Gredu možemo podijeliti na dva jednaka dijela duljine  $L/2$ . Elementarna matrica krutosti za svaki dio glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.4)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -\frac{L}{4} \\ 0 & \frac{L^2}{6} + \frac{2EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \\ w_3 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.5)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \\ w_3 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL}{kGF} \frac{5kGFL^2 + 24EI}{kGFL^2 + 48EI} \\ -\frac{18KL^2}{kGFL^2 + 48EI} \\ \frac{16KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 3EI}{kGFL^2 + 48EI} \\ -\frac{24KL^2}{kGFL^2 + 48EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{12EI} \frac{\beta(5+2\beta)}{1+4\beta} \\ -\frac{3KL^2}{2EI} \frac{\beta}{1+4\beta} \\ \frac{KL^3}{12EI} \frac{4\beta(4+\beta)}{1+4\beta} \\ -\frac{2KL^2}{EI} \frac{\beta}{1+4\beta} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.6)$$

Dobivena rješenja (7.6.1.2) i (7.6.1.6) za progib slobodnog kraja konzolne grede jasno pokazuju da kad ponašanje grede teži prema Bernoullijevoj teoriji savijanja ( $\beta \rightarrow 0$ ), iznos progiba teži prema nuli. To je izravna posljedica shear-locking pojave. Takva rješenja su potpuno neupotrebljiva.

Ako elementarnu matricu izračunamo reduciranom integracijom, (potpoglavlje 7.4.), matrica krutosti slijedi prema jednadžbi (7.4.2). Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$  i  $\vartheta_1 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.7)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 4EI}{4EI} \\ -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{12EI} (3 + \beta) \\ -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.8)$$



Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = \frac{kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 4EI}{4EI} \\ -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ KL \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.9)$$

Gredu možemo podijeliti na dva jednaka dijela duljine  $L/2$ . Elementarna matrica krutosti za svaki dio glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.10)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednažbi

$$\frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -\frac{L}{4} \\ 0 & \frac{L^2}{8} + \frac{2EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \\ w_3 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.11)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \\ w_3 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL}{32kGF} \frac{3kGFL^2 + 16EI}{EI} \\ -\frac{3KL^2}{8EI} \\ \frac{KL}{16kGF} \frac{5kGFL^2 + 16EI}{48EI} \\ -\frac{KL^2}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{96EI} (9 + 4\beta) \\ -\frac{3KL^2}{8EI} \\ \frac{KL^3}{12EI} \left(\frac{15}{4} + \beta\right) \\ -\frac{KL^2}{2EI} \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.12)$$

Ako računamo egzaktnim konačnim elementom, (podpoglavlje 7.5.) i pripadnom elementarnom matricom krutosti, (7.5.22), uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = \vartheta_1 = 0$ , uz  $EI = D_s$  i  $\beta = \frac{12D_s}{D_p L^2}$ , slijedi sustav jednažbi

$$\frac{D_s}{1 + \beta} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4 + \beta}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.13)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{12D_s} (4 + \beta) \\ -\frac{KL^2}{2D_s} \end{bmatrix}, \quad (7.6.1.14)$$

što je jednako analitičkim vrijednostima nepoznatih pomaka. Sile u čvorovima elementa slijede iz

ravnuteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = \frac{D_s}{(1+\beta)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L(e)^3} & -\frac{6}{L(e)^2} & -\frac{12}{L(e)^3} & -\frac{6}{L(e)^2} \\ -\frac{6}{L(e)^2} & \frac{4+\beta}{L(e)} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{2-\beta}{L(e)} \\ -\frac{12}{L(e)^3} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{12}{L(e)^3} & \frac{6}{L(e)^2} \\ -\frac{6}{L(e)^2} & \frac{2-\beta}{L(e)} & \frac{6}{L(e)^2} & \frac{4+\beta}{L(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{KL^3}{12D_s}(4+\beta) \\ -\frac{KL^2}{2D_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ KL \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.1.15)$$

Prethodna rješenja, (7.6.1.2), (7.6.1.6), (7.6.1.8) i (7.6.1.12), možemo izraziti pomoću koeficijenta  $\beta$ . Definirane odnose pojedinih rješenja u odnosu na analitičko rješenje možemo prikazati i grafički u ovisnosti o koeficijentu  $\beta$  odnosno o odnosu raspona i visine poprečnog presjeka. Dobivene rezultate možemo promatrati kroz primjer grede pravokutnog poprečnog presjeka, ( $F = B \cdot H$ ,  $I = \frac{BH^3}{12}$ ), s modulom posmika  $G = \frac{2}{5}E$ , i uz korekcijski posmični faktor za pravokutni poprečni presjek  $k = \frac{5}{6}$ . Tada koeficijent  $\beta$  možemo izraziti kao funkciju odnosa duljine grede i visine poprečnog presjeka grede,  $L/H = \lambda$ ,

$$\beta = \frac{12EI}{kGFL^2} = \frac{12E \frac{BH^3}{12}}{\frac{5}{6} \frac{2}{5} EBHL^2} = \frac{3H^2}{L^2} = \frac{3}{\lambda^2}. \quad (7.6.1.16)$$

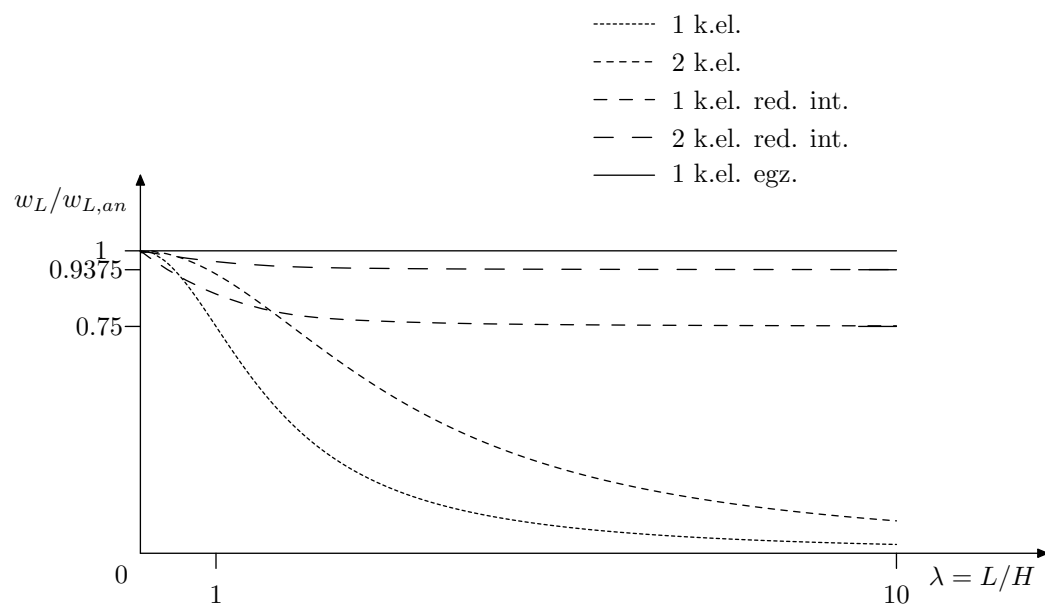
U tablici 7.6.1 prikazane su vrijednosti progiba slobodnog kraja konzolne grede. Dobivene rezultate

Tablica 7.6.1: Progib konzolne grede

	$w_L$	$\frac{w_L}{w_{L,an}}$	
1 k.el. 7.3.	$\frac{KL^3}{12D_s} \frac{\beta(4+\beta)}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\frac{3}{\lambda^2+3}$
2 k.el. 7.3.	$\frac{KL^3}{12D_s} \frac{4\beta(4+\beta)}{1+4\beta}$	$\frac{4\beta}{1+4\beta}$	$\frac{12}{\lambda^2+12}$
1 k.el. 7.4.	$\frac{KL^3}{12D_s} (3+\beta)$	$\frac{3+\beta}{4+\beta}$	$\frac{3\lambda^2+3}{4\lambda^2+3}$
2 k.el. 7.4.	$\frac{KL^3}{12D_s} (\frac{15}{4}+\beta)$	$\frac{\frac{15}{4}+\beta}{4+\beta}$	$\frac{\frac{15}{4}\lambda^2+3}{4\lambda^2+3}$
1 k.el. 7.5.	$\frac{KL^3}{12D_s} (4+\beta)$	1	1

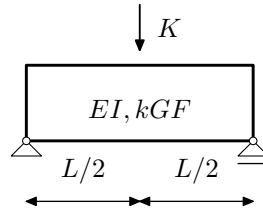
odnosa numeričkih rješenja za pojedine konačne elemente i analitičkog rješenja u ovisnosti o odnosu raspona i visini pravokutnog poprečnog presjeka možemo prikazati i grafički, (Slika 7.6.1.2).

Na prikazanom dijagramu možemo uočiti da konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja u područjima gdje je dominantno savijanje u odnosu na posmik (Bernoullijeva teorija savijanja) daje rješenja koja su potpuno neprihvatljiva. Konačni element s reduciranom integracijom daje bitno kvalitetnija rješenja, pri čemu vidimo kvadratnu konvergenciju rješenja podjelom grede na više elemenata (jedan konačni element pogreška 25%, dva konačna elementa pogreška 6.25%, svako daljnje dvostruko povećanje broja konačnih elemenata odnosno dvostruko manja duljina svakog konačnog elementa daje četiri puta manju pogrešku). Uzimanje egzaktnog konačnog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja u ovom primjeru daje numeričko rješenje jednako analitičkom rješenju već kod proračuna sa samo jednim konačnim elementom.



Slika 7.6.1.2: Odnos numeričkog i analitičkog rješenja u ovisnosti o odnosu raspona i visine pravokutnog poprečnog presjeka

**Primjer 7.6.2.** Zadana je slobodno oslonjena greda raspona  $L$ , krutosti na savijanje  $D_s = EI$ , posmične krutosti  $D_p = kGF$ ,  $\left(\beta = \frac{12EI}{kGFL^2} = \frac{12D_s}{D_p L^2}\right)$ , opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini raspona. Potrebno je odrediti progib u sredini raspona grede i sile u definiranim čvorovima.



Slika 7.6.2.1: Slobodno oslonjena greda raspona  $L$  opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini raspona

Prvo ćemo zadanu slobodno oslonjenu gredu riješiti pomoću osnovnog grednog elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja, (potpoglavlje 7.3.). Gredu možemo podijeliti na dva jednaka dijela duljine  $L/2$ . Elementarna matrica krutosti za svaki dio glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.1)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednažbi

$$\frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & 0 \\ \frac{L}{4} & 2 & 0 & -\frac{L}{4} \\ \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & 0 & \frac{L^2}{6} + \frac{2EI}{kGF} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ 0 & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.2)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3KL^2}{kGFL^2 + 48EI} \\ \frac{16KL}{kGF} \frac{kGFL^2 + 12EI}{kGFL^2 + 48EI} \\ 0 \\ \frac{3KL^2}{kGFL^2 + 48EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3KL^2}{EI} \frac{\beta}{1+4\beta} \\ \frac{KL^3}{12EI} \frac{\beta(1+\beta)}{1+4\beta} \\ 0 \\ \frac{3KL^2}{EI} \frac{\beta}{1+4\beta} \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.3)$$

Sile u čvorovima elementa slijede iz ravnoteže

$$\mathbf{S}^{1-2} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3KL^2}{kGFL^2+48EI} \\ \frac{16KL}{kGF} \frac{kGFL^2+12EI}{kGFL^2+48EI} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ 0 \\ \frac{K}{2} \\ \frac{KL}{4} \end{bmatrix}, \quad (7.6.2.4)$$

$$\mathbf{S}^{2-3} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{12} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16KL}{kGF} \frac{kGFL^2+12EI}{kGFL^2+48EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3KL^2}{kGFL^2+48EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{4} \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.5)$$

Ako elementarnu matricu izračunamo reduciranom integracijom, (potpoglavlje 7.4.), matrica krutosti slijedi prema jednadžbi (7.4.2). Grednu možemo podijeliti na dva jednaka dijela duljine  $L/2$ . Elementarna matrica krutosti za svaki dio glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{4} & -1 & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} \\ -1 & \frac{L}{4} & 1 & \frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.6)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{2kGF}{L} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & 0 \\ \frac{L}{4} & 2 & 0 & -\frac{L}{4} \\ \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & 0 & \frac{L^2}{8} + \frac{2EI}{kGF} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} \\ 0 & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} - \frac{EI}{kGF} & \frac{L^2}{16} + \frac{EI}{kGF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.7)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16EI} \\ \frac{KL(16EI+kGFL^2)}{64EI kGF} \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16EI} \\ \frac{KL^3}{192EI} (3+4\beta) \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16EI} \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.8)$$

Ako računamo egzaktnim konačnim elementom, (podpoglavlje 7.5.) i pripadnom elementarnom matricom krutosti za svaki dio grede,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{D_s}{(1+\beta)} \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & 2(4+\beta) & \frac{24}{L^2} & 2(2-\beta) \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{2(2-\beta)}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{2(4+\beta)}{L} \end{bmatrix}, \quad (7.6.2.9)$$

uvršćavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{D_s}{L^3(1+\beta)} \begin{bmatrix} \frac{2(4+\beta)}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{2(2-\beta)}{L} & 0 \\ \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{2(2-\beta)}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4(4+\beta)}{L} & \frac{2(2-\beta)}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{2(2-\beta)}{L} & \frac{2(4+\beta)}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6.2.10)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16D_s} \\ \frac{KL^3}{192D_s}(4+\beta) \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16D_s} \end{bmatrix}, \quad (7.6.2.11)$$

što je jednako analitičkim vrijednostima nepoznatih pomaka.

Prethodna rješenja, (7.6.2.3) i (7.6.2.8), možemo izraziti pomoću koeficijenta  $\beta$ . Definirane odnose pojedinih rješenja u odnosu na analitičko rješenje možemo prikazati i grafički u ovisnosti o koeficijentu  $\beta$  odnosno o odnosu raspona i visine poprečnog presjeka. Dobivene rezultate možemo promatrati kroz primjer grede pravokutnog poprečnog presjeka, ( $F = B \cdot H$ ,  $I = \frac{BH^3}{12}$ ), s modulom posmika  $G = \frac{2}{5}E$ , i uz korekcijski posmični faktor za pravokutni poprečni presjek  $k = \frac{5}{6}$ . Tada koeficijent  $\beta$  možemo izraziti kao funkcija odnosa  $L/H = \lambda$ ,

$$\beta = \frac{12EI}{kGFL^2} = \frac{12E \frac{BH^3}{12}}{\frac{5}{6} \frac{2}{5} EBHL^2} = \frac{3H^2}{L^2} = \frac{3}{\lambda^2}. \quad (7.6.2.12)$$

U tablici 7.6.2 prikazane su vrijednosti progiba u sredini raspona slobodno oslonjene grede.

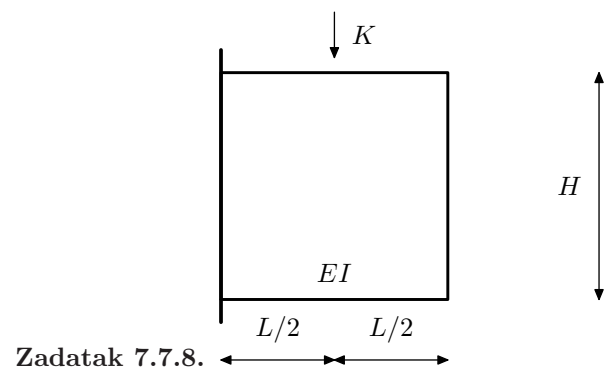
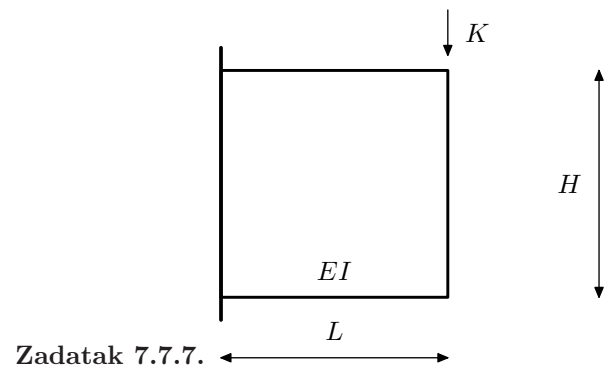
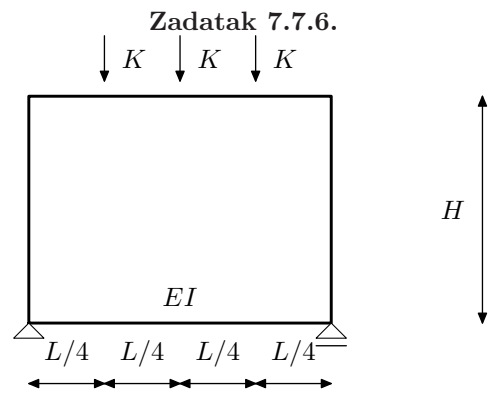
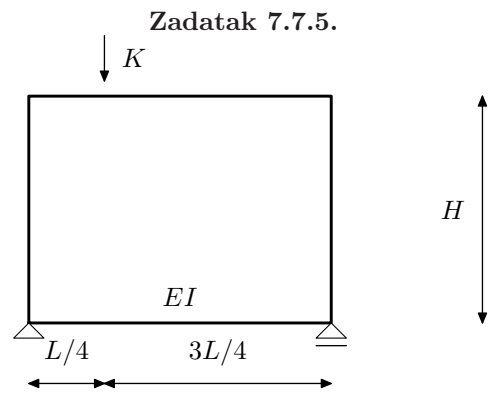
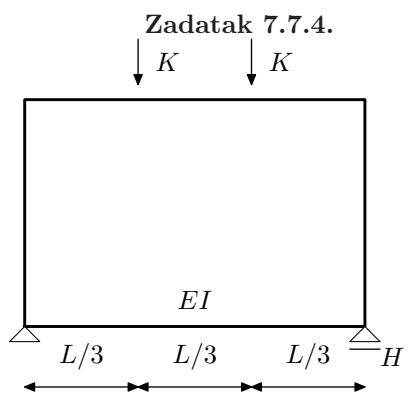
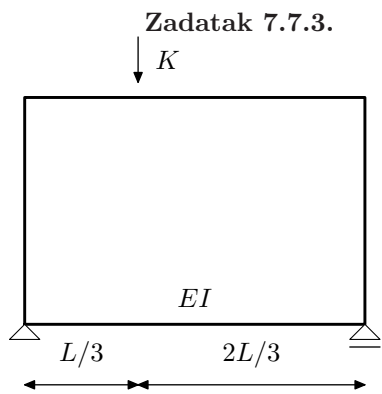
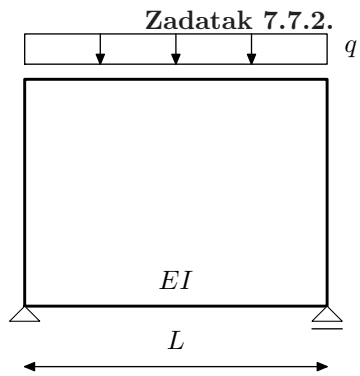
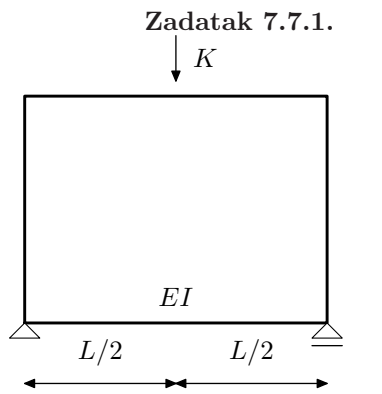
Tablica 7.6.2: Progib u sredini raspona

	$w_L$	$\frac{w_L}{w_{L,an}}$	
2 k.el. 7.3.	$\frac{KL^3}{12EI} \frac{\beta(1+\beta)}{1+4\beta}$	$\frac{16\beta(1+\beta)}{(1+4\beta)(4+\beta)}$	$\frac{48(\lambda^2+3)}{(\lambda^2+12)(4\lambda^2+3)}$
2 k.el. 7.4.	$\frac{KL^3}{192EI} (3+4\beta)$	$\frac{3+4\beta}{4+\beta}$	$\frac{3\lambda^2+12}{4\lambda^2+3}$
2 k.el. 7.5.	$\frac{KL^3}{192D_s} (4+\beta)$	1	1

U tabličnom prikazu odnosa numeričkih i analitičkih rješenja možemo uočiti da i kod slobodno oslonjene grede konačni element prema Timošenkovoj teoriji savijanja u područjima gdje je dominantno savijanje u odnosu na posmik (Bernoullijeva teorija savijanja) daje rješenja koja su potpuno neprihvatljiva. Konačni element s reduciranom integracijom daje bitno kvalitetnija rješenja, pri čemu vidimo da pogreška kod rješenja s dva konačna elementa iznosi 25%. Uzimanje dva egzaktna konačna elementa prema Timošenkovoj teoriji savijanja u ovom primjeru daje numeričko rješenje jednako analitičkom rješenju.

## 7.7. Zadaci

U zadacima je potrebno za zadane poprečno opterećene grede, odrediti progib u sredini raspona jednostavnih greda ili na konzolnom rubu konzolnih greda za omjere visine poprečnih presjeka i raspona  $H/L = 0.1, 1, 10$ . Proračun provesti Timošenkovim osnovnim grednim konačnim elementom sa 4 i 8 konačnih elemenata (odnosno 3 ili 6 konačnih elemenata kod opterećenja u trećinama raspona), Timošenkovim grednim konačnim elementom s reduciranom integracijom sa 4 i 8 konačnih elemenata (odnosno 3 ili 6 konačnih elemenata kod opterećenja u trećinama raspona) i egzaktnim Timošenkovim grednim konačnim elementom (sa 2, 3 ili 4 elementa ovisno o položaju opterećenja).

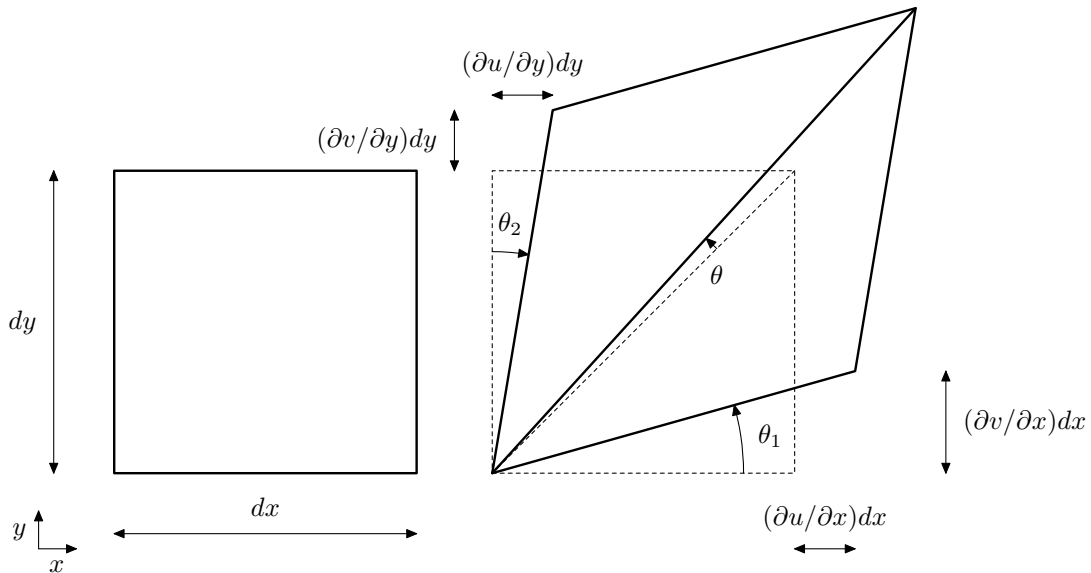


## 8. Ravninski zidni konačni element

### 8.1. Osnovne jednačbe zidnog nosača

#### 8.1.1. Odnosi deformacija i pomaka

Promatramo izdvojeni dio zidnog nosača (zidni element) debljine  $d$  sa zadanim fizikalnim svojstvima, modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ , dimenzija  $dx \times dy$ , nakon djelovanja opterećenja, (Slika 8.1.1) u slučaju ravninskog stanja naprezanja. Komponente vektora pomaka pomaci su u smjeru obje



Slika 8.1.1: Izdvojeni dio zidnog nosača

koordinatne osi  $x$  i  $y$  u svakoj točki zidnog elementa označimo

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (8.1.1)$$

Pripadne uzdužne deformacije u smjeru koordinatnih osi u svakoj točki zidnog elementa jednake su

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (8.1.2)$$

a pripadna posmična deformacija u svakoj točki zidnog elementa jednaka je

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta_1 + \theta_2. \quad (8.1.3)$$

Otklon dijagonale izdvojenog zidnog elementa iznosi

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2). \quad (8.1.4)$$

Vektor deformacija i naprezanja za ravninsko stanje naprezanja definiramo u svakoj točki promatranog izdvojenog elementa,

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T. \quad (8.1.5)$$

#### 8.1.2. Odnos naprezanja i deformacija u globalnom i lokalnom koordinatnom sustavu

Uz definirane vektore deformacija i naprezanja, (8.1.5), odnos naprezanja i deformacija glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (8.1.6)$$

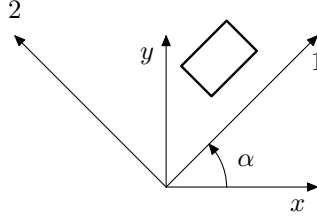


pri čemu je matrica elastičnosti  $\mathbf{D}$  u slučaju ravninskog napreznja jednaka

$$\mathbf{D}_{\text{RN}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.1.7)$$

Matrica elastičnosti za izotropne materijale uvijek je simetrična matrica,  $d_{12} = d_{21}$ . Koeficijent ispred matrice pomnožen s debljinom zida,  $D = \frac{Ed}{1-\nu^2}$  zovemo ravninska krutost zida.

Promatramo izdvojeni element u lokalnom koordinatnom sustavu 1–2, (Slika 8.1.2), pri čemu je os 1 za kut  $\alpha$  zaokrenuta od osi  $x$ . Vektori deformacija i napreznja u lokalnom koordinatnom sustavu definirani su s uzdužnim komponentama u smjeru lokalnih koordinatnih osi i pripadnim ravninskim posmičnim komponentama,  $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{lok}} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \gamma_{12}]^T$  i  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{lok}} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \tau_{12}]^T$ . Veza između vektora deformacija lokalnog i



Slika 8.1.2: Izdvojeni dio zidnog nosača u proizvoljnom položaju

globalnog koordinatnog sustava glasi

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{lok}} = \mathbf{T}^{\text{gl} \rightarrow \text{lok}} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (8.1.8)$$

pri čemu je matrica transformacije,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{gl} \rightarrow \text{lok}}$ , definirana jednadžbom (3.4.8). Za vezu između napreznja u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu vrijedi

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{lok}} = \mathbf{T}^{-T} \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.1.9)$$

Zakon ponašanja u lokalnom koordinatnom sustavu, uz definiranu matricu elastičnosti u lokalnom koordinatnom sustavu  $\mathbf{D}^{\text{lok}}$ , (3.4.12), glasi

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{lok}} = \mathbf{T}^{-T} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{lok}} = \mathbf{D}^{\text{lok}} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{lok}}. \quad (8.1.10)$$

### 8.1.3. Primjena principa virtualnog rada

Na izdvojenom zidnom konačnom elementu ( $e$ ), površine  $F^{(e)}$ , debljine  $d^{(e)}$ , sa čvorovima  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$  za trokutni konačni element,  $i = 1, 2, 3, 4$  za pravokutni konačni element), iz ravnoteže elementa slijedi

$$\int_{F^{(e)}} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)} + \oint_{\partial F^{(e)}} \delta \mathbf{w}^T \boldsymbol{\rho}^{(e)} d(\partial F^{(e)}) + \sum_i \delta \mathbf{w}_i^T \mathbf{k}_i^{(e)}, \quad (8.1.11)$$

pri čemu je  $\delta \mathbf{w}$  vektor virtualnih pomaka točke unutar elementa,  $\delta \mathbf{w}_i$  vektor virtualnih pomaka  $i$ -tog čvora,  $\mathbf{p}^{(e)}$  vektor zadanog površinskog opterećenja po elementu (npr. vlastita težina zidnog elementa),  $\boldsymbol{\rho}^{(e)}$  vektor napreznja po rubu elementa (npr. opterećenje od stropne ploče oslonjene na zid ili opterećenje od zidova izvan promatrane ravnine oslonjenih na promatrani zid), a  $\mathbf{k}_i^{(e)}$  vektor zadanih koncentriranih sila u čvorovima  $(x_i, y_i)$  elementa ( $e$ ) (npr. od greda izvan promatrane ravnine oslonjenih na promatrani zid).

## 8.2. Diskretizacija na zidnom ravninskom konačnom elementu

### 8.2.1. Diskretizacija polja pomaka, deformacija i napreznja

Ako konačni element ima  $n$  čvorova, tada vektor nepoznatih pomaka čvorova tog elementa,  $\mathbf{w}^{(e)}$ , ima  $2n$  članova,

$$\mathbf{w}^{(e)} = \left[ \mathbf{w}_i^{(e)} \right]_{i=1}^n, \quad \mathbf{w}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}. \quad (8.2.1)$$

Za polje pomaka  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  pretpostavimo linearnu razdiobu po elementu ( $e$ ), linearnu kombinaciju pomaka čvorova elementa što u matičnom zapisu daje

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (8.2.2)$$

pri čemu je  $\mathbf{N}^{(e)}$  vektor funkcija oblika,

$$\mathbf{N}^{(e)} = \left[ \mathbf{N}_1^{(e)} \quad \dots \quad \mathbf{N}_n^{(e)} \right], \quad \mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}. \quad (8.2.3)$$

Uvrštavanjem diskretizacije polja pomaka, (8.2.2), u odnos pomaka i deformacija, (3.4.3), slijedi diskretizacija polja deformacija u matičnom zapisu

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (8.2.4)$$

pri čemu matricu deformacije  $\mathbf{B}^{(e)}$  možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{B}^{(e)} = \left[ \mathbf{B}_1^{(e)} \quad \dots \quad \mathbf{B}_n^{(e)} \right], \quad \mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8.2.5)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja deformacije u zakon ponašanja slijedi diskretizirani oblik polja naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (8.2.6)$$

pri čemu je  $\mathbf{D}^{(e)}$  matrica elastičnosti promatranog zidnog konačnog elementa,

$$\mathbf{D}^{(e)} = \frac{E^{(e)}}{1 - \nu^{(e)2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^{(e)} & 0 \\ \nu^{(e)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^{(e)}}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.2.7)$$

### 8.2.2. Diskretizacija jednadžbe ravnoteže

Definirana diskretizirana virtualna polja,  $\delta \mathbf{w}$ ,  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ , i vektor zadanih sila  $\mathbf{k}^{(e)}$  u čvorovima konačnog elementa

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)}, \quad \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)}, \quad \mathbf{k}^{(e)} = [\mathbf{k}_1 \quad \dots \quad \mathbf{k}_n]^T, \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} K_{xi} \\ K_{yi} \end{bmatrix}, \quad (8.2.8)$$

možemo uvrstiti u princip virtualnog rada, (8.1.11), nakon čega slijedi jednadžba

$$\int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)} + \oint_{\partial F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \boldsymbol{\rho}^{(e)} d(\partial F^{(e)}) + \mathbf{k}^{(e)}. \quad (8.2.9)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja naprezanja, (8.2.6), slijedi

$$\int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)} + \oint_{\partial F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \boldsymbol{\rho}^{(e)} d(\partial F^{(e)}) + \mathbf{k}^{(e)}, \quad (8.2.10)$$

odnosno u standardnom obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}, \quad (8.2.11)$$

gdje je

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)} + \oint_{\partial F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \boldsymbol{\rho}^{(e)} d(\partial F^{(e)}) + \mathbf{k}^{(e)}, \quad (8.2.12)$$

elementarni vektor opterećenja u čvorovima konačnog elementa, a

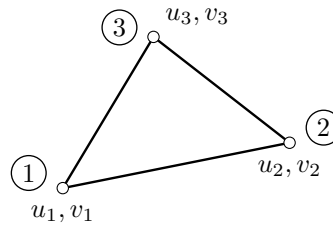
$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)} \quad (8.2.13)$$

elementarna matrica krutosti ravninskog zidnog konačnog elementa.

### 8.3. Linearni trokutni ravninski konačni element

#### 8.3.1. Linearni trokutni ravninski konačni element sa 6 stupnjeva slobode

Standardni trokutni konačni element za ravninske konstrukcije opterećene u svojoj ravnini trokutni je konačni element sa 6 stupnjeva slobode. Vrhovi trokuta su ujedno i čvorovi, a stupnjevi slobode su nepoznati pomaci u dva koordinatna smjera u vrhovima trokuta, čvorovima linearnog trokutnog konačnog elementa (engl. three-noded linear triangular element). Prednost ovog konačnog elementa je izrazita jednostavnost koja omogućuje implementaciju elementa u razne vrste dvodimenzionalnih rubnih zadaća. Ograničena točnost rješenja dobivenih uporabom ovog elementa proizlazi iz linearne aproksimacije polja pomaka što podrazumijeva konstantnu deformaciju i konstantno naprezanje na elementu. U područjima većeg prirasta pomaka potrebno je progustiti mrežu konačnih elemenata što zapravo u praktičnom smislu i nije značajan problem. Linearni trokutni konačni element je zbog svoje jednostavnosti idealan za prikaz primjene metode konačnih elemenata na dvodimenzionalne rubne zadaće, na proračun zidova opterećenih u svojoj ravnini.



Slika 8.3.1: Linearni ravninski trokutni konačni element

#### 8.3.2. Diskretizacija polja pomaka linearnog trokutnog konačnog elementa

Za polje pomaka  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  pretpostavimo linearnu razdiobu duž elementa ( $e$ ), linearnu kombinaciju pomaka čvorova elementa

$$u = N_1^{(e)}u_1 + N_2^{(e)}u_2 + N_3^{(e)}u_3, \quad v = N_1^{(e)}v_1 + N_2^{(e)}v_2 + N_3^{(e)}v_3, \quad (8.3.1)$$

što u matricnom zapisu daje

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}^{(e)}\mathbf{w}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (8.3.2)$$

Pretpostavljenu linearnu razdiobu polja pomaka možemo zapisati i u obliku potpunog polinoma prvog stupnja po varijablama  $x$  i  $y$ ,

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y, \quad v(x, y) = \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y. \quad (8.3.3)$$

Uvrštavanjem koordinata čvorova slijedi sustav jednažbi za nepoznate koeficijente linearne razdiobe pomaka. Rješenjem sustava jednažbi slijede nepoznati koeficijenti, a pomake točaka unutar elementa u oba smjera možemo izraziti u obliku

$$u(x, y) = \frac{1}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 (a_i + b_ix + c_iy) u_i, \quad v(x, y) = \frac{1}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 (a_i + b_ix + c_iy) v_i. \quad (8.3.4)$$

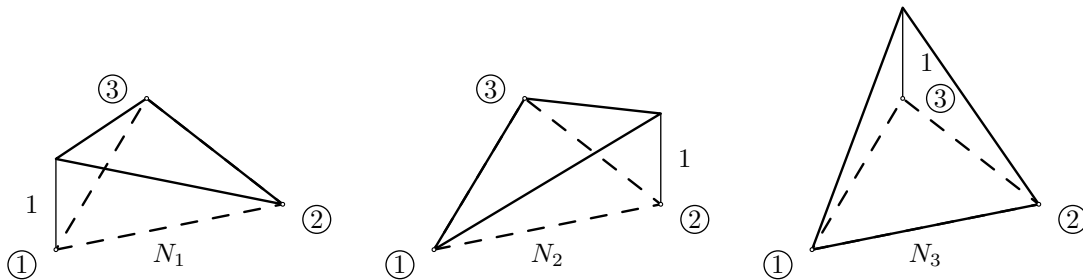
Koeficijenti linearne kombinacije koordinata čvorova jednaki su

$$\begin{aligned} a_i &= x_jy_k - x_ky_j, \\ b_i &= y_j - y_k, \\ c_i &= x_k - x_j, \end{aligned} \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2). \quad (8.3.5)$$

Na temelju prethodnih proračuna jednostavno proizlaze funkcije oblika,

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2F^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.3.6)$$

prikazane na Slici 8.3.2.



Slika 8.3.2: Funkcije oblika linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa

### 8.3.3. Diskretizacija polja deformacija i polja naprezanja linearnog trokutnog konačnog elementa

Uvrštavanjem linearne razdiobe polja pomaka, (8.3.1), u odnos pomaka i deformacija, (3.4.3), slijedi konstantno polje deformacija,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} u_3 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} v_3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} v_3 \end{aligned}, \quad (8.3.7)$$

odnosno u matricnom zapisu

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (8.3.8)$$

pri čemu matricu deformacije  $\mathbf{B}^{(e)}$  možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Matricu deformacije  $\mathbf{B}^{(e)}$  možemo uz pomoć podmatrica  $\mathbf{B}_i^{(e)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad (8.3.10)$$

zapisati u obliku

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (8.3.11)$$

Konstantno polje deformacija sada jednostavno prikazujemo u obliku

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 b_i u_i, \quad \epsilon_{yy} = \frac{1}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 c_i v_i, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 (c_i u_i + b_i v_i). \quad (8.3.12)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja deformacije u zakon ponašanja slijedi diskretizirani oblik polja naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (8.3.13)$$

odnosno raspisano po komponentama naprezanja

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= d_{11} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} u_i \right) + d_{12} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} v_i \right) = \frac{1}{2F^{(e)}} \left( d_{11} \sum_{i=1}^3 b_i u_i + d_{12} \sum_{i=1}^3 c_i v_i \right), \\ \sigma_{yy} &= d_{21} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} u_i \right) + d_{22} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} v_i \right) = \frac{1}{2F^{(e)}} \left( d_{21} \sum_{i=1}^3 b_i u_i + d_{22} \sum_{i=1}^3 c_i v_i \right), \\ \tau_{xy} &= d_{33} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} v_i \right) = \frac{d_{33}}{2F^{(e)}} \sum_{i=1}^3 (c_i u_i + b_i v_i). \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

#### 8.3.4. Elementarna matrica krutosti linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa

Elementarna matrica krutosti linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa debljine  $d^{(e)}$  sa 6 stupnjeva slobode slijedi iz jednadžbe (8.2.13),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)} \\ &= \int_{F^{(e)}} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \\ (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \\ (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \end{bmatrix} \mathbf{D}^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} \end{bmatrix} d^{(e)} dF^{(e)} \\ &= \int_{F^{(e)}} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} \\ (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} \\ (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} \end{bmatrix} d^{(e)} dF^{(e)}. \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Karakteristična podmatrica elementarne matrice krutosti,  $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , slijedi, uz homogenost zidnog materijala (podintegralna funkcija je konstantna, za numeričku integraciju dovoljna je jedna integracijska točka, težište trokuta), u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= \int_{F^{(e)}} [(\mathbf{B}_i^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)}] d^{(e)} dF^{(e)} \\ &= \int_{F^{(e)}} \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix} d^{(e)} dF^{(e)} \\ &= \frac{d^{(e)}}{4F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i b_j d_{11} + c_i c_j d_{33} & b_i c_j d_{12} + c_i b_j d_{33} \\ c_i b_j d_{21} + b_i c_j d_{33} & b_i b_j d_{33} + c_i c_j d_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

#### 8.3.5. Elementarni vektor opterećenja linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa

Elementarni vektor opterećenja, (8.2.12), za linearni ravninski trokutni konačni element možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{q}_p^{(e)} + \mathbf{q}_\rho^{(e)} + \mathbf{q}_k^{(e)}. \quad (8.3.17)$$

Definirani članovi vektora slijede iz površinskog opterećenja  $\mathbf{p}^{(e)}$  po elementu,  $\mathbf{q}_p^{(e)}$ , opterećenja  $\boldsymbol{\rho}^{(e)}$  duž rubova konačnog elementa,  $\mathbf{q}_\rho^{(e)}$ , i koncentriranih sila  $\mathbf{k}^{(e)}$  u čvorovima konačnog elementa,  $\mathbf{q}_k^{(e)}$ .

Doprinos površinskog opterećenja slijedi prema izrazu

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)}, \quad (8.3.18)$$

što možemo zapisati i u obliku

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \left[ \left( \mathbf{q}_{p1}^{(e)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}_{p2}^{(e)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}_{p3}^{(e)} \right)^T \right]^T. \quad (8.3.19)$$

Definirani elementarni podvektor opterećenja općenito slijedi prema izrazu

$$\mathbf{q}_{pi}^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \left( \mathbf{N}_i^{(e)} \right)^T \mathbf{p}^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \begin{bmatrix} N_i^{(e)} p_x \\ N_i^{(e)} p_y \end{bmatrix} dF^{(e)}. \quad (8.3.20)$$

Za standardno površinsko opterećenje zida, vlastitu težinu zida definiranu pomoću gustoće težine zida  $\gamma$  [kN/m<sup>3</sup>] ili gustoću težine promatranog površinskog elementa zida zadane debljine  $d^{(e)}$ ,  $\gamma_d = \gamma \cdot d^{(e)}$  [kN/m<sup>2</sup>], možemo izraziti pripadne elementarne podvektore opterećenja. Uz konstantnu gustoću težine zida na promatranom elementu  $(e)$ ,  $\gamma^{(e)} = const.$ , vektor površinskog opterećenja iznosi  $\mathbf{p}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \cdot d^{(e)} \end{bmatrix}$ . Prema izrazu (8.3.20) slijedi elementarni podvektor opterećenja,

$$\mathbf{q}_{pi}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma \cdot d^{(e)} F^{(e)}}{3} \end{bmatrix}. \quad (8.3.21)$$

Doprinos linijskog opterećenja (npr. reakcija od stropne ploče  $\rho_y$  [kN/m'] ili od poprečnog zida  $\rho_y$  [kN/m']) duž rubova konačnog elementa slijedi prema izrazu

$$\mathbf{q}_\rho^{(e)} = \oint_{\partial F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \boldsymbol{\rho} \left( \partial F^{(e)} \right). \quad (8.3.22)$$

Za konstantno linijsko opterećenje ruba linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa između čvorova 1 i 2,  $\boldsymbol{\rho}^{(e)} = \begin{bmatrix} \rho_{x,1-2}^{(e)} & \rho_{y,1-2}^{(e)} \end{bmatrix}$ , slijedi pripadna komponenta elementarnog vektora opterećenja

$$\mathbf{q}_\rho^{(e)} = \frac{L_{1-2}}{2} \begin{bmatrix} \rho_{x,1-2}^{(e)} & \rho_{y,1-2}^{(e)} & \rho_{x,1-2}^{(e)} & \rho_{y,1-2}^{(e)} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (8.3.23)$$

pri čemu je  $L_{1-2}$  duljina opterećene stranice trokuta, udaljenost između čvorova 1 i 2.

### 8.3.6. Funkcije oblika linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa u površinskom koordinatnom sustavu

U potpoglavlju A3.2. definiran je površinski koordinatni sustav za ravninske trokutne konačne elemente. Promatramo linearni ravninski trokutni konačni element  $(e)$  u površinskom koordinatnom sustavu.

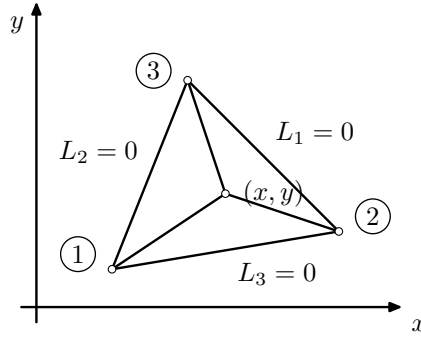
Prema definiciji površinskog koordinatnog sustava za koordinate točaka unutar trokuta u standardnom koordinatnom sustavu izražene preko koordinata u površinskom koordinatnom sustavu vrijedi odnos,

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3, \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

Za koordinate točaka u površinskom koordinatnom sustavu izražene preko koordinata standardnog koordinatnog sustava vrijedi odnos,

$$L_i = \frac{1}{2F^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.3.25)$$

Proračun potrebnih koeficijenata ukazuje da su jednaki istim koeficijentima u funkcijama oblika za linearni trokutni konačni element u standardnom koordinatnom sustavu, (8.3.5). Vrijednost funkcije pomaka u



Slika 8.3.3: Linearni ravninski trokutni konačni element u površinskom koordinatnom sustavu

smjeru  $x$  i smjeru  $y$  u bilo kojoj točki trokutnog konačnog elementa interpolirana je linearnom kombinacijom vrijednosti funkcije pomaka u pripadnom smjeru u čvorovima, vrhovima trokuta,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}. \quad (8.3.26)$$

Interpolacijske funkcije u površinskom koordinatnom sustavu glase

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = L_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.3.27)$$

Za proračun članova elementarne matrice krutosti potrebne su određene supstitucije u pripadnim integralima. Zbog međusobne ovisnosti površinskih koordinata, (A3.12), možemo koordinate u standardnom koordinatnom sustavu, uz  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ , izraziti kao funkcija samo dvije koordinate u obliku

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 (1 - L_1 - L_2) = (x_1 - x_3) L_1 + (x_2 - x_3) L_2 + x_3, \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 (1 - L_1 - L_2) = (y_1 - y_3) L_1 + (y_2 - y_3) L_2 + y_3. \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

Za područje integracije  $dx dy$  tada vrijedi supstitucija

$$dx dy = J dL_1 dL_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{vmatrix} dL_1 dL_2 = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} dL_1 dL_2 = 2F^{(e)} dL_1 dL_2. \quad (8.3.29)$$

Za operatore derivacije u podintegralnoj matrici vrijedi odnos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Koeficijenti  $b_i, c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  koeficijenti su iz funkcija oblika u standardnom koordinatnom sustavu, (8.3.5). Na temelju prethodne relacije slijede potrebne derivacije u matricama deformacije, (8.3.10),

$$\frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial x} = b_i, \quad \frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial y} = c_i. \quad (8.3.31)$$

Za integrale potencija površinskih koordinata vrijedi izraz

$$\int_{F^{(e)}} L_1^p L_2^q L_3^r dL_1 dL_2 = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!}. \quad (8.3.32)$$

U podintegralnim članovima matrice krutosti kod linearnog trokutnog konačnog elementa zapravo imamo isključivo konstantne članove,  $p = q = r = 0$ , te slijedi da je vrijednost potrebnog integrala jednaka  $\frac{1}{2}$ . Taj koeficijent pokrači dvostruku vrijednost površine iz Jacobiana, (8.3.29), i slijedi elementarna matrica krutosti jednaka elementarnoj matrici krutosti dobivenoj u standardnom koordinatnom sustavu.

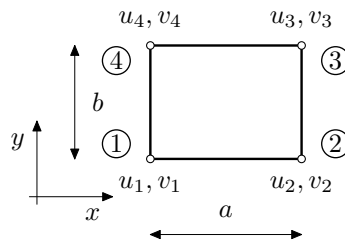
## 8.4. Linearni pravokutni ravninski konačni element

### 8.4.1. Linearni pravokutni ravninski konačni element sa 8 stupnjeva slobode.

Standardni pravokutni ravninski konačni element za ravninske konstrukcije opterećene u svojoj ravnini pravokutni je konačni element sa 8 stupnjeva slobode. Stupnjevi slobode su nepoznati pomaci u dva koordinatna smjera u vrhovima pravokutnika, čvorovima konačnog elementa (engl. four-noded rectangular element). Pomaci u oba smjera aproksimirani su nepotpunim kvadratnim polinomom duž elementa,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy. \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

Neprekidnost polja pomaka duž stranice pravokutnika izravna je posljedica linearne razdiobe polja pomaka duž stranice. Zbog linearne razdiobe polja pomaka duž stranica pravokutnika ovaj konačni element naziva se pravokutni ravninski linearni konačni element.



Slika 8.4.1: Linearni pravokutni ravninski konačni element

### 8.4.2. Diskretizacija polja pomaka pravokutnog konačnog elementa

Za polje pomaka pretpostavimo linearnu razdiobu duž elementa ( $e$ ), linearnu kombinaciju pomaka čvorova elementa

$$\begin{aligned} u &= N_1^{(e)} u_1 + N_2^{(e)} u_2 + N_3^{(e)} u_3 + N_4^{(e)} u_4, \\ v &= N_1^{(e)} v_1 + N_2^{(e)} v_2 + N_3^{(e)} v_3 + N_4^{(e)} v_4, \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

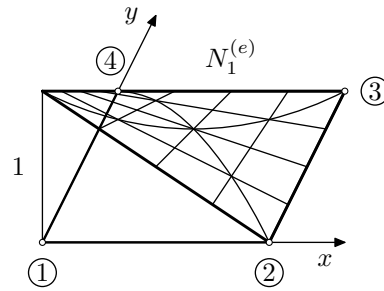
što u matričnom zapisu daje

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (8.4.3)$$

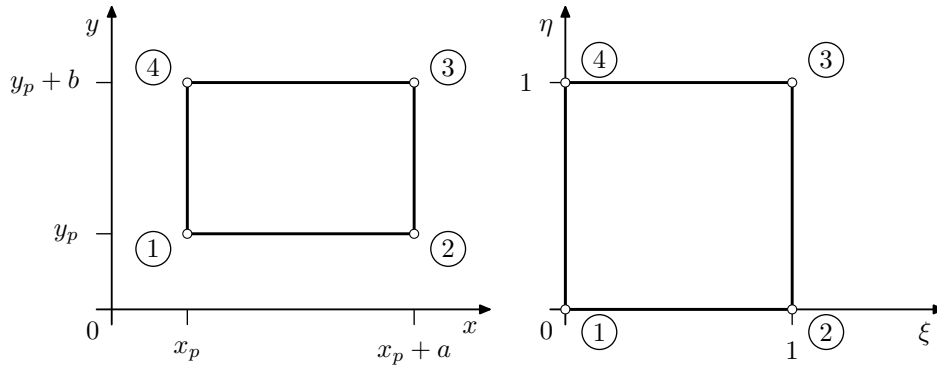
Uz pretpostavku linearne razdiobe i standardnog uvjeta  $N_i^{(e)}(x_j, y_j) = \delta_{ij}$  slijede funkcije oblika za linearni pravokutni konačni element

$$N_1^{(e)} = \frac{(a-x)(b-y)}{F^{(e)}}, \quad N_2^{(e)} = \frac{x(b-y)}{F^{(e)}}, \quad N_3^{(e)} = \frac{xy}{F^{(e)}}, \quad N_4^{(e)} = \frac{(a-x)y}{F^{(e)}}. \quad (8.4.4)$$





Slika 8.4.2: Karakteristični graf funkcije oblika linearnog pravokutnog konačnog elementa

Slika 8.4.3: Pravokutni ravninski konačni element u koordinatnim sustavima  $xy$  i  $\xi\eta$ 

### 8.4.3. Funkcije oblika na jediničnom kvadratu

Pravokutnik, duljina stranica  $a$  i  $b$ , u općem položaju u koordinatnom sustavu  $xy$  možemo transformirati na jedinični kvadrat u koordinatnom sustavu  $\xi\eta$ . Između točaka unutar elementa vrijede odnosi između koordinatnih sustava,

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_p)/a, & \eta &= (y - y_p)/b, \\ x &= x_p + a\xi, & y &= y_p + b\eta, \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

koji daju Jacobian transformacije u obliku

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab. \quad (8.4.6)$$

Interpolacijske funkcije u koordinatnom sustavu  $\xi\eta$  na jediničnom kvadratu glase

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \xi(1 - \eta), \quad N_3 = \xi\eta, \quad N_4 = (1 - \xi)\eta. \quad (8.4.7)$$

Za proizvoljni pravokutni konačni element  $dxdy$  tada vrijedi supstitucija

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} d\xi d\eta = abd\xi d\eta = Jd\xi d\eta. \quad (8.4.8)$$

#### 8.4.4. Diskretizacija polja deformacija i polja naprezanja linearnog pravokutnog ravninskog konačnog elementa

Uvrštavanjem linearne razdiobe polja pomaka, (8.4.2), u odnos pomaka i deformacija, (3.4.3), slijedi linearna razdioba polja deformacija

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} u_4, \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} v_3 + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} v_4, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} u_4 \\
&\quad + \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} v_3 + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} v_4,
\end{aligned} \tag{8.4.9}$$

odnosno u matričnom zapisu

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \tag{8.4.10}$$

pri čemu maticu deformacije  $\mathbf{B}^{(e)}$  možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} & \mathbf{B}_4^{(e)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{F^{(e)}} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -(a-x) & -(b-y) & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.4.11}$$

Pripadne podmatrice  $\mathbf{B}_i^{(e)}$  jednako su definirane kao i kod trokutnog konačnog elementa, (8.3.10),

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{8.4.12}$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja deformacije u zakon ponašanja slijedi diskretizirani oblik polja naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \tag{8.4.13}$$

odnosno raspisano po komponentama naprezanja sukladno raspisanom obliku kao kod linearnog trokutnog elementa, (8.3.14),

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= d_{11} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} u_i \right) + d_{12} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} v_i \right), \\
\sigma_{yy} &= d_{21} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} u_i \right) + d_{22} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} v_i \right), \\
\tau_{xy} &= d_{33} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} v_i \right).
\end{aligned} \tag{8.4.14}$$

### 8.4.5. Elementarna matrica krutosti linearnog pravokutnog ravninskog konačnog elementa

Elementarna matrica krutosti pravokutnog ravninskog konačnog elementa sa 8 stupnjeva slobode slijedi iz jednadžbe (8.2.13),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \\ (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \\ (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \\ (\mathbf{B}_4^{(e)})^T \end{bmatrix} \mathbf{D}^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} & \mathbf{B}_4^{(e)} \end{bmatrix} d^{(e)} dF^{(e)} \\ &= \int_{F^{(e)}} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} & (\mathbf{B}_1^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_4^{(e)} \\ (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} & (\mathbf{B}_2^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_4^{(e)} \\ (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} & (\mathbf{B}_3^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_4^{(e)} \\ (\mathbf{B}_4^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & (\mathbf{B}_4^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & (\mathbf{B}_4^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_3^{(e)} & (\mathbf{B}_4^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}_4^{(e)} \end{bmatrix} d^{(e)} dF^{(e)}. \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

Podintegralne funkcije možemo zapisati pomoću četiri različita općenita člana,  $i, k = 1, 2, 3, 4$ , ovisno o međusobnim kombinacijama prema parnosti koeficijenta,

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_{(2i-1)(2k-1)} = \frac{Ed^{(e)}}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right), \quad (8.4.16)$$

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_{(2i)(2k)} = \frac{Ed^{(e)}}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right), \quad (8.4.17)$$

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_{(2i-1)(2k)} = \frac{Ed^{(e)}}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right), \quad (8.4.18)$$

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})_{(2i)(2k-1)} = \frac{Ed^{(e)}}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right). \quad (8.4.19)$$

Nakon integriranja slijedi elementarna matrica krutosti linearnog pravokutnog konačnog elementa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{Ed^{(e)}}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{17} & k_{27} & k_{37} & k_{47} & k_{57} & k_{67} & k_{77} & k_{78} \\ k_{18} & k_{28} & k_{38} & k_{48} & k_{58} & k_{68} & k_{78} & k_{88} \end{bmatrix}, \quad (8.4.20)$$

pri čemu su koeficijenti u matrici, uz  $\alpha = a/b$  i  $\beta = b/a$ , jednaki

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} &= 2[2\beta + (1-\nu)\alpha], & k_{22} = k_{44} = k_{66} = k_{88} &= 2[2\alpha + (1-\nu)\beta], \\ k_{13} = k_{57} &= -4\beta + (1-\nu)\alpha, & k_{28} = k_{46} &= -4\alpha + (1-\nu)\beta, \\ k_{15} = k_{37} &= -2\beta - (1-\nu)\alpha, & k_{26} = k_{48} &= -2\alpha - (1-\nu)\beta, \\ k_{17} = k_{35} &= 2[\beta - (1-\nu)\alpha], & k_{24} = k_{68} &= 2[\alpha - (1-\nu)\beta], \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

$$k_{12} = k_{38} = k_{56} = k_{47} = \frac{3(1+\nu)}{2}, \quad k_{18} = k_{23} = k_{45} = k_{67} = \frac{3(1-3\nu)}{2},$$

$$k_{14} = k_{36} = k_{58} = k_{27} = -\frac{3(1-3\nu)}{2}, \quad k_{16} = k_{34} = k_{25} = k_{78} = -\frac{3(1+\nu)}{2}.$$

#### 8.4.6. Elementarni vektor opterećenja linearnog pravokutnog ravninskog konačnog elementa

Elementarni vektor opterećenja, (8.2.12), za linearni pravokutni ravninski konačni element možemo izraziti u jednakom obliku kao i kod linearnog ravninskog trokutnog konačnog elementa, (8.3.17),

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{q}_p^{(e)} + \mathbf{q}_\rho^{(e)} + \mathbf{q}_k^{(e)}. \quad (8.4.22)$$

Doprinos površinskog opterećenja slijedi prema izrazu

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \left[ \left( \mathbf{q}_{p1}^{(e)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}_{p2}^{(e)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}_{p3}^{(e)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}_{p4}^{(e)} \right)^T \right]^T, \quad (8.4.23)$$

što uz definirani elementarni podvektor opterećenja prema izrazu (8.3.20) daje elementarni podvektor opterećenja,

$$\mathbf{q}_{pi}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \cdot d^{(e)} F^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (8.4.24)$$

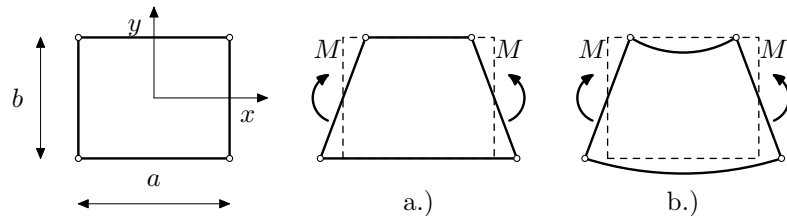
Doprinos linijskog opterećenja slijedi prema izrazu (8.3.22). Za konstantno linijsko opterećenje ruba linearnog pravokutnog konačnog elementa paralelnog osi  $y$  između čvorova 2 i 3 u smjeru gravitacije (os  $y$ ),  $\rho_{2-3}^{(e)} = \left[ 0 \quad \rho_{y,2-3}^{(e)} \right]$ , slijedi komponenta elementarnog vektora opterećenja

$$\mathbf{q}_\rho^{(e)} = \frac{L_{2-3}}{2} \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rho_{y,2-3}^{(e)} \quad 0 \quad \rho_{y,2-3}^{(e)} \quad 0 \quad 0 \right]^T, \quad (8.4.25)$$

pri čemu je  $L_{2-3}$  duljina stranice pravokutnog konačnog elementa, udaljenost između čvorova 2 i 3.

#### 8.4.7. Poboljšanje linearnog pravokutnog konačnog elementa

Linearni pravokutni konačni element daje kvalitetne numeričke rezultate kod opterećenja u smjeru težišne ravnine zida. Problem nastaje kod opterećenja koja izazivaju dominantno savijanje. Možemo promotriti jedan izdvojeni linearni pravokutni konačni element opterećen parom momenata (čisto savijanje), (Slika 8.4.4).



Slika 8.4.4: Čisto savijanje linearnog pravokutnog konačnog elementa, a.) numeričko rješenje, b.) analitičko rješenje

Analitičko rješenje funkcija pomaka iznosi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{M}{2EI}xy \\ v(x, y) &= \frac{Ma^2}{8EI} \left( \frac{4x^2}{a^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (8.4.26)$$

a pripadna posmična deformacija jednaka je nuli,  $\gamma_{xy} = 0$ . Kod linearnog pravokutnog konačnog elementa moguća je samo linearna aproksimacija pomaka duž stranica što znači da je numeričko rješenje jednako

$$u(x, y) = -\frac{M}{2EI}xy, \quad v(x, y) = 0. \quad (8.4.27)$$

Očito je da kvadratna funkcija pomaka duž stranica pravokutnika ne može biti ispravno prikazana. Na temelju numeričkog rješenja slijedi i izraz za posmičnu deformaciju

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M}{2EI}x \neq 0 \quad \text{za } x \neq 0, \quad (8.4.28)$$

što je očito odstupanje od analitičkog rješenja čistog savijanja kod kojeg je posmična deformacija jednaka nuli ( $\gamma_{xy} = 0$ ). Značajnim profinjnjem mreže konačnih elemenata možemo dobiti kvalitetnija numerička rješenja.

Alternativno, kao i kod proračuna grede prema Timošenkovoj teoriji savijanja, možemo eliminirati posmičnu deformaciju integriranjem u točki u kojoj je posmik jednak nuli, u težištu konačnog elementa. Elementarnu matricu krutosti možemo zapisati kao zbroj "osnog"  $\mathbf{K}_o^{(e)}$  i "posmičnog"  $\mathbf{K}_p^{(e)}$  dijela matrice krutosti,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_o^{(e)} + \mathbf{K}_p^{(e)}. \quad (8.4.29)$$

Svaki navedeni dio definiramo prema izrazima

$$\mathbf{K}_o^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}_o^{(e)})^T \mathbf{D}_o^{(e)} \mathbf{B}_o^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)}, \quad (8.4.30)$$

$$\mathbf{K}_p^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{B}_p^{(e)})^T \mathbf{D}_p^{(e)} \mathbf{B}_p^{(e)} d^{(e)} dF^{(e)}, \quad (8.4.31)$$

pri čemu su pripadne deformacijske matrice jednake

$$\mathbf{B}_o^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_p^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (8.4.32)$$

a pripadne su matrice elastičnosti jednake

$$\mathbf{D}_o^{(e)} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_p^{(e)} = [d_{33}]. \quad (8.4.33)$$

Matricu  $\mathbf{K}_o^{(e)}$  integriramo standardno pomoću četiri integracijske točke, a matricu  $\mathbf{K}_p^{(e)}$  integriramo pomoću vrijednosti u jednoj integracijskoj točki. Na taj način integral "posmičnog" dijela kod članova matrice krutosti u retcima i stupcima iste parnosti (kod kojih su podintegralne funkcije polinomi drugog stupnja po jednoj od varijabli) neće biti egzaktno integriran. Koeficijenti u matrici krutosti, (8.4.20), uz  $\alpha = a/b$  i  $\beta = b/a$ , nakon reducirane integracije "posmičnog" dijela jednaki su

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} &= \frac{8\beta + 3(1-\nu)\alpha}{2}, & k_{22} = k_{44} = k_{66} = k_{88} &= \frac{8\alpha + 3(1-\nu)\beta}{2}, \\ k_{13} = k_{57} &= \frac{-8\beta + 3(1-\nu)\alpha}{2}, & k_{28} = k_{46} &= \frac{-8\alpha + 3(1-\nu)\beta}{2}, \\ k_{15} = k_{37} &= \frac{-4\beta - 3(1-\nu)\alpha}{2}, & k_{26} = k_{48} &= \frac{-4\alpha - 3(1-\nu)\beta}{2}, \\ k_{17} = k_{35} &= \frac{4\beta - 3(1-\nu)\alpha}{2}, & k_{24} = k_{68} &= \frac{4\alpha - 3(1-\nu)\beta}{2}, \\ k_{12} = k_{38} = k_{56} = k_{47} &= \frac{3(1+\nu)}{2}, & k_{18} = k_{23} = k_{45} = k_{67} &= \frac{3(1-3\nu)}{2}, \\ k_{14} = k_{36} = k_{58} = k_{27} &= -\frac{3(1-3\nu)}{2}, & k_{16} = k_{34} = k_{25} = k_{78} &= -\frac{3(1+\nu)}{2}. \end{aligned} \quad (8.4.34)$$

Nedostatak reducirane integracije je što u tom slučaju konačni element nije geometrijski invarijantan, ali numeričko rješenje konvergira analitičkom rješenju.

## 8.5. Ravninski zidni konačni elementi višeg reda

### 8.5.1. Trokutni zidni konačni elementi višeg reda

Kod linearnog trokutnog konačnog elementa aproksimacija polja pomaka definirana je potpunim polinomom prvog stupnja po  $x$  i  $y$ , (8.3.3). Uzimanjem u obzir polinoma višeg stupnja dobivamo elemente

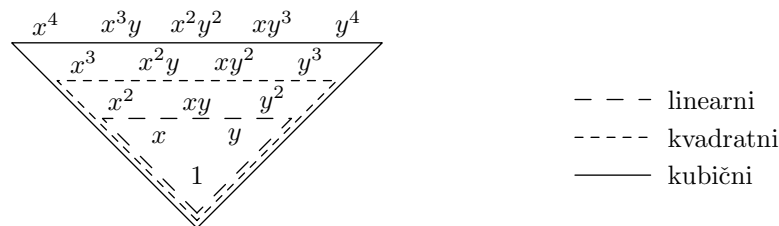
višeg reda. Aproksimacijom potpunim polinomom drugog stupnja

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2, \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2, \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

slijedi trokutni konačni element sa 12 stupnjeva slobode (6 čvorova), a aproksimacijom potpunim polinomom trećeg stupnja

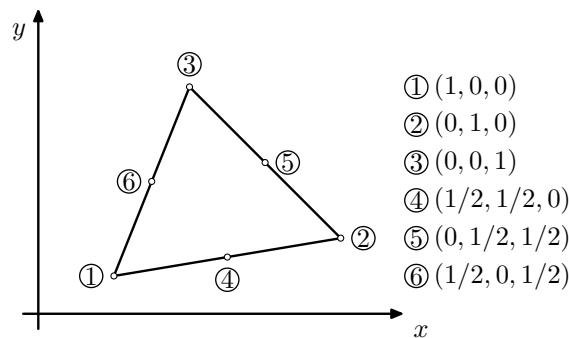
$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3, \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3, \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

slijedi trokutni konačni element sa 20 stupnjeva slobode (10 čvorova). Sudjelujuće članove polinoma za pojedine elemente možemo prikazati u Pascalovom trokutu, (Slika 8.5.1). Prikaz funkcija oblika za trokutne elemente višeg reda bitno je jednostavniji u površinskom koordinatnom sustavu.



Slika 8.5.1: Pascalov trokut s prikazom sudjelujućih članova polinoma

Trokutni konačni element sa 12 stupnjeva slobode, trokutni je kvadratni konačni element sa 6 čvorova (engl. six-noded quadratic triangular element). Uz vrhove trokuta, čvorovi kvadratnog trokutnog konačnog elementa su i središta stranica trokuta, (Slika 8.5.2). Funkcije oblika kvadratnog trokutnog



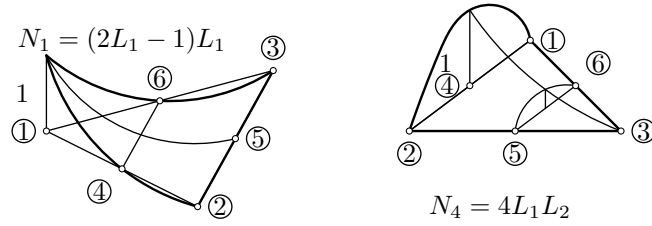
Slika 8.5.2: Kvadratni trokutni konačni element u površinskom koordinatnom sustavu

konačnog elementa su

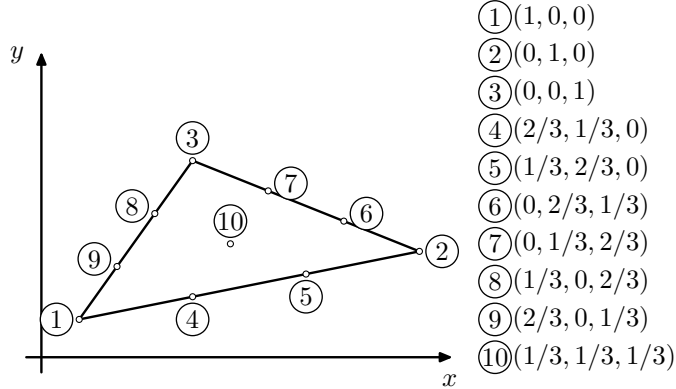
$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1, & N_2 &= (2L_2 - 1)L_2, & N_3 &= (2L_3 - 1)L_3, \\ N_4 &= 4L_1L_2, & N_5 &= 4L_2L_3, & N_6 &= 4L_3L_1. \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Na Slici 8.5.3 prikazane su karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu trokuta,  $N_1$  i za čvor u sredini stranice trokuta,  $N_4$ .

Trokutni konačni element sa 20 stupnjeva slobode, trokutni je kubični konačni element sa 10 čvorova (engl. ten-noded cubic triangular element). Uz vrhove trokuta, čvorovi kubičnog trokutnog konačnog elementa su težište i trećine stranica trokuta, (Slika 8.5.4). Trokute višeg reda jednostavnije je promatrati



Slika 8.5.3: Karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu i u sredini stranice trokuta



Slika 8.5.4: Kubični trokutni konačni element u površinskom koordinatnom sustavu

u površinskom koordinatnom sustavu. Funkcije oblika kubičnog trokutnog konačnog elementa su

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2), & N_2 &= \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2), \\
 N_3 &= \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2), & N_4 &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1), \\
 N_5 &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1), & N_6 &= \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1), \\
 N_7 &= \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1), & N_8 &= \frac{9}{2}L_3L_1(3L_3 - 1), \\
 N_9 &= \frac{9}{2}L_3L_1(3L_1 - 1), & N_{10} &= 27L_1L_2L_3.
 \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

### 8.5.2. Pravokutni zidni konačni elementi višeg reda

Kod osnovnog pravokutnog elementa aproksimacija polja pomaka definirana je nepotpunim polinomom drugog stupnja po  $x$  i  $y$ , (8.4.1). Uzimanjem u obzir polinoma višeg stupnja dobivamo elemente višeg reda. Aproksimacijom nepotpunim polinomom četvrtog stupnja

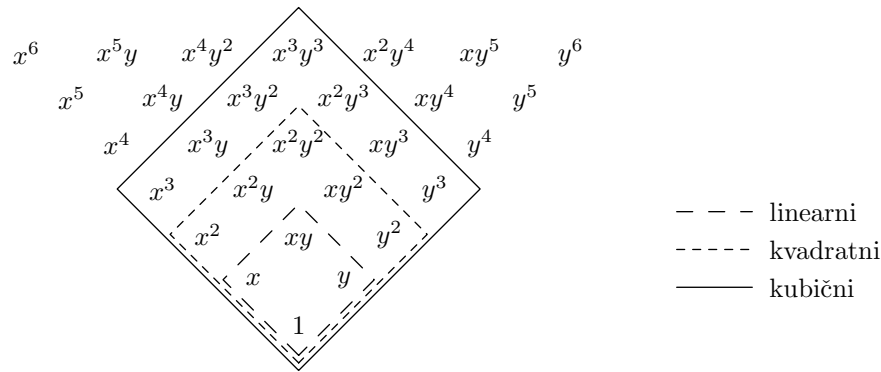
$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^2y + \alpha_8xy^2 + \alpha_9x^2y^2, \\
 v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y + \beta_4x^2 + \beta_5xy + \beta_6y^2 + \beta_7x^2y + \beta_8xy^2 + \beta_9x^2y^2,
 \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

slijedi pravokutni konačni element sa 18 stupnjeva slobode (9 čvorova), a aproksimacijom nepotpunim polinomom šestog stupnja

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 \\
 &+ \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}x^2y^2 + \alpha_{13}xy^3 + \alpha_{14}x^3y^2 + \alpha_{15}x^2y^3 + \alpha_{16}xy^3, \\
 v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y + \beta_4x^2 + \beta_5xy + \beta_6y^2 + \beta_7x^3 + \beta_8x^2y + \beta_9xy^2 + \beta_{10}y^3 \\
 &+ \beta_{11}x^3y + \beta_{12}x^2y^2 + \beta_{13}xy^3 + \beta_{14}x^3y^2 + \beta_{15}x^2y^3 + \beta_{16}xy^3,
 \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

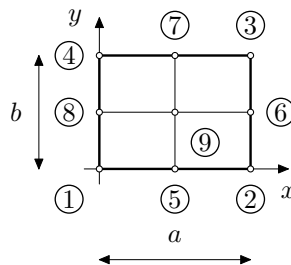
slijedi pravokutni konačni element sa 32 stupnjeva slobode (16 čvorova). Sudjelujuće članove polinoma za pojedine elemente možemo prikazati u Pascalovom trokutu, (Slika 8.5.5).

Pravokutni konačni element sa 18 stupnjeva slobode, osnovni je pravokutni kvadratni konačni element sa 9 čvorova (engl. nine-noded quadratic rectangular element). Uz vrhove pravokutnika, čvorovi



Slika 8.5.5: Pascalov trokut s prikazom sudjelujućih članova polinoma

kvadratnog pravokutnog konačnog elementa su polovišta stranica pravokutnika i težište pravokutnika, (Slika 8.5.6). Funkcije oblika kvadratnog pravokutnog konačnog elementa jednake su umnošku kvadrat-

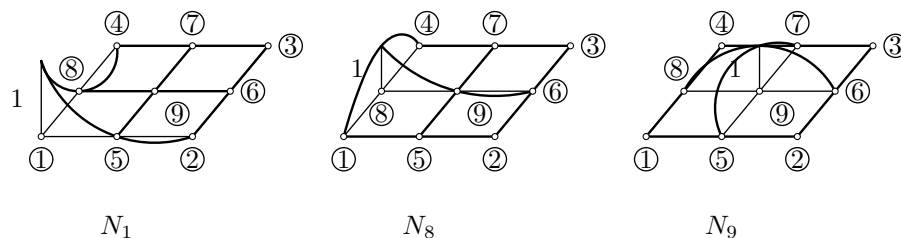


Slika 8.5.6: Kvadratni pravokutni konačni element

nih funkcija oblika (jednakih kvadratnim funkcijama oblika za uzdužno opterećenu gredu) u oba okomita smjera i glase

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{(a-2x)(a-x)(b-2y)(b-y)}{a^2b^2}, & N_2(x, y) &= -\frac{x(a-2x)(b-2y)(b-y)}{a^2b^2}, & N_3(x, y) &= \frac{x(a-2x)(b-2y)y}{a^2b^2}, \\
 N_4(x, y) &= -\frac{(a-2x)(a-x)(b-2y)y}{a^2b^2}, & N_5(x, y) &= \frac{4x(a-x)(b-2y)(b-y)}{a^2b^2}, & N_6(x, y) &= -\frac{4x(a-2x)(b-y)y}{a^2b^2}, \\
 N_7(x, y) &= -\frac{4x(a-x)(b-2y)y}{a^2b^2}, & N_8(x, y) &= \frac{4(a-2x)(a-x)(b-y)y}{a^2b^2}, & N_9(x, y) &= \frac{16x(a-x)(b-y)y}{a^2b^2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.5.7}$$

Na Slici 8.5.7 prikazane su karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu pravokutnika,  $N_1$  za čvor u sredini stranice pravokutnika,  $N_8$ , i za čvor u težištu pravokutnika,  $N_9$ . Za polje pomaka duž stranice pravokutnika vrijedi kvadratna razdioba.

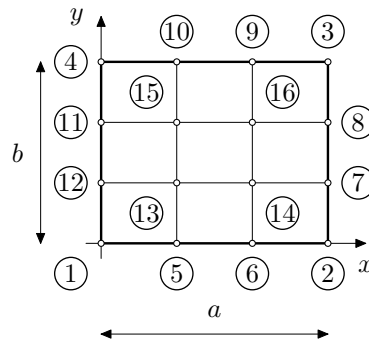


Slika 8.5.7: Karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu i u sredini stranice pravokutnika

Pravokutni konačni element sa 32 stupnja slobode, osnovni je pravokutni kubični konačni element sa 16 čvorova (engl. sixteen-noded cubic rectangular element). Uz vrhove pravokutnika, čvorovi kubičnog pravokutnog konačnog elementa su trećine stranica pravokutnika i točke u sjecištima pravaca paralelnih



stranicama kroz točke u trećinama stranica pravokutnika, (Slika 8.5.8). Za polje pomaka duž stranice pravokutnika vrijedi kubična razdioba. Funkcije oblika kubičnog pravokutnog konačnog elementa jed-



Slika 8.5.8: Kubični pravokutni konačni element

nake su umnošku kubičnih funkcija oblika (jednakih kubičnim funkcijama oblika za uzdužno opterećenu gredu) u oba okomita smjera.

## 8.6. Serendipity pravokutni zidni konačni elementi

U svrhu smanjivanja broja stupnjeva slobode definiramo pravokutne konačne elemente kod kojih su čvorovi smješteni samo duž stranica pravokutnika, bez čvorova unutar pravokutnika. Takve konačne elemente nazivamo serendipity konačni elementi. Serendipity<sup>1</sup> konačni elementi postižu isti stupanj aproksimacije kao i standardni (Lagrangeovi) konačni elementi, ali s manjim brojem čvorova što znači i manji broj stupnjeva slobode odnosno nepoznanica. Razlika u broju čvorova postaje značajnija kod aproksimacija višeg reda.

Za razliku od standardnih pravokutnih ravninskih konačnih elemenata, kod serendipity pravokutnih konačnih elemenata složenije je definiranje funkcija oblika. Postupak određivanja funkcija oblika razlikuje se za čvorove u vrhovima od čvorova duž stranica pravokutnika. Za serendipity konačni element  $n$ -tog reda funkcije oblika za čvorove duž stranice pravokutnika jednake su umnošku Lagrangeovog polinoma  $n$ -tog stupnja u smjeru stranice (kod kojeg je vrijednost u pripadnom čvoru jednaka 1, a u ostalim čvorovima 0) s Lagrangeovim polinomom prvog stupnja u smjeru okomitom na stranicu pravokutnika (kod kojeg je vrijednost za čvorove na toj stranici jednaka 1, a na suprotnoj stranici jednaka 0). Za čvorove u vrhovima pravokutnika postupak je dodatno složeniji. Od funkcija oblika za čvorove vrhova pravokutnika kod osnovnog pravokutnog elementa potrebno je oduzeti funkcije oblika za čvorove duž stranica pravokutnika pomnožene s težinskim koeficijentima tako da je u konačnici vrijednost funkcije oblika u promatranom vrhu pravokutnika bude jednaka 1, a u svim ostalim čvorovima jednaka 0.

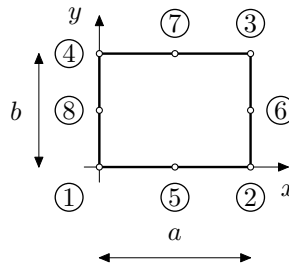
Najjednostavniji serendipity element ravninski je pravokutni osnovni konačni element sa 4 čvora (vrhovi pravokutnika) i 8 stupnjeva slobode. Kvadratni serendipity pravokutni ravninski konačni element je pravokutni element sa 8 čvorova (engl. eight-noded quadratic Serendipity rectangular element). Čvorovi konačnog elementa su vrhovi i sredine stranica pravokutnika. Takav konačni element ima 16 stupnjeva slobode.

Za čvorove duž stranica funkcije oblika jednake su umnošku pripadnog Lagrangeovog polinoma drugog stupnja u smjeru stranice i Lagrangeovog polinoma prvog stupnja okomito na stranicu pravokutnika. Postupak možemo pokazati za čvor 5. Uzmemo Lagrangeov polinom drugog stupnja po varijabli  $x$  za koji je vrijednost u čvoru 5 ( $x = a/2$ ) jednaka 1, a u ostalim čvorovima te stranice jednaka nuli, ( $L_2(x) = \frac{4x(a-x)}{a^2}$ ), i pomnožimo s linearnim Lagrangeovim polinomom po varijabli  $y$  kod kojeg je vrijednost jednaka 1 na stranici  $y = 0$ , a jednaka 0 na stranici  $y = b$ , ( $L_1(y) = \frac{b-y}{b}$ ). Pripadni umnožak daje funkciju oblika za čvor 5,

$$N_5 = \frac{4x(a-x)}{a^2} \frac{b-y}{b}. \quad (8.6.1)$$

Za funkciju oblika u vrhu pravokutnika uzmemo pripadnu funkciju oblika za linearni pravokutni element. Vrijednost takve funkcije oblika jednaka je 1 u tom vrhu, a 0 u svim ostalim vrhovima. U čvorovima

<sup>1</sup>engl. Serendipity - neočekivano, sretno, slučajno otkriće, slijedi prema priči o Tri princa iz Serendipa (Sri Lanka) baziranoj na perzijskoj bajci o događajima iz 5. stoljeća o tri princa koji su putovali svijetom i rješavali okolini raznovrsne probleme, objavljenoj u djelu Michele Tramezzino: *Peregrinaggio di tre giovani figliuoli del re di Serendippo*, Venezia, 1557.



Slika 8.6.1: Kvadratni pravokutni serendipity konačni element

u sredini stranica koje se sastaju u tom vrhu vrijednost funkcije iznosi  $1/2$ , a u čvorovima u sredini ostalih stranica jednaka je  $0$ . To znači da je od te funkcije potrebno oduzeti funkcije oblika za navedene čvorove u sredinama tih stranica pomnoženih sa  $1/2$ . To ne utječe na vrijednosti funkcije u ostalim čvorovima jer su vrijednosti tih funkcija u ostalim čvorovima jednake  $0$ . Načelni postupak možemo raspisati za čvor 1. Uzmemo funkciju oblika za čvor 1 kao čvor linearnog pravokutnog konačnog elementa,  $N_1^L = \frac{(a-x)(b-y)}{ab}$ . Od te funkcije oduzmemo prethodno definirane funkcije oblika za čvorove 5 i 8 (čvorove na stranicama koje se sastaju u čvoru 1) pomnožene sa  $1/2$  (jer je vrijednost funkcije  $N_1^L$  u tim čvorovima jednaka  $1/2$ ) što znači da funkcija oblika za čvor 1 glasi

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^L - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) = \frac{(a-x)(b-y)}{ab} - \frac{1}{2} \frac{4x(a-x)}{a^2} \frac{b-y}{b} - \frac{1}{2} \frac{a-x}{a} \frac{4y(b-y)}{b^2} \\ &= \frac{(a-x)(b-y)}{a^2b^2} (ab - 2bx - 2ay) . \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

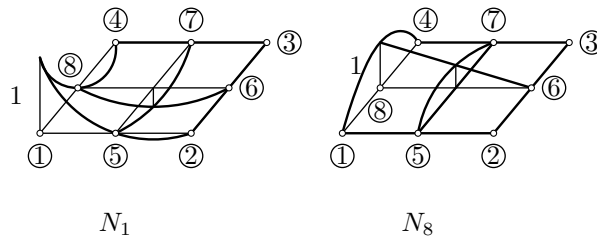
Na taj način slijede i funkcije oblika za ostale čvorove u vrhovima pravokutnika,

$$N_2 = N_2^L - \frac{1}{2}(N_5 + N_6), \quad N_3 = N_3^L - \frac{1}{2}(N_6 + N_7), \quad N_4 = N_4^L - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) . \quad (8.6.3)$$

Funkcije oblika za kvadratni pravokutni serendipity konačni element glase

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{(a-x)(b-y)}{a^2b^2} (ab - 2bx - 2ay) , & N_2(x, y) &= \frac{x(b-y)}{a^2b^2} (2bx - 2ay - ab) , \\ N_3(x, y) &= \frac{xy}{a^2b^2} (2bx + 2ay - 3ab) , & N_4(x, y) &= \frac{(a-x)y}{a^2b^2} (2ay - 2bx - ab) , \\ N_5(x, y) &= \frac{4x(a-x)(b-y)}{a^2b} , & N_6(x, y) &= \frac{4x(b-y)y}{ab^2} , \\ N_7(x, y) &= \frac{4x(a-x)y}{a^2b} , & N_8(x, y) &= \frac{4(a-x)(b-y)y}{ab^2} . \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

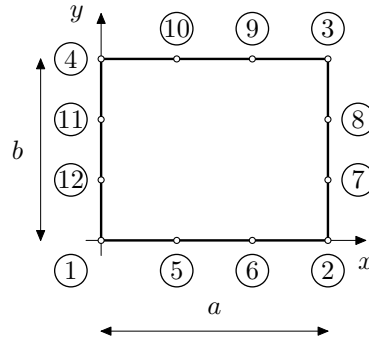
Na Slici 8.6.2 prikazane su karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu pravokutnika,  $N_1$ , i za čvor u sredini stranice pravokutnika,  $N_8$ .



Slika 8.6.2: Karakteristične funkcije oblika za čvor u vrhu i u sredini stranice pravokutnika

Kubični serendipity pravokutni ravninski konačni element je pravokutni element sa 12 čvorova (engl. twelve-noded cubic Serendipity rectangular element). Čvorovi konačnog elementa su vrhovi i točke u trećinama stranica pravokutnika.

Za čvorove duž stranica funkcije oblika jednake su umnošku pripadnog Lagrangeovog polinoma trećeg stupnja u smjeru stranice i Lagrangeovog polinoma prvog stupnja okomito na stranicu pravokutnika.



Slika 8.6.3: Kubični pravokutni serendipity konačni element

Postupak možemo pokazati za čvor 5. Uzmemo Lagrangeov polinom trećeg stupnja po varijabli  $x$  za koji je vrijednost u čvoru 5 ( $x = a/3$ ) jednaka 1, a u ostalim čvorovima te stranice jednaka 0, ( $L_3(x) = \frac{9x(3a-2x)(a-x)}{2a^3}$ ), i pomnožimo s linearnim Lagrangeovim polinomom po varijabli  $y$  kod kojeg je vrijednost jednaka 1 na stranici  $y = 0$ , a jednaka 0 na stranici  $y = b$ , ( $L_1(y) = \frac{b-y}{b}$ ). Pripadni umnožak daje funkciju oblika za čvor 5,

$$N_5 = \frac{9x(3a-2x)(a-x)}{2a^3} \frac{b-y}{b}. \quad (8.6.5)$$

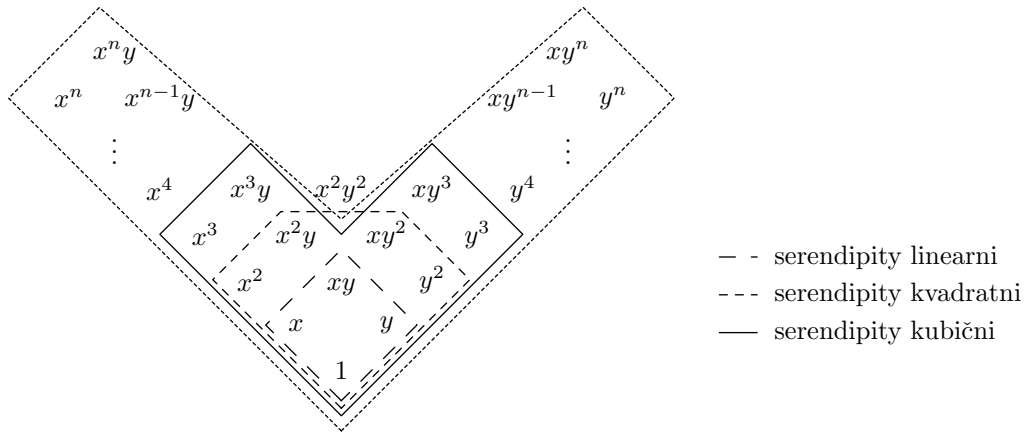
Za funkciju oblika u vrhu pravokutnika uzmemo pripadnu funkciju oblika za linearni pravokutni element. Vrijednost takve funkcije oblika jednaka je 1 u tom vrhu, a 0 u svim ostalim vrhovima. U čvorovima u trećini stranica koje se sastaju u tom vrhu vrijednost funkcije iznosi  $2/3$  odnosno  $1/3$ , a u čvorovima u trećinama ostalih stranica jednaka je 0. To znači da je od te funkcije potrebno oduzeti funkcije oblika za navedene čvorove u trećinama tih stranica pomnoženih sa  $2/3$  odnosno  $1/3$ . To ne utječe na vrijednosti funkcije u ostalim čvorovima jer su vrijednosti tih funkcija u ostalim čvorovima jednake 0. Načelni postupak možemo raspisati za čvor 1. Uzmemo funkciju oblika za čvor 1 kao čvor linearnog pravokutnog konačnog elementa,  $N_1^L = \frac{(a-x)(b-y)}{ab}$ . Od te funkcije oduzmemo prethodno definirane funkcije oblika za čvorove 5, 6, 11 i 12 (čvorove na stranicama koje se sastaju u čvoru 1) pomnožene sa  $2/3$  za čvorove bliže čvoru 1, a sa  $1/3$  za čvorove dalje čvoru 1 (jer su to vrijednosti funkcije  $N_1^L$  u tim čvorovima) što znači da funkcija oblika za čvor 1 glasi

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^L - \frac{2}{3}(N_5 + N_{12}) - \frac{1}{3}(N_6 + N_{11}) \\ &= \frac{a-x}{a} \frac{b-y}{b} + \frac{2}{3} \left( \frac{-9x(2a-3x)(a-x)(b-y)}{2a^3b} + \frac{-9y(2b-3y)(b-y)(a-x)}{2b^3a} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( \frac{-9x(a-3x)(a-x)(b-y)}{2a^3b} + \frac{-9y(b-3y)(b-y)(a-x)}{2b^3a} \right) \\ &= \frac{(a-x)(b-y)}{2a^3b^3} [2a^2b^2 - 15ab(bx+ay) + 27(b^2x^2 + a^2y^2)]. \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Na taj način slijede i funkcije oblika za ostale čvorove u vrhovima pravokutnika,

$$\begin{aligned} N_2 &= N_2^L \frac{2}{3}(N_6 + N_7) - \frac{1}{3}(N_5 + N_8), \\ N_3 &= N_3^L \frac{2}{3}(N_8 + N_9) - \frac{1}{3}(N_7 + N_{10}), \\ N_4 &= N_4^L \frac{2}{3}(N_{10} + N_{11}) - \frac{1}{3}(N_9 + N_{12}). \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

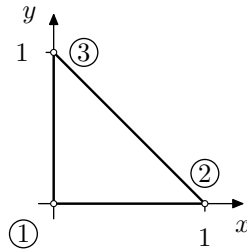
Serendipity konačni elementi imaju isti stupanj aproksimacije kao i standardni konačni elementi, ali uz manji broj nepoznanica i manji broj sudjelujućih članova polinoma iznad stupnja aproksimacije. Kvadratni serendipity konačni element nema u raspisu polinomne funkcije član  $x^2y^2$  koji postoji u raspisu polinomne funkcije standardnog konačnog elementa. Kod elemenata višeg reda dodatno se dobivaju samo po 4 člana u raspisu polinoma u odnosu na prethodni, jedan stupanj niži, element. Dodatni članovi, sukladno postupku definiranja funkcija oblika, su  $x^n, x^ny, xy^n$  i  $y^n$ . Sudjelujuće članove polinoma za pojedine elemente možemo prikazati u Pascalovom trokutu, (Slika 8.6.4).



Slika 8.6.4: Pascalov trokut s prikazom sudjelujućih članova polinoma

## 8.7. Primjeri

**Primjer 8.7.1.** Odrediti elementarnu matricu krutosti "jediničnog" donjeg lijevog trokutnog elementa debljine  $d$ .



Slika 8.7.1.1: "Jedinični" donji lijevi trokutni element.

Pod "jediničnim" trokutom podrazumijevamo pravokutni jednakokračni trokut s katetama jedinične duljine. Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, 1)$ . Na temelju definiranih koordinata čvorova možemo prema izrazima (8.3.5) izračunati koeficijente funkcija oblika, uz površinu trokuta  $F = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = -1 &\Rightarrow N_1(x, y) = 1 - x - y, \\ a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 0 &\Rightarrow N_2(x, y) = x, \\ a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = 1 &\Rightarrow N_3(x, y) = y. \end{aligned} \quad (8.7.1.1)$$

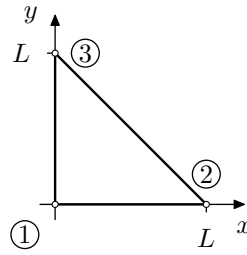
Deformacijska matrica zadanog trokuta sada slijedi u obliku

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.7.1.2)$$

Uz matricu elastičnosti prema jednadžbi (8.1.7), elementarna matrica krutosti zadanog trokutnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{d}{2} \begin{bmatrix} d_{11} + d_{33} & d_{12} + d_{33} & -d_{11} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{12} \\ d_{12} + d_{33} & d_{22} + d_{33} & -d_{12} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{22} \\ -d_{11} & -d_{12} & d_{11} & 0 & 0 & d_{12} \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{12} & -d_{22} & d_{12} & 0 & 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.7.1.3)$$

**Primjer 8.7.2.** Odrediti elementarnu matricu krutosti pravokutnog jednakokračnog donjeg lijevog trokutnog elementa debljine  $d$  s katetama duljine  $L$ .



Slika 8.7.2.1: Pravokutni jednakokračni donji lijevi trokutni element.

Promatramo pravokutni jednakokračni donji lijevi trokutni element s katetama duljine  $L$ . Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (L, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, L)$ . Na temelju definiranih koordinata čvorova možemo prema izrazima (8.3.5) izračunati koeficijente funkcija oblika, uz površinu trokuta  $F = \frac{L^2}{2}$ ,

$$\begin{aligned} a_1 = L^2, \quad b_1 = -L, \quad c_1 = -L &\Rightarrow N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{L}, \\ a_2 = 0, \quad b_2 = L, \quad c_2 = 0 &\Rightarrow N_2(x, y) = \frac{x}{L}, \\ a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = L &\Rightarrow N_3(x, y) = \frac{y}{L}. \end{aligned} \quad (8.7.2.1)$$

Deformacijska matrica zadanog trokuta sada slijedi u obliku

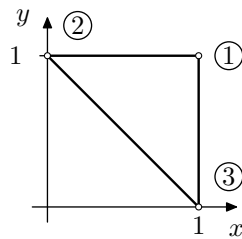
$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -L & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & L \\ -L & -L & 0 & L & L & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.7.2.2)$$

Uz matricu elastičnosti prema jednadžbi (8.1.7), elementarna matrica krutosti zadanog trokutnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{d}{2} \begin{bmatrix} d_{11} + d_{33} & d_{12} + d_{33} & -d_{11} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{12} \\ d_{12} + d_{33} & d_{22} + d_{33} & -d_{12} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{22} \\ -d_{11} & -d_{12} & d_{11} & 0 & 0 & d_{12} \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{12} & -d_{22} & d_{12} & 0 & 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.7.2.3)$$

Iz prethodna dva primjera možemo zaključiti da duljina stranica kod jednako postavljenih sličnih trokutnih elemenata ne utječe na vrijednosti u elementarnoj matrici krutosti.

**Primjer 8.7.3.** *Odrediti elementarnu matricu krutosti "jediničnog" gornjeg desnog trokutnog elementa debljine  $d$ .*



Slika 8.7.3.2: "Jedinični" gornji desni trokutni element.

Pod "jediničnim" gornjim desnim trokutom podrazumijevamo pravokutni jednakokračni trokut s katetama jedinične duljine položenog prema Slici (8.7.3.2). Čvor 1 definiramo u vrhu pravog kuta da bi pokazali elementarnu matricu krutosti za tako označene čvorove. Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, 1)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 0)$ . Na temelju definiranih koordinata čvorova možemo prema izrazima (8.3.5) izračunati koeficijente funkcija oblika, uz površinu trokuta  $F = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 1 &\Rightarrow N_1(x, y) = -1 + x + y, \\ a_2 = 0, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0 &\Rightarrow N_2(x, y) = -x, \\ a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = -1 &\Rightarrow N_3(x, y) = -y. \end{aligned} \quad (8.7.3.4)$$

Deformacijska matrica zadanog trokuta sada slijedi u obliku

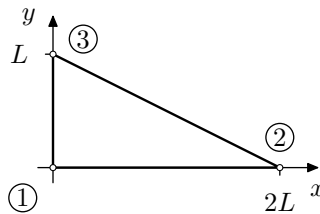
$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.7.3.5)$$

Uz matricu elastičnosti prema jednadžbi (8.1.7), elementarna matrica krutosti zadanog trokutnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{d}{2} \begin{bmatrix} d_{11} + d_{33} & d_{12} + d_{33} & -d_{11} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{12} \\ d_{12} + d_{33} & d_{22} + d_{33} & -d_{12} & -d_{33} & -d_{33} & -d_{22} \\ -d_{11} & -d_{12} & d_{11} & 0 & 0 & d_{12} \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 \\ -d_{12} & -d_{22} & d_{12} & 0 & 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.7.3.6)$$

Usporedbom dobivene elementarne matrice krutosti i elementarne matrice krutosti u prvom primjeru (za "jedinični" donji lijevi trokut) možemo zaključiti da rotacija trokutnih elemenata, uz definiranje čvorova po istom načelu, ne utječe na vrijednosti u elementarnoj matrici krutosti.

**Primjer 8.7.4.** *Odrediti elementarnu matricu krutosti pravokutnog raznokračnog donjeg lijevog trokutnog elementa debljine  $d$ .*



Slika 8.7.4.1: Pravokutni raznokračni donji lijevi trokutni element.

Promatramo pravokutni raznokračni donji lijevi trokutni element definiran na Slici (8.7.4.1). Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (2L, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, L)$ . Na temelju definiranih koordinata čvorova možemo prema izrazima (8.3.5) izračunati koeficijente funkcija oblika, uz površinu trokuta  $F = L^2$ ,

$$\begin{aligned} a_1 = 2L^2, \quad b_1 = -L, \quad c_1 = -2L &\Rightarrow N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{2L} - \frac{y}{L}, \\ a_2 = 0, \quad b_2 = L, \quad c_2 = 0 &\Rightarrow N_2(x, y) = \frac{x}{2L}, \\ a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = 2L &\Rightarrow N_3(x, y) = \frac{y}{L}. \end{aligned} \quad (8.7.4.1)$$

Deformacijska matrica zadanog trokuta sada slijedi u obliku

$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{2L^2} \begin{bmatrix} -L & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2L & 0 & 0 & 0 & 2L \\ -2L & -L & 0 & L & 2L & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.7.4.2)$$

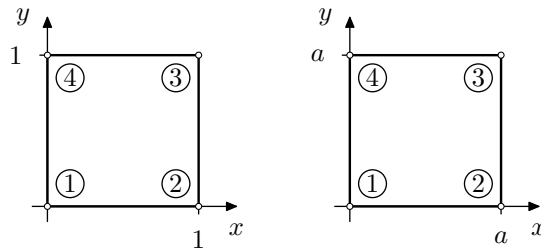
Uz matricu elastičnosti prema jednadžbi (8.1.7), elementarna matrica krutosti zadanog trokutnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{d}{4} \begin{bmatrix} d_{11} + 4d_{33} & 2d_{12} + 2d_{33} & -d_{11} & -2d_{33} & -4d_{33} & -2d_{12} \\ 2d_{12} + 2d_{33} & d_{22} + 4d_{33} & -2d_{12} & -d_{33} & -2d_{33} & -4d_{22} \\ -d_{11} & -2d_{12} & d_{11} & 0 & 0 & 2d_{12} \\ -2d_{33} & -d_{33} & 0 & d_{33} & 2d_{33} & 0 \\ -4d_{33} & -2d_{33} & 0 & 2d_{33} & 4d_{33} & 0 \\ -2d_{12} & -4d_{22} & 2d_{12} & 0 & 0 & 4d_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.7.4.3)$$

**Primjer 8.7.5.** *Odrediti elementarnu matricu krutosti linearnog pravokutnog konačnog elementa debljine  $d$  za jedinični kvadrat i za proizvoljni kvadrat duljine stranica  $a$ .*

Promatramo jedinični kvadrat kao linearni pravokutni konačni element, Slika (8.7.5.1). Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 1)$ ,  $(x_4, y_4) = (0, 1)$ . Na temelju definiranih koordinata čvorova možemo prema izrazima (8.4.7) izračunati funkcije oblika,

$$N_1 = (1-x)(1-y), \quad N_2 = x(1-y), \quad N_3 = xy, \quad N_4 = (1-x)y. \quad (8.7.5.1)$$

Slika 8.7.5.1: Jedinični kvadrat i proizvoljni kvadrat stranice duljine  $a$ .

Deformacijska matrica zadanog jediničnog kvadrata sada slijedi u obliku

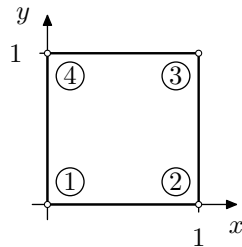
$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} -(1-y) & 0 & 1-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(1-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & 1-x \\ -(1-x) & -(1-y) & -x & 1-y & x & y & 1-x & -y \end{bmatrix}. \quad (8.7.5.2)$$

Uz matricu elastičnosti prema jednadžbi (8.1.7), elementarna matrica krutosti zadanog jediničnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{Ed}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{1+\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} \\ -\frac{3+\nu}{12} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} \\ -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} \\ -\frac{3-\nu}{12} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & -\frac{1-3\nu}{8} \\ -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} \\ \frac{\nu}{6} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{1+\nu}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{3-\nu}{12} & -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} \end{bmatrix}. \quad (8.7.5.3)$$

Na temelju izraza za koeficijente elementarne matrice krutosti za linearni pravokutni konačni element, (8.4.20), očito je da koeficijenti ovise isključivo o odnosu stranica u pravokutnom konačno elementu, a ne i o duljinama stranica. To znači da je elementarna matrica krutosti za kvadrat duljine stranice jednake  $a$  jednaka elementarnoj matrici krutosti za jedinični kvadrat.

**Primjer 8.7.6.** *Odrediti elementarnu matricu krutosti linearnog pravokutnog konačnog elementa debljine  $d$  za jedinični kvadrat uz reduciranu integraciju posmičnog dijela.*



Slika 8.7.6.1: Jedinični kvadrat.

Promatramo jedinični kvadrat kao linearni pravokutni konačni element, Slika (8.7.6.1). Koordinate čvorova su  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 1)$ ,  $(x_4, y_4) = (0, 1)$  iz čega jednostavno slijede funkcije oblika,

$$N_1 = (1-x)(1-y), \quad N_2 = x(1-y), \quad N_3 = xy, \quad N_4 = (1-x)y. \quad (8.7.6.1)$$

Deformacijske matrice zadanog jediničnog kvadrata slijede prema jednadžbama (8.4.32) u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_o^{(e)} &= \begin{bmatrix} -(1-y) & 0 & 1-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(1-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & 1-x \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_p^{(e)} &= \begin{bmatrix} -(1-x) & -(1-y) & -x & 1-y & x & y & 1-x & -y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.7.6.2)$$

Uz pripadne matrice elastičnosti prema jednadžbama (8.4.33), elementarna matrica krutosti zadanog jediničnog elementa glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{Ed}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{11-3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{1+\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} \\ -\frac{5+3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} \\ -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} \\ -\frac{7-3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} \\ -\frac{1+\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} \\ \frac{1+3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{5+3\nu}{24} & \frac{1+\nu}{8} & -\frac{7-3\nu}{24} & -\frac{1-3\nu}{8} & \frac{1+3\nu}{24} & -\frac{1+\nu}{8} & \frac{11-3\nu}{24} \end{bmatrix}. \quad (8.7.6.3)$$

**Primjer 8.7.7.** *Odrediti elementarni vektor opterećenja za kvadratni pravokutni konačni element za zadanu jednoliko distribuirano opterećenje  $q$  duštranice pravokutnika  $x = a$ .*

Elementarni vektor opterećenja, (8.2.12), za kvadratni pravokutni ravninski konačni element definiran je izrazom (8.4.22). Za opterećenje zadanu duštranice  $x = a$  zaoravo tražimo pripadni  $\mathbf{q}_p^{(e)}$ . Neka je  $\mathbf{q}_p^{(e)} = q$ . Doprinos linijskog opterećenja slijedi prema izrazu (8.3.22). Za konstantno linijsko opterećenje ruba kvadratnog pravokutnog konačnog elementa paralelnog osi  $y$ ,  $x = a$ , elementarni vektor opterećenja slijedi prema izrazu

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \int_0^b q(\mathbf{N}^{(e)})^T(x=a)dy. \quad (8.7.7.1)$$

Prema iskazanim funkcijama oblika, 8.5.7, jasno je da su sve funkcije oblika na toj stranici pravokutnika jednake nuli osim  $N_2$ ,  $N_3$  i  $N_6$ . Nakon integriranja slijedi elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{qb}{6} \ 0 \ \frac{qb}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{2qb}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (8.7.7.2)$$

**Primjer 8.7.8.** *Odrediti elementarni vektor opterećenja za serendipity pravokutni konačni element za zadanu jednoliko distribuirano opterećenje  $q$  duštranice pravokutnika  $x = a$ .*

Elementarni vektor opterećenja, (8.2.12), za kvadratni pravokutni ravninski konačni element definiran je izrazom (8.4.22). Za opterećenje zadanu duštranice  $x = a$  zaoravo tražimo pripadni  $\mathbf{q}_p^{(e)}$ . Neka je  $\mathbf{q}_p^{(e)} = q$ . Doprinos linijskog opterećenja slijedi prema izrazu (8.3.22). Za konstantno linijsko opterećenje ruba kvadratnog pravokutnog konačnog elementa paralelnog osi  $y$ ,  $x = a$ , elementarni vektor opterećenja slijedi prema izrazu

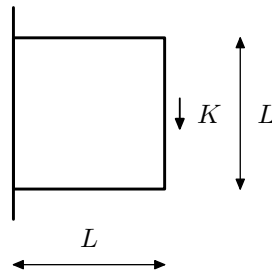
$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \int_0^b q(\mathbf{N}^{(e)})^T(x=a)dy. \quad (8.7.8.1)$$

Prema iskazanim funkcijama oblika, 8.6.4, jasno je da su sve funkcije oblika na toj stranici pravokutnika jednake nuli osim  $N_2$ ,  $N_3$  i  $N_6$ . Nakon integriranja slijedi elementarni vektor opterećenja

$$\mathbf{q}_p^{(e)} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{qb}{6} \ 0 \ \frac{qb}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{2qb}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (8.7.8.2)$$

**Primjer 8.7.9.** *Odrediti progib slobodnog kraja kratke konzole debljine  $d$ , duljine i visine  $L$ , uz Poissonov koeficijent  $\nu = 0$  i modul elastičnosti  $E$  ( $\Rightarrow G = \frac{E}{2}$ ), opterećene koncentriranom silom  $K$  na kraju konzole.*



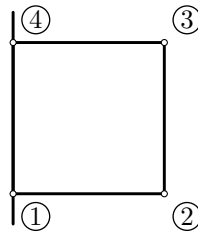


Slika 8.7.9.1: Kratka konzola opterećena koncentriranom silom na slobodnom kraju.

Analitičko rješenje i rješenje prema Timošenkovoj teoriji savijanja iskazano je u primjeru 7.6.1. i uz Poissonov koeficijent  $\nu = 0$  slijedi koeficijent  $\beta = \frac{12}{5}$ , a progib slobodnog kraja konzole iznosi  $w_L = \frac{32}{5} \frac{K}{Ed}$ . Postupak rješavanja prikazat ćemo za linearni pravokutni element, linearni pravokutni element uz reduciranu integraciju, kvadratni pravokutni element i kvadratni pravokutni serendipity element. Matrica elastičnosti za elemente uz zadana svojstva glasi

$$D = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.1)$$

Ako kratku konzolu promatramo kao jedan linearni pravokutni konačni element, Slika 8.7.9.2, kvadrat stranica duljine  $L$ , u primjeru 8.7.5. definirana je pripadna elementarna matrica krutosti. Uvrštavanjem



Slika 8.7.9.2: Jedan linearni pravokutni konačni element.

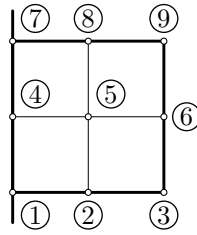
rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ , i razdiobom koncentrirane sile na rubu konzole u dva susjedna čvora slijedi sustav jednadžbi

$$Ed \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \\ -\frac{K}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.2)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2K}{Ed} \\ -\frac{4K}{Ed} \\ \frac{2K}{Ed} \\ -\frac{4K}{Ed} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.3)$$

Proračunato numeričko rješenje za progin ruba kratke konzole odstupa 37.5% od analitičkog rješenja. Za dobivanje kvalitetnijeg rješenja podijelit ćemo zadanu kratku konzolu na četiri jednaka linearna pravokutna konačna elementa, Slika 8.7.9.3, kvadrata stranica duljine  $L/2$ , elementarna matrica krutosti jednaka je za svaki element.



Slika 8.7.9.3: Podjela na 4 linearna pravokutna konačna elementa.

Za razliku od grednih konačnih elemenata kod kojih smo opterećenje promatrali na razini težišne osi grede, kod zidnih konačnih elemenata rješenje ovisi i o modeliranju djelovanja opterećenja. Različito rješenje dobivamo ako silu stavimo kao koncentriranu u neki od čvorova po visini konzolnog ruba ili ako zadanu silu distribuiramo duž cijelog ruba. Ovisno o odabranom modelu opterećenja dobit ćemo različite vektore opterećenja sustava što povlači i različita numerička rješenja.

Uklapanjem matrica krutosti i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = u_7 = v_7 = 0$ , matrica sustava za preostale nepoznate komponente vektora pomaka  $\mathbf{w} = [u_2 \ u_3 \ u_5 \ u_6 \ u_8 \ u_9 \ v_2 \ v_3 \ v_5 \ v_6 \ v_8 \ v_9]$  glasi

$$\mathbf{K} = Ed \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.4)$$

Za razliku od grednih konačnih elemenata kod kojih smo opterećenje promatrali na razini težišne osi grede, kod zidnih konačnih elemenata rješenje ovisi i o modeliranju djelovanja opterećenja. Različito rješenje dobivamo ako silu stavimo kao koncentriranu u neki od čvorova po visini konzolnog ruba ili ako zadanu silu distribuiramo duž cijelog ruba. Ovisno o odabranom modelu opterećenja dobit ćemo različite vektore opterećenja sustava što povlači i različita numerička rješenja. Ako definiramo opterećenje kao koncentrirano u čvoru u sredini visine poprečnog presjeka vektor opterećenja slijedi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (8.7.9.5)$$

a ako definiramo opterećenje kao distribuirano duž ruba konzole nakon integriranja linijskog opterećenja po pripadnim stranicama konačnih elemenata slijedi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{4}]^T. \quad (8.7.9.6)$$

Rješenjem sustava slijedi vertikalni pomak čvora na sredini visine ruba konzole,

$$v_6 = -\frac{290}{51} \frac{K}{Ed} = -5.68627 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.7)$$

za koncentriranu silu, a

$$v_6 = -\frac{16}{3} \frac{K}{Ed} = -5.3 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.8)$$

za distribuirano opterećenje. Odstupanje dobivenog numeričkog rješenja od analitičkog rješenja sada iznosi 11.2% odnosno 16.7%.

Kratku konzolu možemo promatrati kao jedan linearni pravokutni konačni element, Slika 8.7.9.2, kvadrat stranica duljine  $L$ , uz reduciranu integraciju. U primjeru 8.7.6. definirana je pripadna elementarna

matrica krutosti. Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ , i razdiobom koncentrirane sile u sredini stranice na rubu konzole u dva susjedna čvora slijedi sustav jednadžbi

$$Ed \begin{bmatrix} \frac{11}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \\ -\frac{K}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.9)$$

Rješenjem sustava slijedi vektor nepoznatih pomaka

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3K}{Ed} \\ -\frac{5K}{Ed} \\ \frac{3K}{Ed} \\ -\frac{5K}{Ed} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.10)$$

Proračunato numeričko rješenje za progib ruba kratke konzole odstupa 21.9% od analitičkog rješenja. Za dobivanje kvalitetnijeg rješenja podijelit ćemo zadanu kratku konzolu na četiri jednaka linearna pravokutna konačna elementa uz reduciranu integraciju posmičnog dijela matrice krutosti, Slika 8.7.9.3, na 4 kvadrata stranica duljine  $L/2$ , elementarna matrica krutosti jednaka je za svaki element. Uklapanjem matrica krutosti i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = u_7 = v_7 = 0$ , matrica sustava za preostale nepoznate komponente vektora pomaka  $\mathbf{w} = [u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_8 \ v_8 \ u_9 \ v_9]^T$  glasi

$$Ed \begin{bmatrix} \frac{11}{12} & 0 & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{11}{6} & 0 & -\frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{11}{6} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{12} & 0 & \frac{11}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{11}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{11}{12} & 0 & -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{11}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{11}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{11}{8} & \frac{11}{24} \end{bmatrix}. \quad (8.7.9.11)$$

Ako definiramo opterećenje kao koncentrirano u čvoru u sredini visine poprečnog presjeka vektor opterećenja slijedi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (8.7.9.12)$$

a ako definiramo opterećenje kao distribuirano duž ruba konzole nakon integriranja linijskog opterećenja po pripadnim stranicama konačnih elemenata slijedi

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{K}{4}]^T. \quad (8.7.9.13)$$

Rješenjem sustava slijedi vertikalni pomak čvora na sredini visine ruba konzole,

$$v_6 = -\frac{173}{28} \frac{K}{Ed} = -6.17857 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.14)$$

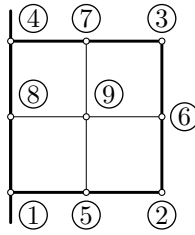
za koncentriranu silu, a

$$v_6 = -\frac{23}{4} \frac{K}{Ed} = -5.75 \frac{K}{Ed}. \quad (8.7.9.15)$$

za distribuirano opterećenje. Dobiveno odstupanje sada iznosi 3.5% odnosno 10.2%.

Ako kratku konzolu promatramo kao jedan kvadratni pravokutni konačni element, uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = u_8 = v_8 = 0$ , i koncentrirane sile u na rubu konzole ( $f_{6,y} = -K$ ) slijedi sustav jednadžbi čijim rješenjem slijedi vertikalni pomak čvorova na rubu konzole,

$$v_6 = -\frac{34005}{5126} \frac{K}{Ed} = -6.04858 \frac{K}{Ed}. \quad (8.7.9.16)$$



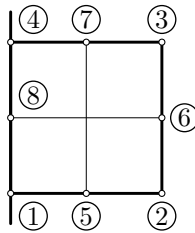
Slika 8.7.9.4: Jedan kvadratni pravokutni konačni element.

za koncentriranu silu, a

$$v_6 = -\frac{65}{11} \frac{K}{Ed} = -5.909 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.17)$$

za distribuiranu silu. Dobiveno odstupanje od analitičkog rješenja iznosi 5.5% odnosno 7.7%.

Ako kratku konzolu promatramo kao jedan kvadratni pravokutni serendipity konačni element, uvrštavanjem



Slika 8.7.9.5: Jedan kvadratni pravokutni serendipity konačni element.

rubnih uvjeta,  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = u_8 = v_8 = 0$ , i razdiobom koncentrirane sile  $u$  na rubu konzole u čvorove na rubu ( $f_{2,y} = f_{3,y} = -K/2$ ) slijedi sustav jednačbi čijim rješenjem slijedi vertikalni pomak čvorova na rubu konzole,

$$v_6 = -\frac{5385}{902} \frac{K}{Ed} = -5.97007 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.18)$$

za koncentriranu silu, a

$$v_2 = v_3 = v_6 = -\frac{65}{11} \frac{K}{Ed} = -5.909 \frac{K}{Ed}, \quad (8.7.9.19)$$

za distribuiranu silu. Dobiveno odstupanje od analitičkog rješenja iznosi 6.7% odnosno 7.7%.

## 8.8. Zadaci

U zadacima zadanim u poglavlju 7.7. odredite progibe linearnim trokutnim konačnim elementom, linearnim pravokutnim konačnim elementom, linearnim pravokutnim konačnim elementom s reduciranom integracijom, kvadratnim pravokutnim konačnim elementom te serendipity pravokutnim konačnim elementom uz različite mreže odabrani konačnih elemenata.

## 9. Konačni elementi za ploče (Kirchhoffova teorija savijanja)

### 9.1. Osnovne jednadžbe savijanja ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja

#### 9.1.1. Osnovne pretpostavke Kirchhoffove teorije savijanja ploča (teorije savijanja tankih ploča)

Ploča je definirana kao plošna konstrukcija čija je debljina  $d$  značajno manja od ostalih (tlocrtnih) dimenzija, a opterećenje djeluje okomito (poprečno) na ravninu ploče. Pretpostavljamo da trodimenzionalnu ploču možemo zamijeniti središnjom, težišnom ravninom s definiranim geometrijskim (debljina ploče  $d$ ) i fizikalnim karakteristikama (modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ ). Težišnu ravninu ploče postaviti ćemo u ravninu  $\Pi_{xy}$  na razini  $z = 0$  tako da su pomaci okomiti na ravninu težišne ravnine ploče u smjeru osi  $z$ . Osnovne pretpostavke savijanja tankih ploča su

- sve točke koje se nalaze u težišnoj ravnini od translatornih pomaka imaju samo progib, poprečni pomak, pomak samo u smjeru osi  $z$ ,  $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ ,
- sve točke ploče koje se nalaze na okomici na težišnu ravninu imaju istu vrijednost progiba,  $w(x, y, z) = w(x, y)$ ,  $z \in [-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}]$ ,
- u ploči nema normalnih naprezanja okomito na težišnu ravninu,  $\sigma_{zz} = 0$ ,
- pravci okomiti na težišnu ravninu prije deformacije ostaju okomiti na tangentnu ravninu u točki prodora i nakon deformacije (hipoteza ravnih poprečnih presjeka).

Jednadžba savijanja ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja teoriji savijanja tankih ploča) glasi

$$\Delta(D\Delta w) = q, \quad (9.1.1)$$

uz konstantne fizikalne i geometrijske karakteristike ploče možemo jednadžbu zapisati u obliku

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (9.1.2)$$

ili prikazati pomoću Laplaceovog operatora u obliku

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}. \quad (9.1.3)$$

#### 9.1.2. Odnosi deformacija i pomaka

Promatramo izdvojeni dio ploče debljine  $d$ , dimenzija  $dx \times dy$ , nakon djelovanja opterećenja. Vektor translatornih pomaka u smjeru koordinatnih osi u svakoj točki ploče označimo

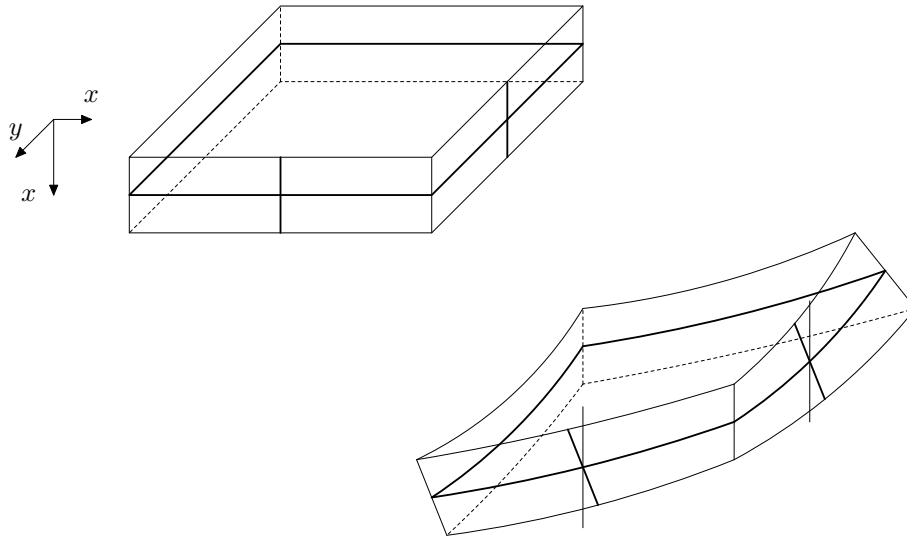
$$\mathbf{w}_{tp} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (9.1.4)$$

pri čemu je  $w$  progib ploče, pomak okomito na težišnu ravninu ploče, a  $u$  i  $v$  pomaci u ravnini ploče. Za pomake u ravnini ploče vrijedi

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\varphi_x(x, y) = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= z\varphi_y(x, y) = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

pri čemu su  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$  kutevi zaokreta težišne ravnine. Točke u težišnoj ravnini imaju samo progib od translatornih pomaka te kuteve zaokreta oko osi koje razapinju težišnu ravninu. Vektor pomaka točaka težišne ravnine možemo iskazati u obliku

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w \\ -\varphi_x \\ -\varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.1.6)$$



Slika 9.1.1: Izdvojeni dio ploče

Pripadne deformacije u smjeru koordinatnih osi u svakoj točki ploče jednake su

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_{zz} = 0, \quad (9.1.7)$$

a pripadne posmične deformacije u svakoj točki ploče jednake su

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (9.1.8)$$

Vektor deformacije u svakoj točki ploče možemo izraziti u obliku

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (9.1.9)$$

ili u obliku  $\boldsymbol{\epsilon} = z\boldsymbol{\kappa}$ , pri čemu je vektor deformacije savijanja ploče  $\boldsymbol{\kappa}$  jednak

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.1.10)$$

### 9.1.3. Odnos naprezanja i deformacija

Uz definirani vektor deformacija  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T$  i vektor naprezanja  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy}]^T$ , odnos naprezanja i deformacija glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (9.1.11)$$

pri čemu je matrica elastičnosti  $\mathbf{D}$  simetrična matrica i u slučaju ravninskog naprezanja izotropne ploče jednaka

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (9.1.12)$$

Vektor momenta savijanja u svakoj točki težišne ravnine jednak je resultantnom vektoru naprezanja po debljini ploče na okomici na težišnu ravninu ploče kroz promatranu točku,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z \boldsymbol{\sigma} dz. \quad (9.1.13)$$

Uvrštavanjem odnosa naprezanja i deformacija, (9.1.11), i uvođenjem vektora deformacije savijanja, (9.1.10), slijedi izraz za vektor momenta savijanja u točki ploče,

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dz = \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z^2) dz = \frac{d^3}{12} \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\kappa}, \quad (9.1.14)$$

pri čemu je  $\mathbf{D}_s = \frac{d^3}{12} \mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D}_s = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (9.1.15)$$

matrica elastičnosti savijanja tanke ploče. Koeficijent ispred matrice,  $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$  zovemo krutost ploče na savijanje.

#### 9.1.4. Primjena principa virtualnog rada

Na izdvojenom elementu ploče ( $e$ ), tlocrtne površine  $F^{(e)}$ , debljine  $d^{(e)}$ , s definiranim čvorovima  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$  za trokutni konačni element,  $i = 1, 2, 3, 4$  za pravokutni konačni element), iz ravnoteže elementa slijedi

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{F^{(e)}} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{s}^{(e)} dF^{(e)} + \sum_i \delta \mathbf{w}_i^T \mathbf{k}_i^{(e)}, \quad (9.1.16)$$

pri čemu je  $\delta \mathbf{w} = \left[ \delta w, \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^T$  vektor virtualnih pomaka točaka unutar izdvojenog elementa,  $\delta \mathbf{w}_i = \left[ \delta w_i, \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T$  vektor virtualnih pomaka  $i$ -tog čvora,  $\mathbf{s}^{(e)} = [q_z, m_x, m_y]^T$  vektor zadanog opterećenja distribuiranog po elementu (npr. vlastita težina ploče ili propisima definirano površinsko opterećenje), a  $\mathbf{k}_i^{(e)} = [K_{z,i}, M_{x,i}, M_{y,i}]^T$  vektor zadanih koncentriranih sila i momenata u čvorovima  $(x_i, y_i)$  elementa ( $e$ ) (npr. propisima definirane koncentrirane sile ili sile od stupova oslonjenih na ploču). Rad virtualnih deformacija u ravnoteži izdvojenog elementa možemo izraziti i preko vektora virtualnih deformacija savijanja,  $\delta \boldsymbol{\kappa}$ ,

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V (z \delta \boldsymbol{\kappa}^T) \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{F^{(e)}} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \left[ \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z \boldsymbol{\sigma}) dz \right] dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dF^{(e)}. \quad (9.1.17)$$

Uvrštavanjem u princip virtualnog rada, (9.1.16), slijedi princip virtualnog rada u obliku,

$$\int_{F^{(e)}} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{s}^{(e)} dF^{(e)} + \sum_i \delta \mathbf{w}_i^T \mathbf{k}_i^{(e)}, \quad (9.1.18)$$

## 9.2. Diskretizacija polja na konačnom elementu

### 9.2.1. Diskretizacija polja pomaka, deformacija i naprezanja

Ako konačni element ima  $n$  čvorova, tada vektor nepoznatih pomaka čvorova tog elementa,  $\mathbf{w}^{(e)}$ , ima  $m = 3n$ , ( $w, w_x, w_y$  po čvoru) ili  $m = 4n$  ( $w, w_x, w_y, w_{xy}$  po čvoru) članova,

$$\mathbf{w}^{(e)} = \left[ \mathbf{w}_i^{(e)} \right]_{i=1}^n, \quad \mathbf{w}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} w_i \\ w_{x,i} \\ w_{y,i} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathbf{w}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} w_i \\ w_{x,i} \\ w_{y,i} \\ w_{xy,i} \end{bmatrix}. \quad (9.2.1)$$

Za polje pomaka  $w$  pretpostavimo linearnu kombinaciju pomaka čvorova elementa što u matičnom zapisu daje

$$w = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (9.2.2)$$

pri čemu je  $\mathbf{N}^{(e)}$  vektor funkcija oblika,

$$\mathbf{N}^{(e)} = \left[ N_1^{(e)} \quad \dots \quad N_m^{(e)} \right]. \quad (9.2.3)$$

Uvrštavanjem diskretizacije polja pomaka, (9.2.2), u odnos pomaka i deformacija slijedi diskretizacija polja deformacija u matičnom zapisu

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (9.2.4)$$

pri čemu je matrica deformacije  $\mathbf{B}^{(e)}$  definirana

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.2.5)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja deformacije u zakon ponašanja slijedi diskretizirani oblik polja naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (9.2.6)$$

Diskretizirano polje deformacije savijanja možemo izraziti

$$\boldsymbol{\kappa}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.2.7)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja deformacije savijanja u izraz za moment, (9.1.14), slijedi diskretizirani oblik polja momenata,

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{D}_s^{(e)} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (9.2.8)$$

### 9.2.2. Diskretizacija jednadžbe ravnoteže

Definirana diskretizirana virtualna polja,  $\delta \mathbf{w}$ ,  $\delta \boldsymbol{\kappa}$ , i vektor zadanih sila u čvorovima  $\mathbf{k}^{(e)}$ ,

$$\delta \mathbf{w} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)}, \quad \mathbf{k}^{(e)} = [\mathbf{k}_1 \quad \dots \quad \mathbf{k}_n]^T, \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} K_{z,i} \\ M_{x,i} \\ M_{y,i} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} K_{z,i} \\ M_{x,i} \\ M_{y,i} \\ M_{xy,i} \end{bmatrix}, \quad (9.2.9)$$

možemo uvrstiti u princip virtualnog rada, (9.1.16), nakon čega slijedi

$$(\delta \mathbf{w}^{(e)})^T \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(e)} dF^{(e)} = (\delta \mathbf{w}^{(e)})^T \left[ \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{s}^{(e)} dF^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)} \right]. \quad (9.2.10)$$

Uvrštavanjem diskretiziranog polja momenata, (9.2.8), slijedi

$$\int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \mathbf{D}_s^{(e)} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} dF^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{s}^{(e)} dF^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}. \quad (9.2.11)$$

odnosno u standardnom obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}, \quad (9.2.12)$$



gdje je

$$\mathbf{q}^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{s}^{(e)} dF^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}, \quad (9.2.13)$$

elementarni vektor opterećenja u čvorovima elementa, a

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \mathbf{D}_s^{(e)} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} dF^{(e)} \quad (9.2.14)$$

elementarna matrica krutosti konačnog elementa za ploče prema Kirchhoffovoj teoriji savijanja.

### 9.3. Pravokutni konačni elementi za ploče prema Kirchoffovoj teoriji savijanja

#### 9.3.1. Izbor pravokutnih konačnih elemenata

Prema teoriji savijanja tankih ploča jasno slijedi neprekidnost derivacije progibne funkcije u oba smjera (progibna funkcija je klase  $C^1(\Omega)$ ). Logično slijedi, kao i kod Bernoullijeve teorije savijanja greda, da za nepoznanice u čvorovima konačnog elementa budu definirani progib  $w$  i derivacije progiba u oba smjera,  $w_x$  i  $w_y$ . Uzimanjem u obzir tri nepoznanice po čvoru slijedi 12 nepoznanica po konačnom elementu. Posljedica je da aproksimacija progibne funkcije nije moguća potpunim polinomom (potpuni polinom trećeg stupnja ima 10 članova, a potpuni polinom četvrtog stupnja ima 15 članova), nego se uzima potpuni polinom trećeg stupnja uz dodatna dva člana iz polinoma četvrtog stupnja (uobičajeno je uzeti  $x^3y$  i  $xy^3$ ). Takva aproksimacija u potpunosti osigurava neprekinutost progibne funkcije duž stranica između elemenata, ali ne osigurava neprekinutost derivacije progibne funkcije okomito na stranicu elementa osim u čvorovima. Posljedično proizlazi da mješovita derivacija,  $w_{xy}$  u čvorovima nije jednaka kad proračunamo vrijednost u čvoru za dva susjedna elementa. Takav konačni element nije konforman, ali je u potpunosti prihvatljiv za korištenje kod ploča koje možemo podijeliti na pravokutne konačne elemente.

Konformnost možemo postići uzimanjem mješovite derivacije  $w_{xy}$  u čvorovima kao dodatne nepoznanice. Tada imamo 16 nepoznanica po konačnom elementu, a polinom aproksimacije progibne funkcije bikubični je polinom, polinom jednak produktu kubičnih polinoma po  $x$  i po  $y$ . Derivacija progiba okomito na stranicu konačnog elementa je tada kao kubični polinom jednoznačno definirana sa četiri parametra (derivacija i mješovita derivacija u oba čvora na stranici) čime je osigurana neprekinutost derivacije i mješovite derivacije duž stranice. To vrijedi samo za pravokutne konačne elemente. Kod proizvoljnih četverokuta neprekinutost mješovite derivacije nije osigurana ako se u čvorovima ne uzmu i druge derivacije u oba smjera,  $w_{xx}$  i  $w_{yy}$  kao nepoznanice što značajno povećava broj proračunskih operacija.

#### 9.3.2. Hermitski bikubični konačni element - konformni pravokutni konačni element sa 16 stupnjeva slobode

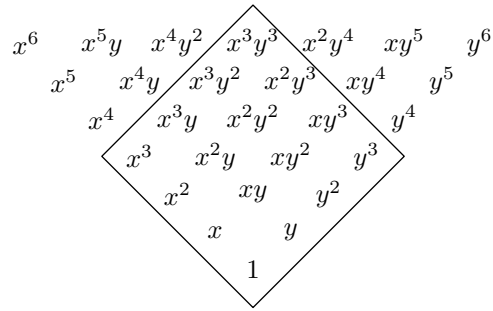
Hermitski bikubični konačni element standardni je konformni pravokutni konačni element za rješavanje jednadžbe savijanja ploče (Slika 9.3.2). Vrijednost funkcije na pojedinom konačnom elementu, određena je sa 16 parametara. Progib ploče aproksimiran je produktom kubičnih polinoma po  $x$  i po  $y$  duž elementa,

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \\ & + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3. \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

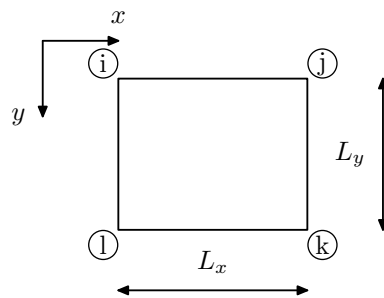
Prikaz članova koji ulaze u sumaciju za hermitski bikubični konačni element možemo prikazati i na Pascalovom trokutu, (slika 9.3.1). Neprekidnost kuteva zaokreta i mješovite derivacije duž stranice pravokutnika izravna je posljedica kubične razdiobe zaokreta duž stranice. Jedinstvenost funkcije zaokreta i mješovite derivacije osigurana je zbog četiri uvjeta na stranici, zaokreti i mješovite derivacije u čvorovima.

#### 9.3.3. Diskretizacija polja pomaka hermitskog bikubičnog konačnog elementa

Promatramo pravokutni konačni element  $(e) = [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Vrijednost funkcije u bilo kojoj točki



Slika 9.3.1: Prikaz sudjelujućih polinoma na Pascalovom trokutu



Slika 9.3.2: Hermitski bikubični konačni element

$(x, y)$  elementa  $(e)$  interpolirana je linearnom kombinacijom progiba  $w^\alpha$ , derivacija po  $x$ ,  $w_x^\alpha$ , derivacija po  $y$ ,  $w_y^\alpha$  i mješovitim derivacijama,  $w_{xy}^\alpha$  u čvorovima elementa,

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} &= N_1(x, y)w^i + N_2(x, y)w_x^i + N_3(x, y)w_y^i + N_4(x, y)w_{xy}^i \\
 &+ N_5(x, y)w^j + N_6(x, y)w_x^j + N_7(x, y)w_y^j + N_8(x, y)w_{xy}^j \\
 &+ N_9(x, y)w^k + N_{10}(x, y)w_x^k + N_{11}(x, y)w_y^k + N_{12}(x, y)w_{xy}^k \\
 &+ N_{13}(x, y)w^l + N_{14}(x, y)w_x^l + N_{15}(x, y)w_y^l + N_{16}(x, y)w_{xy}^l .
 \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

Funkcije oblika  $N_i$  možemo definirati na jediničnom kvadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$  u koordinatnom sustavu

$\xi\eta$ ), i na proizvoljnom pravokutnom elementu  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  u standardnom koordinatnom sustavu,

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) & N_1(x, y) &= \left(\frac{2x^3}{L_x^3} - \frac{3x^2}{L_x^2} + 1\right) \left(\frac{2y^3}{L_y^3} - \frac{3y^2}{L_y^2} + 1\right) \\
N_2(\xi, \eta) &= (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) & N_2(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{2x^2}{L_x^2} + x\right) \left(\frac{2y^3}{L_y^3} - \frac{3y^2}{L_y^2} + 1\right) \\
N_3(\xi, \eta) &= (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) & N_3(x, y) &= \left(\frac{2x^3}{L_x^3} - \frac{3x^2}{L_x^2} + 1\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{2y^2}{L_y^2} + y\right) \\
N_4(\xi, \eta) &= (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) & N_4(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{2x^2}{L_x^2} + x\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{2y^2}{L_y^2} + y\right) \\
N_5(\xi, \eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) & N_5(x, y) &= \left(\frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3}\right) \left(\frac{2y^3}{L_y^3} - \frac{3y^2}{L_y^2} + 1\right) \\
N_6(\xi, \eta) &= (\xi^3 - \xi^2)(2\eta^3 - 3\eta^2 + 1) & N_6(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2}\right) \left(\frac{2y^3}{L_y^3} - \frac{3y^2}{L_y^2} + 1\right) \\
N_7(\xi, \eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) & N_7(x, y) &= \left(\frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3}\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{2y^2}{L_y^2} + y\right) \\
N_8(\xi, \eta) &= (\xi^3 - \xi^2)(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) & N_8(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2}\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{2y^2}{L_y^2} + y\right) \\
N_9(\xi, \eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(3\eta^2 - 2\eta^3) & N_9(x, y) &= \left(\frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3}\right) \left(\frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3}\right) \\
N_{10}(\xi, \eta) &= (\xi^3 - \xi^2)(3\eta^2 - 2\eta^3) & N_{10}(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2}\right) \left(\frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3}\right) \\
N_{11}(\xi, \eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(\eta^3 - \eta^2) & N_{11}(x, y) &= \left(\frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3}\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2}\right) \\
N_{12}(\xi, \eta) &= (\xi^3 - \xi^2)(\eta^3 - \eta^2) & N_{12}(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2}\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2}\right) \\
N_{13}(\xi, \eta) &= (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(3\eta^2 - 2\eta^3) & N_{13}(x, y) &= \left(\frac{2x^3}{L_x^3} - \frac{3x^2}{L_x^2} + 1\right) \left(\frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3}\right) \\
N_{14}(\xi, \eta) &= (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(3\eta^2 - 2\eta^3) & N_{14}(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{2x^2}{L_x^2} + x\right) \left(\frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3}\right) \\
N_{15}(\xi, \eta) &= (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\eta^3 - \eta^2) & N_{15}(x, y) &= \left(\frac{2x^3}{L_x^3} - \frac{3x^2}{L_x^2} + 1\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2}\right) \\
N_{16}(\xi, \eta) &= (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(\eta^3 - \eta^2) & N_{16}(x, y) &= \left(\frac{x^3}{L_x^3} - \frac{2x^2}{L_x^2} + x\right) \left(\frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2}\right).
\end{aligned} \tag{9.3.17}$$

Prijelaz s jediničnog kvadrata na pravokutni konačni element ( $e$ ) čije su stranice paralelne osima  $x$  i  $y$  duljina  $L_x$  i  $L_y$ , ne predstavlja značajan problem. Potrebno je još temeljne interpolacijske funkcije uz prve derivacije pomnožiti s pripadnim korakom mreže  $L_x, L_y$  odnosno produktom koraka mreže u oba smjera  $L_x \cdot L_y$  kod mješovite derivacije, radi kompatibilnosti rješenja. Treba uočiti da su nepoznanice derivacije funkcije, a ne kutevi zaokreta kao kod savijanja grede, što znači da su pripadni interpolacijski polinomi pomnoženi sa  $(-1)$ .

Uvrštavanjem definirane razdiobe polja pomaka, (9.3.16), u diskretizirani oblik vektora deformacije savijanja ploče, (9.2.7), slijedi operatorska matrica polja deformacije savijanja ploče, (dimenzije  $3 \times 16$ ),

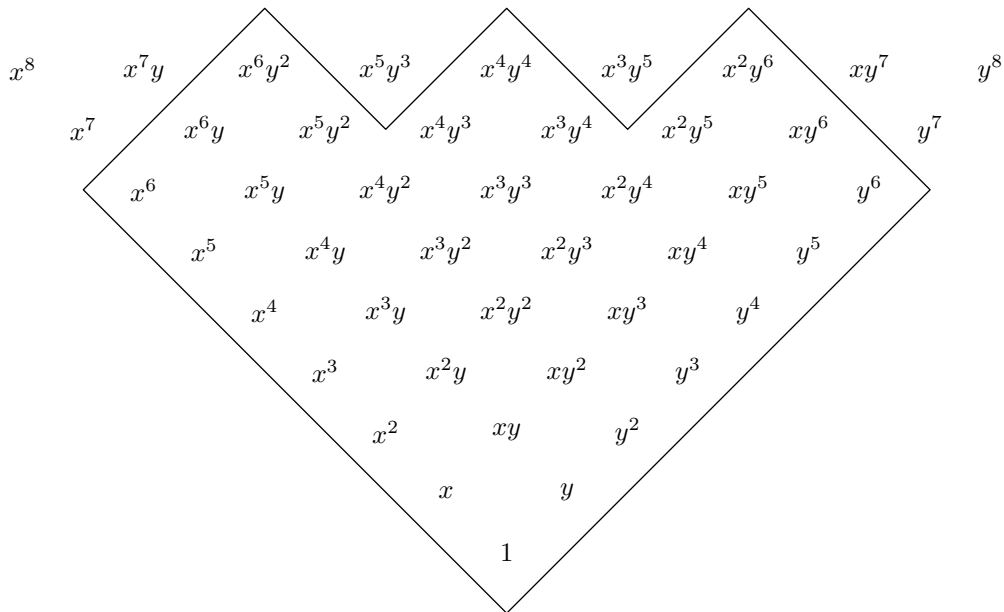
$$\mathbf{\kappa}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 N_{16}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 N_{16}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \cdots & -2\frac{\partial^2 N_{16}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \tag{9.3.18}$$

### 9.3.4. Elementarna matrica krutosti hermitskog bikubičnog konačnog elementa

Elementarna matrica krutosti hermitskog bikubičnog konačnog elementa sa 16 stupnjeva slobode slijedi iz jednadžbe (9.2.14)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(e)} &= \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \mathbf{D}_s^{(e)} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} dF^{(e)} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} dF^{(e)} \\
&= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{F^{(e)}} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \nu \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right]_{i,j=1}^{16} dF^{(e)}.
\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

Prikazani karakteristični koeficijent podintegralne matrice krutosti,  $[k_{ij}]_{i,j=1}^{16}$ , linearna je kombinacija produkata drugih derivacija (po  $x$ , po  $y$  i mješovitih drugih derivacija) funkcija oblika. Takve su podintegralne funkcije polinomi čije članove najjednostavnije možemo prikazati Pascalovim trokutom, (slika 9.3.3).



Slika 9.3.3: Prikaz sudjelujućih polinoma u podintegralnim funkcijama  $[k_{ij}]_{i,j=1}^{16}$

Maksimalni stupanj polinoma podintegralne funkcije po nekoj od varijabli je 6 što znači da je za egzaktnu integraciju dovoljno  $4 \times 4 = 16$  točaka integracije. Integracijom podintegralnih funkcija slijedi elementarna matrica krutosti (simetrična, pozitivno definitna) hermitskog bikubičnog konačnog elementa (pravokutnika dimenzija  $L_x \times L_y$ ) koju možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{175L_x L_y} [k_{ij}]_{i,j=1}^{16}, \tag{9.3.20}$$

a članovi matrice, uz  $\alpha = \frac{L_x}{L_y}$ ,  $\beta = \frac{L_y}{L_x}$ ,  $k_{i,j} = k_{j,i}$ , prikazani su u jednadžbi (9.3.21).

$$\begin{aligned}
k_{1,1} = k_{5,5} = k_{9,9} = k_{13,13} &= 780(\alpha^2 + \beta^2) + 504 \\
k_{2,2} = k_{6,6} = k_{10,10} = k_{14,14} &= (20\alpha^2 + 260\beta^2 + 56)L_x^2 \\
k_{3,3} = k_{7,7} = k_{11,11} = k_{15,15} &= (20\beta^2 + 260\alpha^2 + 56)L_y^2 \\
k_{4,4} = k_{8,8} = k_{12,12} = k_{16,16} &= (60\alpha^2 + 60\beta^2 + 56)\frac{L_x^2 L_y^2}{9} \\
k_{1,5} = k_{9,13} &= 270\alpha^2 - 780\beta^2 - 504 \\
k_{1,13} = k_{5,9} &= 270\beta^2 - 780\alpha^2 - 504 \\
k_{1,9} = k_{5,13} &= 504 - 270(\alpha^2 + \beta^2) \\
k_{1,2} = -k_{5,6} = -k_{9,10} = k_{13,14} &= (110\alpha^2 + 390\beta^2 + 42 + 210\nu)L_x \\
k_{1,3} = k_{5,7} = -k_{9,11} = -k_{13,15} &= (110\beta^2 + 390\alpha^2 + 42 + 210\nu)L_y \\
k_{1,4} = -k_{5,8} = k_{9,12} = -k_{13,16} &= (110\alpha^2 + 110\beta^2 + 7 + 70\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,3} = -k_{6,7} = k_{10,11} = -k_{14,15} &= (110\alpha^2 + 110\beta^2 + 7 + 420\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,4} = k_{6,8} = -k_{10,12} = -k_{14,16} &= (30\alpha^2 + 110\beta^2 + 14 + 70\nu)\frac{L_x^2 L_y}{3} \\
k_{3,4} = -k_{7,8} = -k_{11,12} = k_{15,16} &= (30\beta^2 + 110\alpha^2 + 14 + 70\nu)\frac{L_x L_y^2}{3} \\
k_{1,6} = -k_{2,5} = -k_{9,14} = k_{10,13} &= (390\beta^2 - 65\alpha^2 + 42)L_x \\
k_{1,15} = k_{5,11} = -k_{7,9} = -k_{3,13} &= (390\alpha^2 - 65\beta^2 + 42)L_y \\
k_{1,7} = k_{3,5} = -k_{9,15} = -k_{11,13} &= (135\alpha^2 - 110\beta^2 - 42 - 210\nu)L_y \\
k_{1,14} = k_{2,13} = -k_{6,9} = -k_{5,10} &= (135\beta^2 - 110\alpha^2 - 42 - 210\nu)L_x \\
k_{1,10} = -k_{2,9} = -k_{5,14} = k_{6,13} &= (65\alpha^2 + 135\beta^2 - 42)L_x \\
k_{1,11} = -k_{3,9} = k_{5,15} = -k_{7,13} &= (65\beta^2 + 135\alpha^2 - 42)L_y \\
k_{1,8} = -k_{4,5} = k_{9,16} = -k_{12,13} &= (110\beta^2 - 65\alpha^2 + 7 + 35\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{1,16} = -k_{5,12} = k_{8,9} = -k_{4,13} &= (110\alpha^2 - 65\beta^2 + 7 + 35\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{1,12} = -k_{5,16} = k_{4,9} = -k_{8,13} &= (7 - 65\alpha^2 - 65\beta^2)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,6} = k_{10,14} &= (130\beta^2 - 15\alpha^2 - 14)L_x^2 \\
k_{3,15} = k_{7,11} &= (130\alpha^2 - 15\beta^2 - 14)L_y^2 \\
k_{2,14} = k_{6,10} &= (90\beta^2 - 20\alpha^2 - 56)L_x^2 \\
k_{3,7} = k_{11,15} &= (90\alpha^2 - 20\beta^2 - 56)L_y^2 \\
k_{2,7} = -k_{3,6} = k_{10,15} = -k_{11,14} &= (65\alpha^2 - 110\beta^2 - 7 - 35\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,15} = -k_{6,11} = -k_{3,14} = k_{7,10} &= (110\alpha^2 - 65\beta^2 + 7 + 35\nu)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,11} = k_{3,10} = -k_{6,15} = -k_{7,14} &= (65\alpha^2 + 65\beta^2 - 7)\frac{L_x L_y}{2} \\
k_{2,10} = k_{6,14} &= (15\alpha^2 + 45\beta^2 + 14)L_x^2 \\
k_{3,11} = k_{7,15} &= (15\beta^2 + 45\alpha^2 + 14)L_y^2 \\
k_{2,8} = k_{4,6} = -k_{10,16} = -k_{12,14} &= (110\beta^2 - 45\alpha^2 - 7 - 35\nu)\frac{L_x^2 L_y}{6} \\
k_{3,16} = k_{4,15} = -k_{7,12} = -k_{8,11} &= (110\alpha^2 - 45\beta^2 - 7 - 35\nu)\frac{L_x L_y^2}{6} \\
k_{2,16} = -k_{4,14} = k_{6,12} = -k_{8,10} &= (30\alpha^2 - 65\beta^2 + 14)\frac{L_x^2 L_y}{3} \\
k_{3,8} = -k_{4,7} = -k_{11,16} = k_{12,15} &= (30\beta^2 - 65\alpha^2 + 14)\frac{L_x L_y^2}{3} \\
k_{4,10} = -k_{2,12} = -k_{6,16} = k_{8,14} &= (45\alpha^2 + 65\beta^2 + 7)\frac{L_x^2 L_y}{6} \\
k_{4,11} = -k_{3,12} = k_{7,16} = -k_{8,15} &= (45\beta^2 + 65\alpha^2 + 7)\frac{L_x L_y^2}{6} \\
k_{4,8} = k_{12,16} &= (30\beta^2 - 45\alpha^2 - 14)\frac{L_x^2 L_y^2}{9} \\
k_{4,16} = k_{8,12} &= (30\alpha^2 - 45\beta^2 - 14)\frac{L_x^2 L_y^2}{9} \\
k_{4,12} = k_{8,16} &= (7 - 45\alpha^2 - 45\beta^2)\frac{L_x L_y^2}{18}
\end{aligned} \tag{9.3.21}$$

### 9.3.5. Uklapanje elementarnih matrica krutosti ploče uz hermitski bikubični konačni element

Matrica krutosti ploče slijedi uklapanjem elementarnih matrica krutosti konačnih elemenata definiranih podjelom ploče. Neka rješavamo pravokutnu ploču tlocrtnih dimenzija  $L_x \times L_y$  koju podijelimo na  $n_x \times n_y$  konačnih elemenata. To znači da imamo  $(n_x + 1) \times (n_y + 1)$  čvorova konačnih elemenata i  $4(n_x + 1) \times (n_y + 1)$  nepoznanica. Uobičajeno je numerirati čvorove sustavno u smjeru koordinatnih osi. Ako uzmemo da s numeriranjem čvorova i elemenata krenemo u smjeru osi  $x$  onda imamo  $n_y + 1$  redaka s  $n_x + 1$  čvorova i  $n_y$  redaka s  $n_x$  elemenata, odnosno  $n_x + 1$  stupaca s  $n_y + 1$  čvorova i  $n_x$  stupaca s  $n_y$  elemenata.

U prvom retku čvorova čvorovi su označeni od 1 do  $n_x + 1$ . U svakom sljedećem retku na istom stupcu slijedi čvor označen za  $n_x + 1$  više u odnosu na prethodni redak. Čvor u istom retku u sljedećem stupcu ima oznaku za jedan veću u odnosu na prethodni stupac. Općenito, čvor na presjeku  $i$ -tog stupca i  $j$ -tog retka čvorova ima oznaku  $(j - 1)(n_x + 1) + i, i = 1, \dots, n_x + 1, j = 1, \dots, n_y + 1$ . U prvom retku elemenata elementi su označeni od 1 do  $n_x$ , a u svakom sljedećem retku element na istom stupcu ima oznaku za  $n_x$  veću od elementa u prethodnom retku. Element u istom retku u sljedećem stupcu ima oznaku za jedan veću u odnosu na prethodni stupac. Općenito, element u  $i$ -tom stupcu i  $j$ -tom retku ima oznaku  $(j - i)n_x + i, i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y$ . Prema tako definiranom označavanju čvorova i elemenata čvorovi prethodno spomenutog elementa ( $i$ -ti stupac,  $j$ -ti redak) definirani su oznakama  $(j - 1)(n_x + 1) + i, (j - 1)(n_x + 1) + i + 1, j(n_x + 1) + i + 1, j(n_x + 1) + i$ . Hermitski bikubični konačni element ima 4 nepoznanice u svakom čvoru što znači da čvor s oznakom  $s$  sadrži nepoznanice  $4s - 3, 4s - 2, 4s - 1, 4s$ .

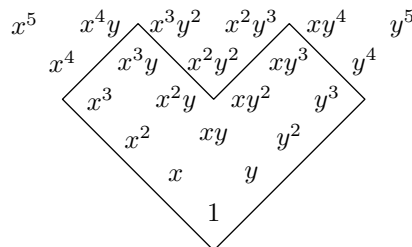
Ako pretpostavimo jednaku podjelu u oba smjera,  $n_x = n_y = n$  onda prethodno spomenuti element ima oznaku  $(j - 1)n + i$ , a čvorovi tog elementa su  $(j - 1)(n + 1) + i, (j - 1)(n + 1) + i + 1, j(n + 1) + i + 1, j(n + 1) + i$ . Takvom numeracijom možemo odrediti potrebnu širinu matrice sustava za smanjenje proračunske memorije i broja proračunskih operacija kod rješavanja sustava jednačbi. Prema takvom sustavu možemo uočiti da donji lijevi čvor sadrži nepoznanice  $4[(j - 1)(n + 1) + i] - 3, \dots, 4[(j - 1)(n + 1) + i]$ , a gornji desni čvor sadrži nepoznanice  $4[j(n + 1) + i + 1] - 3, \dots, 4[j(n + 1) + i + 1]$ . Iz toga jasno slijedi da maksimalna razlika u numeraciji nepoznanica unutar jednog konačnog elementa iznosi  $4[j(n + 1) + i + 1] - \{4[(j - 1)(n + 1) + i] - 3\} = 4n + 11$ . To znači da je širina vrpce matrice sustava jednaka  $8n + 23$  (dijagonala i  $4n + 11$  paralela s dijagonalom sa svake strane. Uzimajući u obzir simetričnost matrice sustava dovoljno je spremiti matricu dimenzije  $(4n + 12) \times 4(n + 1)^2$ .

### 9.3.6. Nekonformni pravokutni konačni element sa 12 stupnjeva slobode

Nekonformni pravokutni konačni element sa 12 stupnjeva najjednostavniji je pravokutni konačni element za rješavanje jednačbe savijanja tanke ploče. Vrijednost funkcije progiba na pojedinom konačnom elementu, određena je sa 12 parametara. Progib ploče na konačnom elementu aproksimiran je potpunim kubičnim polinomom po  $x$  i po  $y$  uz dodatna dva člana iz polinoma četvrtog stupnja,  $x^3y$  i  $xy^3$ ,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3 \\ &= \mathbf{\Phi} \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (9.3.22)$$

uz  $\mathbf{\Phi} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]$  i  $\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_{12}]^T$ . Prikaz članova koji ulaze u sumaciju za taj konačni element možemo prikazati i na Pascalovom trokutu, (slika 9.3.4). Nепrekidnost



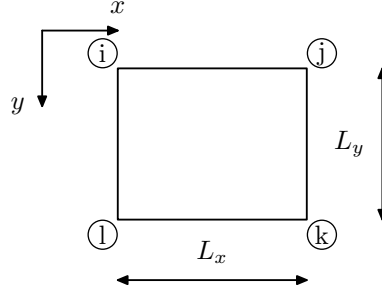
Slika 9.3.4: Prikaz sudjelujućih polinoma na Pascalovom trokutu

kuteva zaokreta i mješovite derivacije duž stranice pravokutnika izravna je posljedica kubične razdiobe zaokreta duž stranice. Jedinstvenost funkcije zaokreta i mješovite derivacije osigurana je zbog četiri uvjeta na stranici, zaokreti i mješovite derivacije u čvorovima. Nedostatak ovog elementa je što to

ne vrijedi kod proizvoljnih četverokutnih elemenata nego isključivo kod pravokutnih elemenata. Kod proizvoljnih četverokutnih elemenata potrebno je još u svakom čvoru uzeti i druge derivacije u oba smjera kao nepoznanice.

### 9.3.7. Diskretizacija polja pomaka nekonformnog pravokutnog konačnog elementa

Promatramo pravokutni konačni element  $(e) = [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Vrijednost funkcije u bilo kojoj točki



Slika 9.3.5: Nekonformni pravokutni konačni element

$(x, y)$  elementa  $(e)$  interpolirana je linearnom kombinacijom progiba  $w^\alpha$ , derivacija po  $x$ ,  $w_x^\alpha$  i derivacijama po  $y$ ,  $w_y^\alpha$  u čvorovima elementa,

$$\begin{aligned} w(x, y) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} &= N_1(x, y)w^i + N_2(x, y)w_x^i + N_3(x, y)w_y^i \\ &+ N_4(x, y)w^j + N_5(x, y)w_x^j + N_6(x, y)w_y^j \\ &+ N_7(x, y)w^k + N_8(x, y)w_x^k + N_9(x, y)w_y^k \\ &+ N_{10}(x, y)w^l + N_{11}(x, y)w_x^l + N_{12}(x, y)w_y^l. \end{aligned} \quad (9.3.23)$$

Za dobivanje funkcija oblika potrebno je provesti nekoliko algebarskih operacija. Vektor nepoznatih pomaka i pripadnih derivacija u bilo kojoj točki konačnog elementa možemo prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} w \\ w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}, \quad (9.3.24)$$

odnosno u matričnom zapisu  $\mathbf{w} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ , pri čemu je  $\mathbf{w}$  vektor nepoznatih pomaka i derivacija u točki konačnog elementa,  $\mathbf{S}$  matrica baznih polinoma za pomake i derivacije, a  $\mathbf{a}$  vektor nepoznatih koeficijenata polinoma aproksimacije, (9.3.22). Vektor nepoznatih pomaka i derivacija, (9.3.24), možemo izraziti za vrijednosti pomaka i derivacija u čvorovima konačnog elementa

$$\mathbf{w}_i^{(e)} = \mathbf{C}_i \mathbf{a}, \quad (9.3.25)$$

uz definiranu matricu  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & y_i & 0 & 3x_i^2 & 2x_i y_i & y_i^2 & 0 & 3x_i^2 y_i & y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \end{bmatrix}. \quad (9.3.26)$$

Uz definiranu matricu  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_i]_{i=1}^4$  i (9.2.1) slijedi

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{C} \mathbf{a}. \quad (9.3.27)$$

Vektor nepoznatih koeficijenata polinomijalne razdiobe sada slijedi iz odnosa

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}^{(e)}. \quad (9.3.28)$$

Progib u proizvoljnoj točki konačnog elementa sada iznosi

$$w(x, y) = \Phi \mathbf{a} = \Phi \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (9.3.29)$$

gdje je  $\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}^{-1}$  vektor funkcija oblika za nekomformni pravokutni konačni element sa 12 stupnjeva slobode koje glase na jediničnom kvadratu ( $[0, 1] \times [0, 1]$  u koordinatnom sustavu  $\xi\eta$ ), i na proizvoljnom pravokutnom elementu  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  u standardnom koordinatnom sustavu,

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \\
N_2(\xi, \eta) &= \xi - 2\xi^2 - \xi\eta + \xi^3 + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta \\
N_3(\xi, \eta) &= \eta - \xi\eta - 2\eta^2 + \eta^3 + 2\xi\eta^2 - \xi\eta^3 \\
N_4(\xi, \eta) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 \\
N_5(\xi, \eta) &= -\xi^2 + \xi^3 + \xi^2\eta - \xi^3\eta \\
N_6(\xi, \eta) &= \xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3 \\
N_7(\xi, \eta) &= -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \\
N_8(\xi, \eta) &= -\xi^2\eta + \xi^3\eta \\
N_9(\xi, \eta) &= -\xi\eta^2 + \xi\eta^3 \\
N_{10}(\xi, \eta) &= \xi\eta + 3\eta^2 - 2\eta^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 \\
N_{11}(\xi, \eta) &= \xi\eta - 2\xi^2\eta + \xi^3\eta \\
N_{12}(\xi, \eta) &= -\eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3
\end{aligned} \tag{9.3.30}$$

i na proizvoljnom pravokutnom elementu  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  u standardnom koordinatnom sustavu,

$$\begin{aligned}
N_1(x, y) &= 1 - \frac{x}{L_x} \frac{y}{L_y} - \left( \frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3} \right) \left( 1 - \frac{y}{L_y} \right) - \left( 1 - \frac{x}{L_x} \right) \left( \frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3} \right) \\
N_2(x, y) &= \left( x - \frac{2x^2}{L_x} + \frac{x^3}{L_x^3} \right) \left( 1 - \frac{y}{L_y} \right) \\
N_3(x, y) &= \left( 1 - \frac{x}{L_x} \right) \left( y - \frac{2y^2}{L_y} + \frac{y^3}{L_y^3} \right) \\
N_4(x, y) &= \left( \frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3} \right) \left( 1 - \frac{y}{L_y} \right) - \frac{x}{L_x} \left( \frac{y}{L_y} - \frac{3y^2}{L_y^2} + \frac{2y^3}{L_y^3} \right) \\
N_5(x, y) &= \left( \frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2} \right) \left( 1 - \frac{y}{L_y} \right) \\
N_6(x, y) &= \frac{x}{L_x} \left( y - \frac{2y^2}{L_y} + \frac{y^3}{L_y^3} \right) \\
N_7(x, y) &= \frac{x}{L_x} \left( \frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3} \right) + \left( \frac{3x^2}{L_x^2} - \frac{2x^3}{L_x^3} \right) \frac{y}{L_y} - \frac{x}{L_x} \frac{y}{L_y} \\
N_8(x, y) &= \left( \frac{x^3}{L_x^3} - \frac{x^2}{L_x^2} \right) \frac{y}{L_y} \\
N_9(x, y) &= \frac{x}{L_x} \left( \frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2} \right) \\
N_{10}(x, y) &= \left( \frac{x}{L_x} - \frac{3x^2}{L_x^2} + \frac{2x^3}{L_x^3} \right) \frac{y}{L_y} - \left( 1 - \frac{x}{L_x} \right) \left( \frac{3y^2}{L_y^2} - \frac{2y^3}{L_y^3} \right) \\
N_{11}(x, y) &= \left( x - \frac{2x^2}{L_x} + \frac{x^3}{L_x^3} \right) \frac{y}{L_y} \\
N_{12}(x, y) &= \left( 1 - \frac{x}{L_x} \right) \left( \frac{y^3}{L_y^3} - \frac{y^2}{L_y^2} \right)
\end{aligned} \tag{9.3.31}$$

Prijelaz s jediničnog kvadrata na pravokutni konačni element ( $e$ ) čije su stranice paralelne osima  $x$  i  $y$  duljina  $L_x$  i  $L_y$ , ne predstavlja značajan problem. Potrebno je još temeljne interpolacijske funkcije uz prve derivacije pomnožiti s pripadnim korakom mreže  $L_x, L_y$  radi kompatibilnosti rješenja.

Uvrštavanjem definirane razdiobe polja pomaka, (9.3.23), u diskretizirani oblik vektora deformacije savijanja ploče, (9.2.7), slijedi operatorska matrica polja deformacije savijanja ploče, (dimenzije  $3 \times 12$ ),

$$\boldsymbol{\kappa}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \cdots & -2\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \tag{9.3.32}$$

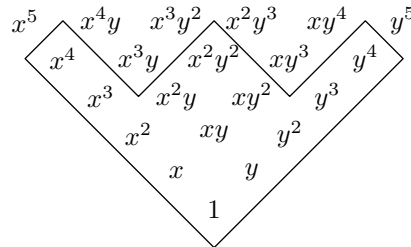


### 9.3.8. Elementarna matrica krutosti nekonformnog pravokutnog konačnog elementa sa 12 stupnjeva slobode

Elementarna matrica krutosti nekonformnog pravokutnog konačnog elementa sa 12 stupnjeva slobode slijedi iz jednadžbe (9.2.14)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \mathbf{D}_s^{(e)} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} dF^{(e)} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{F^{(e)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(e)})^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{(e)} dF^{(e)} \\
 &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{F^{(e)}} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right]_{i,j=1}^{12} dF^{(e)}.
 \end{aligned} \tag{9.3.33}$$

Prikazani karakteristični koeficijent podintegralne matrice krutosti,  $[k_{ij}]_{i,j=1}^{12}$ , linearna je kombinacija produkata drugih derivacija (po  $x$ , po  $y$  i mješovitih drugih derivacija) funkcija oblika. Takve su podintegralne funkcije polinomi čije članove najjednostavnije možemo prikazati Pascalovim trokutom, (slika 9.3.6).



Slika 9.3.6: Prikaz sudjelujućih polinoma u podintegralnim funkcijama  $[k_{ij}]_{i,j=1}^{12}$

Maksimalni stupanj polinoma podintegralne funkcije po nekoj od varijabli je 4 što znači da je za egzaktnu integraciju dovoljno  $3 \times 3 = 9$  točaka integracije. Integracijom podintegralnih funkcija slijedi elementarna matrica krutosti (simetrična, pozitivno definitna) nekonformnog pravokutnog konačnog elementa sa 12 stupnjeva slobode (pravokutnika dimenzija  $L_x \times L_y$ ) koju možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{30L_xL_y} [k_{i,j}]_{i,j=1}^{12}, \tag{9.3.34}$$

a članovi matrice, uz  $\alpha = \frac{L_x}{L_y}$ ,  $\beta = \frac{L_y}{L_x}$ ,  $k_{i,j} = k_{j,i}$ , prikazani su u jednadžbi (9.3.35).

$$\begin{aligned}
k_{1,1} = k_{4,4} = k_{7,7} = k_{10,10} &= 120\alpha^2 + 120\beta^2 + 84 - 24\nu \\
k_{2,2} = k_{5,5} = k_{8,8} = k_{11,11} &= (40\beta^2 + 8 - 8\nu)L_x^2 \\
k_{3,3} = k_{6,6} = k_{9,9} = k_{12,12} &= (40\alpha^2 + 8 - 8\nu)L_y^2 \\
\\
k_{1,2} = -k_{4,5} = -k_{7,8} = k_{10,11} &= (60\beta^2 + 6 + 24\nu)L_x \\
k_{1,3} = k_{4,6} = -k_{7,9} = -k_{10,12} &= (60\alpha^2 + 6 + 24\nu)L_y \\
k_{2,3} = -k_{5,6} = k_{8,9} = -k_{11,12} &= 30L_xL_y\nu \\
k_{2,6} = k_{2,9} = k_{2,12} &= 0 \\
k_{3,5} = k_{3,8} = k_{3,11} &= 0 \\
k_{5,9} = k_{5,12} = k_{9,11} &= 0 \\
k_{6,8} = k_{6,11} = k_{8,12} &= 0 \\
\\
k_{1,4} = k_{7,10} &= 60\alpha^2 - 120\beta^2 - 84 + 24\nu \\
k_{1,10} = k_{4,7} &= 60\beta^2 - 120\alpha^2 - 84 + 24\nu \\
k_{1,7} = k_{4,10} &= 84 - 60\alpha^2 - 60\beta^2 - 120\nu \tag{9.3.35} \\
\\
k_{1,5} = -k_{2,4} = -k_{7,11} = k_{8,10} &= (60\beta^2 + 6 - 6\nu)L_x \\
k_{1,12} = k_{4,9} = -k_{6,7} = -k_{3,10} &= (60\alpha^2 + 6 - 6\nu)L_y \\
k_{1,6} = k_{3,4} = -k_{7,12} = -k_{9,10} &= (30\alpha^2 - 6 - 24\nu)L_y \\
k_{1,11} = k_{2,10} = -k_{5,7} = -k_{4,8} &= (30\beta^2 - 6 - 24\nu)L_x \\
k_{1,8} = -k_{2,7} = -k_{4,11} = k_{5,10} &= (30\beta^2 - 6 + 6\nu)L_x \\
k_{1,9} = -k_{3,7} = k_{4,12} = -k_{6,10} &= (30\alpha^2 - 6 + 6\nu)L_y \\
\\
k_{2,5} = k_{8,11} &= (20\beta^2 - 2 + 2\nu)L_x^2 \\
k_{3,12} = k_{6,9} &= (20\alpha^2 - 2 + 2\nu)L_y^2 \\
k_{2,8} = k_{5,11} &= (10\beta^2 + 2 - 2\nu)L_x^2 \\
k_{3,9} = k_{6,12} &= (10\alpha^2 - 2 + 2\nu)L_y^2 \\
k_{2,11} = k_{5,8} &= (20\beta^2 - 8 + 8\nu)L_x^2 \\
k_{3,6} = k_{9,12} &= (20\alpha^2 - 8 + 8\nu)L_y^2
\end{aligned}$$

### 9.3.9. Uklapanje elementarnih matrica krutosti ploče uz pravokutni konačni element sa 12 stupnjeva slobode

Matrica krutosti ploče slijedi uklapanjem elementarnih matrica krutosti konačnih elemenata definiranih podjelom ploče. Neka rješavamo pravokutnu ploču tlocrtnih dimenzija  $L_x \times L_y$  koju podijelimo na  $n \times n$  konačnih elemenata. To znači da imamo  $(n+1) \times (n+1)$  čvorova konačnih elemenata i  $4(n+1)^2$  nepoznanica.

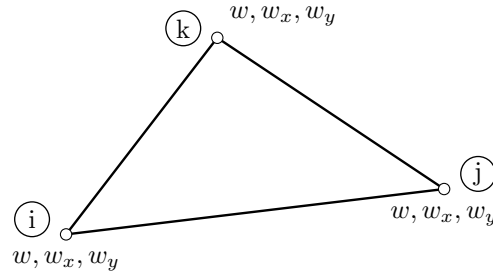
Numeracijom čvorova u smjeru koordinatnih osi slijedi da element u  $i$ -tom stupcu i  $j$ -tom retku ima oznaku  $(j-i)n+1$ . Čvorovi tog elementa definirani su oznakama  $(j-1)(n+1)+i$ ,  $(j-1)(n+1)+i+1$ ,  $j(n+1)+i+1$ ,  $j(n+1)+i$ . Ovaj konačni element ima 3 nepoznanice u svakom čvoru što znači da čvor s oznakom  $s$  sadrži nepoznanic  $3s-2$ ,  $3s-1$ ,  $3s$ .

Prema takvom sustavu možemo uočiti da gornji lijevi čvor sadrži nepoznanice  $3[(j-1)(n+1)+i]+1, \dots, 3[(j-1)(n+1)+i]+3$ , a donji desni čvor sadrži nepoznanice  $3[j(n+1)+i+1]+1, \dots, 3[j(n+1)+i+1]+3$ . Iz toga jasno slijedi da maksimalna razlika u numeraciji nepoznanica unutar jednog konačnog elementa iznosi  $3[j(n+1)+i+1]+3 - \{3[(j-1)(n+1)+i]+1\} = 3n+8$ . Uzimajući u obzir simetričnost matrice sustava dovoljno je spremiti matricu dimenzije  $(3n+9) \times 3(n+1)^2$ .

## 9.4. Osnovni nekomforni trokutni konačni element

### 9.4.1. Trokutni konačni element sa 9 stupnjeva slobode

Trokutni konačni element sa 9 stupnjeva slobode je nekonformni element za rješavanje jednadžbe ploče. Vrijednost funkcije na pojedinom konačnom elementu određena je sa 9 parametara.



Slika 9.4.7: Trokutni konačni element

### 9.4.2. Diskretizacija polja pomaka trokutnog konačnog elementa

Vrijednost funkcije progiba u bilo kojoj točki trokutnog konačnog elementa interpolirana je linearnom kombinacijom vrijednosti funkcije progiba,  $w^i, w^j, w^k$ , derivacije po  $x$ ,  $w_x^i, w_x^j, w_x^k$ , i derivacije po  $y$ ,  $w_y^i, w_y^j, w_y^k$ , u čvorovima, vrhovima trokuta

$$\begin{aligned} w(x, y) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} &= N_1 w^i + N_2 w_x^i + N_3 w_y^i \\ &+ N_4 w^j + N_5 w_x^j + N_6 w_y^j \\ &+ N_7 w^k + N_8 w_x^k + N_9 w_y^k. \end{aligned} \quad (9.4.36)$$

Interpolacijske funkcije u površinskom koordinatnom sustavu glase

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1^2(3 - 2L_1) + 2L_1L_2L_3, & N_2 &= L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3, & N_3 &= L_1^2L_3 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3, \\ N_4 &= L_2^2(3 - 2L_2) + 2L_1L_2L_3, & N_5 &= L_2^2(L_2 - 1) - L_1L_2L_3, & N_6 &= L_2^2L_3 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3, \\ N_7 &= L_3^2(3 - 2L_3) + 2L_1L_2L_3, & N_8 &= L_2L_3^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3, & N_9 &= L_3^2(L_3 - 1) - L_1L_2L_3. \end{aligned} \quad (9.4.37)$$

Kod raspisivanja u Kartezijevom koordinatnom sustavu, zbog jednostavnije provedbe postupka, interpolacijske funkcije definiramo u sustavu  $\xi\eta$  na "jedinичnom" trokutu (pravokutni trokut s jedinичnim katetama). Interpolacijske funkcije na takvom trokutu glase

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 - 4\xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 4\xi^2\eta + 4\xi\eta^2 + 2\eta^3, \\ N_2 &= \xi - 2\xi^2 - \frac{3}{2}\xi\eta + \xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi\eta^2, \\ N_3 &= \eta - \frac{3}{2}\xi\eta - 2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{3}{2}\xi\eta^2 + \eta^3, \\ N_4 &= 3\xi^2 + 2\xi\eta - 2\xi^3 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2, \\ N_5 &= -\xi^2 - \xi\eta + \xi^3 + \xi^2\eta + \xi\eta^2, \\ N_6 &= \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{2}\xi^2\eta - \frac{1}{2}\xi\eta^2, \\ N_7 &= 2\xi\eta + 3\eta^2 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 - 2\eta^3, \\ N_8 &= \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\xi\eta^2, \\ N_9 &= -\xi\eta - \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 + \eta^3. \end{aligned} \quad (9.4.38)$$

Uvrštavanjem definirane razdiobe polja pomaka, (9.4.36), u diskretizirani oblik vektora deformacije savijanja ploče, (9.2.7), slijedi operatorska matrica polja deformacije savijanja ploče, (dimenzije  $3 \times 9$ ),

$$\boldsymbol{\kappa}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_9}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_9}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \dots & -2\frac{\partial^2 N_9}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (9.4.39)$$

### 9.4.3. Elementarna matrica krutosti nekonformnog trokutnog konačnog elementa sa 9 stupnjeva slobode

Kod drugog pristupa promatramo pripadni raspisani integral

$$I = \int \int_{(e)} [w_{xx}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + 2(1 - \nu)w_{xy}^2] dx dy.$$

Kako je jedinični trokutni element definiran u koordinatnom sustavu  $(\xi, \eta)$  potrebno je raspisati ovisnost drugih parcijalnih derivacija u pojedinim koordinatnim sustavima koje tada glase

$$\begin{aligned}w_{xx} &= w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2, \\w_{xy} &= w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y, \\w_{yy} &= w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih derivacija i pojednostavljenjem slijedi

$$\begin{aligned}I &= \int_{(e)} [w_{xx}^2 + 2\nu w_{xx}w_{yy} + w_{yy}^2 + 2(1-\nu)w_{xy}^2] dx dy \\ &= \int_{(e)} [a_1 w_{\xi\xi}^2 + a_2 w_{\xi\xi}w_{\xi\eta} + a_3 w_{\xi\xi}w_{\eta\eta} + a_4 w_{\xi\eta}^2 + a_5 w_{\xi\eta}w_{\eta\eta} + a_6 w_{\eta\eta}^2] d\xi d\eta,\end{aligned}$$

gdje su koeficijenti  $a_i$  jednaki

$$\begin{aligned}a_1 &= (\xi_x^2 + \xi_y^2)^2 J \\ a_2 &= 4(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)(\xi_x^2 + \xi_y^2) J \\ a_3 &= 2[(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)^2 + \nu(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2] J \\ a_4 &= [4(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)^2 + 2(1-\nu)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2] J \\ a_5 &= 4(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)(\eta_x^2 + \eta_y^2) J \\ a_6 &= (\eta_x^2 + \eta_y^2)^2 J.\end{aligned}$$

Ako uvrstimo izraze za parcijalne derivacije  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  i uvedemo oznake  $x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j$  slijedi

$$\begin{aligned}a_1 &= (x_{31}^2 + y_{31}^2)^2 / J^3 \\ a_2 &= -4(x_{21}x_{31} + y_{21}y_{31})(x_{31}^2 + y_{31}^2) / J^3 \\ a_3 &= 2[(x_{21}x_{31} + y_{21}y_{31})^2 + \nu J^2] / J^3 \\ a_4 &= [4(x_{21}x_{31} + y_{21}y_{31})^2 + 2(1-\nu)J^2] / J^3 \\ a_5 &= -4(x_{21}x_{31} + y_{21}y_{31})(x_{21}^2 + y_{21}^2) / J^3 \\ a_6 &= (x_{21}^2 + y_{21}^2)^2 / J^3.\end{aligned}$$

Uočljivo je da se u svim koeficijentima javljaju samo 3 različita izraza u zagradama, čime je ubrzan i pojednostavljen proračun koeficijenata. Pogotovo je proračun pojednostavljen ako je mreža konačnih elemenata takva da su elementi pravokutni trokuti čije su stranice duljine  $a$  i  $b$  paralelne osima  $x$  i  $y$ . Tada su koeficijenti jednaki

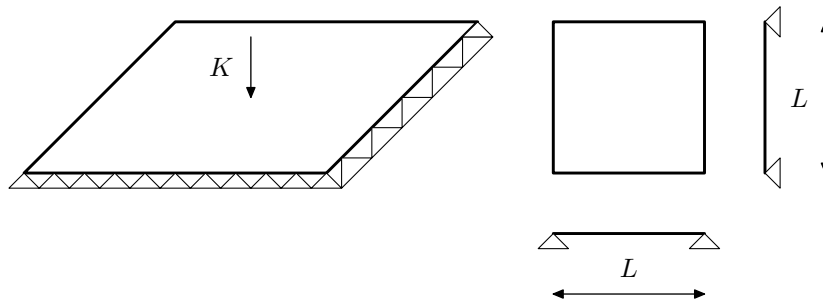
$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{b}{a^3}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2\nu}{ab}, \\ a_4 &= \frac{2(1-\nu)}{ab}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{a}{b^3}.\end{aligned}$$

Elementarnu matricu krutosti tako možemo dobiti kao linearnu kombinaciju 6 osnovnih matrica, koje je tijekom proračuna dovoljno jednom izračunati. Elementi osnovnih matrica su racionalni brojevi tako da se matrica može zapisati kao matrica s cjelobrojnim elementima i zajedničkim nazivnikom.

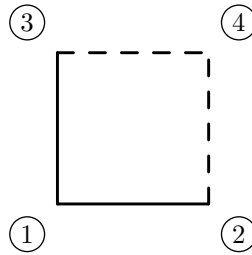
## 9.5. Primjeri

**Primjer 9.5.1.** *Zadana je slobodno oslonjena kvadratna ploča ( $L_x = L_y = L$ ), debljine  $d$ , s pripadnim modulom elastičnosti  $E$  i Poissonovim koeficijentom jednakim nuli,  $\nu = 0$ . Ploča je opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini ploče. Potrebno je odrediti progib i moment u sredini ploče. Analitička vrijednost progiba u sredini ploče iznosi  $w = 0.0116004 \frac{KL^2}{D}$ .*

Prvo rješenje odredit ćemo hermitskim bikubičnim konačnim elementom sa 16 stupnjeva slobode. Ploču možemo podijeliti na četiri jednaka konačna elementa, a zbog simetrije možemo promatrati samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element. Uz rubne uvjete, progib točaka na slobodno oslonjenog ruba jednak je nuli i derivacija u smjeru slobodno oslonjenog ruba jednaka je nuli, u osi simetrije definiramo i pripadne uvjete simetrije,  $w_{xy} = 0$ , mješovita derivacija jednaka je nuli i  $w_{\perp} = 0$ , derivacija



Slika 9.5.1.1: Slobodno oslonjena kvadratna ploča



Slika 9.5.1.2: Četvrtina ploče, jedan konačni element

okomito na rub jednaka je nuli. To znači da kad promatramo četvrtinu ploče kao jedan konačni element umjesto 16 nepoznanica imamo samo 4 nepoznanice. Sve ostale veličine jednake su nuli,

$$w^1 = w_x^1 = w_y^1 = w^2 = w_x^2 = w_{xy}^2 = w_x^3 = w_y^3 = w_{xy}^3 = w_x^4 = w_y^4 = w_{xy}^4 = 0, \quad (9.5.1.1)$$

a nepoznanice su mješovita derivacija  $w_{xy}^1$ , kutevi zaokreta  $w_y^2$  i  $w_x^3$  te progib  $w^4$ . U potpoglavlju 9.3.4. definirana je matrica krutosti hermitskog bikubičnog konačnog elementa sa 16 stupnjeva slobode. Uz definirane uvjete simetrije, uzimanjem u obzir četvrtine ploče,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{2}$ , i zadanih fizikalnih i geometrijskih karakteristika,  $D = \frac{Ed^3}{12}$ , sustav jednačnji glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{44L^2}{1575} & \frac{L}{50} & \frac{L}{50} & -\frac{123}{350} \\ \frac{L}{50} & \frac{48}{25} & -\frac{123}{350} & -\frac{734}{175L} \\ \frac{L}{50} & -\frac{123}{350} & \frac{48}{25} & -\frac{734}{175L} \\ -\frac{123}{350} & -\frac{734}{175L} & -\frac{734}{175L} & \frac{8256}{175L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xy}^1 \\ w_y^2 \\ w_x^3 \\ w^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{4} \end{bmatrix}. \quad (9.5.1.2)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.0110779 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.1.3)$$

Podjelom četvrtine ploče na četiri konačna elementa,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{4}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.0114714 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.1.4)$$

Podjelom četvrtine ploče na šesnaest konačnih elemenata,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{8}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.0115687 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.1.5)$$

Dobivene numeričke rezultate možemo iskazati u tablično uz prikaz pripadnog odstupanja od analitičkog rješenja, (Tablica 9.5.1.2).

Tablica 9.5.1.2: Progib u sredini ploče

$L^{(e)}$	$\frac{w(L/2, L/2)}{\frac{KL^2}{D}}$	err. %
$L/2$	0.0110779	4.504
$L/4$	0.0114714	1.112
$L/8$	0.0115687	0.273

Ako zadatak rješavamo pravokutnim konačnim elementom sa 12 stupnjeva slobode i promatramo samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element. U osi simetrije definiramo pripadne uvjete simetrije za ovaj konačni element, derivacija okomito na rub jednaka je nuli,  $w_{\perp} = 0$ . To znači da kad promatramo četvrtinu ploču kao jedan konačni element umjesto 12 nepoznanica imamo samo 3 nepoznanice. Sve ostale veličine jednake su nuli,

$$w^1 = w_x^1 = w_y^1 = w^2 = w_x^2 = w^3 = w_y^3 = w_x^4 = w_y^4 = 0, \quad (9.5.1.6)$$

a nepoznanice su kutevi zaokreta  $w_y^2$  i  $w_x^3$  te progib  $w^4$ . U potpoglavlju 9.3.6. definirana je matrica krutosti pravokutnog konačnog elementa sa 12 stupnjeva slobode. Uz definirane uvjete simetrije, uzimanjem u obzir četvrtine ploče,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{2}$ , i zadanih fizikalnih i geometrijskih karakteristika,  $D = \frac{Ed^3}{12}$ , sustav jednadžbi glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & 0 & -\frac{22}{5L} \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{22}{5L} \\ -\frac{22}{5L} & -\frac{22}{5L} & \frac{216}{5L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^2 \\ w_x^3 \\ w^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{4} \end{bmatrix}. \quad (9.5.1.7)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.0131579 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.1.8)$$

**Primjer 9.5.2.** Zadana je slobodno oslonjena kvadratna ploča ( $L_x = L_y = L$ ), debljine  $d$ , s pripadnim modulom elastičnosti  $E$  i Poissonovim koeficijentom jednakim nuli,  $\nu = 0$ . Ploča je opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ . Potrebno je odrediti progib i moment u sredini ploče. Analitička vrijednost progiba u sredini ploče iznosi  $w = 0.00406235 \frac{qL^4}{D}$ .

Ploča je jednaka kao u prethodnom primjeru. Razlika je jedino u zadanom opterećenju. Uz istu podjelu, simetrija, jedan konačni hermitski bikubični konačni element sa 16 stupnjeva slobode, matrica sustava je jednaka jer ne ovisi o promjeni opterećenja. Vektor opterećenja dobijemo kako je definirana u potpoglavlju 9.3.4., pa slijedi sustav jednadžbi glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{44L^2}{1575} & \frac{L}{50} & \frac{L}{50} & -\frac{123}{350} \\ \frac{L}{50} & \frac{48}{25} & -\frac{123}{350} & -\frac{734}{175L} \\ \frac{L}{50} & -\frac{123}{350} & \frac{48}{25} & -\frac{734}{175L} \\ -\frac{123}{350} & -\frac{734}{175L} & -\frac{734}{175L} & \frac{8256}{175L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xy}^1 \\ w_y^2 \\ w_x^3 \\ w^4 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^4}{2304} \\ \frac{L^3}{192} \\ \frac{L^3}{192} \\ \frac{L^2}{16} \end{bmatrix}. \quad (9.5.2.1)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.0041227 \frac{qL^4}{D}. \quad (9.5.2.2)$$

Podjelom četvrtine ploče na četiri konačna elementa,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{4}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.00406533 \frac{qL^4}{D}. \quad (9.5.2.3)$$

Podjelom četvrtine ploče na šesnaest konačnih elemenata,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{8}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.00406253 \frac{qL^4}{D}. \quad (9.5.2.4)$$

Dobivene numeričke rezultate možemo iskazati u tablično uz prikaz pripadnog odstupanja od analitičkog rješenja, (Tablica 9.5.2.0).

Tablica 9.5.2.0: Progib u sredini ploče

$L^{(e)}$	$\frac{w(L/2, L/2)}{\frac{qL^4}{D}}$	err. %
$L/2$	0.00412270	1.486
$L/4$	0.00406533	0.073
$L/8$	0.00406253	0.004

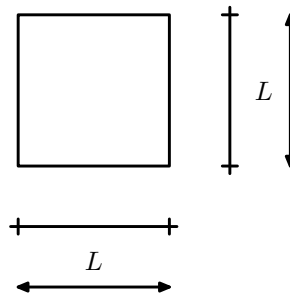
Ako zadatak rješavamo pravokutnim konačnim elementom sa 12 stupnjeva slobode i promatramo samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element, sustav jednačbi glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & 0 & -\frac{22}{5L} \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{22}{5L} \\ -\frac{22}{5L} & -\frac{22}{5L} & \frac{216}{5L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^2 \\ w_x^3 \\ w^4 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{192} \\ \frac{L^3}{192} \\ \frac{L^2}{16} \end{bmatrix}. \quad (9.5.2.5)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.00479715 \frac{qL^4}{D}. \quad (9.5.2.6)$$

**Primjer 9.5.3.** Zadana je upeta kvadratna ploča ( $L_x = L_y = L$ ), debljine  $d$ , s pripadnim modulom elastičnosti  $E$  i Poissonovim koeficijentom jednakim nuli,  $\nu = 0$ . Ploča je opterećena koncentriranom silom  $K$  u sredini ploče. Potrebno je odrediti progib i moment u sredini ploče. Analitička vrijednost progiba u sredini ploče iznosi  $w = 0.005096 \frac{KL^2}{D}$ .



Slika 9.5.3.1: Upeta kvadratna ploča

Prvo rješenje odredit ćemo hermitskim bikubičnim konačnim elementom sa 16 stupnjeva slobode. Ploču možemo podijeliti na četiri jednaka konačna elementa, a zbog simetrije možemo promatrati samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element. Uz rubne uvjete, progib točaka na upetom rubu jednak je nuli, derivacija u smjeru okomito na upeti rub jednaka je nuli i derivacija u smjeru upetog ruba jednaka je nuli, u osi simetrije definiramo i pripadne uvjete simetrije,  $w_{xy} = 0$ , mješovita derivacija jednaka je nuli i  $w_{\perp} = 0$ , derivacija okomito na rub jednaka je nuli. To znači da kad promatramo četvrtinu ploče kao jedan konačni element umjesto 16 nepoznanica imamo samo 2 nepoznanice. Sve ostale veličine jednake su nuli,

$$w^1 = w_x^1 = w_y^1 = w^2 = w_x^2 = w_y^2 = w_{xy}^2 = w_x^3 = w_y^3 = w_{xy}^3 = w_x^4 = w_y^4 = w_{xy}^4 = 0, \quad (9.5.3.1)$$

a nepoznanice su mješovita derivacija  $w_{xy}^1$  i progib  $w^4$ . U potpoglavlju 9.3.4. definirana je matrica krutosti hermitskog bikubičnog konačnog elementa sa 16 stupnjeva slobode. Uz definirane uvjete simetrije, uzimanjem u obzir četvrtine ploče,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{2}$ , i zadanih fizikalnih i geometrijskih karakteristika,  $D = \frac{Ed^3}{12}$ , sustav jednažbi glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{44L^2}{1575} & -\frac{123}{350} \\ -\frac{123}{350} & \frac{8256}{175L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xy}^1 \\ w^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{4} \end{bmatrix}. \quad (9.5.3.2)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.00584709 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.3.3)$$

Podjelom četvrtine ploče na četiri konačna elementa,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{4}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.00562234 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.3.4)$$

Podjelom četvrtine ploče na šesnaest konačnih elemenata,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{8}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.00559736 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.3.5)$$

Ako zadatak rješavamo pravokutnim konačnim elementom sa 12 stupnjeva slobode i promatramo samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element. U osi simetrije definiramo pripadne uvjete simetrije za ovaj konačni element, derivacija okomito na rub jednaka je nuli,  $w_{\perp} = 0$ . To znači da kad promatramo četvrtinu ploču kao jedan konačni element umjesto 12 nepoznanica imamo samo 1 nepoznanicu. Sve ostale veličine jednake su nuli,

$$w^1 = w_x^1 = w_y^1 = w^2 = w_x^2 = w_y^2 = w^3 = w_x^3 = w_y^3 = w^4 = w_x^4 = w_y^4 = 0, \quad (9.5.3.6)$$

a nepoznanice je jedino progib  $w^4$ . U potpoglavlju 9.3.6. definirana je matrica krutosti pravokutnog konačnog elementa sa 12 stupnjeva slobode. Uz definirane uvjete simetrije, uzimanjem u obzir četvrtine ploče,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{2}$ , i zadanih fizikalnih i geometrijskih karakteristika,  $D = \frac{Ed^3}{12}$ , jednažba glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{216}{5L^2} \end{bmatrix} [w^4] = \begin{bmatrix} \frac{K}{4} \end{bmatrix}. \quad (9.5.3.7)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.0057877 \frac{KL^2}{D}. \quad (9.5.3.8)$$

**Primjer 9.5.4.** Zadana je upeta kvadratna ploča ( $L_x = L_y = L$ ), debljine  $d$ , s pripadnim modulom elastičnosti  $E$  i Poissonovim koeficijentom jednakim nuli,  $\nu = 0$ . Ploča je opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ . Potrebno je odrediti progib i moment u sredini ploče. Analitička vrijednost progiba u sredini ploče iznosi  $w = 0.00126532 \frac{qL^4}{D}$ .

Ploča je jednaka kao u prethodnom primjeru. Razlika je jedino u zadanom opterećenju. Uz istu podjelu, simetrija, jedan konačni hermitski bikubični konačni element sa 16 stupnjeva slobode, matrica sustava je jednaka jer ne ovisi o promjeni opterećenja. Vektor opterećenja dobijemo kako je definirana u potpoglavlju 9.3.4., pa slijedi sustav jednažbi glasi

$$D \begin{bmatrix} \frac{44L^2}{1575} & -\frac{123}{350} \\ -\frac{123}{350} & \frac{8256}{175L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xy}^1 \\ w^4 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^4}{2304} \\ \frac{L^2}{16} \end{bmatrix}. \quad (9.5.4.1)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.00158947 \frac{qL^4}{D}. \quad (9.5.4.2)$$



Podjelom četvrtine ploče na četiri konačna elementa,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{4}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.0013218 \frac{qL^4}{D} . \quad (9.5.4.3)$$

Podjelom četvrtine ploče na šesnaest konačnih elemenata,  $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = \frac{L}{8}$ , progib u sredini ploče iznosi

$$\mathbf{w} = 0.00406253 \frac{qL^4}{D} . \quad (9.5.4.4)$$

Dobivene numeričke rezultate možemo iskazati u tablično uz prikaz pripadnog odstupanja od analitičkog rješenja, (Tablica 9.5.4.0 ).

Tablica 9.5.4.0: Progib u sredini ploče

$L^{(e)}$	$\frac{w(L/2, L/2)}{\frac{qL^4}{D}}$	err. %
$L/2$	0.00158947	25.62
$L/4$	0.00132180	4.464
$L/8$	0.00127221	0.545

Ako zadatak rješavamo pravokutnim konačnim elementom sa 12 stupnjeva slobode i promatramo samo četvrtinu ploče odnosno jedan konačni element, jednačba glasi

$$D \left[ \frac{216}{5L^2} \right] [w^4] = \left[ \frac{qL}{16} \right] . \quad (9.5.4.5)$$

Rješenjem sustava slijedi progib u sredini zadane ploče,

$$\mathbf{w} = 0.00144626 \frac{qL^4}{D} . \quad (9.5.4.6)$$

## 10. Gredni konačni element prema Teoriji elastičnosti II. reda

### 10.1. Osnovne jednačbe savijanja grede prema Teoriji elastičnosti II. reda

Pretpostavljamo da je krutost grede na savijanje konstantna po cijeloj duljini grede,  $EI = \text{const.}$  i da je horizontalna sila u gredi konstantna  $H = \text{const.}$  Diferencijalna jednačba savijanja grede prema Teoriji elastičnosti II. reda glasi

$$w'''' - \frac{H}{EI}w'' = \frac{q}{EI} . \quad (10.1.1)$$

Rješenje diferencijalne jednačbe (10.1.1) ovisi o predznaku horizontalne sile  $H$ , (tlak ili vlak). Uz definiranu uzdužnu karakteristiku grede  $h$ , (3.7.14), jednačba glasi

$$w'''' + \frac{h^2}{L^2}w'' = \frac{q}{EI} \quad H < 0 \quad \quad H > 0 \quad \quad w'''' - \frac{h^2}{L^2}w'' = \frac{q}{EI} , \quad (10.1.2)$$

Slaba formulacija rubne zadaće poprečno opterećene grede prema Teoriji elastičnosti II. reda, uz zadane rubne uvjete, glasi

$$R(w, v) = \int_0^L EIw'' \cdot v'' dx + \int_0^L Hw' \cdot v' dx - \int_0^L q \cdot v dx = 0 . \quad (10.1.3)$$

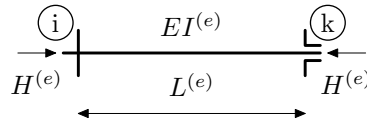
### 10.2. Matrica krutosti tlačnog grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda

#### 10.2.1. Aproksimacija polja pomaka i deformacija

Diferencijalnu jednačbu veze pomaka i opterećenja, (3.7.13), za tlačnu grednu, uz definiranu uzdužnu karakteristiku grede (3.7.14), možemo zapisati u obliku, (10.1.2),

$$w'''' + \frac{h^2}{L^2}w'' = \frac{q}{EI} . \quad (10.2.1)$$

Promatramo grednu, konačni element ( $e$ ), duljine  $L^{(e)}$  i krutosti na savijanje  $EI^{(e)}$ , opterećenu uzdužnom tlačnom silom  $H^{(e)}$ , (Slika 10.2.1). Pripadna uzdužna karakteristika konačnog elementa iznosi  $h^{(e)}$ .



Slika 10.2.1: Tlačno opterećeni konačni element duljine  $L^{(e)}$

Diferencijalna jednačba na promatranom izdvojenom konačnom elementu glasi

$$w'''' + \frac{h^{(e)2}}{L^{(e)2}}w'' = \frac{q}{EI^{(e)}} . \quad (10.2.2)$$

Rješenje pripadne homogene diferencijalne jednačbe glasi

$$w(x) = c_1 + c_2x + c_3 \sin \frac{h^{(e)}x}{L^{(e)}} + c_4 \cos \frac{h^{(e)}x}{L^{(e)}} . \quad (10.2.3)$$

Aproksimacija konačnim elementima znači da tražimo približno rješenje  $\bar{w}(x)$  koje zadovoljava rubne uvjete i princip virtualnog rada. Između svih takvih polja poprečnih pomaka pretpostavimo polje pomaka prema jednačbi (10.2.3). Takvu aproksimaciju možemo prikazati i u obliku

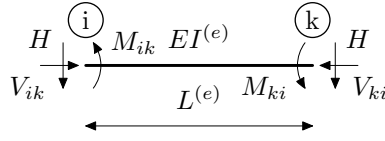
$$w(x) = N_1^{(e)}(x)w_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)w_2^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x)w_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x)w_i^{(e)} , \quad (10.2.4)$$

gdje su  $N_i^{(e)}(x)$  interpolacijske funkcije definirane na konačnom elementu ( $e$ ),  $w_1^{(e)}$  nepoznati pomaci (poprečni pomaci ili zaokreti) čvorova ili aproksimacije tih pomaka. Takvom aproksimacijom slijede razdiobe progibne funkcije, funkcije kuta zaokreta i funkcije deformacije savijanja u obliku,

$$\begin{aligned} w(x) &= N_1^{(e)} w_1 + N_2^{(e)} \varphi_1 + N_3^{(e)} w_2 + N_4^{(e)} \varphi_2, \\ \varphi(x) &= -\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dN_1^{(e)}}{dx} w_1 - \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \varphi_1 - \frac{dN_3^{(e)}}{dx} w_2 - \frac{dN_4^{(e)}}{dx} \varphi_2, \\ \kappa(x) &= -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{d^2 N_1^{(e)}}{dx^2} w_1 - \frac{d^2 N_2^{(e)}}{dx^2} \varphi_1 - \frac{d^2 N_3^{(e)}}{dx^2} w_2 - \frac{d^2 N_4^{(e)}}{dx^2} \varphi_2. \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

### 10.2.2. Ravnoteža izdvojenog elementa

Promatramo izdvojeni tlačni konačni gredni element ( $e$ ) =  $[0, L^{(e)}]$ , duljine  $L^{(e)}$ . Iz ravnoteže elementa



Slika 10.2.2: Izdvojeni tlačni konačni element

nakon deformacije slijede diferencijalni odnosi

$$V'(x) = -q(x), \quad (10.2.6)$$

$$M'(x) = V(x) - Hw'(x). \quad (10.2.7)$$

Iz ravnoteže elementa slijedi

$$\int_V \delta \varepsilon^{(e)} \sigma^{(e)} dV dx = \int_0^{L^{(e)}} \delta w^{(e)} q^{(e)} dx + \sum_{i=1,2} \left( \delta w_i^{(e)} K_{z_i}^{(e)} + \delta \varphi_i^{(e)} M_i^{(e)} \right). \quad (10.2.8)$$

Uvrštavanjem izraza za virtualnu deformaciju,  $\delta \gamma(e) = \delta u^{(e)'} - z \delta w^{(e)''}$ , i naprezanje,  $\sigma^{(e)} = E \epsilon^{(e)}$ , uz definirani izraz za moment savijanja grede,  $M^{(e)} = -(EI)^{(e)} w^{(e)''}$ , i virtualnu deformaciju savijanja grede,  $\delta \kappa^{(e)} = -\delta w^{(e)''}$ , slijedi prema jednadžbi (5.2.2),

$$\int_V \delta \varepsilon^{(e)} \sigma^{(e)} dV dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)''} (EI)^{(e)} w^{(e)''} + \delta w^{(e)'} H^{(e)} w^{(e)'} \right) dx. \quad (10.2.9)$$

Supstitucijom tlačne sile  $H^{(e)}$  uzdužnom karakteristikom  $h^{(e)}$  jednadžba glasi

$$\int_V \delta \varepsilon^{(e)} \sigma^{(e)} dV dx = \int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)''} (EI)^{(e)} w^{(e)''} - \delta w^{(e)'} (EI)^{(e)} \frac{h^{(e)2}}{L^{(e)2}} w^{(e)'} \right) dx. \quad (10.2.10)$$

Uz ovu supstituciju princip virtualnih pomaka na konačnom elementu ( $e$ ) glasi

$$\int_0^{L^{(e)}} \left( \delta w^{(e)''} (EI)^{(e)} w^{(e)''} - \delta w^{(e)'} (EI)^{(e)} \frac{h^{(e)2}}{L^{(e)2}} w^{(e)'} \right) dx = \int_0^{L^{(e)}} \delta w^{(e)} q^{(e)} dx + \sum_{i=1,2} \left( \delta w_i^{(e)} K_{z_i}^{(e)} + \delta \varphi_i^{(e)} M_i^{(e)} \right). \quad (10.2.11)$$

Uz pretpostavke razdiobe za virtualno polje pomaka, (5.2.4), sukladno raspisivanju jednadžbi za gredni konačni element, potpoglavlje 5.2.1., slijedi jednadžba sustava u standardnom obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{k}^{(e)}. \quad (10.2.12)$$

gdje je  $\mathbf{w}^{(e)}$  elementarni vektor nepoznatih pomaka (poprečnih pomaka i kuteva zaokreta čvorova konačnog elementa  $(e)$ ),  $\mathbf{q}^{(e)}$  elementarni vektor opterećenja elementa  $(e)$  i  $\mathbf{k}^{(e)}$  vektor zadanih koncentriranih sila i koncentriranih momenata savijanja u čvorovima elementa  $(e)$ . Elementarna matrica krutosti grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda glasi

$$\mathbf{K}^{(e)} = [K_{ij}]_{i,j=1,2,3,4} . \quad (10.2.13)$$

pri čemu je

$$K_{ij} = \int_0^{L^{(e)}} (EI)^{(e)} \left[ \frac{d^2 N_i^{(e)}}{dx^2} \frac{d^2 N_j^{(e)}}{dx^2} - \frac{h^{(e)2}}{L^{(e)2}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \frac{dN_j^{(e)}}{dx} \right] dx . \quad (10.2.14)$$

### 10.2.3. Elementarna matrica krutosti grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda

Gredni konačni element  $(e)$  duljine  $L^{(e)}$  konačni je element koji ima četiri stupnja slobode, poprečne pomake (progibe) i kuteve zaokreta oba krajnja čvora elementa. Lokalni koordinatni sustav postavljamo tako da je ishodište u početnom čvoru konačnog elementa  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L^{(e)}$ , a lokalna je koordinatna os  $x$  usmjerena u smjeru težišne osi elementa. Lokalna poprečna os  $z$  zajedno s lokalnom osi  $y$  (usmjerenom od ravnine promatranja prema nama) predstavlja desni koordinatni sustav. Zbog djelovanja konstantne uzdužne tlačne sile  $H^{(e)}$  u elementu definiramo pripadno uzdužnu karakteristiku promatranog elementa

$$h^{(e)} = \sqrt{\frac{H^{(e)} L^{(e)2}}{(EI)^{(e)}}} . \quad (10.2.15)$$

Za funkciju pomaka točaka unutar elementa pretpostavljamo razdiobu

$$w(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} + c_4 \cos \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} = \begin{bmatrix} 1 & x & \sin \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} & \cos \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{c} , \quad (10.2.16)$$

a za kut zaokreta,  $\varphi(x) = -\frac{dw(x)}{dx}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= - \left( c_2 + c_3 \frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \cos \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} - c_4 \frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \sin \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & \sin \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} & \cos \frac{h^{(e)} x}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_2 \\ 0 \\ c_4 \frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -c_3 \frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix} = \Phi \bar{\mathbf{c}} . \end{aligned} \quad (10.2.17)$$

Koeficijente linearne kombinacije odredimo iz vrijednosti pomaka i zaokreta u čvorovima konačnog elementa ( $w(0) = w_1, w(L^{(e)}) = w_2, \varphi(0) = \varphi_1, \varphi(L^{(e)}) = \varphi_2$ ). Uvrštavanjem tih vrijednosti u jednadžbe (10.2.16) i (10.2.17) dobivamo sustav jednadžbi za nepoznate koeficijente vektora  $\mathbf{c}$ ,

$$\mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{C} \mathbf{c} \quad (10.2.18)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 \\ 1 & L^{(e)} & \sin h^{(e)} & \cos h^{(e)} \\ 0 & -1 & -\frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \cos h^{(e)} & \frac{h^{(e)}}{L^{(e)}} \sin h^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} . \quad (10.2.19)$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi vektor nepoznatih koeficijenata

$$\mathbf{c} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}^{(e)} . \quad (10.2.20)$$

Uvrštavanjem izraza (10.2.20) u jednadžbu (10.2.16) slijedi

$$w = \Phi \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} . \quad (10.2.21)$$

Poprečne pomake točaka duž promatranog konačnog elementa ( $e$ ) zapravo smo izrazili kao linearnu kombinaciju poprečnih pomaka i zaokreta čvorova

$$w(x) = N_1^{(e)}(x)w_1 + N_2^{(e)}(x)\varphi_1 + N_3^{(e)}(x)w_2 + N_4^{(e)}(x)\varphi_2 = \mathbf{N}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}, \quad (10.2.22)$$

pri čemu su elementarne funkcije oblika  $\mathbf{N}^{(e)}$  eksplicitno izražene, uz  $h^{(e)} = h$ ,  $L^{(e)} = L$ , u obliku

$$N_1^{(e)} = \frac{1}{r} \left[ (\cos h + h \sin h - 1) - \frac{hx}{L} \sin h + \sin h \sin \frac{hx}{L} + (\cos h - 1) \cos \frac{hx}{L} \right], \quad (10.2.23)$$

$$N_2^{(e)} = \frac{L}{hr} \left[ (h \cos h - \sin h) + (1 - \cos h) \frac{hx}{L} + (1 - \cos h - h \sin h) \sin \frac{hx}{L} + (\sin h - h \cos h) \cos \frac{hx}{L} \right], \quad (10.2.24)$$

$$N_3^{(e)} = \frac{1}{r} \left[ (\cos h - 1) + \frac{hx}{L} \sin h - \sin h \sin \frac{hx}{L} + (1 - \cos h) \cos \frac{hx}{L} \right], \quad (10.2.25)$$

$$N_4^{(e)} = \frac{L}{hr} \left[ (\sin h - h) + (1 - \cos h) \frac{hx}{L} + (\cos h - 1) \sin \frac{hx}{L} + (h - \sin h) \cos \frac{hx}{L} \right], \quad (10.2.26)$$

uz  $r = -2 + 2 \cos h + h \sin h$ .

Uvrštavanjem funkcija oblika u izraz članove elementarne matrice krutosti, (10.2.14), slijedi elementarna matrica krutosti tlačno opterećenog grednog konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sustavu prema Teoriji elastičnosti II. reda,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI^{(e)}}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & \frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} & -\frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & \frac{h(\sin h - h)}{L} \\ \frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & \frac{h(\sin h - h)}{L} & -\frac{h^2(1 - \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.2.27)$$

Elementarnu matricu krutosti tlačnog grednog konačnog elementa dobivenu prema Teoriji elastičnosti II. reda, (10.2.27), možemo prikazati u obliku koji izravno ukazuje na razliku prema elementarnoj matrici krutosti grednog konačnog elementa dobivenoj prema linearnoj teoriji elastičnosti, (5.2.32),

$$\mathbf{K}^{(e)} = EI^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3}\beta_1 & -\frac{6}{L^2}\beta_2 & -\frac{12}{L^3}\beta_1 & -\frac{6}{L^2}\beta_2 \\ -\frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{4}{L}\beta_3 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{2}{L}\beta_4 \\ -\frac{12}{L^3}\beta_1 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{12}{L^3}\beta_1 & \frac{6}{L^2}\beta_2 \\ -\frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{2}{L^{(e)}}\beta_4 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{4}{L^{(e)}}\beta_3 \end{bmatrix}, \quad (10.2.28)$$

pri čemu su prikazani koeficijenti  $\beta_i$  jednaki

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{-h^3 \sin h}{12r}, & \beta_2 &= \frac{h^2(\cos h - 1)}{6r}, \\ \beta_3 &= \frac{h(h \cos h - \sin h)}{4r}, & \beta_4 &= \frac{h(\sin h - h)}{2r}. \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

#### 10.2.4. Linearizacija elementarne matrice krutosti tlačnog grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda

Elementarnu matricu krutosti tlačnog grednog konačnog elementa dobivenu prema Teoriji elastičnosti II. reda, (10.2.27), možemo razviti u Taylorov red po  $h$  u okolini 0. Uzimanjem u obzir do maksimalno

kvadratnog člana razvoja Taylorovog reda po  $h$  slijedi zapis,

$$\mathbf{K}^{(e)} = EI^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} - \frac{6h^2}{5L^3} & -\frac{6}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & -\frac{12}{L^3} + \frac{6h^2}{5L^3} & -\frac{6}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} - \frac{2h^2}{15L} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{2}{L} + \frac{h^2}{30L} \\ -\frac{12}{L^3} + \frac{6h^2}{5L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{12}{L^3} - \frac{6h^2}{5L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & \frac{2}{L} + \frac{h^2}{30L} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} - \frac{2h^2}{15L} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(h^4). \quad (10.2.30)$$

Razvijenu elementarnu matricu krutosti tlačnog grednog konačnog elementa možemo izraziti kao red po uzdužnoj tlačnoj sili  $H$  u okolini 0, umjesto po uzdužnoj karakteristici  $h$ . Uzimanjem u obzir do maksimalno linearnog člana razvoja u red po  $H$  matrica je zapisana u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI^{(e)}}{L^3} - \frac{6H}{5L} & -\frac{6EI^{(e)}}{L^2} + \frac{H}{10} & -\frac{12EI^{(e)}}{L^3} + \frac{6H}{5L} & -\frac{6EI^{(e)}}{L^2} + \frac{H}{10} \\ -\frac{6EI^{(e)}}{L^2} + \frac{H}{10} & \frac{4EI^{(e)}}{L} - \frac{2HL}{15} & \frac{6EI^{(e)}}{L^2} - \frac{H}{10} & \frac{2EI^{(e)}}{L} + \frac{HL}{30} \\ -\frac{12EI^{(e)}}{L^3} + \frac{6H}{5L} & \frac{6EI^{(e)}}{L^2} - \frac{H}{10} & \frac{12EI^{(e)}}{L^3} - \frac{6H}{5L} & \frac{6EI^{(e)}}{L^2} - \frac{H}{10} \\ -\frac{6EI^{(e)}}{L^2} + \frac{H}{10} & \frac{2EI^{(e)}}{L} + \frac{HL}{30} & \frac{6EI^{(e)}}{L^2} - \frac{H}{10} & \frac{4EI^{(e)}}{L} - \frac{2HL}{15} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(H^2). \quad (10.2.31)$$

### 10.2.5. Poopćeni zapis elementarnih matrica krutosti tlačnog i vlačnog grednog konačnog elementa prema Teoriji elastičnosti II. reda

Promatramo zapis elementarne matrice krutosti tlačne grede preko razvoja u red pomoću uzdužne sile  $H$ , (10.2.31), uzimanjem u obzir samo prvog nelinearnog člana. Ako uzmemo da sila  $H$  svojim predznakom definira vrstu djelovanja u gredi ( $H < 0$  tlak,  $H > 0$  vlak), elementarnu matricu krutosti možemo rastaviti na elementarnu matricu krutosti iz linearne teorije elastičnosti

$$\mathbf{K}_{ik}^{el} = EI^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (10.2.32)$$

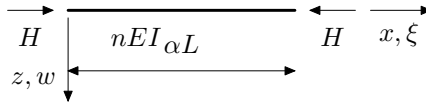
koju nazivamo elastična matrica krutosti, i dio elementarne matrice krutosti koja izražava nelinearni utjecaj uzdužne sile u gredi,

$$\mathbf{K}_{ik}^g = H \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}, \quad (10.2.33)$$

koju nazivamo geometrijska matrica krutosti. Za prikazane matrice očito vrijedi jednakost

$$\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{K}_{ik}^{el} + \mathbf{K}_{ik}^g + \mathcal{O}(H^2). \quad (10.2.34)$$

Za geometrijsku matricu krutosti, (10.2.33), možemo uočiti da su sve komponente na glavnoj dijagonali istog predznaka kao i uzdužna sila u gredi. Kad izlučimo uzdužnu silu  $H$  ispred matrice, komponente na glavnoj dijagonali geometrijske matrice krutosti su uvijek pozitivne što povlači da uzdužna tlačna sila smanjuje, a uzdužna vlačna sila povećava krutost grede na savijanje (fleksijsku krutost grede).



Slika 10.3.1: Izdvojena tlačna greda

### 10.3. Matrica krutosti grede proizvoljne krutosti i duljine

Promatramo općenitu tlačnu gredu, izdvojenu iz složene konstrukcije, krutosti  $nEI$ , duljine  $\alpha L$ , (Slika 10.3.1).

Uzdužna karakteristika takve izdvojene tlačne grede iznosi

$$h_g = \sqrt{\frac{H(\alpha L)^2}{nEI}}. \quad (10.3.1)$$

Matrica krutosti takve izdvojene grede, uz  $L_g = \alpha L$ , prema (??), glasi, uz  $r = -2 + 2 \cos h_g + h \sin h_g$ ,

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h_g^3 \sin h_g}{L_g^3} & -\frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & \frac{h_g^3 \sin h_g}{L_g^3} & -\frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} \\ \frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & \frac{h_g(h_g \cos h_g - \sin h_g)}{L_g} & \frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & -\frac{h_g(h_g - \sin h_g)}{L_g} \\ \frac{h_g^3 \sin h_g}{L_g^3} & \frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & -\frac{h_g^3 \sin h_g}{L_g^3} & \frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} \\ -\frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & -\frac{h_g(h_g - \sin h_g)}{L_g} & \frac{h_g^2(-1+\cos h_g)}{L_g^2} & \frac{h_g(h_g \cos h_g - \sin h_g)}{L_g} \end{bmatrix}. \quad (10.3.2)$$

Neka je greda izdvojena iz složenije konstrukcije. Za karakterizaciju svih elemenata konstrukcije najjednostavnije je izraziti uzdužnu karakteristiku svih elemenata konstrukcije kao funkciju uzdužne karakteristike  $h$ , (3.7.14). Želimo prikazati matricu krutosti izdvojenog dijela grede izraženu preko standardizirane uzdužne karakteristike  $h$  i karakteristične duljinske veličine  $L$ . Tada uzdužnu karakteristiku izdvojene grede  $h_g$  možemo izraziti kao funkciju od  $h$ ,

$$h_g = \sqrt{\frac{H(\alpha L)^2}{nEI}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} h. \quad (10.3.3)$$

Matricu možemo izraziti, uz supstitucije  $c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} = \cos \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}$ ,  $s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} = \sin \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}$  i  $r = -2\sqrt{n} + 2\sqrt{n}c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} + h\alpha s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}$ ,

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L^3} & \frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & \frac{h^3 s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L^3} & \frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} \\ \frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & \frac{\alpha\sqrt{n}h^2 c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} - nhs_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L} & -\frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & \frac{nhs_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} - \alpha\sqrt{n}h^2}{L} \\ \frac{h^3 s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L^3} & -\frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & -\frac{h^3 s_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L^3} & -\frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} \\ \frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & \frac{nhs_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} - \alpha\sqrt{n}h^2}{L} & -\frac{\sqrt{n}h^2(1 - c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}})}{L^2} & \frac{\alpha\sqrt{n}h^2 c_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}} - nhs_{\frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.3.4)$$

Matricu krutosti možemo prikazati u obliku koji izravno ukazuje na razliku s matricom krutosti prema linearnoj teoriji,

$$\mathbf{K}_{ik} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3}\beta_1 & -\frac{6}{L^2}\beta_2 & -\frac{12}{L^3}\beta_1 & -\frac{6}{L^2}\beta_2 \\ -\frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{4}{L}\beta_3 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{2}{L}\beta_4 \\ -\frac{12}{L^3}\beta_1 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{12}{L^3}\beta_1 & \frac{6}{L^2}\beta_2 \\ -\frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{2}{L}\beta_4 & \frac{6}{L^2}\beta_2 & \frac{4}{L}\beta_3 \end{bmatrix}, \quad (10.3.5)$$

pri čemu su prikazani koeficijenti  $\beta_i$  jednaki

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{h^3 s \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}{12r}, & \beta_2 &= -\frac{\sqrt{nh^2} \left(1 - c \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}\right)}{6r}, \\ \beta_3 &= \frac{\alpha \sqrt{nh^2} c \frac{\alpha h}{\sqrt{n}} - nhs \frac{\alpha h}{\sqrt{n}}}{4r}, & \beta_4 &= \frac{nhs \frac{\alpha h}{\sqrt{n}} - \alpha \sqrt{nh^2}}{2r}.\end{aligned}\tag{10.3.6}$$

## 10.4. Proračun kritične sile i duljine izvijanja

### 10.4.1. Defniranje zadatke određivanja kritične sile i duljine izvijanja

Kod proračuna konstrukcija nije dovoljno dokazati samo nosivost konstrukcije. Potrebno je dokazati i stabilnost konstrukcije. Najjednostavniji primjer je izvijanje tlačnih elemenata konstrukcije.

Konstrukcija nakon djelovanja opterećenja mora ostati u stabilnom ravnotežnom položaju. Proračunom je potrebno odrediti najmanji iznos opterećenja kod kojeg ravnotežni položaj konstrukcije postaje nestabilan. Takvo opterećenje zovemo kritično opterećenje konstrukcije. Statičku definiciju kritičnog opterećenja možemo iskazati prema Euleru: Kritično opterećenje konstrukcije najmanje je opterećenje konstrukcije kod kojeg uz osnovni ravnotežni položaj konstrukcije postoji barem još jedan ravnotežni položaj konstrukcije. U području kritičnog uzdužnog opterećenja i malo poprečno opterećenje dovodi do velikih progiba zbog značajnog povećanja momenta savijanja od uzdužnog opterećenja. Takav gubitak stabilnosti elementa konstrukcije zovemo izvijanje.

Promatramo homogeni pravocrtni element konstrukcije (stup, greda) opterećen uzdužnom tlačnom silom. Ako postupno povećavamo iznos uzdužne sile, element konstrukcije do određenog iznosa sile zadržava svoj pravocrtni oblik. Nakon dostizanja određenog iznosa uzdužne tlačne sile, element konstrukcije i uz najmanji poprečni pomak (od opterećenja) potpuno iskrivljuje svoju težišnu os do vrlo velikih iznosa pomaka. Granična vrijednost sile pri kojoj težišna os elementa konstrukcije ostaje pravocrtna zovemo kritična sila. Vrijednost kritične sile ovisi o uvjetima na kraju elementa konstrukcije (rubni uvjeti, uvjeti spoja s priključnim elementima, krutost priključnih elemenata). Izvijanje elementa konstrukcije počinje u stvarnoj situaciji i prije dostizanja kritične sile zbog nehomogenosti materijala i početne imperfekcije (minimalnih odstupanja od idealne težišne osi i minimalnih ekscentriciteta uzdužnog opterećenja). Izvijanje počinje i kod manjih iznosa naprezanja. Eulerova kritična sila elementa konstrukcije duljine  $L$  i krutosti na savijanje  $EI$  iznosi

$$H_{crit} = \frac{EI\pi^2}{L_i^2},\tag{10.4.1}$$

pri čemu je  $L_i = \alpha L$  duljina izvijanja elementa konstrukcije koja ovisi o rubnim uvjetima.

Za isti element konstrukcije postoji nekoliko iznosa kritične sile. To slijedi zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija iz rješenja diferencijalnih jednadžbi. Kritične sile iznose

$$H_{crit,n} = \frac{EI(f(n)\pi)^2}{L_i^2},\tag{10.4.2}$$

pri čemu funkcija  $f(n)$  ovisi o rubnim uvjetima elementa konstrukcije, a najmanji iznos kritične sile dobivano za  $n = 1$ .

Za zadani sustav potrebno je odrediti matricu krutosti sustava. Izjednačavanjem determinante matrice sustava s nulom dobijemo pripadnu vrijednost uzdužne karakteristike  $h_{crit}$  iz koje slijedi iznos za kritičnu silu

$$H_{crit} = \frac{EIh_{crit}^2}{L^2},\tag{10.4.3}$$

ili za koeficijent  $\alpha$  potreban za određivanje duljine izvijanja

$$\alpha = \frac{\pi}{h_{crit}} \Rightarrow L_i = \alpha L = \frac{\pi L}{h_{crit}}.\tag{10.4.4}$$

### 10.4.2. Određivanje kritične sile i duljine izvijanja metodom konačnih elemenata

Rubna zadaća određivanja pomaka konstrukcije u matricnom obliku glasi

$$\mathbf{Kw} = \mathbf{0}.\tag{10.4.5}$$



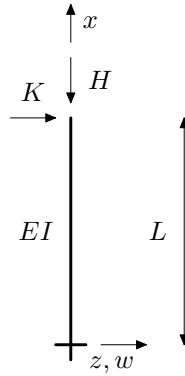
Očito je da trivijalno rješenje,  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , ne karakterizira pojavu kritične sile. Pojavom kritične sile progibi teže beskonačnim vrijednostima što povlači da determinanta matrice sustava mora biti jednaka nuli,  $\det \mathbf{K} = 0$ . Izjednačavanjem determinante matrice sustava s nulom, izračunamo pripadnu vrijednost uzdužne karakteristike  $h_{crit}$  iz koje slijedi iznos za kritičnu silu i duljinu izvijanja prema jednadžbama (10.4.3) i (10.4.4).

## 10.5. Primjeri

### 10.5.1. Proračun progiba i momenata

**Primjer 10.5.1.** *Konzolni stup opterećen horizontalnom silom i vertikalnom tlačnom silom na vrhu*

Na zadanom upetom konzolnom stupu, opterećenom na vrhu horizontalnom i vertikalnom silom, potrebno je odrediti pomak vrha stupa i ležajni moment. Zadatak riješiti pomoću matrice krutosti i pomoću elastične i geometrijske matrice krutosti.



Slika 10.5.1.1: Upeti konzolni stup

Uzimanjem stupa kao jednog elementa s definiranom uzdužnom karakteristikom  $h = \sqrt{\frac{HL^2}{EI}}$  i uvažavanja ležajnog rubnog uvjeta, pomak i kut zaokreta upetog ležaja jednaki su nuli, dolazimo do sustava jednadžbi

$$\frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.1.1)$$

Rješenjem sustava slijede vrijednosti horizontalnog pomaka i kuta zaokreta vrha stupa

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{KL^3 (\operatorname{tg} h - h)}{EI h^3} \\ &= \frac{KL^3}{3EI} + \frac{2KL^3}{15EI} h^2 + \frac{17KL^3}{315EI} h^4 + \mathcal{O}(h^6), \end{aligned} \quad (10.5.1.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_L &= \frac{KL^2 \sec h (\cos h - 1)}{EI h^2} \\ &= -\frac{KL^2}{2EI} - \frac{5KL^2}{24EI} h^2 - \frac{61KL^2}{720EI} h^4 + \mathcal{O}(h^6). \end{aligned} \quad (10.5.1.3)$$

Ležajni moment slijedi prema izrazu

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \left[ -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} w_L + \frac{h(\sin h - h)}{L} \varphi_L \right] \\ &= \frac{KL \operatorname{tg} h}{h} = KL + \frac{KL}{3} h^2 + \frac{2KL}{15} h^4 + \frac{17KL}{315} h^6 + \mathcal{O}(h^8). \end{aligned} \quad (10.5.1.4)$$

Približno rješenje traženih nepoznatih veličina možemo dobiti i pomoću rastava matrice krutosti na

elastičnu i geometrijsku matricu krutosti. Na taj način matrica krutosti sustava glasi

$$\mathbf{K}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} - \frac{6h^2}{5L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} - \frac{2h^2}{15L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.1.5)$$

Sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} - \frac{6h^2}{5L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} - \frac{2h^2}{15L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_L^{ap} \\ \varphi_L^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.1.6)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} w_L^{ap} \\ \varphi_L^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{3EI} \frac{8(30-h^2)}{240-104h^2+3h^4} \\ \frac{KL^2}{EI} \frac{2(h^2-60)}{240-104h^2+3h^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^3}{3EI} + \frac{2KL^3}{15EI} h^2 + \frac{193KL^3}{3660EI} h^4 + \mathcal{O}(h^6) \\ -\frac{KL^2}{2EI} - \frac{5KL^2}{24EI} h^2 - \frac{121KL^2}{1440EI} h^4 + \mathcal{O}(h^6) \end{bmatrix}. \quad (10.5.1.7)$$

Dobivene približne vrijednosti možemo usporediti s analitičkim vrijednostima. Vidljivo je odstupanje od analitičkog rješenja koeficijenta uz  $h^4$  što je i očekivano prema stupnju aproksimacije matrice krutosti sustava u odnosu na analitičku matricu krutosti sustava. Ležajni moment možemo izračunati prema izrazu

$$\begin{aligned} M_0^{ap} &= \left( \frac{6}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} \right) w_L^{ap} + \left( \frac{2}{L} - \frac{h^2}{30L} \right) \varphi_L^{ap} = KL \frac{(h^2 - 12)(h^2 - 60)}{3(240 - 104h^2 + 3h^4)} \\ &= KL + \frac{KL}{3} h^2 + \frac{2KL}{15} h^4 + \frac{193KL}{3600} h^6 + \mathcal{O}(h^8). \end{aligned} \quad (10.5.1.8)$$

Približne vrijednosti progiba i momenta manje su od analitičkih vrijednosti. Odstupanja proračunatih vrijednosti progiba konzolnog vrha,  $w_L^{ap}$ , i ležajnog momenta,  $M_0^{ap}$ , od pripadnih analitičkih rješenja možemo prikazati u ovisnosti o uzdužnoj karakteristici grede  $h$ ,

$$\Delta_{h,w_L} = \frac{|w_L^{ap} - w_L|}{w_L} \cdot 100\%, \quad \Delta_{h,M_0} = \frac{|M_0^{ap} - M_0|}{M_0} \cdot 100\%. \quad (10.5.1.9)$$

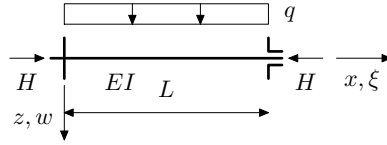
Tablica 10.5.1.2: Progib vrha stupa i ležajni moment u ovisnosti o  $h$

$h$	0.5	1	1.2	1.5
$EI \frac{w_L^{ap}}{KL^3}$	0.370392	0.556355	0.789544	3.49263
$\Delta_{h,w_L} [\%]$	0.00754	0.18888	0.56994	6.45808
$\frac{M_0^{ap}}{KL}$	1.0926	1.55635	2.13694	8.85841
$\Delta_{h,M_0} [\%]$	0.00064	0.06760	0.30404	5.77112

**Primjer 10.5.2.** *Obostrano upeta tlačna greda opterećena jednoliko kontinuiranim poprečnim opterećenjem*

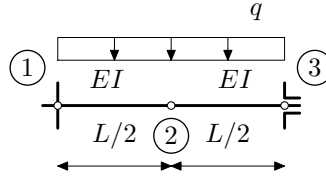
Za obostrano upetu tlačnu gredu, jednoliko kontinuirano poprečno opterećenu, (Slika 10.5.2.1), potrebno je odrediti progib u sredini raspona i momente na ležajevima i u sredini raspona.

Zadatak možemo riješiti pomoću matrice krutosti i pomoću aproksimacije matrice krutosti elastičnom i geometrijskom matricom krutosti. Gredu podijelimo na dva jednaka dijela duljine  $L/2$ . Za definiranje matrice krutosti svakog dijela grede duljine  $L/2$  nije dovoljno, kao kod linearne teorije, samo uvrstiti duljinu promatranog dijela duljine  $L/2$  umjesto duljine  $L$  za koju je izvedena matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu, (??). Svaki izdvojeni dio grede promatramo kao zasebnu gredu pripadne duljine i krutosti. Prema definiciji uzdužne karakteristike grede, (??), i bezdimenzionalni koeficijent, uzdužna karakteristika promatranog dijela grede ovisi o duljini tog dijela grede. Rješenja izražena pomoću uzdužnih



Slika 10.5.2.1: Obostrano upeta tlačna greda opterećena jednoliko kontinuiranim opterećenjem

poprečnim



Slika 10.5.2.2: Podjela grede na dva dijela

karakteristika svih elemenata bila bi u vrlo složenom obliku. Zbog toga je jednostavnije uzdužne karakteristike svih elemenata konstrukcije izraziti kao funkciju neke referentne karakteristike tako da su rješenja izražena samo pomoću jednog parametra. Općenito, za promatrani dio grede duljine  $L/n$  uzdužnu karakteristiku tog dijela grede možemo izraziti kao funkciju uzdužne karakteristike cijele grede duljine  $L$ ,

$$h_{L/n} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{n}\right)^2}{EI}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{HL^2}{EI}} = \frac{h}{n}. \quad (10.5.2.1)$$

Posljedično i bezdimenzionalni koeficijent treba uvrstiti u matricu krutosti pomnožen s omjerom duljine promatranog dijela grede prema duljini  $L$  za koju je definirana uzdužna karakteristika  $h$ . U ovom primjeru kad je promatrani dio duljine  $L/2$  u definiranu matricu krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu, (??), treba uvrstiti bezdimenzionalni koeficijent  $h/2$ . Općenita matrica krutosti za dio grede proizvoljne duljine i krutosti prikazana je jednadžbom (10.3.4).

Matrice krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu za oba dijela grede duljine  $L/2$  su jednake zbog iste duljine dijelova,  $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{L/2}$ , i slijede, uz supstituciju za jednostavniji zapis,  $c_{\frac{h}{2}} = \cos \frac{h}{2}$ ,  $s_{\frac{h}{2}} = \sin \frac{h}{2}$ ,  $r_{h/2} = -2 + 2c_{\frac{h}{2}} + \frac{h}{2}s_{\frac{h}{2}}$  i  $r = -4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}$ , u obliku

$$\mathbf{K}_{L/2} = \frac{EI}{r_{h/2}} \begin{bmatrix} -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 s_{\frac{h}{2}}}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} & -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 s_{\frac{h}{2}}}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} & -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \\ -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & \frac{\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{\frac{L}{2}} & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & -\frac{\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{\frac{L}{2}} \\ \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 s_{\frac{h}{2}}}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 s_{\frac{h}{2}}}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \\ -\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & -\frac{\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{\frac{L}{2}} & \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} & \frac{\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{\frac{L}{2}} \end{bmatrix}, \quad (10.5.2.2)$$

pojednostavljenjem čega slijedi matrica u obliku

$$\mathbf{K}_{L/2} = \frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & -\frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & \frac{h^3 s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & -\frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} \\ -\frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & \frac{h \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{L} & \frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & -\frac{h \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{L} \\ \frac{h^3 s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & \frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & \frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} \\ -\frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & -\frac{h \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{L} & \frac{h^2 (-1+c_{\frac{h}{2}})}{L^2} & \frac{h \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.3)$$

Vektor sila upetosti za oba dijela grede duljine  $L/2$  glasi

$$\bar{\mathbf{f}}_{12} = \bar{\mathbf{f}}_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2(2-\frac{h}{2}\text{ctg}\frac{h}{4})}{8(\frac{h}{2})^2} \\ -\frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2(2-\frac{h}{2}\text{ctg}\frac{h}{4})}{8(\frac{h}{2})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \\ -\frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.4)$$

Uklapanjem matrica krutosti oba dijela slijedi matrica krutosti sustava, uz  $c_1 = (1 - c_{\frac{h}{2}})$ ,  $c_2 = (\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}})$  i  $c_3 = (\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}})$ ,

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}c_1 & \frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}c_1 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{L^2}c_1 & \frac{h}{L}c_2 & -\frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{h}{L}c_3 & 0 & 0 \\ \frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{2h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & 0 & \frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}c_1 \\ \frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{h}{L}c_3 & 0 & \frac{2h}{L}c_2 & -\frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{h}{L}c_3 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{h^3}{L^3}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}c_1 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{L^2}c_1 & -\frac{h}{L}c_3 & -\frac{h^2}{L^2}c_1 & \frac{h}{L}c_2 \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.5)$$

Uklapanjem vektora upetosti oba dijela slijedi vektor upetosti sustava

$$\bar{\mathbf{f}} = \left[ -\frac{qL}{4} \quad \frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \quad -\frac{qL}{2} \quad 0 \quad -\frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \right]^T. \quad (10.5.2.6)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{2EI}{-4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}} \begin{bmatrix} -\frac{2h^3s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{2h(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}})}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.7)$$

Rješenjem sustava jednadžbi dobivamo progib i kut zaokreta u sredini raspona grede,

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EI} \frac{-4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}}{h^3s_{\frac{h}{2}}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.8)$$

Razvojem progiba u sredini raspona,  $w_2$ , u red oko  $h = 0$  slijedi izraz

$$w_2 = \frac{qL^4}{384EI} + \frac{qL^4}{15360EI}h^2 + \frac{17qL^4}{10321920EI}h^4 + \mathcal{O}(h^6), \quad (10.5.2.9)$$

pri čemu možemo uočiti da je linearni dio razvoja progiba u sredini raspona obostrano upete tlačne grede jednak vrijednosti progiba u sredini raspona obostrano upete grede prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Sile na krajevima definiranih dijelova grede dobivamo zbrajanjem djelovanja matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu na izračunati vektor pomaka i vektora sila upetosti u lokalnom koor-

dinatnom sustavu. Za obostrano upetu tlačnu gredu proizlaze sile na krajevima prvog dijela grede

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{12} &= \begin{bmatrix} V_{12} \\ M_{12} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{12} \\
 &= \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI} \frac{-4+4c\frac{h}{2}+hs\frac{h}{2}}{h^3 s\frac{h}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \\ -\frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ qL^2 \frac{4-h\text{ctg}\frac{h}{4}+h\text{tg}\frac{h}{4}}{4h^2} \\ 0 \\ qL^2 \frac{h \csc\frac{h}{2}-2}{2h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{720} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \\ 0 \\ \frac{qL^2}{24} + \frac{7qL^2}{5760} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{10.5.2.10}$$

i sile na krajevima drugog dijela grede

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{23} &= \begin{bmatrix} V_{23} \\ M_{23} \\ V_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{23} \\
 &= \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EI} \frac{-4+4c\frac{h}{2}+hs\frac{h}{2}}{h^3 s\frac{h}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{qL}{4} \\ \frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \\ -\frac{qL}{4} \\ -\frac{qL^2(4-h\text{ctg}\frac{h}{4})}{4h^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -qL^2 \frac{h \csc\frac{h}{2}-2}{2h^2} \\ -\frac{qL}{2} \\ -qL^2 \frac{4-h\text{ctg}\frac{h}{4}+h\text{tg}\frac{h}{4}}{4h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{24} - \frac{7qL^2}{5760} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} - \frac{qL^2}{720} h^2 + \mathcal{O}(h^4) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{10.5.2.11}$$

Razvojem sila u red oko  $h = 0$  vidljivo je da je linearni dio razvoja za momente na ležajevima i u sredini raspona jednak vrijednostima momenata na ležajevima i u sredini raspona prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Približno rješenje traženih nepoznatih veličina možemo dobiti i pomoću matrice krutosti izražene kao zbroj elastične i geometrijske matrice krutosti. Na taj način približne lokalne matrice krutosti oba dijela grede glase

$$\mathbf{K}_{ik}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & -\frac{24}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & -\frac{96}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & -\frac{24}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} \\ -\frac{24}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & \frac{8}{L} - \frac{h^2}{15L} & \frac{24}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} + \frac{h^2}{60L} \\ -\frac{96}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & \frac{24}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{96}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & \frac{24}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} \\ -\frac{24}{L^2} + \frac{h^2}{10L^2} & \frac{4}{L} + \frac{h^2}{60L} & \frac{24}{L^2} - \frac{h^2}{10L^2} & \frac{8}{L} - \frac{h^2}{15L} \end{bmatrix}. \tag{10.5.2.12}$$

Uklapanjem matrica krutosti i uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} \frac{192}{L^3} - \frac{24h^2}{5L^3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{L} - \frac{2h^2}{15L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2^{ap} \\ \varphi_2^{ap} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.13)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} w_2^{ap} \\ \varphi_2^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5qL^4}{48EI(40-h^2)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.14)$$

Razvojem progiba u sredini raspona,  $w_2$ , u red oko  $h = 0$  slijedi izraz

$$w_2 = \frac{qL^4}{384EI} + \frac{qL^4}{15360EI}h^2 + \frac{qL^4}{614400EI}h^4 + \mathcal{O}(h^6). \quad (10.5.2.15)$$

Dobivene približne vrijednosti za progib u sredini raspona možemo usporediti s analitičkim vrijednostima i izračunati odstupanja u ovisnosti o uzdužnoj karakteristici grede  $h$ . Približne vrijednosti sila izračunamo

Tablica 10.5.2.3: Progib u sredini raspona u ovisnosti o  $h$

$h$	1	2	3	4	5	6
$\frac{w_2^{ap}}{qL^4/EI}$	$\frac{5}{1872}$	$\frac{5}{1728}$	$\frac{5}{1488}$	$\frac{5}{1152}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{5}{192}$
$\Delta_h[\%]$	0.00077	0.01337	0.07976	0.33228	1.3332	10.7243

uz djelovanje približne lokalne matrice krutosti, (10.5.2.12), na proračunati vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{f}_{12} = \mathbf{K}_{12}^{ap} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{96h^2} \frac{h^4 - 144h^2 - 3840 - 24h(h^2 - 40)\text{ctg} \frac{h}{4}}{h^2 - 40} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{96h^2} \frac{h^4 - 336h^2 + 3840 + 24h(h^2 - 40)\text{ctg} \frac{h}{4}}{h^2 - 40} \end{bmatrix}. \quad (10.5.2.16)$$

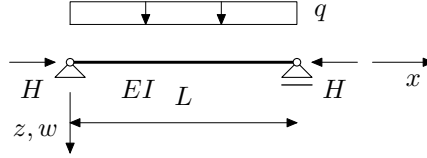
Proračunate vrijednosti momenata na ležaju, ( $M_1$ ), i u sredini raspona, ( $M_2$ ), možemo usporediti s analitičkim vrijednostima.

Tablica 10.5.2.4: Momenti na ležaju i u sredini raspona u ovisnosti o  $h$

$h$	1	2	3	4	5	6
$\frac{M_1^{ap}}{qL^2}$	0.085756	0.089476	0.09928	0.11959	0.17269	0.55607
$\Delta_{h,M_1}[\%]$	0.000121	0.00087	0.012157	0.0967	0.675	9.195
$\frac{M_2^{ap}}{qL^2}$	0.042915	0.047098	0.055962	0.074853	0.12592	0.50643
$\Delta_{h,M_2}[\%]$	0.000024	0.001644	0.021565	0.1544	0.923	10.01

**Primjer 10.5.3.** Slobodno oslonjena tlačna greda opterećena jednoliko kontinuiranim poprečnim opterećenjem

Za slobodno oslonjenu tlačnu gredu jednoliko kontinuirano poprečno opterećenu, (Slika 10.5.3.1), potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona grede. Zadatak riješiti na dva načina, pomoću matrica krutosti bez statičke kondenzacije i pomoću statički kondenziranih matrica krutosti.



Slika 10.5.3.1: Slobodno oslonjena tlačna greda opterećena jednoliko kontinuiranim poprečnim opterećenjem

Zadanu slobodno oslonjenu tlačnu gredu možemo podijeliti na dva jednaka dijela duljine  $L/2$  kao u prethodnom zadatku. Tada su i pripadne matrice krutosti i vektori sila upetosti za oba dijela grede jednaki,  $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{L/2}$  i  $\bar{\mathbf{f}}_{12} = \bar{\mathbf{f}}_{23}$ , kao u prethodnom zadatku, (10.5.2.2), (10.5.2.4). Razlika u odnosu na prethodni zadatak bit će vidljiva tek nakon uvrštavanja rubnih uvjeta.

Uklapanjem matrica krutosti oba dijela grede slijedi matrica krutosti sustava, jednako kao u izrazu (10.5.2.5) iz prethodnog zadatka,

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} c_1 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 & 0 \\ \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{2h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & 0 & \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} c_1 \\ \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 & \frac{2h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h}{L} c_2 \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.1)$$

Uklapanjem vektora upetosti svih dijelova slijedi vektor upetosti za cijeli sustav, (10.5.2.6),

$$\bar{\mathbf{f}} = \left[ -\frac{qL}{4} \quad \frac{qL^2(4-hctg\frac{h}{4})}{4h^2} \quad -\frac{qL}{2} \quad 0 \quad -\frac{qL}{4} \quad -\frac{qL^2(4-hctg\frac{h}{4})}{4h^2} \right]^T. \quad (10.5.3.2)$$

Na formiranu matricu krutosti sustava primijenimo rubne uvjete i tu dolazi do razlika u odnosu na prethodni zadatak zbog različitih rubnih uvjeta. Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi, uz

$$r = -4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}, \quad c_1 = \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right), \quad c_2 = \left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right) \quad \text{i} \quad c_3 = \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right),$$

$$\frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} \frac{h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 \\ -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{2h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 \\ -\frac{h}{L} c_3 & 0 & \frac{2h}{L} c_2 & -\frac{h}{L} c_3 \\ 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & \frac{h}{L} c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{qL^2(4-hctg\frac{h}{4})}{4h^2} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ -\frac{qL^2(4-hctg\frac{h}{4})}{4h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.3)$$

Rješenje sustava jednadžbi daje vektor nepoznatih pomaka

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^3}{2EIh^3} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ -\frac{qL^4}{8EIh^4} (8 + h^2 - 8 \sec \frac{h}{2}) \\ 0 \\ -\frac{qL^3}{2EIh^3} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.4)$$

Razvojem dobivenog rješenja u red po  $h$  oko 0 slijedi

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{qL^3 h^2}{240EI} + \mathcal{O}(h^4) \\ \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{61qL^4 h^2}{46080EI} + \mathcal{O}(h^4) \\ 0 \\ \frac{qL^3}{24EI} + \frac{qL^3 h^2}{240EI} + \mathcal{O}(h^4) \end{bmatrix}, \quad (10.5.3.5)$$

iz čega je očito da su linearni dijelovi razvoja u red za progib u sredini raspona i kuteve zaokreta ležajeva slobodno oslonjene tlačne grede jednaki vrijednostima koje bismo dobili proračunom prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Sile u čvorovima definiranih dijelova grede slijede prema izrazima

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{12} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ M_{12} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^3}{2EIh^3} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ -\frac{qL^4}{8EIh^4} (8 + h^2 - 8 \sec \frac{h}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{12} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} & 0 & 0 & \frac{2qL^2 \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4}}{h^2} \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (10.5.3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{23} = \begin{bmatrix} V_{23} \\ M_{23} \\ V_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EIh^4} (8 + h^2 - 8 \sec \frac{h}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^3}{2EIh^3} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{23} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2qL^2 \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4}}{h^2} & -\frac{qL}{2} & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (10.5.3.7)$$

Razvojem dobivene vrijednosti za moment u sredini raspona u red oko  $h = 0$  slijedi,

$$M_{L/2} = \frac{qL^2}{8} + \frac{5qL^2}{384} h^2 + \mathcal{O}(h^4). \quad (10.5.3.8)$$

Linearni dio razvoja u red momenta u sredini raspona slobodno oslonjene jednoliko kontinuirano opterećene tlačne grede jednak je momentu u sredini raspona proračunatom prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Zadatak možemo riješiti i pomoću statički kondenziranih matrica krutosti (svaki od dijelova grede promatramo kao jednostrano upetu gredu duljine  $L/2$ ) za svaki dio grede duljine  $L/2$ . Matrice krutosti za svaki dio grede nisu međusobno jednake, na dijelu 1-2 zglob je u početnom čvoru, a na dijelu 2-3 zglob je u krajnjem čvoru promatranog dijela grede. Statički kondenzirane matrice krutosti su, uz duljinu



svakog dijela  $L/2$  i potrebnu supstituciju bezdimenzionalnog koeficijenta  $h/2$ ,

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{EI}{\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 & \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 & -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} \\ \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & 0 & -\frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{2L}s_{\frac{h}{2}} \end{bmatrix}, \quad (10.5.3.9)$$

$$\mathbf{K}_{23} = \frac{EI}{\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 \\ \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{2L}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{2L}s_{\frac{h}{2}} & 0 \\ \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.10)$$

Uklapanjem matrica krutosti za oba dijela grede iz izuzimanjem pomaka,  $\varphi_1, \varphi_3$ , koje smo iskazali preko drugih pomaka kondenzacijom matrica krutosti, slijedi matrica krutosti sustava

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{\left(hc_{\frac{h}{2}} - 2s_{\frac{h}{2}}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & 0 \\ \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & -\frac{2h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 & \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} \\ \frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & 0 & -\frac{h^2}{L}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} \\ 0 & \frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2}s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.11)$$

Statički kondenzirani vektori upetosti za svaki dio grede glase

$$\bar{\mathbf{f}}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \frac{2 + \left(-2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}} - hs_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & 0 & -\frac{qL}{2} \frac{-2 + \left(2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & \frac{qL^2}{4} \frac{\left(2 - \frac{h}{2}\text{ctg}\frac{h}{4}\right)\left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right)}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} \end{bmatrix}^T, \quad (10.5.3.12)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \frac{-2 + \left(2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & -\frac{qL^2}{4} \frac{\left(2 - \frac{h}{2}\text{ctg}\frac{h}{4}\right)\left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right)}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & -\frac{qL}{2} \frac{2 + \left(-2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}} - hs_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (10.5.3.13)$$

Uklapanjem statički kondenziranih vektora upetosti za oba dijela grede slijedi vektor upetosti sustava

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \frac{2 + \left(-2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}} - hs_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & -qL \frac{-2 + \left(2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} & 0 & -\frac{qL}{2} \frac{2 + \left(-2 + \frac{h^2}{4}\right)c_{\frac{h}{2}} - hs_{\frac{h}{2}}}{h\left(\frac{h}{2}c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right)} \end{bmatrix}^T. \quad (10.5.3.14)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{2EI}{\left(hc_{\frac{h}{2}} - 2s_{\frac{h}{2}}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{2h^3}{L^3}c_{\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{L}s_{\frac{h}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -qL \frac{-2 + \left(2 + \frac{h^2}{4}\right)\cos\frac{h}{2}}{h\left(\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}\right)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.3.15)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EIh^4} \left(8 + h^2 - 8\sec\frac{h}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.5.3.16)$$

i jednako je rješenju dobivenom proračunom bez statičke kondenzacije matrica krutosti.

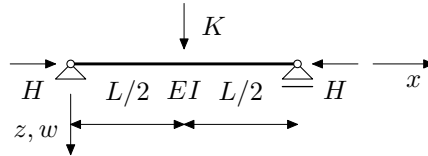
Sile u čvorovima definiranih dijelova grede, uz isključivanje redova i stupaca u kojima su članovi jednaki 0 i djelovanjem kondenziranih matrica krutosti pojedinih dijelova grede na pripadne vektore pomaka, slijede prema izrazima

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{12} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^4}{8EIh^4} (8 + h^2 - 8 \sec \frac{h}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{12} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} & 0 & \frac{2qL^2 \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4}}{h^2} \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (10.5.3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{23} = \begin{bmatrix} V_{23} \\ M_{23} \\ V_{32} \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} -\frac{qL^4}{8EIh^4} (8 + h^2 - 8 \sec \frac{h}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{23} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2qL^2 \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4}}{h^2} & -\frac{qL}{2} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (10.5.3.18)$$

**Primjer 10.5.4.** Slobodno oslonjena tlačna greda poprečno opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Za slobodno oslonjenu tlačnu gredu opterećenu koncentriranom silom u sredini raspona, (Slika 10.5.4.1), potrebno je odrediti progib i moment u sredini raspona. Zadatak riješiti pomoću matrice krutosti, pomoću kondenziranih matrica krutosti i pomoću elastične i geometrijske matrice krutosti.



Slika 10.5.4.1: Slobodno oslonjena tlačna greda poprečno opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Gredu podijelimo na dva dijela jednakog raspona  $L/2$  kao u prethodnim zadacima. Matrice krutosti za oba dijela su, prema jednadžbi (10.5.2.2) jednake. U odnosu na prethodni primjer razlika je samo u opterećenju. To znači da je matrica krutosti sustava, uz jednaku podjelu, jednaka kao u prethodnom primjeru

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & \frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & \frac{h^2}{L^2} c_1 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 & 0 \\ \frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{2h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & 0 & \frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & \frac{h^2}{L^2} c_1 \\ \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 & \frac{2h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & -\frac{h^2}{L^2} c_1 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & \frac{h}{L} c_2 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.1)$$

Greda je opterećena koncentriranom poprečnom silom u srednjem čvoru podjele. To povlači da nemamo vektore upetosti nego sila ulazi u desnu stranu jednadžbe u vektoru sila u retku koji označava silu u tom smjeru, u smjeru pomaka  $w_2$ . Uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = w_3 = 0$ , slijedi sustav jednadžbi

$$\frac{2EI}{r} \begin{bmatrix} \frac{h}{L} c_2 & -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & 0 \\ -\frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{2h^3}{L^3} s \frac{h}{2} & 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 \\ -\frac{h}{L} c_3 & 0 & \frac{2h}{L} c_2 & -\frac{h}{L} c_3 \\ 0 & \frac{h^2}{L^2} c_1 & -\frac{h}{L} c_3 & \frac{h}{L} c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.2)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{EIh^2} \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4} \\ -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ 0 \\ \frac{KL^2}{EIh^2} \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4} \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.3)$$

Razvojem dobivenog rješenja u red po  $h$  oko 0 slijedi

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16EI} - \frac{5KL^2h^2}{768EI} + \mathcal{O}(h^4) \\ \frac{KL^3}{48EI} + \frac{KL^3h^2}{480EI} + \mathcal{O}(h^4) \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16EI} + \frac{5KL^2h^2}{768EI} + \mathcal{O}(h^4) \end{bmatrix}, \quad (10.5.4.4)$$

iz čega je očito da su linearni dijelovi razvoja u red jednaki vrijednostima koje bismo dobili proračunom prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Sile u čvorovima definiranih dijelova grede slijede prema izrazima

$$\mathbf{f}_{12} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ M_{12} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{KL^2}{EIh^2} \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4} \\ -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ 0 \\ \frac{K}{2} \\ \frac{KL}{2h} \operatorname{tg} \frac{h}{2} \end{bmatrix}, \quad (10.5.4.5)$$

$$\mathbf{f}_{23} = \begin{bmatrix} V_{23} \\ M_{23} \\ V_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{KL^2}{EIh^2} \sec \frac{h}{2} \sin^2 \frac{h}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{2h} \operatorname{tg} \frac{h}{2} \\ -\frac{K}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.6)$$

Razvojem dobivene vrijednosti za moment u sredini raspona slobodno oslonjene tlačne grede u okolini  $h = 0$  slijedi

$$M(L/2) = \frac{KL}{4} + \frac{KL}{48} h^2 + \mathcal{O}(h^4), \quad (10.5.4.7)$$

što jasno ukazuje da je linearni dio razvoja u red jednak vrijednosti momenta u sredini raspona slobodno oslonjene grede prema linearnoj teoriji elastičnosti.

Zadatak možemo riješiti pomoću statički kondenziranih matrica krutosti za svaki dio grede. Statički kondenzirane matrice krutosti svakog dijela grede jednake su kao u prethodnom primjeru. Očito slijedi i matrica sustava jednaka kao u prethodnom primjeru, (10.5.3.11). Uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav

$$\frac{2EI}{\left(hc_{\frac{h}{2}} - 2s_{\frac{h}{2}}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{2h^3}{L^3} c_{\frac{h}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{L} s_{\frac{h}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.8)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\operatorname{tg} \frac{h}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.5.4.9)$$

što je za iskazane nepoznanice u potpunosti jednako vrijednostima dobivenim proračunom bez statičke kondenzacije matrica krutosti dijelova grede.

Sile u čvorovima definiranih dijelova grede, uz isključivanje redova i stupaca u kojima su članovi jednaki nuli, slijede prema izrazima

$$\mathbf{f}_{12} = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\text{tg } \frac{h}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ \frac{KL}{2h} \text{tg } \frac{h}{2} \\ \frac{K}{2} \end{bmatrix}, \quad (10.5.4.10)$$

$$\mathbf{f}_{23} = \begin{bmatrix} V_{23} \\ M_{23} \\ V_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{23} \begin{bmatrix} -\frac{KL^3}{4EIh^2} (h - 2\text{tg } \frac{h}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ -\frac{KL}{2h} \text{tg } \frac{h}{2} \\ -\frac{K}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.11)$$

Približno rješenje traženih nepoznatih veličina možemo dobiti i pomoću rastava statički kondenziranih matrica krutosti na elastičnu i geometrijsku matricu krutosti. Na taj način pripadne lokalne matrice krutosti oba dijela grede glase

$$\mathbf{K}_{12}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{24}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & 0 & -\frac{24}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & -\frac{12}{L^2} + \frac{h^2}{5L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & 0 & \frac{24}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & \frac{12}{L^2} - \frac{h^2}{5L^2} \\ -\frac{12}{L^2} + \frac{h^2}{5L^2} & 0 & \frac{12}{L^2} - \frac{h^2}{5L^2} & \frac{6}{L} - \frac{h^2}{10L} \end{bmatrix}, \quad (10.5.4.12)$$

$$\mathbf{K}_{23}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{24}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & -\frac{12}{L^2} + \frac{h^2}{5L^2} & -\frac{24}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & 0 \\ -\frac{12}{L^2} + \frac{h^2}{5L^2} & \frac{6}{L} - \frac{h^2}{10L} & \frac{12}{L^2} - \frac{h^2}{5L^2} & 0 \\ -\frac{24}{L^3} + \frac{12h^2}{5L^3} & \frac{12}{L^2} - \frac{h^2}{5L^2} & \frac{24}{L^3} - \frac{12h^2}{5L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.13)$$

Uklapanjem iskazanih matrica krutosti definiranih dijelova grede i uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednažbi

$$\begin{bmatrix} \frac{48}{L^3} - \frac{24h^2}{5L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6}{L} - \frac{h^2}{5L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2^{ap} \\ \varphi_2^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.14)$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{bmatrix} w_2^{ap} \\ \varphi_2^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5KL^3}{24EI(10-h^2)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.15)$$

Približne vrijednosti sila izračunamo uz djelovanje približne lokalne matrice krutosti, (10.5.2.12), na proračunati vektor nepoznatih pomaka

$$\mathbf{f}_{12} = \mathbf{K}_{12}^{ap} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2} \\ 0 \\ \frac{K}{2} \\ \frac{KL}{24} \frac{h^2 - 60}{h^2 - 10} \end{bmatrix}. \quad (10.5.4.16)$$

Proračunate vrijednosti progiba i momenta u sredini raspona grede možemo usporediti s analitičkim vrijednostima progiba i momenta u sredini raspona dobivenim proračunom pomoću matrica krutosti prema Teoriji elastičnosti II. reda i prikazati u ovisnosti o uzdužnoj karakteristici  $h$ . Jasno se može uočiti

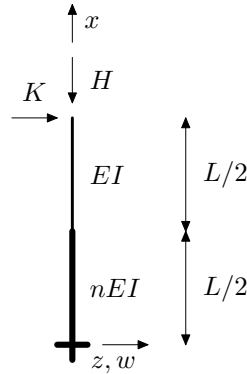
Tablica 10.5.4.1: Progib i moment u sredini raspona u ovisnosti o  $h$

$h$	1	2	3
$\frac{w_2^{ap}}{qL^4/EI}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{5}{24}$
$\Delta_h [\%]$	0.01338	0.33283	10.7243
$\frac{M_2^{ap}}{qL^2}$	$\frac{59}{216}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{17}{8}$
$\Delta_h [\%]$	0.01134	0.11893	9.5836

da su odstupanja od analitičkih vrijednosti značajno veća za veće vrijednosti uzdužne karakteristike  $h$ . To znači da prikazanu aproksimaciju matrica krutosti možemo koristiti kod malih vrijednosti uzdužnih sila. U slučajevima kad se vrijednosti uzdužnih sila kreću prema vrijednostima kritične sile ovakva aproksimacija nije preporučljiva za proračun.

**Primjer 10.5.5.** Složeni konzolni stup opterećen horizontalnom silom i vertikalnom tlačnom silom na vrhu

Promatramo složeni konzolni stup visine  $L$ , s promjenom krutosti u sredini visine stupa, opterećen horizontalnom silom  $K$  i vertikalnom silom  $H$  na vrhu, (Slika 10.5.5.1). Potrebno je odrediti pomak vrha stupa i ležajni moment. Zadatak riješiti pomoću matrice krutosti i pomoću elastične i geometrijske matrice krutosti.



Slika 10.5.5.1: Složeni konzolni stup opterećen horizontalnom silom i vertikalnom tlačnom silom na vrhu

Zbog promjene krutosti u sredini raspona gredu nužno moramo podijeliti na dva dijela duljine  $L/2$ . Za svaki dio stupa možemo izračunati pripadnu uzdužnu karakteristiku i izraziti pomoću jedinstvene uzdužne karakteristike  $h$ ,

$$h_{1-2} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{nEI}} = \frac{h}{2\sqrt{n}}, \quad h_{2-3} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{EI}} = \frac{h}{2}. \quad (10.5.5.1)$$

Nakon toga slijede i pripadne matrice krutosti svakog dijela grede u lokalnom koordinatnom sustavu, uz supstitucije za jednostavniji zapis matrica,  $c_{\frac{h}{2}} = \cos \frac{h}{2}$ ,  $s_{\frac{h}{2}} = \sin \frac{h}{2}$ ,  $c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} = \cos \frac{h}{2\sqrt{n}}$ ,  $s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} = \sin \frac{h}{2\sqrt{n}}$ ,  $r_{\sqrt{n}} = 4\sqrt{n} \left(c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - 1\right) + hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}$ ,  $r_2 = -4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}$ ,

$$\mathbf{K}_{1-2} = \frac{2\sqrt{n}EI}{r_{\sqrt{n}}} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}L^3} & \frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & \frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}L^3} & \frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} \\ \frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & \frac{h^2 c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - 2\sqrt{n}hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{2L} & -\frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & \frac{2\sqrt{n}hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - h^2}{2L} \\ \frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}L^3} & -\frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}L^3} & -\frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} \\ \frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & \frac{2\sqrt{n}hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - h^2}{2L} & -\frac{h^2 \left(1 - c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right)}{L^2} & \frac{h^2 c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - 2\sqrt{n}hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}{2L} \end{bmatrix}, \quad (10.5.5.2)$$

$$\mathbf{K}_{2-3} = \frac{2EI}{r_2} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right) \end{bmatrix}. \quad (10.5.5.3)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$  slijedi matrica sustava. Rješenjem sustava jednadžbi slijedi vektor nepoznatih pomaka. Progib vrha konzolnog stupa iznosi

$$w_L = \frac{KL^3}{EIh^3} \frac{s_{\frac{h}{2}} \left(\sqrt{nc} \frac{h}{2\sqrt{n}} + hs_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}\right) + c_{\frac{h}{2}} \left(ns_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - h\sqrt{ns} \frac{h}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{nc} \frac{h}{2} c_{\frac{h}{2\sqrt{n}}} - s_{\frac{h}{2}} s_{\frac{h}{2\sqrt{n}}}}. \quad (10.5.5.4)$$

Razvojem u red oko  $h = 0$  progib vrha stupa iznosi

$$w_L = \frac{KL^3}{24EI} \left( \frac{7+n}{n} + \frac{47+15n+2n^2}{20n^2} h^2 + \frac{1333+665n+161n^2+17n^3}{1680n^3 EI} h^4 \right) + \mathcal{O}(h^6). \quad (10.5.5.5)$$

Moment i silu u upetom ležaju dobijemo djelovanjem lokalne matrice krutosti dijela 1 – 2 na vektor pomaka krajeva tog dijela. Za ležajni moment slijedi izraz

$$M_0 = \frac{KL}{h} \frac{s_{\frac{h}{2}} \sqrt{nc} \frac{h}{2\sqrt{n}} + s_{\frac{h}{2}} \frac{c}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{nc} \frac{h}{2} \frac{c}{2\sqrt{n}} - s_{\frac{h}{2}} \frac{s}{2\sqrt{n}}}. \quad (10.5.5.6)$$

Razvojem ležajnog momenta u red oko  $h = 0$  slijedi

$$M_0 = KL \left( 1 + \frac{7+n}{24n} h^2 + \frac{47+15n+2n^2}{480n^2} h^4 + \frac{1333+665n+161n^2+17n^3}{40320n^3} h^6 \right) + \mathcal{O}(h^8). \quad (10.5.5.7)$$

Za poprečnu silu uz ležaj, jednaku horizontalnoj reakciji u ležaju, slijedi da je jednaka sili  $K$ , što jednostavno i mora biti iz ravnoteže cijelog sustava.

Za proračun pomoću elastične i geometrijske matrice krutosti, za svaki dio stupa uzimamo pripadne matrice prikazane u jednadžbi (??). Matrice tada za svaki dio glase

$$\mathbf{K}_{1-2}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{480n-48h^2}{5L^3} & \frac{h^2-240n}{10L^2} & \frac{48h^2-480n}{5L^3} & \frac{h^2-240n}{10L^2} \\ \frac{h^2-240n}{10L^2} & \frac{240n-h^2}{30L} & \frac{240n-h^2}{10L^2} & \frac{240n+h^2}{60L} \\ \frac{48h^2-480n}{5L^3} & \frac{240n-h^2}{10L^2} & \frac{480n-48h^2}{5L^3} & \frac{240n-h^2}{10L^2} \\ \frac{h^2-240n}{10L^2} & \frac{240n+h^2}{60L} & \frac{240n-h^2}{10L^2} & \frac{240n-h^2}{30L} \end{bmatrix}, \quad (10.5.5.8)$$

$$\mathbf{K}_{2-3}^{ap} = EI \begin{bmatrix} \frac{480-48h^2}{5L^3} & \frac{h^2-240}{10L^2} & \frac{48h^2-480}{5L^3} & \frac{h^2-240}{10L^2} \\ \frac{h^2-240}{10L^2} & \frac{240-h^2}{30L} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{240+h^2}{60L} \\ \frac{48h^2-480}{5L^3} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{480-48h^2}{5L^3} & \frac{240-h^2}{10L^2} \\ \frac{h^2-240}{10L^2} & \frac{240+h^2}{60L} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{240-h^2}{30L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.5.9)$$

Uklapanjem matrica i uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi sustav jednadžbi

$$EI \begin{bmatrix} \frac{480(n+1)-96h^2}{5L^3} & \frac{24(n-1)}{L^2} & \frac{48h^2-480}{5L^3} & \frac{h^2-240}{10L^2} \\ \frac{24(n-1)}{L^2} & \frac{120(n+1)-h^2}{15L} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{240+h^2}{60L} \\ \frac{48h^2-480}{5L^3} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{480-48h^2}{5L^3} & \frac{240-h^2}{10L^2} \\ \frac{h^2-240}{10L^2} & \frac{240+h^2}{60L} & \frac{240-h^2}{10L^2} & \frac{240-h^2}{30L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{L_2}^{ap} \\ \varphi_{L/2}^{ap} \\ w_L^{ap} \\ \varphi_L^{ap} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.5.5.10)$$

Rješenjem sustava jednadžbi slijedi izraz za progib vrha stupa

$$w_L^{ap} = \frac{16KL^3}{3EI} \frac{p_1}{p_2}, \quad (10.5.5.11)$$

pri čemu su  $p_1$  i  $p_2$  polinomi po uzdužnoj karakteristici  $h$ ,

$$\begin{aligned} p_1 &= 3h^6 - 2h^4(313 + 127n) + 960h^2(19 + 44n + n^2) - 115200(7 + n), \\ p_2 &= 17h^8 - 32h^6(111 + 49n) + 256h^4(405 + 1036n + 45n^2) - 122880h^2n(43 + 13n) - 14745600n^2. \end{aligned} \quad (10.5.5.12)$$

Razvojem progiba u red oko  $h = 0$  slijedi

$$w_L^{ap} = \frac{KL^3}{24EI} \left( \frac{7+n}{n} + \frac{47+15n+2n^2}{20n^2} h^2 + \frac{15223+7600n+1840n^2+193n^3}{19200n^3} h^4 \right) + \mathcal{O}(h^6). \quad (10.5.5.13)$$

Moment i silu u ležaju dobijemo djelovanjem lokalne matrice krutosti dijela 1 – 2 na vektor pomaka krajeva tog dijela. Za ležajni moment slijedi izraz

$$M_0^{ap} = \frac{KL}{3} \frac{p_3}{p_2}, \quad (10.5.5.14)$$

pri čemu je  $p_3$  polinom po  $h$

$$p_3 = 3h^8 - 640h^6(1+n) + 768h^4(25+156n+25n^2) - 2949120h^2n(1+n) + 44236800n^2. \quad (10.5.5.15)$$

Razvojem ležajnog momenta u red oko  $h = 0$  slijedi

$$M_0 = KL \left( 1 + \frac{7+n}{24n} h^2 + \frac{47+15n+2n^2}{480n^2} h^4 + \frac{15223+7600n+1840n^2+193n^3}{460800n^3} h^6 \right) + \mathcal{O}(h^8). \quad (10.5.5.16)$$

Za poprečnu silu uz ležaj i na ovaj način slijedi da je jednaka sili  $K$ .

### 10.5.2. Proračun kritične sile

#### Primjer 10.5.6. Konzolna greda

Proračun kritične sile za konzolnu gredu prikazat ćemo uzimanjem grede kao jednog konačnog elementa duljine  $L$ . Za konzolnu gredu duljine  $L$  i krutosti na savijanje  $EI$  i uvrštavanjem rubnih uvjeta za upeti ležaj slijedi matrica krutosti sustava

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.6.17)$$

Determinanta matrice sustava konzolne grede kao jednog konačnog elementa iznosi

$$\det \mathbf{K} = -\frac{(EI)^2 h^4}{L^4} \frac{\cos h}{-2 + 2 \cos h + h \sin h}, \quad (10.5.6.18)$$

i jednaka je nuli kad je  $\cos h = 0$ . Jednostavno slijedi da je  $h_{crit} = \frac{\pi}{2}$ , a kritična sila i duljina izvijanja za konzolnu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EIh^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{4L^2}, \quad L_i = 2L. \quad (10.5.6.19)$$

#### Primjer 10.5.7. Slobodno oslonjena greda

Proračun kritične sile za slobodno oslonjenu gredu isto možemo prikazati uzimanjem grede kao jednog elementa duljine  $L$ . Za slobodno oslonjenu gredu duljine  $L$  i krutosti na savijanje  $EI$  i uvrštavanjem rubnih uvjeta za upeti ležaj slijedi matrica krutosti sustava

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} & \frac{h(\sin h - h)}{L} \\ \frac{h(\sin h - h)}{L} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.7.20)$$

Determinanta matrice sustava slobodno oslonjene grede kao jednog konačnog elementa iznosi

$$\det \mathbf{K} = -\frac{(EI)^2 h^3}{L^2} \frac{\cos \frac{h}{2}}{h \cos \frac{h}{2} - 2 \sin \frac{h}{2}}, \quad (10.5.7.21)$$

i jednaka je nuli kad je  $\cos h/2 = 0$ . Jednostavno slijedi da je  $h_{crit} = \pi$ , a kritična sila i duljina izvijanja za slobodno oslonjenu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EIh^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = L. \quad (10.5.7.22)$$

#### Primjer 10.5.8. Obostrano upeta greda

Za obostrano upetu gredu nije moguće provesti proračun s gredom kao jednim konačnim elementom jer uvrštavanjem rubnih uvjeta slijedi da je matrica sustava jednaka nul-matrici. Obostrano upetu gredu duljine  $L$  i krutosti na savijanje  $EI$  moramo podijeliti na dva jednaka konačna elementa duljine  $L/2$ . Uklapanjem pripadnih elementarnih matrica krutosti svakog konačnog elementa i uvrštavanjem rubnih



uvjeta za obostrano upetu gredu,  $w(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $w(L) = 0$ ,  $\varphi(L) = 0$ , slijedi matrica krutosti sustava,

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{-4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}} \begin{bmatrix} -\frac{2h^3 s_{\frac{h}{2}}}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{2h \left( \frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}} \right)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.8.23)$$

Determinanta matrice sustava obostrano upete grede podijeljene na dva jednaka konačna elementa iznosi

$$\det \mathbf{K} = -\frac{4(EI)^2 h^4}{L^4} \frac{(h \cos \frac{h}{2} - 2 \sin \frac{h}{2}) \operatorname{ctg} \frac{h}{4}}{(h \cos \frac{h}{4} - 4 \sin \frac{h}{4})^2}, \quad (10.5.8.24)$$

i jednaka je nuli kad je  $\operatorname{ctg} h/4 = 0$ . Jednostavno slijedi da je  $h_{crit} = 2\pi$ , a kritična sila i duljina izvijanja za obostrano upetu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{4EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = L/2. \quad (10.5.8.25)$$

**Primjer 10.5.9.** *Jednostrano upeta greda*

Proračun kritične sile za jednostrano upetu gredu prikazat ćemo uzimanjem grede kao jednog konačnog elementa duljine  $L$ . Za jednostrano upetu gredu duljine  $L$  i krutosti na savijanje  $EI$ , uvrštavanjem rubnih uvjeta za upeti ležaj slijedi matrica krutosti sustava, zapravo skalarna vrijednost zbog spriječenih svih pomaka osim zaokreta jednog ležaja,

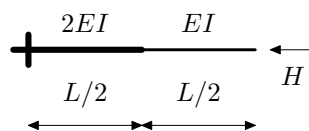
$$K = \frac{EI}{L} \frac{h(h \cos h - \sin h)}{-2 + 2 \cos h + h \sin h}. \quad (10.5.9.26)$$

Kritičnu vrijednost uzdužne karakteristike dobijemo kad prethodnu skalarnu vrijednost, (10.5.9.26), izjednačimo s nulom. Skalarna vrijednost jednaka je nuli kad je  $h \cos h - \sin h = 0$ . Jednostavno slijedi da je  $h_{crit} = 4.49341 = 1.4303\pi \approx \sqrt{2}\pi$ , a kritična sila i duljina izvijanja za jednostrano upetu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{2.046EI\pi^2}{L^2} \approx \frac{2EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 0.699156L \approx L\sqrt{2}/2. \quad (10.5.9.27)$$

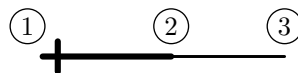
**Primjer 10.5.10.** *Složena konzolna greda*

Promatramo složenu konzolnu gredu duljine  $L$ , s promjenom krutosti na savijanje u sredini duljine grede, (Slika 10.5.10.1). Od ležaja do sredine raspona grede je krutosti na savijanje  $2EI$ , a od sredine raspona do slobodnog ruba grede je krutosti na savijanje  $EI$ . Potrebno je odrediti kritičnu silu za zadanu složenu gredu.



Slika 10.5.10.1: Složena konzolna greda

Zbog promjene krutosti na savijanje u sredini raspona gredu nužno moramo podijeliti na dva konačna elementa  $L/2$ . Za svaki dio grede možemo izračunati pripadnu uzdužnu karakteristiku i izraziti pomoću



Slika 10.5.10.2: Podjela grede na dva konačna elementa

jedinstvene uzdužne karakteristike  $h$ ,

$$h_{1-2} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI}} = \frac{h}{2\sqrt{2}}, \quad h_{2-3} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{EI}} = \frac{h}{2}. \quad (10.5.10.1)$$

Nakon toga slijede pripadne elementarne matrice krutosti svakog dijela grede u lokalnom koordinatnom sustavu, uz supstitucije za jednostavniji zapis matrica,  $c_{\frac{h}{2}} = \cos \frac{h}{2}$ ,  $s_{\frac{h}{2}} = \sin \frac{h}{2}$ ,  $c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} = \cos \frac{h}{2\sqrt{2}}$ ,  $s_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} = \sin \frac{h}{2\sqrt{2}}$ ,

$$\mathbf{K}_{1-2} = \frac{2\sqrt{2}EI}{4\sqrt{2}\left(c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} - 1\right) + hs_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}L^3} & \frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & \frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}L^3} & \frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} \\ \frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & \frac{h^2 c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2}hs_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{2L} & -\frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & \frac{2\sqrt{2}hs_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} - h^2}{2L} \\ \frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}L^3} & -\frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & -\frac{h^3 s_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}L^3} & -\frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} \\ \frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & \frac{2\sqrt{2}hs_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} - h^2}{2L} & -\frac{h^2\left(1-c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}\right)}{L^2} & \frac{h^2 c_{\frac{h}{2\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2}hs_{\frac{h}{2\sqrt{2}}}}{2L} \end{bmatrix}, \quad (10.5.10.2)$$

$$\mathbf{K}_{2-3} = \frac{2EI}{-4 + 4c_{\frac{h}{2}} + hs_{\frac{h}{2}}} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^3}{L^3} s_{\frac{h}{2}} & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) \\ \frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} - s_{\frac{h}{2}}\right) & -\frac{h^2}{L^2} \left(1 - c_{\frac{h}{2}}\right) & \frac{h}{L} \left(\frac{h}{2} c_{\frac{h}{2}} - s_{\frac{h}{2}}\right) \end{bmatrix}. \quad (10.5.10.3)$$

Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i uvrštavanjem rubnih uvjeta zadane složene konzolne grede,  $w_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ , slijedi matrica sustava. Determinanta matrice sustava iznosi

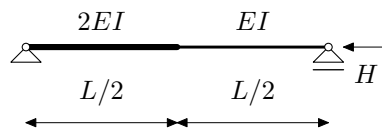
$$\det \mathbf{K} = \frac{(EI)^4 h^8 \csc \frac{h}{4} \cos \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2\sqrt{2}} \left(h\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{h}{4\sqrt{2}} - 8\right) - 2 \sin \frac{h}{2} \left(h \cos^2 \frac{h}{4\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \sin \frac{h}{2\sqrt{2}}\right)}{L^8 \left(h \cos \frac{h}{4} - 4 \sin \frac{h}{4}\right) \left(h \cos \frac{h}{4\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} \sin \frac{h}{4\sqrt{2}}\right)^2}, \quad (10.5.10.4)$$

i jednaka je nuli kad je  $h_{crit} = 2.03334 = 0.647232\pi$ . Kritična sila i duljina izvijanja za složenu konzolnu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{0.42EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 1.545L. \quad (10.5.10.5)$$

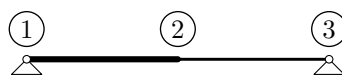
### Primjer 10.5.11. Složena slobodno oslonjena greda

Promatramo slobodno oslonjenu gredu duljine  $L$ , s promjenom krutosti na savijanje u sredini duljine grede, (Slika 10.5.11.1). Od početnog ležaja do sredine raspona grede je krutosti na savijanje  $2EI$ , a od sredine raspona do krajnjeg ležaja je krutosti na savijanje  $EI$ . Potrebno je odrediti kritičnu silu za zadanu složenu gredu.



Slika 10.5.11.1: Složena slobodno oslonjena greda

Zbog promjene krutosti na savijanje u sredini raspona gredu nužno moramo podijeliti na dva konačna elementa duljine  $L/2$ . Za svaki dio grede možemo izračunati pripadnu uzdužnu karakteristiku i izraziti



Slika 10.5.11.2: Podjela grede na dva dijela

pomoću jedinstvene uzdužne karakteristike  $h$ ,

$$h_{1-2} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI}} = \frac{h}{2\sqrt{2}}, \quad h_{2-3} = \sqrt{\frac{H \left(\frac{L}{2}\right)^2}{EI}} = \frac{h}{2}. \quad (10.5.11.1)$$

Elementarne matrice krutosti za svaki dio jednake su kao u prethodnom zadatku. Uklapanjem elementarnih matrica krutosti i uvrštavanjem rubnih uvjeta,  $w_1 = 0$ ,  $w_3 = 0$  slijedi matrica sustava. Determinanta matrice sustava iznosi

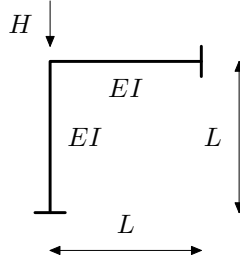
$$\det \mathbf{K} = \frac{8(EI)^4 h^7 \csc \frac{h}{4}}{L^6} \left( h \cos \frac{h}{4} - 4 \sin \frac{h}{4} \right) \sin \frac{h}{4} \sin \frac{h}{4\sqrt{2}}, \quad (10.5.11.2)$$

i jednaka je nuli kad je  $h_{crit} = 3.57986 = 1.13952\pi$ , a kritična sila i duljina izvijanja za složenu konzolnu gredu iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{1.3EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 0.88L. \quad (10.5.11.3)$$

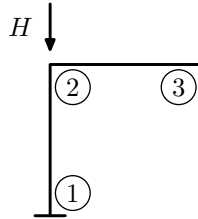
**Primjer 10.5.12.** *Translatorsno nepomični okvir*

Promatramo zadani translatorsno nepomični okvir, (Slika 10.5.12.1). Krutosti grede i stupa na savijanje su jednake i iznose  $EI$ . Potrebno je odrediti kritičnu silu za stup zadanog okvira. Na zadanom



Slika 10.5.12.1: Zadani translatorsno nepomični okvir

okviru definiramo ležajne čvorove i čvor spoja stupa i grede. Elementarna matrica krutosti stupa, uz



Slika 10.5.12.2: Podjela okvira

definiranu pripadnu uzdužnu karakteristiku  $h$ , jednaka je

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h (h \cos h - \sin h)}{L} & \frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h (h - \sin h)}{L} \\ \frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} \\ -\frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h (h - \sin h)}{L} & \frac{h^2 (-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h (h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.12.1)$$

Elementarna matrica krutosti grede jednaka je, ( $H_{\text{greda}} = 0$ ),

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (10.5.12.2)$$

Nakon transformacije matrice krutosti stupa u globalni koordinatni sustav, kinematičke kondenzacije matrice krutosti sustava i uvrštavanjem definiranih rubnih uvjeta, matrica krutosti sustava skalarna je vrijednost,

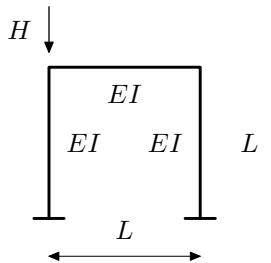
$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L} \frac{h(h \cos h - \sin h)}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} + \frac{4EI}{L}. \quad (10.5.12.3)$$

Izjednačavanjem dobivene vrijednosti s nulom slijedi  $h_{\text{crit}} = 5.328888 = 1.69623\pi$ . Kritična sila i duljina izvijanja stupa zadanog translatorno nepomičnog okvira iznose

$$H_{\text{crit}} = \frac{EI h_{\text{crit}}^2}{L^2} = \frac{2.88EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 0.59L. \quad (10.5.12.4)$$

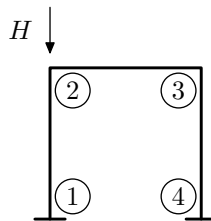
**Primjer 10.5.13.** *Translatorno pomični okvir - sila na jednom stupu*

Promatramo zadani translatorno pomični okvir, (Slika 10.5.13.1). Krutosti grede i stupova na savijanje su jednake i iznose  $EI$ . Potrebno je odrediti kritičnu silu za stup zadanog okvira. Na zadanom okviru



Slika 10.5.13.1: Zadani translatorno pomični okvir

definiramo ležajne čvorove i čvorove spoja stupova i grede. Elementarna matrica krutosti lijevog stupa,



Slika 10.5.13.2: Podjela okvira

uz definiranu pripadnu uzdužnu karakteristiku  $h$ , jednaka je

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} \\ \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h(h - \sin h)}{L} \\ \frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} \\ -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h(h - \sin h)}{L} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.13.1)$$

Elementarne matrice krutosti grede i desnog stupa jednake su, (uzdužne sile u gredi i desnom stupu jednake su nuli),

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (10.5.13.2)$$

Nakon transformacije matrice krutosti stupova u globalni koordinatni sustav, kinematičke kondenzacije matrice krutosti sustava i uvrštavanjem definiranih rubnih uvjeta, matrica krutosti sustava glasi

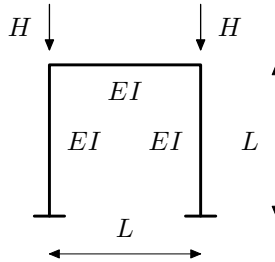
$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} - \frac{h^3 \sin h}{L^3(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{4}{L} + \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.13.3)$$

Izjednačavanjem determinante matrice sustava s nulom slijedi  $h_{crit} = 3.81916 = 1.216\pi$ . Kritična sila i duljina izvijanja stupa zadanog translatorno pomičnog okvira iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{1.478EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 0.8226L. \quad (10.5.13.4)$$

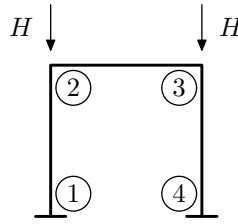
**Primjer 10.5.14.** *Translatorno pomični okvir - sila na oba stupa*

Promatramo zadani translatorno pomični okvir, (Slika 10.5.14.1). Krutosti grede i stupova na savijanje su jednake i iznose  $EI$ . Potrebno je odrediti kritičnu silu za stup zadanog okvira pomoću matrice krutosti okvira dobivene inženjerskom metodom pomaka. Na zadanom okviru definiramo ležajne čvorove



Slika 10.5.14.1: Zadani translatorno pomični okvir

i čvorove spoja stupova i grede. Elementarne matrice krutosti stupova, uz definiranu pripadnu uzdužnu



Slika 10.5.14.2: Podjela okvira

karakteristiku  $h$ , jednake su

$$\mathbf{K}_{ik} = \frac{EI}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \begin{bmatrix} -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h^3 \sin h}{L^3} & -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} \\ -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h(h - \sin h)}{L} \\ \frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h^3 \sin h}{L^3} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} \\ -\frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & -\frac{h(h - \sin h)}{L} & \frac{h^2(-1 + \cos h)}{L^2} & \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L} \end{bmatrix}. \quad (10.5.14.1)$$

Elementarna matrica krutosti grede jednaka je, (uzdužna sila u gredi jednaka je nuli),

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{[EF]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{12[EI]^{(e)}}{L^{(e)3}} & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{2[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6[EI]^{(e)}}{L^{(e)2}} & \frac{4[EI]^{(e)}}{L^{(e)}} \end{bmatrix}. \quad (10.5.14.2)$$

Nakon transformacije matrice krutosti stupova u globalni koordinatni sustav, kinematičke kondenzacije matrice krutosti sustava i uvrštavanjem definiranih rubnih uvjeta, matrica krutosti sustava glasi

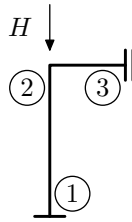
$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} -2 \frac{h^3 \sin h}{L^3(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} \\ \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{4}{L} + \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{2}{L} \\ \frac{h^2(-1+\cos h)}{L^2(-2+2 \cos h+h \sin h)} & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} + \frac{h(h \cos h - \sin h)}{L(-2+2 \cos h+h \sin h)} \end{bmatrix}. \quad (10.5.14.3)$$

Izjednačavanjem dobivenog koeficijenta s nulom slijedi  $h_{crit} = 2.71646 = 0.864676\pi$ . Kritična sila i duljina izvijanja stupa zadanog translatorno pomičnog okvira iznose

$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{0.748 EI \pi^2}{L^2}, \quad L_i = 1.1565 L. \quad (10.5.14.4)$$

**Primjer 10.5.15.** *Translatorno pomični okvir - sila na oba stupa - simetrija*

Promatramo zadani translatorno pomični okvir, (Slika 10.5.14.1), iz prethodnog zadatka. Zadatak riješiti simetrijom u svrhu pokazivanja da u nelinearnom proračunu ne vrijedi simetrija. Promatramo samo dio okvira do osi simetrije uz primjenu pravila za simetrične konstrukcije, zaokret i poprečna sila u osi simetrije jednaki su nuli. Jedina nepoznanica je kut zaokreta čvora spoja grede i stupa. Uzdužna



Slika 10.5.15.1: Izdvojeni dio - simetrija

sila u stupu jednaka je sili  $H$  što znači da je uzdužna karakteristika stupa  $h = \sqrt{\frac{HL^2}{EI}}$ . Izrazi za pripadne momente stupa i grede u čvoru 2 glase

$$M_{21} = \frac{EI}{L} \frac{h(h \cos h - \sin h)}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} \varphi_2, \quad M_{23} = \frac{2EI}{L} \varphi_2. \quad (10.5.15.1)$$

Jednadžba ravnoteže čvora 2 daje izraz

$$\left[ \frac{EI}{L} \frac{h(h \cos h - \sin h)}{-2 + 2 \cos h + h \sin h} + \frac{2EI}{L} \right] \varphi_2 = 0, \quad (10.5.15.2)$$

što znači da je matrica sustava zapravo skalarna vrijednost. Izjednačavanjem dobivenog koeficijenta s nulom slijedi  $h_{crit} = 5.01819 = 1.59734\pi$ . Kritična sila i duljina izvijanja stupa zadanog translatorno nepomičnog okvira iznose

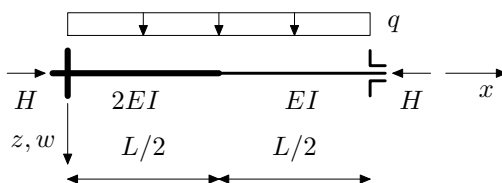
$$H_{crit} = \frac{EI h_{crit}^2}{L^2} = \frac{2.55EI\pi^2}{L^2}, \quad L_i = 0.63L. \quad (10.5.15.3)$$

Dobiveno rješenje u potpunosti je različito od stvarnog rješenja što jasno ukazuje da kod nelinearnog proračuna ne možete promatrati manje dijelove konstrukcije do osi simetrije nego konstrukciju u cjelini kako je i zadana.

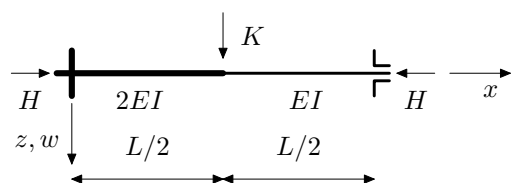
## 10.6. Zadaci

U zadacima je potrebno za zadane tlačno opterećene grede odrediti progibe i momente u karakterističnim točkama (u sredini raspona, ispod sila, na ležajevima, u točkama promjene krutosti, ...) za različite vrijednosti uzdužne karakteristike grede te kritičnu silu.

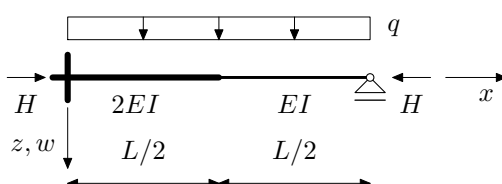
### Zadatak 10.6.1.



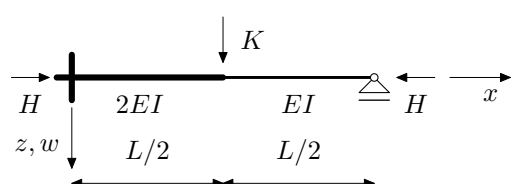
### Zadatak 10.6.3.



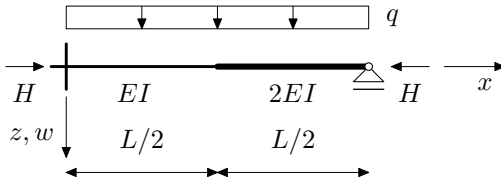
### Zadatak 10.6.2.



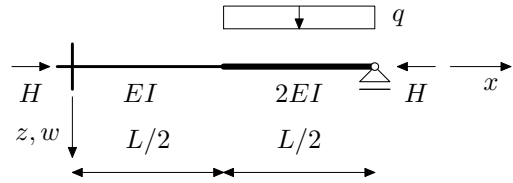
### Zadatak 10.6.4.



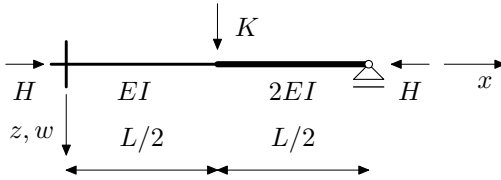
Zadatak 10.6.5.



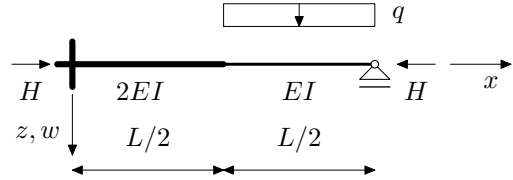
Zadatak 10.6.12.



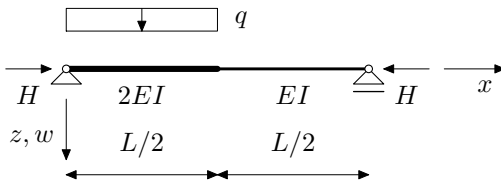
Zadatak 10.6.6.



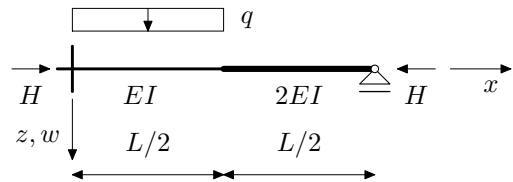
Zadatak 10.6.13.



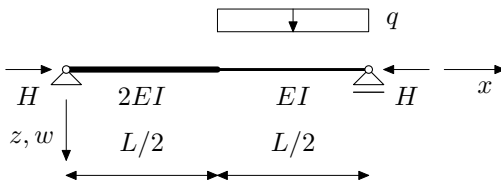
Zadatak 10.6.7.



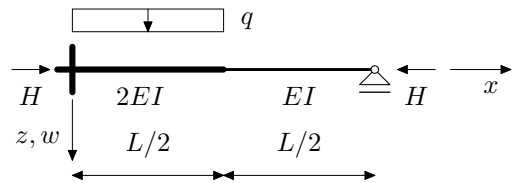
Zadatak 10.6.14.



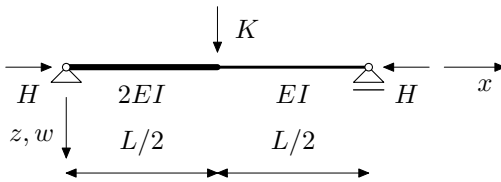
Zadatak 10.6.8.



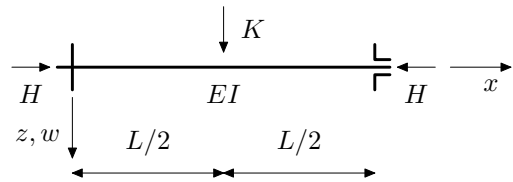
Zadatak 10.6.15.



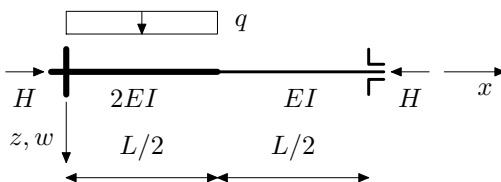
Zadatak 10.6.9.



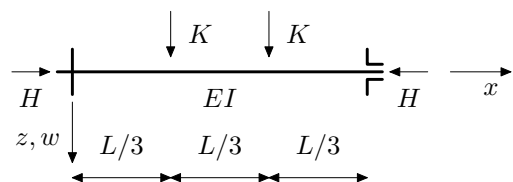
Zadatak 10.6.16.



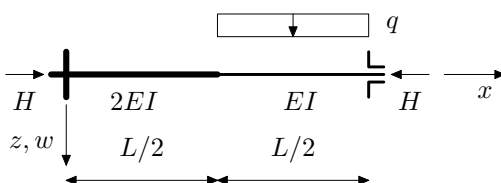
Zadatak 10.6.10.



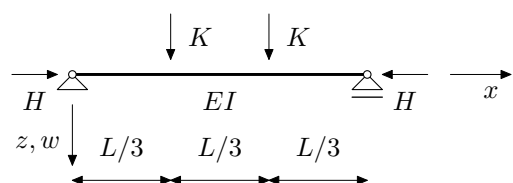
Zadatak 10.6.17.



Zadatak 10.6.11.

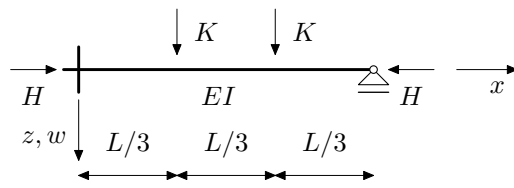


Zadatak 10.6.18.

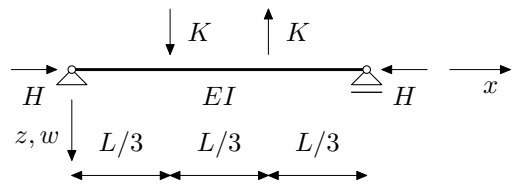




Zadatak 10.6.19.



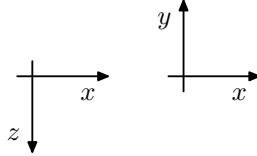
Zadatak 10.6.20.



## A Koordinatni sustavi

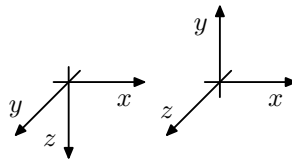
### A1. Osnovni koordinatni sustavi na pravcu, u ravnini i prostoru

Standardni (Kartezijev) koordinatni sustav u jednoj dimenziji, na pravcu, koordinatna je os  $x$ . U ravninskim slučajevima standardna su dva koordinatna sustava, ravnina razapeta osima  $x$  i  $z$  ili ravnina razapeta osima  $x$  i  $y$ , (Slika A1.1).



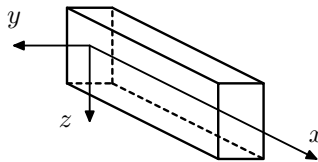
Slika A1.1: Koordinatni sustavi u ravnini

U prostornim slučajevima standardna su dva desno orijentirana koordinatna sustava prikazana na Slici A1.2. Jednadžbe grednih nosača u ravnini zapisivane u koordinatnom sustavu gdje je ravnina razapeta



Slika A1.2: Koordinatni sustavi u prostoru

osima  $x$  i  $z$ , a vektor momenta je tada uvijek u smjeru osi  $y$ . Težišna os grede definirana je kao os  $x$ , os  $z$  je okrenuta u smjeru djelovanja gravitacije. Ako ravninu  $xz$  na taj način definiramo, os  $y$  uvijek slijedi od promatrane ravnine prema promatraču, (Slika A1.3).



Slika A1.3: Koordinatni sustav za jednadžbe grednih nosača

### A2. Koordinatni sustavi na pravcu

Standardni (Kartezijev) koordinatni sustav u jednoj dimenziji koordinatna je os  $x$ . Zbog mogućnosti jednostavnijeg zapisa jednadžbi na jednodimenzionalnim konačnim elementima duljine  $L^{(e)}$  koristi se i prirodni koordinatni sustav  $\xi$  definiran uz transformaciju

$$\xi = \frac{x}{L^{(e)}} . \quad (\text{A2.1})$$

Očito slijedi obrnuta relacija  $x = L^{(e)}\xi$  i pripadni diferencijalni odnos

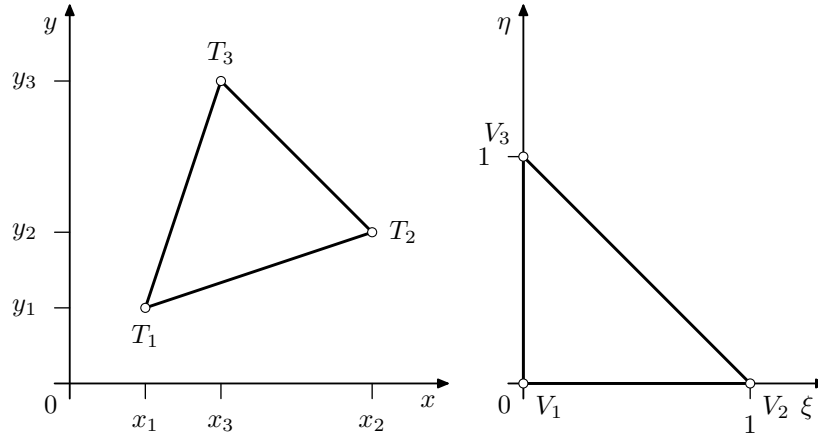
$$d\xi = \frac{1}{L^{(e)}} dx . \quad (\text{A2.2})$$

### A3. Koordinatni sustavi dvodimenzionalnih rubnih zadaća

#### A3.1. Standardni koordinatni sustavi za trokutne konačne elemente

Promatramo proizvoljni trokut ( $\Delta T_1 T_2 T_3$ ) u općem položaju u standardnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu  $xy$ , ( $T_1 = (x_1, y_1)$ ,  $T_2 = (x_2, y_2)$ ,  $T_3 = (x_3, y_3)$ ). Takav trokut možemo preslikati na

jedinični jednakokračni pravokutni (katete duljine 1) trokut ( $\Delta V_1V_2V_3$ ) u koordinatnom sustavu  $\xi\eta$ , ( $V_1 = (0, 0), V_2 = (1, 0), V_3 = (0, 1)$ ). Između točaka oba trokuta vrijede relacije



Slika A3.1: Trokut u koordinatnim sustavima  $xy$  i  $\xi\eta$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta, \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

$$\begin{aligned} \xi &= [(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)] / J, \\ \eta &= [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] / J, \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

pri čemu je  $J$ , *Jacobian*, jednak

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

Između koordinatnih sustava postoji veza diferencijala

$$dxdy = Jd\xi d\eta. \quad (\text{A3.4})$$

Potrebne parcijalne derivacije po  $x$  i  $y$  možemo izraziti preko parcijalnih derivacija u sustavu  $\xi\eta$

$$\begin{aligned} w_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x \\ &= w_\xi \frac{y_3 - y_1}{J} - w_\eta \frac{y_2 - y_1}{J}, \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

$$\begin{aligned} w_y &= w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y \\ &= -w_\xi \frac{x_3 - x_1}{J} + w_\eta \frac{x_2 - x_1}{J}. \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

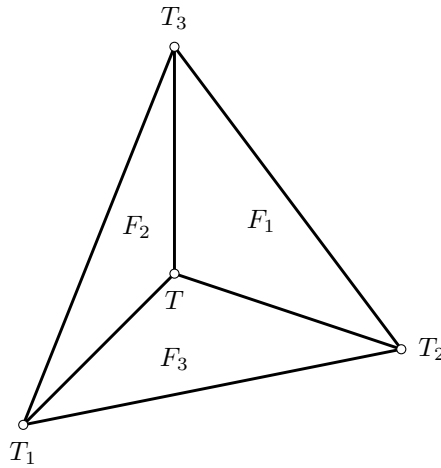
### A3.2. Površinski koordinatni sustavi za trokutne konačne elemente

Proizvoljni trokut ( $\Delta T_1T_2T_3$ ) u ravnini  $xy$  možemo promatrati i u površinskom koordinatnom sustavu  $L_1L_2L_3$ . Koordinate točaka u površinskom koordinatnom sustavu definirane su kao omjeri ploština pripadnih dijelova trokuta nasuprot svakog vrha trokuta i ploštine cijelog trokuta. Proizvoljna točka  $T(x, y, z)$  u površinskom koordinatnom sustavu ima koordinate

$$L_1 = \frac{F_1}{F} = \frac{1}{2F} [(x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)], \quad (\text{A3.7})$$

$$L_2 = \frac{F_2}{F} = \frac{1}{2F} [(x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)], \quad (\text{A3.8})$$

$$L_3 = \frac{F_3}{F} = \frac{1}{2F} [(x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)], \quad (\text{A3.9})$$



Slika A3.2: Trokut u površinskom koordinatnom sustavu

gdje je  $F$  površina trokuta,

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{A3.10})$$

a pripadni dijelovi površina

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \quad (\text{A3.11})$$

Očito da za svaku točku trokuta vrijedi

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1, \quad (\text{A3.12})$$

i slijedi relacija između koordinata u standardnom i površinskom koordinatnom sustavu,

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3, \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3. \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

Relacije, (A3.12) i (A3.13), možemo zajednički napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A3.14})$$

Posljedica odnosa (A3.12) je da su zapravo neovisne samo dvije koordinate, uvijek možemo jednu koordinatu izraziti pomoću ostalih koordinata,

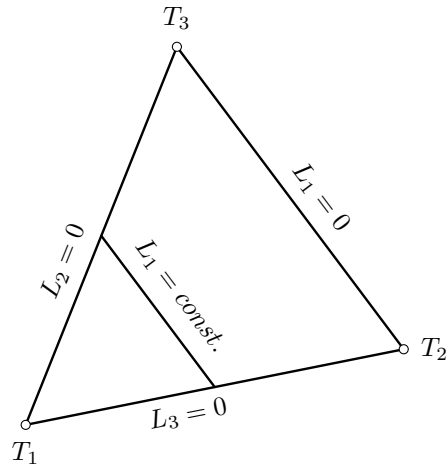
$$L_i = 1 - L_j - L_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k. \quad (\text{A3.15})$$

Ta činjenica je bitna za proračun Jacobian kod transformacije koordinata u podintegralnim funkcijama. Za standardne koordinate iskazane preko površinskih vrijedi

$$\begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 (1 - L_1 - L_2) = (x_1 - x_3) L_1 + (x_2 - x_3) L_2 + x_3, \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 (1 - L_1 - L_2) = (y_1 - y_3) L_1 + (y_2 - y_3) L_2 + y_3. \end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

Za podintegralnu funkciju tada vrijedi supstitucija

$$dx dy = J dL_1 dL_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{vmatrix} dL_1 dL_2 = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} dL_1 dL_2 = 2F^{(e)} dL_1 dL_2. \quad (\text{A3.17})$$



Slika A3.3: Karakteristične koordinate u površinskom koordinatnom sustavu

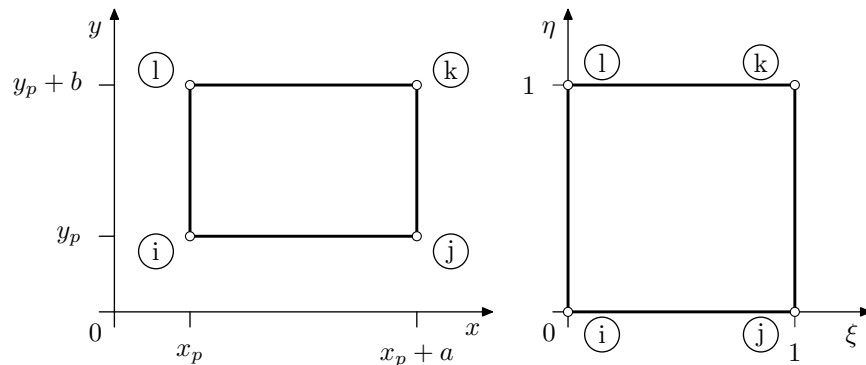
Za točke na stranici trokuta  $\overline{T_j T_k}$ , nasuprot čvora  $T_i$  vrijedi  $L_i = 0$  i  $L_j + L_k = 1$ . Za točke na dužini paralelnoj stranici trokuta  $\overline{T_j T_k}$  vrijedi  $L_i = \text{const.}$  i jednako je omjeru udaljenosti vrha  $T_i$  do dužine paralelne stranice  $\overline{T_j T_k}$  i udaljenosti do stranice  $\overline{T_j T_k}$ , (Slika A3.3).

Između površinskih koordinata i koordinata u sustavu  $\xi\eta$  vrijede relacije

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \quad L_2 = \xi, \quad L_3 = \eta. \quad (\text{A3.18})$$

### A3.3. Koordinatni sustavi za pravokutne konačne elemente

Pravokutnik, duljina stranica  $a$  i  $b$ , u općem položaju u standardnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu  $xy$  možemo transformirati na jedinični kvadrat u koordinatnom sustavu  $\xi\eta$ . Između točaka unutar

Slika A3.4: Pravokutni konačni element u koordinatnim sustavima  $xy$  i  $\xi\eta$ 

elemenata vrijedi odnos

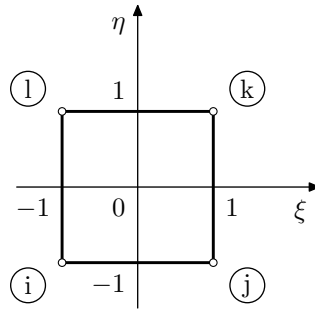
$$\xi = (x - x_p)/a, \quad \eta = (y - y_p)/b, \quad (\text{A3.19})$$

$$x = x_p + a\xi, \quad y = y_p + b\eta. \quad (\text{A3.20})$$

Jacobian transformacije glasi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab. \quad (\text{A3.21})$$

Za jednostavniji prikaz funkcija oblika na pravokutnom konačnom elementu, pravokutni konačni element možemo prikazati u prirodnom koordinatnom sustavu u dvije dimenzije, u sustavu  $\xi\eta$  pri čemu su  $\xi, \eta \in [-1, 1]$ , a težište pravokutnika je u ishodištu koordinatnog sustava. Transformacija pravokutnika sa

Slika A3.5: Pravokutni konačni element u koordinatnim sustavu  $\xi\eta$ ,  $\xi, \eta \in [-1, 1]$ 

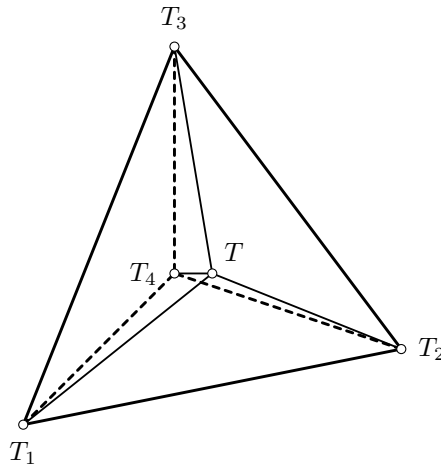
stranicama duljine  $a$  i  $b$  iz standardnog koordinatnog sustava u prirodni koordinatni sustav slijedi prema

$$\xi = \frac{2x - a}{a}, \quad \eta = \frac{2y - b}{b}. \quad (\text{A3.22})$$

Jacobian transformacije kod ove transformacije iznosi  $\frac{ab}{4}$ .

#### A4. Volumenski koordinatni sustav za tetraedarske konačne elemente

Proizvoljni tetraedar ( $T_1T_2T_3T_4$ ) u prostoru  $xyz$  možemo promatrati i u volumenskom koordinatnom sustavu  $L_1L_2L_3L_4$ . Koordinate točaka tetraedra u volumenskom koordinatnom sustavu definirane su kao omjeri volumena pripadnih dijelova tetraedra nasuprot svakog vrha tetraedra i volumena cijelog tetraedra. Proizvoljna točka  $T(x, y, z)$  u volumenskom koordinatnom sustavu ima koordinate



Slika A4.6: Tetraedar u volumenskom koordinatnom sustavu

$$L_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2F} [(x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)], \quad (\text{A4.23})$$

$$L_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{1}{2F} [(x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)], \quad (\text{A4.24})$$

$$L_3 = \frac{V_3}{V} = \frac{1}{2F} [(x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)], \quad (\text{A4.25})$$

$$L_4 = \frac{V_4}{V} = \frac{1}{2F} [(x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)], \quad (\text{A4.26})$$

gdje je  $V$  volumen tetraedra,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad (\text{A4.27})$$

a pripadni dijelovi volumena, ( $V_i$  je volumen tetraedra ( $TT_jT_kT_l$ ),  $i = 1, 2, 3, 4$ ),

$$V_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$V_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad V_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix},$$
(A4.28)

Očito da za svaku točku tetraedra vrijedi

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1, \quad (A4.29)$$

i slijedi relacija između koordinata u standardnom i volumenskom koordinatnom sustavu,

$$\begin{aligned} x &= x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 + x_4L_4, \\ y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4L_4. \\ z &= z_1L_1 + z_2L_2 + z_3L_3 + z_4L_4. \end{aligned} \quad (A4.30)$$

Relacije, (A4.29) i (A4.30), možemo zajednički napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}. \quad (A4.31)$$

Posljedica odnosa (A4.29) je da su zapravo neovisne samo tri koordinate, uvijek možemo jednu koordinatu izraziti pomoću ostalih koordinata,

$$L_i = 1 - L_j - L_k - L_l, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4 \quad i \neq j \neq k \neq l. \quad (A4.32)$$

To je bitno za proračun Jacobian kod transformacije koordinata u podintegralnim funkcijama. Za standardne koordinate iskazane preko volumenskih vrijedi

$$\begin{aligned} x &= x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 + x_4(1 - L_1 - L_2 - L_3) \\ &= (x_1 - x_4)L_1 + (x_2 - x_4)L_2 + (x_3 - x_4)L_3 + x_4, \\ y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4(1 - L_1 - L_2 - L_3) \\ &= (y_1 - y_4)L_1 + (y_2 - y_4)L_2 + (y_3 - y_4)L_3 + y_4, \\ z &= z_1L_1 + z_2L_2 + z_3L_3 + z_4(1 - L_1 - L_2 - L_3) \\ &= (z_1 - z_4)L_1 + (z_2 - z_4)L_2 + (z_3 - z_4)L_3 + z_4. \end{aligned} \quad (A4.33)$$

Za podintegralnu funkciju tada vrijedi supstitucija

$$\begin{aligned} dx dy dz &= J dL_1 dL_2 dL_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} & \frac{\partial z}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} & \frac{\partial z}{\partial L_2} \\ \frac{\partial x}{\partial L_3} & \frac{\partial y}{\partial L_3} & \frac{\partial z}{\partial L_3} \end{vmatrix} dL_1 dL_2 dL_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_2 - x_4 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_4 & y_2 - y_4 & y_3 - y_4 \\ z_1 - z_4 & z_2 - z_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} dL_1 dL_2 dL_3 = 6V^{(e)} dL_1 dL_2 dL_3. \end{aligned} \quad (A4.34)$$

Za točke na bridovima tetraedra  $\overline{T_iT_j}$  vrijedi  $L_k = L_m = 0$  i  $L_i + L_j = 1$ . Za točke na stranicama tetraedra  $\Delta T_jT_kT_l$ , nasuprot čvora  $T_i$  vrijedi  $L_i = 0$  i  $L_j + L_k + L_l = 1$ . Za točke u ravninama paralelnim ravnini trokuta  $\Delta T_jT_kT_l$  vrijedi  $L_i = const.$  i jednako je omjeru udaljenosti vrha  $T_i$  do ravnine paralelne ravnini trokuta  $\Delta T_jT_kT_l$  i udaljenosti do ravnine trokuta  $\Delta T_jT_kT_l$ .

## B Osnovni pojmovi matrice algebre

### B1. Notacija

Skalarne vrijednosti iskazivat ćemo malim ili velikim obično otisnutim slovom, npr. progib  $w$ , modul elastičnosti  $E$ . Vektore prikazujemo malim, masno otisnutim slovom, npr. vektor nepoznatih pomaka  $\mathbf{w}$  ili vektor čvornih opterećenja  $\mathbf{q}$ . Komponente vektora prikazivat ćemo pripadnim malim, obično otisnutim, slovom istim kao i vektor, uz indeks koji određuje o kojoj se komponenti vektora radi, npr.  $w_i$  predstavlja  $i$ -tu komponentu vektora nepoznatih pomaka  $\mathbf{w}$ . Velikim, masno otisnutim, slovima prikazivat ćemo matrice, npr. matrica krutosti  $\mathbf{K}$ . Član matrice u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu bit će označen pripadnim malim, obično otisnutim, slovom s dvostrukim indeksom, npr.  $k_{ij}$  predstavlja element matrice krutosti  $\mathbf{K}$  u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu.

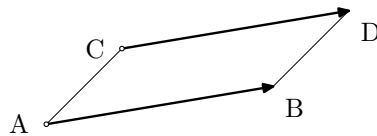
### B2. Vektori

#### B2.1. Geometrijsko i fizikalno značenje vektora

Neka su  $A$  i  $B$  dvije točke u  $n$ -dimenzionalnom prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Orijentiranu dužinu  $\overrightarrow{AB}$  zovemo vektor. Geometrijsko značenje vektora je translacijski pomak u prostoru  $\mathbb{R}^n$ , iz točke  $A \in \mathbb{R}^n$  u točku  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ . Fizikalno značenje vektora je sila na pravcu točaka  $A$  i  $B$  čiji je iznos jednak duljini vektora. Duljina vektora je udaljenost točaka  $A$  i  $B$ . Smjer (pravac) vektora definiran je pravcem kroz točke  $A$  i  $B$ . Usmjerenje vektora određeno je definiranjem početne i krajnje točke.

Vektori  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  su jednaki ako točke  $A, B, D, C$  (točno tim redoslijedom) tvore paralelogram iz čega proizlazi tvrdnja o jednakosti vektora:

Dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer (pravac) i isto usmjerenje.



Slika B2.1: Jednakost vektora, grafički prikaz

Vektor  $\mathbf{v}$  dimenzije  $n$  ( $n$ -dimenzionalni vektor) u prostoru  $\mathbb{R}^n$  uređena je  $n$ -torka realnih brojeva

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T. \quad (\text{B2.1})$$

Dva su vektora  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  jednaka ako i samo ako su im jednake sve komponente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \Leftrightarrow v_i = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{B2.2})$$

Duljina (modul) vektora preslikavanja je iz skupa  $\mathbb{R}^n$  u skup nenegativnih realnih brojeva  $\mathbb{R}_0^+$  i definirano izrazom

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}. \quad (\text{B2.3})$$

Transponirani vektor je vektor zapisan kao redak

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad \text{ili} \quad \mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T. \quad (\text{B2.4})$$



### B2.2. Množenje vektora skalarom

Množenjem  $n$ -dimenzionalnog vektora skalarom  $\lambda \in \mathbb{R}$  dobijemo  $n$ -dimenzionalni vektor čije su komponente jednake komponentama zadanog vektora pomnoženim zadanim skalarom,

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix}. \quad (\text{B2.5})$$

### B2.3. Zbrajanje vektora

Zbroj dva  $n$ -dimenzionalna vektora (rezultanta vektora) jednak je  $n$ -dimenzionalnom vektoru čije su komponente jednake zbroju komponenti zadanih vektora

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}. \quad (\text{B2.6})$$

Za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom vrijede svojstva

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \quad \text{komutativnost}, \quad (\text{B2.7})$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) \quad \text{asocijativnost}, \quad (\text{B2.8})$$

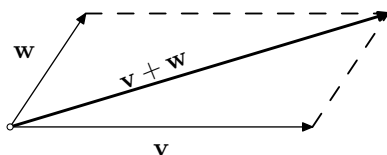
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (\text{B2.9})$$

$$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}, \quad (\text{B2.10})$$

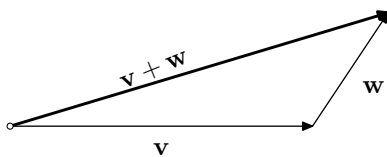
$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}, \quad (\text{B2.11})$$

$$\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}. \quad (\text{B2.12})$$

Fizikalno, zbroj vektora (sila) je rezultatna sila. Geometrijski, zbroj vektora jednak je dijagonali paralelograma razapetog sa zadanim vektorima (pravilo paralelograma), ili postupna translacija iz početne točke za zadane vektore neovisno o redoslijedu vektora jer vrijedi komutativnost (pravilo trokuta).



Slika B2.2: Zbrajanje vektora, pravilo paralelograma

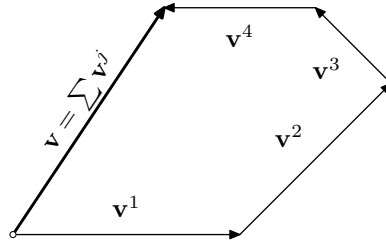


Slika B2.3: Zbrajanje vektora, pravilo trokuta

Na isti način možemo definirati i zbrajanje više vektora

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{v}^j = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m v_1^j \\ \sum_{j=1}^m v_2^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m v_n^j \end{bmatrix}, \quad (\text{B2.13})$$

što u geometrijskom smislu opet predstavlja postupnu translaciju iz početne točke za zadane vektore (pravilo poligona).



Slika B2.4: Zbrajanje vektora, pravilo poligona (mnogokuta)

#### B2.4. Skalarni produkt vektora

Skalarni produkt vektora  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ , oznaka  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  ili  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ , definiramo

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n v_i w_i . \quad (\text{B2.14})$$

Vrijednost skalarnog produkta možemo izračunati i kao

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) , \quad (\text{B2.15})$$

pri čemu je  $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in [0, \pi]$  kut između vektora.

Skalarni produkt je komutativna operacija,  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Za skalarni produkt vrijedi svojstvo distributivnosti,

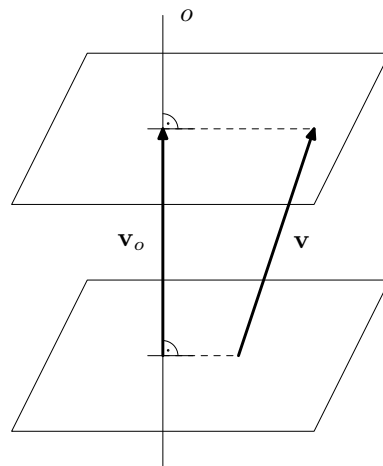
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} . \quad (\text{B2.16})$$

Skalarni produkt može poslužiti i za definiranje okomitosti vektora. Dva vektora  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  međusobno su okomita ako i samo ako vrijedi  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ .

Skalarni produkt možemo primijeniti kod projekcije vektora na proizvoljnu os ili proizvoljnu ravninu. Neka je  $\mathbf{e}_0$  jedinični vektor proizvoljne osi  $o$ . Projekcija vektora  $\mathbf{v}$  na os  $o$  jednaka je

$$\mathbf{v}_o = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 . \quad (\text{B2.17})$$

Grafički projekciju vektora na os određujemo postavljanjem ravnina okomitih na os kroz vrhove vektora. Vektor između probodišta zadane osi s tim ravninama predstavlja projekciju vektora na os.

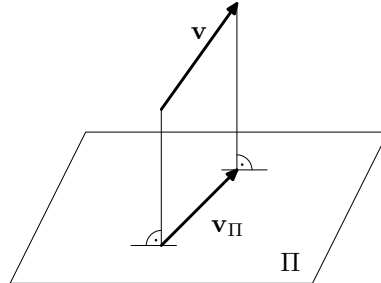


Slika B2.5: Projekcija vektora na os

Neka je  $\mathbf{n}$  jedinični vektor normale na proizvoljnu ravninu  $\Pi$ . Projekcija vektora  $\mathbf{v}$  na ravninu  $\Pi$  jednaka je razlici zadanog vektora i njegove projekcije na pravac normale  $\mathbf{n}$  na ravninu

$$\mathbf{v}_{\Pi} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{n}} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} . \quad (\text{B2.18})$$

Grafički projekciju vektora na ravninu određujemo postavljanjem pravaca okomitih na ravninu iz vrhova vektora. Vektor između probodišta tih pravaca sa zadanom ravninom predstavlja projekciju vektora na ravninu.



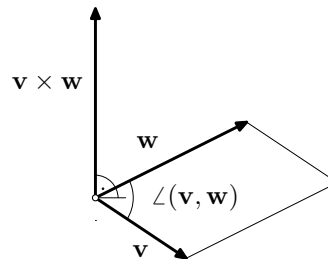
Slika B2.6: Projekcija vektora na ravninu

### B2.5. Vektorski produkt vektora

Vektorski produkt vektora  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  (oznaka  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ) definiramo

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{i} + (v_z w_x - v_x w_z) \mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (\text{B2.19})$$

Vektorski produkt je vektor okomit na ravninu  $\Pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$  u kojoj se nalaze vektori koji tvore vektorski produkt,  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \Pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ . To povlači da je vektorski produkt okomit na oba vektora koji tvore vektorski produkt što znači da uređena trojka  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ , točno tim redoslijedom, tvori desno orijentiranu bazu.



Slika B2.7: Vektorski produkt

Apsolutnu vrijednost vektorskog produkta možemo izračunati i kao

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) , \quad (\text{B2.20})$$

što je površina paralelograma koji razapinju vektori  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  čime je definirana duljina vektora koji je dobiven kao vektorski produkt. Vektorski produkt je antikomutativna operacija, vrijedi jednakost  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ . Vektorski produkt dva kolinearna vektora jednak je nul-vektoru, odnosno  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$  povlači  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ .

### B2.6. Mješoviti produkt vektora

Mješoviti (vektorsko-skalarni) produkt vektora  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$  definiramo

$$(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cdot \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} , \quad (\text{B2.21})$$

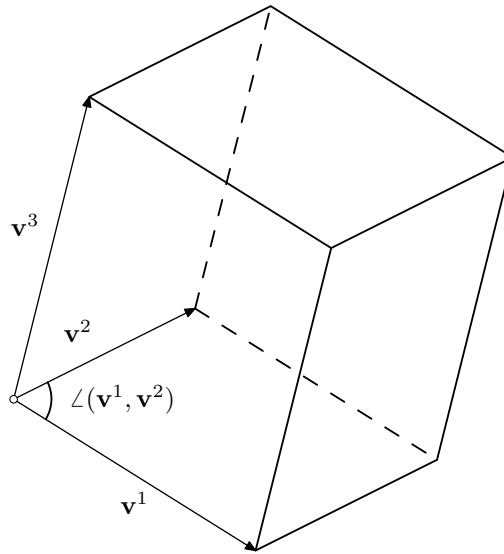
što nakon raspisivanja daje

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 &= (v_y^1 v_z^2 - v_z^1 v_y^2) v_x^3 + (v_z^1 v_x^2 - v_x^1 v_z^2) v_y^3 + (v_x^1 v_y^2 - v_y^1 v_x^2) v_z^3 \\ &= \begin{vmatrix} v_x^1 & v_y^1 & v_z^1 \\ v_x^2 & v_y^2 & v_z^2 \\ v_x^3 & v_y^3 & v_z^3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B2.22})$$

Apsolutnu vrijednost mješovitog produkta možemo izračunati i kao

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 &= (|\mathbf{v}^1| |\mathbf{v}^2| \sin \angle(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) |\mathbf{v}^3| \cos \angle(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) \\ &= (|\mathbf{v}^1| |\mathbf{v}^2| \sin \angle(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)) |\mathbf{v}^3| \sin \angle(\mathbf{v}^3, \Pi_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2}), \end{aligned} \quad (\text{B2.23})$$

pri čemu je  $\Pi_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2}$  ravnina u kojoj su vektori  $\mathbf{v}^1$  i  $\mathbf{v}^2$ . Geometrijski, mješoviti produkt predstavlja volumen paralelopipeda razapetog zadanim vektorima pri čemu je baza paralelogram razapet vektorima koji tvore pripadni vektorski produkt.



Slika B2.8: Mješoviti produkt, volumen paralelopipeda

Za mješoviti produkt vrijede odnosi

$$(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 = (\mathbf{v}^2 \times \mathbf{v}^3) \cdot \mathbf{v}^1 = (\mathbf{v}^3 \times \mathbf{v}^1) \cdot \mathbf{v}^2. \quad (\text{B2.24})$$

Mješoviti produkt može poslužiti i za definiranje komplanarnosti vektora (vektori se nalaze u istoj ravnini). Tri vektora  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \neq \mathbf{0}$  su komplanarna ako i samo ako vrijedi  $(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 = 0$ .

### B2.7. Vektorsko-vektorski produkt vektora

Vektorsko-vektorski produkt vektora  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$  definiramo

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \times \mathbf{v}^3 &: (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \times \mathbf{v}^3 &= (\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^3) \mathbf{v}^2 - (\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}^3) \mathbf{v}^1. \end{aligned} \quad (\text{B2.25})$$

Geometrijski, vektorsko-vektorski produkt je vektor u ravnini određenoj vektorima prvog vektorskog produkta.

### B2.8. Derivacije vektora

Vektor deriviramo po skalaru tako da svaku komponentu vektora deriviramo po zadanom skalaru

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_i \frac{da_i}{dt} \mathbf{e}_i. \quad (\text{B2.26})$$

Gradijent vektor je vektor dobiven deriviranjem skalarnog polja po smjerovima

$$\nabla\Phi = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial i} \mathbf{e}_i \quad . \quad (\text{B2.27})$$

Divergencija vektora skalarna je vrijednost dobivena zbrajanjem derivacija komponenti vektora po pripadnim smjerovima

$$\text{div}\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} \quad . \quad (\text{B2.28})$$

Laplace skalarnog polja opet je skalarno polje prema izrazu

$$\Delta\Phi = (\nabla \cdot \nabla)\Phi = \sum_i \frac{\partial^2\Phi}{\partial i^2} \quad . \quad (\text{B2.29})$$

### B2.9. Linearna nezavisnost vektora

Skup vektora  $\mathbf{v}^i, i = 1, \dots, n$  je linearno nezavisan ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}^i = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, \dots, n, \quad (\text{B2.30})$$

odnosno nijedan vektor iz skupa ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ostalih vektora.

## B3. Matrice

### B3.1. Definicija matrice

Matricama reda  $m \times n$  zovemo organizirane skupove brojeva sa  $m$  redaka i  $n$  stupaca i pišemo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B3.1})$$

Matrice koje imaju jednak broj redaka i stupaca,  $m = n$  zovemo kvadratne matrice. Na skupu kvadratnih matrica možemo definirati pojam **determinante matrice**,  $\det \mathbf{A}$ . Determinanta matrice je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima skalarnu vrijednost. Za kvadratnu matricu reda  $n$  vrijedi razvoj po  $i$ -tom retku (Laplaceov razvoj determinante)

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}, \quad (\text{B3.2})$$

pri čemu je matrica  $\mathbf{A}_{ij}$  matrica reda  $(n-1) \times (n-1)$ , matrica  $\mathbf{A}$  bez  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca. Matricu kod koje je determinanta jednaka nuli,  $\det \mathbf{A} = 0$ , nazivamo **singularna matrica**. Matrice za koje vrijedi,  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , nazivamo **regularne matrice**.

### B3.2. Zbrajanje matrice

Zbroj matrica nova je matrica čiji je svaki član jednak zbroju pripadnih članova matrica pribrojnika,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad . \quad (\text{B3.3})$$

Zbrajanje matrica komutativna je i asocijativna operacija,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (\text{B3.4})$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad . \quad (\text{B3.5})$$

**B3.3. Množenje matrica skalarom**

Kod množenja matrica skalarom, svaki član matrice pomnožimo skalarom

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} \Rightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij} . \quad (\text{B3.6})$$

Množenje matrice skalarom komutativna je i distributivna operacija,

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k , \quad (\text{B3.7})$$

$$k(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = k\mathbf{A} \pm k\mathbf{B} . \quad (\text{B3.8})$$

**B3.4. Množenje matrica**

Umnožak matrice  $\mathbf{A}_{m,k}$  i matrice  $\mathbf{B}_{k,n}$  matrica je  $\mathbf{C}_{m,n}$  čiji svaki član matrice dobivamo prema izrazu

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow c_{mn} = \sum_k a_{mk} b_{kn} . \quad (\text{B3.9})$$

Za produkt kvadratnih matrica istog reda vrijedi (Binet-Cauchyjev teorem)

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} . \quad (\text{B3.10})$$

Množenje matrica asocijativna je operacija,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) . \quad (\text{B3.11})$$

Množenje matrica nije komutativna operacija,  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ . Za množenje i zbrajanje matrica vrijedi distributivnost

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} . \quad (\text{B3.12})$$

**B3.5. Transponirana matrica**

Transponiranu matricu  $\mathbf{A}^T$  dobivamo zamjenom redaka i stupaca osnovne matrice  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} . \quad (\text{B3.13})$$

Determinanta transponirane matrice jednaka je determinantni matrice,  $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ . Za operaciju transponiranja vrijedi

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T . \quad (\text{B3.14})$$

**B3.6. Inverzna matrica**

Za matricu  $\mathbf{B}$  kažemo da je inverzna matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , ako vrijedi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} . \quad (\text{B3.15})$$

Regularne matrice su invertibilne matrice,  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Singularne matrice ne možemo invertirati. Za operaciju invertiranja vrijedi

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} . \quad (\text{B3.16})$$

Za inverznu matricu prema Binet-Cauchyjevom teoremu vrijedi

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} . \quad (\text{B3.17})$$

**B3.7. Simetrična matrica, dijagonalna matrica**

Matricu za koju vrijedi  $a_{ij} = a_{ji}$  nazivamo simetrična matrica. Za simetrične matrice vrijedi  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ . Skup simetričnih matrica označavamo *Symm*. Simetričnu matricu kod koje su svi vandijagonalni elementi jednaki nuli,  $a_{ij} = 0, i \neq j$ , nazivamo dijagonalna matrica. Skup svih dijagonalnih matrica označavamo *Diag*. Determinanta dijagonalne matrice jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata,  $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ . Dijagonalnu matricu kod koje su svi elementi na dijagonali jednaki jedinici,  $a_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$  nazivamo jedinična matrica (reda  $n$ ) i označavamo  $\mathbf{I}$  ili  $\mathbf{I}_n$ . Dijagonalnu matricu kod koje su svi elementi na dijagonali jednaki nuli,  $a_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$  nazivamo nul-matrica i označavamo  $\mathbf{0}$ .



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{(m+1)1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{(m+1)2} & k_{(m+2)2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k_{(m+1)1} & k_{(m+1)2} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{(m+2)2} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & k_{(n-1)(n-m-1)} & k_{(n-1)(n-m)} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} & k_{n(n-1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & k_{n(n-m)} & \dots & k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{11} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{21} & k_{22} \\ 0 & 0 & \dots & k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{m1} & \dots & k_{m(m-2)} & k_{m(m-1)} & k_{mm} \\ k_{(m+1)1} & k_{(m+1)2} & \dots & k_{(m+1)(m-1)} & k_{(m+1)m} & k_{(m+1)(m+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{(n-1)(n-m-1)} & k_{(n-1)(n-m)} & \dots & k_{(n-1)(n-3)} & k_{(n-1)(n-2)} & k_{(n-1)(n-1)} \\ k_{n(n-m)} & k_{n(n-m+1)} & \dots & k_{n(n-2)} & k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{B3.24}$$



## C Rješavanje sustava jednađžbi

### C1. Egzistencija rješenja

Promatramo sustav linearnih jednađžbi, u matricnom zapisu,

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{q}. \quad (\text{C1.1})$$

Ako redove ili stupce matrice sustava linearnih jednađžbi promatramo kao vektore, za sustav kađemo da ima rješenje ako su redovi ili stupci međusobno linearno nezavisni. Za takav sustav linearnih jednađžbi matrica sustava je regularna,  $\det \mathbf{K} \neq 0$ , odnosno postoji inverzna matrica matrice sustava. Sustave linearnih jednađžbi rješavamo postupcima eliminacija ili iterativnim postupcima.

### C2. Postupci eliminacija

#### C2.1. Gaussov postupak eliminacija

Najpoznatiji postupak eliminacija rješavanje je sustava Gausovim eliminacijama. Kod metode konačnih elemenata posebno je svojstveno da je matrica sustava simetrična i pozitivno definitna što pojednostavljuje postupak Gaussovih eliminacija. Gaussova eliminacija sukcesivno eliminira nepoznanice, u  $i$ -tom koraku eliminira se nepoznanica  $w_i$  iz jednađžbi  $j = i + 1, \dots, n$ , tako da nakon  $(n - 1)$  eliminacija u posljednjoj jednađžbi jedina nepoznanica ostaje  $w_n$ . Promotrimo općeniti sustav  $n$  linearnih jednađžbi s  $n$  nepoznanica,

$$\begin{array}{cccccc} k_{11}w_1 + & k_{12}w_2 + & k_{13}w_3 + & \dots & +k_{1n}w_n & = q_1 \\ k_{21}w_1 + & k_{22}w_2 + & k_{23}w_3 + & \dots & +k_{2n}w_n & = q_2 \\ k_{31}w_1 + & k_{32}w_2 + & k_{33}w_3 + & \dots & +k_{3n}w_n & = q_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}w_1 + & k_{n2}w_2 + & k_{n3}w_3 + & \dots & +k_{nn}w_n & = q_n \end{array} \quad (\text{C2.1})$$

U prvom koraku eliminacije definiramo koeficijente

$$l_{i1} = \frac{k_{i1}}{k_{11}}, i = 2, \dots, n, \quad (\text{C2.2})$$

s kojim pomnođimo prvi redak i oduzmemo od  $i$ -tog retka čime dobivamo nove članove  $i$ -tog retka

$$k_{ij}^{(1)} = k_{ij} - l_{i1}k_{1j}, q_i^{(1)} = q_i - l_{i1}q_1, i, j = 2, \dots, n, \quad (\text{C2.3})$$

a koeficijenti  $l_{i1}, i = 2, \dots, n$  su elementi ispod dijagonale prvog stupca donjetrokutaste matrice  $\mathbf{L}_G$ . Sustav sada glasi

$$\begin{array}{cccccc} k_{11}w_1 + & k_{12}w_2 + & k_{13}w_3 + & \dots & +k_{1n}w_n & = q_1 \\ k_{22}^{(1)}w_2 + & k_{23}^{(1)}w_3 + & \dots & +k_{2n}^{(1)}w_n & = q_2^{(1)} \\ k_{32}^{(1)}w_2 + & k_{33}^{(1)}w_3 + & \dots & +k_{3n}^{(1)}w_n & = q_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n2}^{(1)}w_2 + & k_{n3}^{(1)}w_3 + & \dots & +k_{nn}^{(1)}w_n & = q_n^{(1)} \end{array} \quad (\text{C2.4})$$

Na isti naćin nastavimo u sljedećim koracima eliminacija, u općenitom  $k$ -tom koraku koeficijent iznosi

$$l_{ik} = \frac{k_{ik}^{(k-1)}}{k_{kk}^{(k-1)}}, i = k + 1, \dots, n. \quad (\text{C2.5})$$

Novi koeficijenti sustava, novi elementi  $i$ -tog retka ( $i = k + 1, \dots, n$ ), su

$$k_{ij}^{(k)} = k_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}k_{kj}^{(k-1)}, q_i^{(k)} = q_i^{(k-1)} - l_{ik}q_k^{(k-1)}, i, j = k + 1, \dots, n, \quad (\text{C2.6})$$

a koeficijenti  $l_{ik}, i = k + 1, \dots, n$  elementi su  $k$ -tog stupca ispod dijagonale donjetrokutaste matrice  $\mathbf{L}_G$ . Nakon  $(n - 1)$  koraka (eliminacija) dobivamo sustav

$$\begin{array}{cccccc} k_{11}w_1 + & k_{12}w_2 + & k_{13}w_3 + & \dots + & k_{1n-1}w_{n-1} + & k_{1n}w_n & = q_1 \\ & k_{22}^{(1)}w_2 + & k_{23}^{(1)}w_3 + & \dots + & k_{2n-1}^{(1)}w_{n-1} + & k_{2n}^{(1)}w_n & = q_2^{(1)} \\ & & k_{33}^{(2)}w_3 + & \dots + & k_{3n-1}^{(2)}w_{n-1} + & k_{3n}^{(2)}w_n & = q_3^{(2)} \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & k_{n-1n-1}^{(n-2)}w_{n-1} + & k_{n-1n}^{(n-2)}w_n & = q_{n-1}^{(n-2)} \\ & & & & & k_{nn}^{(n-1)}w_n & = q_n^{(n-1)} \end{array} \quad (\text{C2.7})$$

Iz ovako prikazanog sustava nepoznanice se jednostavno mogu odrediti povratnim postupkom

$$w_k = \frac{q_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n k_{kj}^{(k-1)} w_j}{k_{kk}^{(k-1)}} \quad k = n, n-1, \dots, 1. \quad (\text{C2.8})$$

Postupkom Gaussovih eliminacija matricu sustava smo rastavili na produkt matrica

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}_G \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}_G^T, \quad (\text{C2.9})$$

pri čemu je matrica  $\mathbf{L}_G$  donja trokutasta matrica, a matrica  $\mathbf{D}$  dijagonalna

$$\mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(n-1)1} & l_{(n-1)2} & l_{(n-1)3} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C2.10})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^{(2)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C2.11})$$

Uvođenjem pomoćnih vektora  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{c}$  postupak rješavanja sustava linearnih jednadžbi Gausovim eliminacijama možemo definirati u 4 koraka:

- Gaussov rastav matrice  $\mathbf{K}$  na matrice  $\mathbf{L}_G$  i  $\mathbf{D}$ ,
- rješavanje sustava  $\mathbf{L}_G \mathbf{y} = \mathbf{q}$ ,
- rješavanje sustava  $\mathbf{D} \mathbf{c} = \mathbf{y}$ ,
- povratni postupak  $\mathbf{L}_G^T \mathbf{w} = \mathbf{c}$ .

Postupak Gaussovih eliminacija možemo uvijek primijeniti, ali nedostatak postupka pri programiranju je da koeficijente  $l_{ik}$  moramo pamtititi do kraja pripadnog koraka i tek onda spremiti na memorijsko mjesto u osnovnoj matrici. Taj nedostatak je riješen za simetrične i pozitivno definitne matrice (takve matrice se javljaju u sustavima rješavanja zadaća metodom konačnih elemenata) postupkom Choleskog.

## C2.2. Postupak Choleskog

Matrica sustava koja proizlazi iz metode konačnih elemenata je simetrična i pozitivno definitna. Matricu sustava možemo rastaviti na produkt donjetrokutaste matrice  $\mathbf{L}_{CH}$  i pripadne transponirane gornjetrokutaste matrice  $\mathbf{L}_{CH}^T$ , u obliku

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}_{CH} \cdot \mathbf{L}_{CH}^T, \quad (\text{C2.12})$$

pri čemu je matrica  $\mathbf{L}_{CH}$  jednaka produktu donjetrokutaste matrice  $\mathbf{L}_G$  i korijena iz dijagonalne matrice  $\mathbf{D}$  definiranih tijekom Gaussovog postupka rastava matrice sustava

$$\mathbf{L}_{CH} = \mathbf{L}_G \cdot \mathbf{D}^{1/2}, \quad (\text{C2.13})$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\text{CH}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21}^{\text{G}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31}^{\text{G}} & l_{32}^{\text{G}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(n-1)1}^{\text{G}} & l_{(n-1)2}^{\text{G}} & l_{(n-1)3}^{\text{G}} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1}^{\text{G}} & l_{n2}^{\text{G}} & l_{n3}^{\text{G}} & \dots & l_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{k_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_{22}^{(1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k_{33}^{(2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{k_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{k_{nn}^{(n-1)}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{k_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{k_{11}} \cdot l_{21}^{\text{G}} & \sqrt{k_{22}^{(1)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{k_{11}} \cdot l_{31}^{\text{G}} & \sqrt{k_{22}^{(1)}} \cdot l_{32}^{\text{G}} & \sqrt{k_{33}^{(2)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{k_{11}} \cdot l_{(n-1)1}^{\text{G}} & \sqrt{k_{22}^{(1)}} \cdot l_{(n-1)2}^{\text{G}} & \sqrt{k_{33}^{(2)}} \cdot l_{(n-1)3}^{\text{G}} & \dots & \sqrt{k_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} & 0 \\ \sqrt{k_{11}} \cdot l_{n1}^{\text{G}} & \sqrt{k_{22}^{(1)}} \cdot l_{n2}^{\text{G}} & \sqrt{k_{33}^{(2)}} \cdot l_{n3}^{\text{G}} & \dots & \sqrt{k_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} \cdot l_{n(n-1)}^{\text{G}} & \sqrt{k_{nn}^{(n-1)}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_{11}^{\text{CH}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21}^{\text{CH}} & l_{22}^{\text{CH}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31}^{\text{CH}} & l_{32}^{\text{CH}} & l_{33}^{\text{CH}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(n-1)1}^{\text{CH}} & l_{(n-1)2}^{\text{CH}} & l_{(n-1)3}^{\text{CH}} & \dots & l_{(n-1)(n-1)}^{\text{CH}} & 0 \\ l_{n1}^{\text{CH}} & l_{n2}^{\text{CH}} & l_{n3}^{\text{CH}} & \dots & l_{n(n-1)}^{\text{CH}} & l_{nn}^{\text{CH}} \end{bmatrix} . \tag{C2.14}
\end{aligned}$$

Prikazane koeficijente u  $k$ -tom stupcu matrice  $\mathbf{L}_{\text{CH}}$  proračunamo prema izrazima

$$l_{kk}^{\text{CH}} = \sqrt{k_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{C2.15}$$

za dijagonalne članove, te za izvandijagonalne članove,

$$l_{ik}^{\text{CH}} = \sqrt{k_{kk}^{(k-1)}} \cdot l_{ik}^{\text{G}} = \sqrt{k_{kk}^{(k-1)}} \cdot \frac{k_{ik}^{(k-1)}}{k_{kk}^{(k-1)}} = \frac{k_{ik}^{(k-1)}}{l_{kk}^{\text{CH}}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = k + 1, \dots, n. \tag{C2.16}$$

Promjena članova na desnoj strani jednadžbe slijedi prema

$$q_k^{\text{CH}} = \frac{q_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^{\text{CH}} q_i^{(i)}}{l_{kk}^{\text{CH}}}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{C2.17}$$

Za definiranje postupka Choleskog dovoljno je uvesti samo jedan pomoćni vektor  $\mathbf{c}$ , transformirani vektor opterećenja, a postupak rješavanja sustava linearnih jednadžbi eliminacijama tipa Cholesky tada slijedi u 3 koraka:

- rastav matrice  $\mathbf{K}$  na matrice  $\mathbf{L}_{\text{CH}}$  i  $\mathbf{L}_{\text{CH}}^{\text{T}}$ ,
- rješavanje sustava  $\mathbf{L}_{\text{CH}} \mathbf{c} = \mathbf{q}$ ,
- povratni postupak  $\mathbf{L}_{\text{CH}}^{\text{T}} \mathbf{w} = \mathbf{c}$ .

Za navedene korake u postupku rješavanja postupkom Choleskog možemo prikazati pripadne algoritme u pseudokodu pogodno za implementiranje u cjeloviti proračun. Rastav definirane matrice sustava na matrice  $\mathbf{L}_{\text{CH}}$  i  $\mathbf{L}_{\text{CH}}^{\text{T}}$  slijedi prema algoritmu C2.1.

Drugi korak je transformacija vektora opterećenja, desne strane sustava jednadžbi, koja slijedi prema algoritmu C2.2.

Povratna transformacija, dobivanje rješenja sustava, slijedi prema algoritmu C2.3.

Prednost eliminacijskih postupaka je što za promjenu desne strane prvi korak, rastav matrice sustava, nije potrebno ponavljati.

**Algoritam C2.1** Rastav matrice sustava

---

```

1: for  $p = 1$  to  $n$  do
2:    $l_{pp} = \sqrt{k_{pp}}$  {definiranje elemenata na dijagonali}
3:   for  $i = p + 1$  to  $n$  do
4:      $l_{ip} = k_{ip}/l_{pp}$ 
5:     for  $j = p + 1$  to  $i$  do
6:        $k_{ij} = k_{ij} - l_{ip}l_{jp}$  {definiranje elemenata izvan dijagonale}
7:     end for
8:   end for
9: end for

```

---

**Algoritam C2.2** Transformacija vektora opterećenja

---

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
2:    $s = q_j$ 
   for  $i = 1$  to  $j - 1$  do
4:      $s = s - l_{ji}c_i$ 
   end for
6:    $c_j = s/l_{jj}$  {definiranje članova transformiranog vektora opterećenja}
end for

```

---

**Algoritam C2.3** Dobivanje rješenja sustava

---

```

for  $j = n$  to  $1$  do
    $s = c_j$ 
3:   for  $i = j + 1$  to  $n$  do
      $s = s - l_{ij}w_i$ 
   end for
6:    $w_j = s/l_{jj}$  {definiranje članova vektora rješenja}
end for

```

---

**C2.3. Postupak Choleskog za vrpčaste matrice**

Dodatna je posebnost matrica sustava kod metode konačnih elemenata, uz simetričnost i pozitivnu definitnost, da su matrice vrpčaste, sa širinom vrpce  $m$ , što znači da zapravo imamo matricu dimenzije  $n \times (m + 1)$ . Rastav takve matrice jednak je standardnom postupku Choleskog, ali prema algoritmu prilagođenom stvarnom obliku matrice. Na taj način se bitno smanjuje broj proračunskih operacija, jer se isključuju sve operacije u kojima su članovi standardne matrice jednaki 0.

Za navedene korake u postupku rješavanja sustava s vrpčastom matricom sustava postupkom Choleskog možemo prikazati pripadne algoritme u pseudokodu pogodne za implementiranje u cjeloviti proračun. Rastav definirane vrpčaste matrice sustava slijedi prema algoritmu C2.4 .

Drugi korak je transformacija vektora opterećenja, desne strane sustava jednadžbi, koja slijedi prema algoritmu C2.5 .

Povratna transformacija, dobivanje rješenja sustava, slijedi prema algoritmu C2.6 .

**C3. Iterativni postupci**

Zadani sustav linearnih jednadžbi (C2.1) možemo riješiti neizravnim, iterativnim postupkom. Iz  $i$ -te jednadžbe izrazimo vrijednost nepoznanice  $w_i$  pomoću izračunatih vrijednosti ostalih nepoznanica. Za početnu iteraciju možemo uzeti da su sve nepoznanice jednake nuli ili neku drugu proizvoljnu procjenu. U svakom iteracijskom koraku moramo proći sve nepoznanice. Prije početka provedbe postupka potrebno je definirati mjeru za dopustivost pogreške rješenja. S iteracijskim postupkom prestajemo kad je razlika novog rješenja i rješenja iz prethodnog koraka manja od dopustive pogreške. Uz definiranu dopustivu pogrešku  $err$ , s iteracijskim postupkom prestajemo kad postignemo da vrijedi

$$\|\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(i-1)}\| \leq err, \quad (\text{C3.1})$$

**Algoritam C2.4** Rastav matrice sustava

---

```

 $l_{1,(m+1)} = \sqrt{k_{1,(m+1)}}$  {definiranje prvog elemenata na dijagonali - u zadnjem stupcu}
for  $i = 2$  to  $n$  do
   $f = \max\{1, i - m\}$ 
4: for  $j = f$  to  $i$  do
   $s = k_{i,(m+1+j-i)}$ 
  for  $k = f$  to  $j - 1$  do
     $s = s - l_{i,(m+1+k-i)}l_{j,(m+1+k-j)}$ 
8: end for
  if  $j < i$  then
     $l_{i,(m+1+j-i)} = s/l_{j,(m+1)}$  {definiranje elemenata izvan dijagonale - u ostalim stupcima}
  else
12:  $l_{i,(m+1)} = \sqrt{s}$  {definiranje elemenata na dijagonali - u zadnjem stupcu}
  end if
end for
end for

```

---

**Algoritam C2.5** Transformacija vektora opterećenja

---

```

for  $i = 1$  to  $n$  do
   $s = q_i$ 
   $f = \max\{1, i - m\}$ 
  for  $j = f$  to  $i - 1$  do
5:  $s = s - l_{i,(m+1+j-i)}c_j$ 
  end for
   $c_i = s/l_{i,(m+1)}$  {definiranje članova transformiranog vektora opterećenja}
end for

```

---

**Algoritam C2.6** Dobivanje rješenja sustava

---

```

for  $i = n$  to  $1$  do
   $w_i = c_i/l_{i,(m+1)}$ 
   $f = \max\{1, i - m\}$ 
  for  $j = f$  to  $i - 1$  do
     $c_j = c_j - l_{i,(m+1+j-i)}w_i$ 
6: end for
end for

```

---

gdje je  $\|\cdot\|$  vektorska norma. Jedna od standardnih vektorskih normi je euklidska norma

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}. \quad (\text{C3.2})$$

Nedostatak iterativnog postupka je što kod promjene desne strane sustava (vektor  $\mathbf{q}$ ), a što je u postupku proračuna konstrukcija redovita situacija zbog više kombinacija opterećenja za istu konstrukciju, svaki puta moramo provoditi postupak iznova. Definirat ćemo nekoliko iterativnih postupaka uzimajući u obzir simetričnost i pozitivnu definitnost matrice sustava proizašle iz rubne zadaće tijekom rješavanja metodom konačnih elemenata.

**C3.1. Jacobijeva metoda**

Simetričnu i pozitivno definitnu matricu sustava možemo rastaviti u obliku

$$\mathbf{K} = \mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{T}^T, \quad (\text{C3.3})$$

pri čemu je  $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ ,  $t_{ij} = k_{ij}$ ,  $i > j$ ,  $t_{ij} = 0$ ,  $i \leq j$ , donjetrokutasta matrica, a matrica  $\mathbf{D} = [\delta_{ij}k_{ii}]$  dijagonalna. Sustav možemo prikazati u obliku

$$(\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{T}^T) \mathbf{w} = \mathbf{q}, \quad (\text{C3.4})$$

odnosno u obliku

$$\mathbf{D}\mathbf{w} = -(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)\mathbf{w} + \mathbf{q}. \quad (\text{C3.5})$$

Zbog pozitivne definitnosti matrice sustava, postoji inverz matrice  $\mathbf{D}$ , matrica  $\mathbf{D}^{-1} = [\delta_{ij}/k_{ii}]$ . Za rješenje sustava u  $i$ -tom koraku iteracije vrijedi relacija

$$\mathbf{w}^{(i)} = -\mathbf{D}^{-1} [(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)\mathbf{w}^{(i-1)} - \mathbf{q}], \quad (\text{C3.6})$$

a za proizvoljnu komponentu rješenja

$$w_l^{(i)} = -\frac{1}{k_{ll}} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n k_{lj} w_j^{(i-1)} - q_l \right), \quad l = 1, \dots, n. \quad (\text{C3.7})$$

### C3.2. Gauss-Seidelova metoda

Gauss-Seidelova metoda poboljšanje je Jacobijeve metode u smislu da kod proračuna novih vrijednosti nepoznatog vektora koristimo već proračunate prethodne članove vektora tijekom iste iteracije. Matrični zapis metode glasi

$$(\mathbf{T} + \mathbf{D})\mathbf{w} = -\mathbf{T}^T\mathbf{w} + \mathbf{q}. \quad (\text{C3.8})$$

Na taj način u iterativnom postupku provodimo pridruživanje

$$\mathbf{w}^{(i)} = -(\mathbf{T} + \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{T}^T\mathbf{w}^{(i-1)} - \mathbf{q}). \quad (\text{C3.9})$$

Invertiranje matrice  $\mathbf{T} + \mathbf{D}$  bitno je složenije nego invertiranje dijagonalne matrice. Zbog toga jednadžbu (C3.8) pomnožimo matricom  $\mathbf{D}^{-1}$ ,

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{T} + \mathbf{D})\mathbf{w} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{T}^T\mathbf{w} - \mathbf{q}), \quad (\text{C3.10})$$

iz čega, uz  $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{T} + \mathbf{D}) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{I}$ , proizlaze relacije

$$(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{I})\mathbf{w} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{T}^T\mathbf{w} - \mathbf{q}), \quad (\text{C3.11})$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{D}^{-1} [(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)\mathbf{w} - \mathbf{q}], \quad (\text{C3.12})$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{T}\mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{T}^T\mathbf{w}^{(i-1)} - \mathbf{q}), \quad (\text{C3.13})$$

odnosno za proizvoljnu komponentu rješenja

$$w_l^{(i)} = -\frac{1}{k_{ll}} \left( \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} w_j^{(i)} + \sum_{j=l+1}^n k_{lj} w_j^{(i-1)} - q_l \right), \quad l = 1, \dots, n. \quad (\text{C3.14})$$

## C4. Numerički primjer

**Primjer C.1.** Na linearnom sustavu 4 jednadžbe sa 4 nepoznanice pokazat ćemo postupak Gaussovih eliminacija, rastav Choleskog i iteracijski postupak.

Neka je zadan simetričan sustav

$$\begin{array}{cccccc} 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & & = & 3 \\ w_1 & + & 4w_2 & + & w_3 & + & w_4 & = & 0 \\ w_1 & + & w_2 & + & 4w_3 & + & w_4 & = & -3 \\ & & w_2 & + & w_3 & + & 4w_4 & = & -1 \end{array}.$$

U prvom koraku eliminacije koeficijenti su

$$l_{21} = \frac{1}{4}, l_{31} = \frac{1}{4}, l_{41} = 0,$$

što povlači sustav

$$\begin{array}{cccccc} 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & & = & 3 \\ & & \frac{15}{4}w_2 & + & \frac{3}{4}w_3 & + & w_4 & = & -\frac{3}{4} \\ & & \frac{3}{4}w_2 & + & \frac{15}{4}w_3 & + & w_4 & = & -\frac{15}{4} \\ & & w_2 & + & w_3 & + & 4w_4 & = & -1 \end{array}.$$

U drugom koraku eliminacije koeficijenti su

$$l_{32} = \frac{1}{5}, l_{42} = \frac{4}{15},$$

pa slijedi sustav

$$\begin{array}{rccccrcr} 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & & = & 3 \\ & & \frac{15}{4}w_2 & + & \frac{3}{4}w_3 & + & w_4 & = & -\frac{3}{4} \\ & & & & \frac{18}{5}w_3 & + & \frac{4}{5}w_4 & = & -\frac{18}{5} \\ & & & & \frac{4}{5}w_3 & + & \frac{56}{15}w_4 & = & -\frac{4}{5} \end{array} .$$

U posljednjem koraku eliminacija koeficijent iznosi  $l_{43} = 2/9$ , a konačni sustav glasi

$$\begin{array}{rccccrcr} 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & & = & 3 \\ & & \frac{15}{4}w_2 & + & \frac{3}{4}w_3 & + & w_4 & = & -\frac{3}{4} \\ & & & & \frac{18}{5}w_3 & + & \frac{4}{5}w_4 & = & -\frac{18}{5} \\ & & & & & & \frac{32}{9}w_4 & = & 0 \end{array} .$$

U povratnom postupku slijedi rješenje sustava

$$w_4 = 0, w_3 = -1, w_2 = 0, w_1 = 1.$$

Matrice rastava matrice sustava su

$$\mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{2}{9} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32}{9} \end{bmatrix} .$$

Postupak Choleskog na ovom primjeru daje sljedeće vrijednosti

$$\begin{array}{l} p = 1 \\ \quad l_{11} = \sqrt{4} = 2 \\ i = 2 \quad l_{21} = \frac{1}{2} \\ \quad \quad j = 2 \quad k_{22}^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4} \\ i = 3 \quad l_{31} = \frac{1}{2} \\ \quad \quad j = 2 \quad k_{32}^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ \quad \quad j = 3 \quad k_{33}^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4} \\ i = 4 \quad l_{41} = \frac{0}{2} = 0 \\ \quad \quad j = 2 \quad k_{42}^{(1)} = 1 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \quad \quad j = 3 \quad k_{43}^{(1)} = 1 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \quad \quad j = 4 \quad k_{44}^{(1)} = 4 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 4 \\ p = 2 \\ \quad \quad l_{22} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \\ i = 3 \quad l_{32} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{10} \\ \quad \quad j = 3 \quad k_{33}^{(2)} = \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{18}{5} \\ i = 4 \quad l_{42} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \quad \quad j = 3 \quad k_{43}^{(2)} = 1 - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{4}{5} \\ \quad \quad j = 4 \quad k_{44}^{(2)} = 4 - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{15} = \frac{56}{15} \\ p = 3 \\ \quad \quad l_{33} = \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ i = 4 \quad l_{43} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3\sqrt{10}}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \\ \quad \quad j = 4 \quad k_{44}^{(3)} = \frac{56}{15} - \frac{2\sqrt{10}}{15} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{15} = \frac{32}{9} \\ p = 4 \\ \quad \quad l_{44} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}$$

Iz proračunatih vrijednosti koeficijenata slijedi matrica sustava

$$\mathbf{L}_{\text{CH}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{2\sqrt{10}}{15} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Desna strana jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3}{2} \\ c_2 &= \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) / \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{10} \\ c_3 &= \left(-3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{10}\right)\right) / \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ c_4 &= \left(-1 - 0 \cdot \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{10}\right) - \frac{2\sqrt{10}}{15} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)\right) / \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

Povratnim postupkom slijedi rješenje sustava

$$\begin{aligned} j=4 & & c_4 = 0 & \quad s = 0 & & w_4 = \frac{0}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = 0 \\ j=3 & & c_3 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} & & s = c_3 - l_{43}w_4 & & \\ & & & & = -\frac{3\sqrt{10}}{5} & & \\ & & & & & & w_3 = \frac{-\frac{3\sqrt{10}}{5}}{\frac{3\sqrt{10}}{5}} = -1 \\ j=2 & & c_2 = -\frac{\sqrt{15}}{10} & & s = c_2 - l_{32}w_3 - l_{42}w_4 & & \\ & & & & = 0 & & \\ & & & & & & w_2 = \frac{0}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = 0 \\ j=1 & & c_1 = \frac{3}{2} & & s = c_1 - l_{21}w_2 - l_{31}w_3 - l_{41}w_4 & & \\ & & & & = 2 & & \\ & & & & & & w_1 = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Definirana matrica sustava je simetrična i vrpčasta. Matricu možemo promatrati u obliku

$$\overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{2\sqrt{10}}{15} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$



Postupak Choleskog za simetričnu, vrpčastu matricu na ovom primjeru daje sljedeće vrijednosti

$$\begin{array}{ll}
 & l_{13} = \sqrt{k_{13}} = 2 \\
 i = 2 & \\
 \begin{array}{l} f = \max\{1, 0\} = 1 \\ j = 1 \quad s = k_{22} = 1 \end{array} & j < i \Rightarrow l_{22} = \frac{s}{l_{13}} = \frac{1}{2} \\
 \begin{array}{l} j = 2 \quad s = k_{23} = 4 \\ k = 1 \quad s = s - l_{22}l_{22} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4} \end{array} & j = i \Rightarrow l_{23} = \sqrt{s} = \frac{\sqrt{15}}{2} \\
 i = 3 & \\
 \begin{array}{l} f = \max\{1, 1\} = 1 \\ j = 1 \quad s = k_{31} = 1 \end{array} & j < i \Rightarrow l_{31} = \frac{s}{l_{13}} = \frac{1}{2} \\
 \begin{array}{l} j = 2 \quad s = k_{32} = 1 \\ k = 1 \quad s = s - l_{31}l_{22} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{array} & j < i \Rightarrow l_{32} = \frac{s}{l_{23}} = \frac{\sqrt{15}}{10} \\
 \begin{array}{l} j = 3 \quad s = k_{33} = 4 \\ k = 1 \quad s = s - l_{31}l_{31} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4} \\ k = 2 \quad s = s - l_{32}l_{32} = \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{18}{5} \end{array} & j = i \Rightarrow l_{33} = \sqrt{s} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \\
 i = 4 & \\
 \begin{array}{l} f = \max\{1, 2\} = 2 \\ j = 2 \quad s = k_{41} = 1 \end{array} & j < i \Rightarrow l_{41} = \frac{s}{l_{23}} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \\
 \begin{array}{l} j = 3 \quad s = k_{42} = 1 \\ k = 2 \quad s = s - l_{41}l_{32} = 1 - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = \frac{4}{5} \end{array} & j < i \Rightarrow l_{42} = \frac{s}{l_{33}} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \\
 \begin{array}{l} j = 4 \quad s = k_{43} = 4 \\ k = 2 \quad s = s - l_{41}l_{41} = 4 - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{15} = \frac{56}{15} \\ k = 3 \quad s = s - l_{42}l_{42} = \frac{56}{15} - \frac{2\sqrt{10}}{15} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{15} = \frac{32}{3} \end{array} & j = i \Rightarrow l_{43} = \sqrt{s} = \frac{4\sqrt{2}}{3}
 \end{array}$$

Iz proračunatih vrijednosti slijedi matrica

$$\overline{\mathbf{K}}_{\text{CH}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{2\sqrt{10}}{15} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Desna strana jednadžbe slijedi

$$\begin{array}{l}
 c_1 = \frac{3}{2} \\
 c_2 = \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) / \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{10} \\
 c_3 = \left(-3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{10}\right)\right) / \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\
 c_4 = \left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{10}\right) - \frac{2\sqrt{10}}{15} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)\right) / \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 0
 \end{array}$$

Povratnim postupkom slijedi rješenje sustava

$$\begin{aligned}
 i = 4 & \\
 w_4 &= \frac{0}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = 0 \\
 f &= 2 \\
 j = 2 & \quad c_2 = -\frac{\sqrt{15}}{10} - 0 \cdot \frac{2\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{10} \\
 j = 3 & \quad c_3 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} - 0 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{15} = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\
 i = 3 & \\
 w_3 &= \frac{-\frac{3\sqrt{10}}{5}}{\frac{3\sqrt{10}}{5}} = -1 \\
 f &= 1 \\
 j = 1 & \quad c_1 = \frac{3}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = 2 \\
 j = 2 & \quad c_2 = -\frac{\sqrt{15}}{10} - (-1) \cdot \frac{\sqrt{15}}{10} = 0 \\
 i = 2 & \\
 w_2 &= \frac{0}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = 0 \\
 f &= 1 \\
 j = 1 & \quad c_1 = 2 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \\
 i = 1 & \\
 w_1 &= \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

Jacobijevim iterativnim postupkom možemo definirati izraze za svaku nepoznanicu u  $i$ -tom koraku iteracije

$$\begin{aligned}
 w_1^{(i)} &= \left(3 - w_2^{(i-1)} - w_3^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_2^{(i)} &= \left(-w_1^{(i-1)} - w_3^{(i-1)} - w_4^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_3^{(i)} &= \left(-3 - w_1^{(i-1)} - w_2^{(i-1)} - w_4^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_4^{(i)} &= \left(-1 - w_2^{(i-1)} - w_3^{(i-1)}\right) / 4.
 \end{aligned}$$

Uz definiranje početnih vrijednosti jednakih nuli za sve nepoznanice vrijednosti nakon 5 iteracija i pripadne euklidske norme odstupanja prikazane su u tablici C.1.1.

Tablica C.1.1: Jacobijevo iterativno rješenje sustava

$i$	0	1	2	3	4	5
$w_1$	0	0.75	0.9375	0.953125	0.996094	0.989258
$w_2$	0	0	0.0625	0	-0.019531	-0.003906
$w_3$	0	-0.75	-0.875	-0.984375	-0.976563	-1.002930
$w_4$	0	-0.25	-0.0625	-0.046875	-0.003906	-0.010742
$err$		0.433013	0.165359	0.068108	0.031004	0.015957

Gauss-Seidelovim iterativnim postupkom možemo definirati izraze za svaku nepoznanicu u  $i$ -tom koraku iteracije

$$\begin{aligned}
 w_1^{(i)} &= \left(3 - w_2^{(i-1)} - w_3^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_2^{(i)} &= \left(-w_1^{(i)} - w_3^{(i-1)} - w_4^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_3^{(i)} &= \left(-3 - w_1^{(i)} - w_2^{(i)} - w_4^{(i-1)}\right) / 4, \\
 w_4^{(i)} &= \left(-1 - w_2^{(i)} - w_3^{(i)}\right) / 4.
 \end{aligned}$$

Uz definiranje početnih vrijednosti jednakih nuli za sve nepoznanice vrijednosti nakon 5 iteracija i pripadne euklidske norme prikazane su u tablici C.1.2.

Tablica C.1.2: Gauss-Seidelovo iterativno rješenje sustava

$i$	0	1	2	3	4	5
$w_1$	0	0.75	1.019531	1.009399	1.002033	1.0002783
$w_2$	0	-0.1875	-0.037109	-0.004578	-0.000128	0.0001072
$w_3$	0	-0.890625	-1.000488	-1.003555	-1.000985	-1.0001659
$w_4$	0	0.019531	0.009399	0.002033	0.000278	0.0000147
$err$		0.331663	0.042978	0.011228	0.002280	0.0003416

## D Numerička integracija

### D1. Numerička integracija funkcija jedne varijable

Integraciju funkcija po svakom linijskom konačnom elementu provodimo Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima u  $n$  točaka integracije

$$\int_a^b f(x)dx = I[f_{[a,b]}] = \sum_{i=1}^n w_{i,[a,b]} f_i \quad , \quad (\text{D1.1})$$

gdje su  $w_{i,[a,b]}$  težinski koeficijenti za interval  $[a, b]$ , a  $f_i = f(x_i)$  vrijednosti funkcije u  $i$ -toj točki integracije. Točke integracije  $x_i$  dobivamo kao nul-točke Legendreovog polinoma  $n$ -tog stupnja na intervalu  $[-1, 1]$  preslikane na interval  $[a, b]$ . Težinske koeficijente  $w_i$  dobivamo iz uvjeta egzaktne integracije na skupu polinoma maksimalnog stupnja. U jednodimenzionalnom slučaju, uz  $n$  točaka integracije postizemo egzaktnu integraciju polinoma stupnja  $2n - 1$ . Greška integracijskog postupka proporcionalna je maksimalnoj vrijednosti  $2n$ -te derivacije integracijske funkcije na promatranom intervalu integracije,

$$err_n = CM_{f^{2n},[a,b]} \quad . \quad (\text{D1.2})$$

Legendreove polinome proizvoljnog stupnja  $k$  definirane na intervalu  $[-1, 1]$  možemo izračunati prema izrazu

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^K \frac{(-1)^i (2k - 2i)!}{2^k i! (k - i)! (k - 2i)!} x^{k-2i} \quad , \quad (\text{D1.3})$$

pri čemu je  $K = k/2$  za parni  $k$ , a  $K = (k - 1)/2$  za neparni  $k$  ili prema izrazu

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} \quad . \quad (\text{D1.4})$$

Legendreove polinome stupnja  $(k+1)$  možemo izračunati i pomoću rekurzivne relacije, na temelju poznatih Legendreovih polinoma prethodna dva stupnja,  $k$  i  $k - 1$ ,

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} [(2k+1)xL_k(x) - kL_{k-1}(x)] \quad . \quad (\text{D1.5})$$

Nekoliko početnih Legendreovih polinoma glase

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \quad , \\ L_1(x) &= x \quad , \\ L_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad , \\ L_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad , \\ L_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \quad , \\ L_5(x) &= \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad . \end{aligned} \quad (\text{D1.6})$$

Za određivanje težinskih koeficijenata na intervalu  $[-1, 1]$  uz  $n$  točaka integracije definiran je izraz,

$$w_{i,[-1,1]} = \frac{2}{(1 - x_i^2) [L'_n(x_i)]^2} \quad . \quad (\text{D1.7})$$

Nazivnik u izrazu za težinske koeficijente, (D1.7), ne može biti jednak nuli, jer točke  $x = \pm 1$  nisu nikad čvorovi integracije, a kod polinoma neparnog stupnja, ( $n = 2k - 1$ ), kod kojih je  $x_k = 0$ , za derivaciju pripadnog Legendrovog polinoma vrijedi  $L'_n(x_k) \neq 0$ . Pripadna derivacija Legendreovog polinoma neparnog stupnja polinom je parnog stupnja, ( $n - 1$ ), kod kojeg su svi koeficijenti uz neparne potencije jednaki nula, a koeficijenti uz parne potencije, uključujući i slobodni koeficijent (uz  $x^0$ ) različiti od nule.

Preslikavanje točaka integracije iskazanih na intervalu  $[-1, 1]$  na proizvoljni interval  $[a, b]$  slijedi uz jednostavnu transformaciju

$$x_{[a,b]} = \frac{b-a}{2}x_{[-1,1]} + \frac{a+b}{2}, \quad (\text{D1.8})$$

odnosno u posebnom slučaju na interval  $[0, 1]$ , koji se javlja kod integracije u prirodnom koordinatnom sustavu, prema izrazu

$$x_{[0,1]} = \frac{1}{2}(1 + x_{[-1,1]}), \quad (\text{D1.9})$$

ili na interval  $[0, L^{(e)}]$ , koji se javlja kod integriranja po elementu duljine  $L^{(e)}$ , prema izrazu

$$x_{[0,L^{(e)}]} = \frac{L^{(e)}}{2}(1 + x_{[-1,1]}) = L^{(e)}x_{[0,1]}, \quad (\text{D1.10})$$

Težinske koeficijente definirane na intervalu  $[-1, 1]$ ,  $w_{i,[-1,1]}$  možemo prebaciti na proizvoljni interval transformacijom

$$w_{i,[a,b]} = \frac{b-a}{2}w_{i,[-1,1]}, \quad (\text{D1.11})$$

odnosno u posebnom slučaju na interval  $[0, 1]$  transformacijom,

$$w_{i,[0,1]} = \frac{1}{2}w_{i,[-1,1]}, \quad (\text{D1.12})$$

ili na interval  $[0, L^{(e)}]$  transformacijom,

$$w_{i,[0,L^{(e)}]} = \frac{L^{(e)}}{2}w_{i,[-1,1]} = L^{(e)}w_{i,[0,1]}. \quad (\text{D1.13})$$

## D2. Numerička integracija funkcija dviju varijabli

### D2.1. Integracija po pravokutnom konačnom elementu

Integraciju po svakom pravokutnom konačnom elementu provodimo Gauss-Legendreovim izrazima u  $n \times n$  točaka integracije. Standardni proračuni elementarne matrice krutosti definiraju integral na jediničnom kvadratu. Točke integracije na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  uređeni su parovi točaka integracije po jednoj varijabli,  $(x_i, y_j)$ . Težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli jednake su produktu težinskih funkcija uz pripadne točke integracije po jednoj varijabli,  $w_k = w_{(n-1)*j+i} = w_i w_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n^2$ . Jednostavnim transformacijama, kao i u jednodimenzionalnom slučaju, možemo dobiti točke integracije i pripadne težinske funkcije za proizvoljni pravokutnik. Numerički izraz za integral pomoću  $n \times n$  točaka integracije glasi

$$I[f] = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \sum_{i=1}^{n^2} w_i f(x_i, y_i). \quad (\text{D2.1})$$

U daljnjem prikazu detaljno su definirani izrazi za integraciju pomoću 4, 9, 16, 25 i 36 točaka integracije na jediničnom kvadratu. Integracija po proizvoljnom pravokutniku slijedi jednostavno transformacijom točaka integracije i težinskih koeficijenata sukladno opisu kod integracije funkcija jedne varijable. Integracija po jediničnom kvadratu Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima u 4 točke slijedi prema izrazu

$$I[f] = \sum_{i=1}^4 w_i f_i, \quad (\text{D2.2})$$

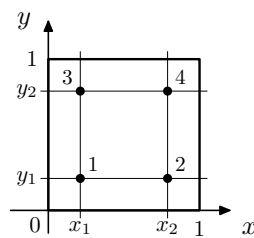
gdje su  $w_i$  težinske funkcije, a  $f_i$  vrijednosti funkcije u  $i$ -toj točki integracije. Nul-točke Legendreovog polinoma drugog stupnja za integraciju po pravcu u oba smjera su

$$x_1 = y_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \quad x_2 = y_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}. \quad (\text{D2.3})$$

Primjenom ovako dobivenih čvorova za integraciju po pravcu dobivamo točke za provedbu integracije po jediničnom kvadratu. Potrebne 4 točke su točke čije koordinate možemo zapisati kao sve kombinacije uređenih parova čvorova integracije po pravcu.

Tablica D1.1: Koordinate čvorova i pripadni težinski koeficijenti za jednodimenzionalnu numeričku integraciju na intervalu  $[0, 1]$ 

$n$	koordinate čvorova $x_i$	težinski koeficijenti $w_i$
1	0.5	1.000
2	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	0.5 0.5
3	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ 0.5 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{18}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{18}$
4	$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} \right)$ $\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} \right)$ $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} \right)$ $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} \right)$	$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sqrt{30}}{18} \right)$ $\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\sqrt{30}}{18} \right)$ $\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\sqrt{30}}{18} \right)$ $\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sqrt{30}}{18} \right)$
5	$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{35+2\sqrt{70}}{63}} \right)$ $\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{35-2\sqrt{70}}{63}} \right)$ 0.5 $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{35-2\sqrt{70}}{63}} \right)$ $\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{35+2\sqrt{70}}{63}} \right)$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{1800}$ $\frac{322+13\sqrt{70}}{1800}$ $\frac{64}{225}$ $\frac{322+13\sqrt{70}}{1800}$ $\frac{322-13\sqrt{70}}{1800}$
6	0.03376 52428 98424 0.16939 53067 66868 0.38069 04069 58402 0.61930 95930 41598 0.83060 46932 33132 0.96623 47571 01576	0.08566 22461 89585 0.18038 07865 24069 0.23395 69672 86345 0.23395 69672 86345 0.18038 07865 24069 0.08566 22461 89585



Slika D2.1: 4 točke integracije

Težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli pomoću 4 točke integracije jednake su produktu težinskih funkcija uz pripadnu točku integracije po jednoj varijabli pomoću 2 točke integracije. Primjenom tako izračunatih težina za integraciju po pravcu, dobivamo konačan izraz za integraciju po pravokutnom konačnom elementu

$$I[f] = \frac{1}{4} [f_1 + f_2 + f_3 + f_4] \quad . \quad (\text{D2.4})$$

Integracija po svakom pravokutnom konačnom elementu Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima

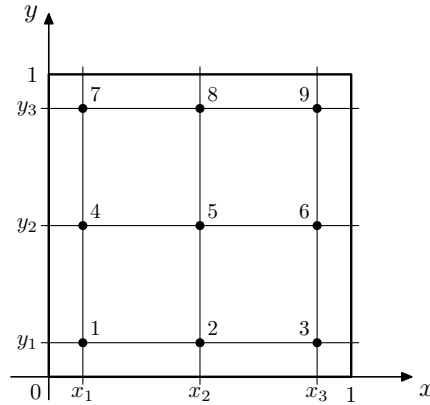
u 9 točaka slijedi prema izrazu

$$I[f] = \sum_{i=1}^9 w_i f_i \quad , \quad (\text{D2.5})$$

gdje su  $w_i$  težinske funkcije, a  $f_i$  vrijednosti funkcije u  $i$ -toj točki integracije. Nul-točke Legendreovog polinoma trećeg stupnja za integraciju po pravcu su

$$x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \quad , \quad x_2 = y_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = y_3 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \quad . \quad (\text{D2.6})$$

Primjenom ovako dobivenih čvorova za integraciju po pravcu dobivamo točke za provedbu integracije po jediničnom kvadratu. Potrebnih 9 točaka su točke čije koordinate možemo zapisati kao sve kombinacije uređenih parova čvorova integracije po pravcu.



Slika D2.2: 9 točaka integracije

Težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli pomoću 9 točaka integracije jednake su produktu težinskih funkcija uz pripadnu točku integracije po jednoj varijabli pomoću 3 točke integracije. Primjenom tako izračunatih težina za integraciju po pravcu, dobivamo konačan izraz za integraciju po pravokutnom konačnom elementu

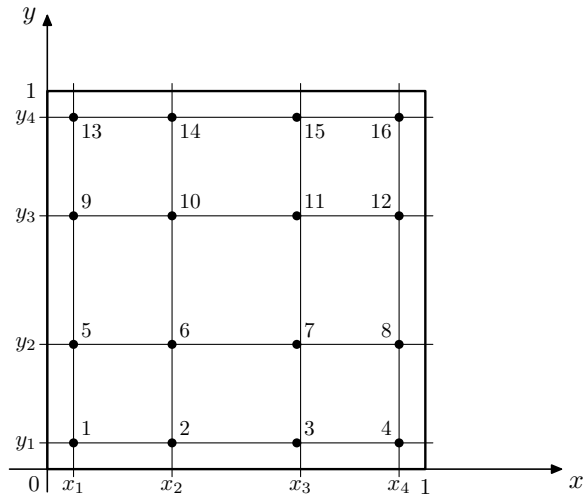
$$\begin{aligned} I[f] &= \frac{25}{324} [f_1 + f_3 + f_7 + f_9] \\ &+ \frac{10}{81} [f_2 + f_4 + f_6 + f_8] + \frac{16}{81} f_5 \quad . \end{aligned} \quad (\text{D2.7})$$

Za integraciju po jediničnom kvadratu Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima u 16 točaka, točke integracije su sve kombinacije uređenih parova nul-točaka Legendreovog polinoma četvrtog stupnja za integraciju po pravcu na intervalu  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} \quad , \quad x_2 = y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}} \quad , \\ x_3 = y_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}} \quad , \quad x_4 = y_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{D2.8})$$

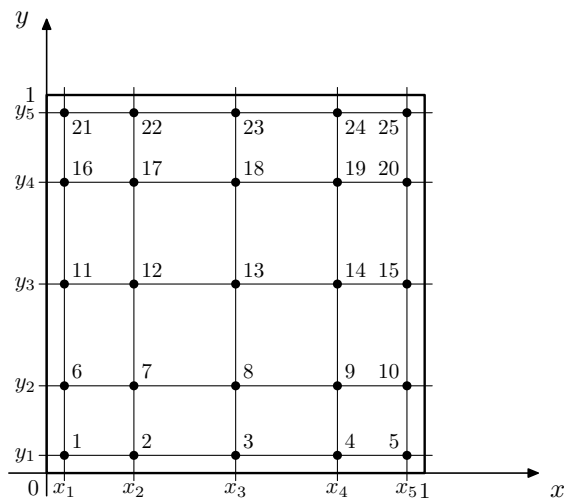
Težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli pomoću 16 točaka integracije jednake su produktu težinskih funkcija uz pripadnu točku integracije po jednoj varijabli pomoću 4 točke integracije. Primjenom tako izračunatih težina za integraciju po pravcu, dobivamo konačan izraz za integraciju po jediničnom kvadratu

$$\begin{aligned} I[f] = \sum_{i=1}^{16} w_i f_i &= \frac{59 - 6\sqrt{30}}{864} [f_1 + f_4 + f_{13} + f_{16}] \\ &+ \frac{59 + 6\sqrt{30}}{864} [f_6 + f_7 + f_{10} + f_{11}] \\ &+ \frac{49}{864} [f_2 + f_3 + f_5 + f_8 + f_9 + f_{12} + f_{14} + f_{15}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{D2.9})$$



Slika D2.3: 16 točaka integracije

Za integraciju po jediničnom kvadratu Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima u 25 točaka potrebne su nul-točke Legendreovog polinoma petog stupnja za integraciju po pravcu na intervalu  $[0, 1]$ , Tablica D1.1, pri čemu je vrijednost integrala egzaktna za polinome devetog stupnja po svakoj varijabli.



Slika D2.4: 25 točaka integracije

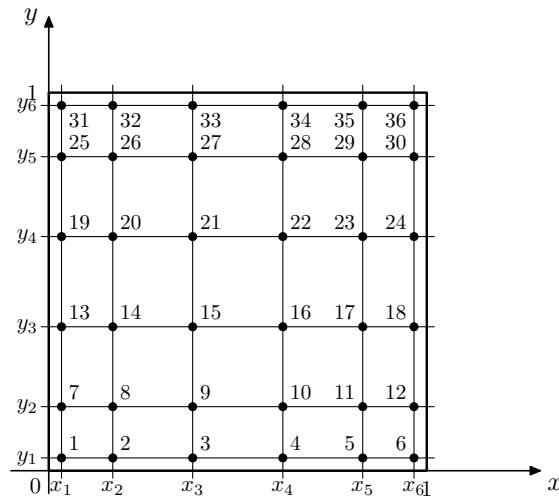
Koordinate točaka na jediničnom kvadratu dobivamo opet kao kombinacije svih uređenih parova čvorova za integraciju po pravcu, a težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli pomoću 25 točaka integracije jednake su produktu težinskih funkcija pripadnih točaka integracije po jednoj varijabli



pomoću 5 točaka integracije. Konačni izraz za integral glasi

$$\begin{aligned}
 I[f] &= \frac{57757 - 4186\sqrt{70}}{1620000} [f_1 + f_5 + f_{21} + f_{25}] \\
 &+ \frac{25921}{810000} [f_2 + f_4 + f_6 + f_{10} + f_{16} + f_{20} + f_{22} + f_{24}] \\
 &+ \frac{57757 + 4186\sqrt{70}}{1620000} [f_3 + f_{11} + f_{15} + f_{23}] \\
 &+ \frac{2576 - 104\sqrt{70}}{50625} [f_7 + f_9 + f_{11} + f_{17}] \\
 &+ \frac{2576 + 104\sqrt{70}}{50625} [f_8 + f_{12} + f_{14} + f_{18}] \\
 &+ \frac{16384}{50625} f_{13} \quad .
 \end{aligned} \tag{D2.10}$$

Za integraciju po jediničnom kvadratu Gauss-Legendreovim kvadraturnim izrazima u 36 točaka potrebne su nul-točke Legendreovog polinoma šestog stupnja za integraciju po pravcu na intervalu  $[0, 1]$ , Tablica D1.1, pri čemu je vrijednost integrala egzaktna za polinome jedanaestog stupnja po svakoj varijabli. Koordinate točaka na jediničnom kvadratu dobivamo opet kao kombinacije svih uređenih parova čvorova za integraciju po pravcu, a težinske funkcije kod integracije funkcija dviju varijabli pomoću 36 točaka integracije jednake su produktu težinskih funkcija pripadnih točaka integracije po jednoj varijabli pomoću 6 točaka integracije. Konačni izraz za integral glasi



Slika D2.5: 36 točaka integracije

$$\begin{aligned}
 I[f] &= 0.0073380204222458 [f_1 + f_6 + f_{31} + f_{36}] \\
 &+ 0.0154518233430966 [f_2 + f_5 + f_7 + f_{12} + f_{25} + f_{30} + f_{32} + f_{35}] \\
 &+ 0.0200412793294527 [f_3 + f_4 + f_{13} + f_{18} + f_{19} + f_{24} + f_{33} + f_{34}] \\
 &+ 0.0325372281470419 [f_8 + f_{11} + f_{25} + f_{29}] \\
 &+ 0.0422013417718970 [f_9 + f_{10} + f_{14} + f_{17} + f_{20} + f_{23} + f_{27} + f_{28}] \\
 &+ 0.0547358625418241 [f_{15} + f_{16} + f_{21} + f_{22}] \quad .
 \end{aligned} \tag{D2.11}$$

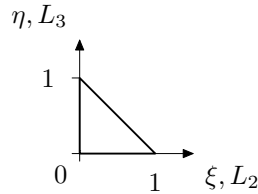
## D2.2. Integracija po trokutnom konačnom elementu

Integraciju po svakom trokutnom konačnom elementu provodimo Gauss-Legendreovim izrazima u  $n$  točaka integracije. Točke integracije najjednostavnije je prikazati u prirodnom koordinatnom sustavu.

Numerički izraz za integral pomoću  $n_t$  točaka integracije glasi

$$I[f] = \int_{\Delta} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-L_3} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_3 = F \sum_{t=1}^{n_t} w_t f(L_{1,t}, L_{2,t}, L_{3,t}), \quad (D2.12)$$

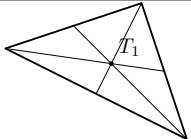
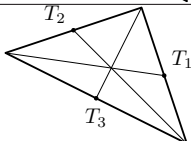
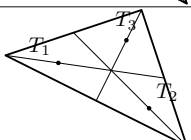
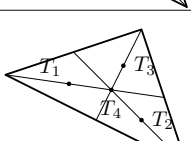
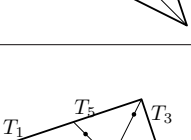
pri čemu je  $F$  površina trokuta,  $w_t$  težinski koeficijenti za "jedinični" (pravokutni trokut s jediničnim katetama) trokut.



Slika D2.6: Prikaz "jediničnog" trokuta

Koordinate točaka integracije u prirodnom koordinatnom sustavu i pripadni težinski koeficijenti prikazani su u Tablici D2.1.

Tablica D2.1: Koordinate čvorova i pripadni težinski koeficijenti za numeričku integraciju na trokutnom konačnom elementu

broj točaka $n$	red kv. $r$		koordinate čvorova $T_i$	težinski koeficijenti $w_{t,i}$
1	1		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1
3 (a)	2		$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
3 (b)	2		$(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
4	3		$(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$ $-\frac{9}{16}$
6	4		$(a_1, b_1, b_1)$ $(b_1, a_1, b_1)$ $(b_1, b_1, a_1)$ $(a_2, b_2, b_2)$ $(b_2, a_2, b_2)$ $(b_2, b_2, a_2)$	0.1099517437 0.1099517437 0.1099517437 0.2233815897 0.2233815897 0.2233815897

$$a_1 = 0.8168475739, \quad b_1 = 0.0915762135$$

$$a_2 = 0.1081030182, \quad b_2 = 0.4459484909$$

### D3. Numerički primjeri

**Primjer D.1.** Izračunati integral  $\int_0^1 x^9 dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral možemo jednostavno dobiti

$$\int_0^1 x^9 dx = \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 = 0.1 .$$

Numerička integracija provedena je za razne brojeve točaka integracije  $n$ . Prema prethodnoj teoretskoj analizi očekujemo analitičko rješenje ako uzmemo 5 točaka integracije. Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.1.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n$	$I_n$	$\Delta_n$
1	0.0195313	98.0%
2	0.0590278	41.0%
3	0.0955625	4.4%
4	0.0998980	0.1%
5	0.1000000	0.0%

**Primjer D.2.** Izračunati integral  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral možemo jednostavno dobiti

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = 0.693147 .$$

Numerička integracija provedena je za razne brojeve točaka integracije  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.2.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n$	$I_n$	$\Delta_n$
1	0.666667	3.82%
2	0.692308	0.121%
3	0.693122	0.004%

**Primjer D.3.** Izračunati integral  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral glasi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{1+x} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1) = 0.828427 .$$

Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.3.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n$	$I_n$	$\Delta_n$
1	0.816497	1.44%
2	0.828153	0.033%
3	0.828420	0.00083%

**Primjer D.4.** Izračunati integral  $\int_0^1 \sin \pi x dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral glasi

$$\int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{\cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} = 0.636619772 .$$

Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti.

Tablica D.4.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n$	$I_n$	$\Delta_n$
2	0.616190508	3.21%
3	0.637061877	0.07%
4	0.636614753	0.0008%

**Primjer D.5.** Izračunati integral  $\int_0^1 \operatorname{sh} x dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral glasi

$$\int_0^1 \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x \Big|_0^1 = \operatorname{ch} 1 - 1 = 0.5430806348 .$$

Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti.

Tablica D.5.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n$	$I_n$	$\Delta_n$
1	0.52109531	4.05%
2	0.54295881	0.022%
3	0.54308037	0.00006%

**Primjer D.6.** Izračunati integral  $\int_0^1 \int_0^1 25x^4 y^4 dx dy$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral možemo jednostavno dobiti

$$\int_0^1 \int_0^1 25x^4 y^4 dx dy = x^5 y^5 \Big|_0^1 \Big|_0^1 = 1.0 .$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n \times n$ . Prema prethodnoj teoretskoj analizi, za polinom četvrtog stupnja po  $x$  i  $y$  očekujemo analitičko rješenje za  $3 \times 3$  točaka integracije. Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.6.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n \times n$	$I_n$	$\Delta_n$
$1 \times 1$	0.097656	90.2%
$2 \times 2$	0.945216	5.5%
$3 \times 3$	1.000000	0.0%

**Primjer D.7.** Izračunati integral  $\int_0^1 \int_0^1 \cos \pi(x+y) dx dy$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral možemo jednostavno dobiti

$$\int_0^1 \int_0^1 \cos \pi(x+y) dx dy = -0.405285 .$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n \times n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.7.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n \times n$	$I_n$	$\Delta_n$
$2 \times 2$	-0.379691	6.315%
$3 \times 3$	-0.405848	0.139%
$4 \times 4$	-0.405278	0.002%

**Primjer D.8.** Izračunati integral  $\int_1^3 \int_1^3 \ln(x+y) dx dy$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za integral možemo jednostavno dobiti

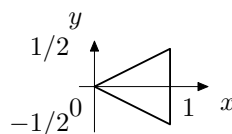
$$\int_1^3 \int_1^3 \ln(x+y) dx dy = 5.45725503 .$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n \times n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala.

Tablica D.8.1: Numeričke vrijednosti integrala

$n \times n$	$I_n$	$\Delta_n$
$2 \times 2$	5.45816607	0.016694%
$3 \times 3$	5.45726794	0.000236%

**Primjer D.9.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} (1-4y^2) dy dx$  za različiti broj točaka integracije.



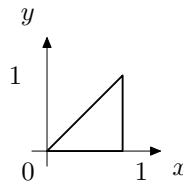
Analički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} (1 - 4y^2) dy dx = \int_0^1 \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} (1 - 4y^2) dy dx = \frac{5}{12}.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5 & \Delta_1 &= 20\%, \\ I_{3a} = I_{3b} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right] = \frac{5}{12} & \Delta_3 &= 0.0\%. \end{aligned}$$

**Primjer D.10.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} y^3 dy dx$  za različiti broj točaka integracije.



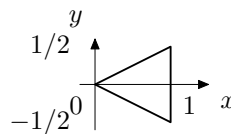
Analički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} y^3 dy dx = \int_0^1 \int_0^x y^3 dy dx = \frac{1}{20}.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala,

$$\begin{aligned} I_{3a} &= \frac{1}{6} \left[0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{24} & \Delta_{3a} &= 16.7\%, \\ I_{3b} &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3\right] = \frac{11}{216} & \Delta_{3b} &= 1.85\%, \\ I_4 &= \frac{25}{96} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right] - \frac{9}{32} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{20} & \Delta_4 &= 0.0\%. \end{aligned}$$

**Primjer D.11.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} (1 - 4y^2 + 4y^4) dy dx$  za različiti broj točaka integracije.

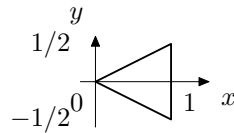


Analički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} (1 - 4y^2 + 4y^4) dy dx = \int_0^1 \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} (1 - 4y^2 + 4y^4) dy dx = \frac{17}{40} = 0.425.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5 & \Delta_1 &= 17.65\%, \\ I_{3a} = I_{3b} &= \frac{1}{6} \left[1 + \frac{49}{64} + \frac{49}{64}\right] = \frac{27}{64} = 0.421875 & \Delta_3 &= 0.735\%, \\ I_4 &= \frac{25}{96} \left[1 + \frac{529}{625} + \frac{529}{625}\right] - \frac{9}{32} \cdot 1 = \frac{21}{50} = 0.42 & \Delta_4 &= 1.176\%, \\ I_6 &= 0.425 & \Delta_6 &= 0.00\%. \end{aligned}$$



**Primjer D.12.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} \cos \pi y dy dx$  za različiti broj točaka integracije.

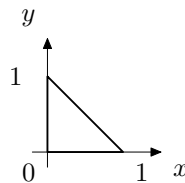
Analitički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} \cos \pi y dy dx = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \pi y dy dx = \frac{4}{\pi^2} = 0.4052847.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5 & \Delta_1 &= 23.4\% , \\ I_{3a} = I_{3b} &= \frac{1}{6} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0.402369 & \Delta_3 &= 0.719\% , \\ I_4 &= \frac{25}{96} \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \left( -\frac{\pi}{5} \right) \right] - \frac{9}{32} \cdot 1 = 0.400530 & \Delta_4 &= 1.173\% , \\ I_6 &= 0.405314 & \Delta_6 &= 0.00725\% . \end{aligned}$$

**Primjer D.13.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} \sin \pi x dy dx$  za različiti broj točaka integracije.



Analitički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} \sin \pi x dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sin \pi x dy dx = \frac{1}{\pi} = 0.318309886.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti integrala,

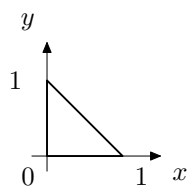
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = 0.433012702 & \Delta_1 &= 36.025\% , \\ I_{3a} &= \frac{1}{6} [0 + 1 + 1] = \frac{1}{3} = 0.3 & \Delta_{3a} &= 4.72\% , \\ I_{3b} &= \frac{1}{6} \left[ \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \right] = 0.311004234 & \Delta_{3b} &= 2.295\% , \\ I_4 &= \frac{25}{96} \left[ \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} \right] - \frac{9}{32} \sin \frac{\pi}{3} = 0.310239475 & \Delta_4 &= 2.535\% , \\ I_6 &= 0.31849 & \Delta_6 &= 0.00564\% . \end{aligned}$$

**Primjer D.14.** Na zadanom trokutu izračunati integral  $\int_{\Delta} \sin \pi x y dy dx$  za različiti broj točaka integracije.

Analitički izraz za traženi integral glasi

$$\int_{\Delta} \sin \pi x y dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sin \pi x y dy dx = 0.126362.$$

Numerička integracija provedena je za različite brojeve točaka integracije,  $n$ . Prikazane su numerički proračunate vrijednosti integrala,  $I_n$ , i pripadna odstupanja,  $\Delta_n$ , od analitički izračunate vrijednosti



integrala,

$$\begin{array}{ll}
 I_1 &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{9} = 0.171010072, & \Delta_1 &= 35.331\%, \\
 I_{3a} &= \frac{1}{6} \left[ 0 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0.11785113, & \Delta_{3a} &= 6.735\%, \\
 I_{3b} &= \frac{1}{6} \left[ \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \right] = 0.128532672, & \Delta_{3b} &= 1.718\%, \\
 I_4 &= \frac{25}{96} \left[ \sin \frac{\pi}{25} + \sin \frac{3\pi}{25} + \sin \frac{3\pi}{25} \right] - \frac{9}{32} \sin \frac{\pi}{9} = 0.128177235 & \Delta_4 &= 1.437\%, \\
 I_6 &= 0.126081 & \Delta_6 &= 0.222\%.
 \end{array}$$