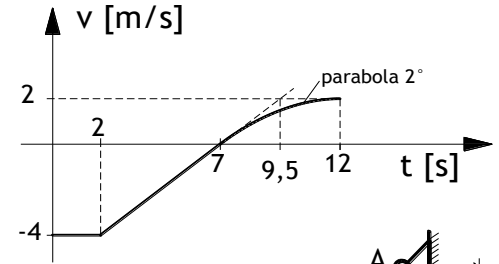


NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim **oznaka** i **kotama**. Prije numeričkog računa **napisati općeniti izraz** koji se koristi. Za sve orijentirane veličine potrebno je prikazati **iznos i vektor**.

1. Čestica se giba po pravcu. Zadan je dijagram promjene brzine. **Napisati diferencijalne i integralne odnose** koji povezuju ubrzanje, brzinu i prijeđeni put, te koristeći te odnose odrediti dijagrame $a(t)$ i $s(t)$ sa ucrtanim tangentama, $s_0 = 0$. Odredi koliko je metara točka prešla u vremenskom intervalu od $0s$ do $12s$.



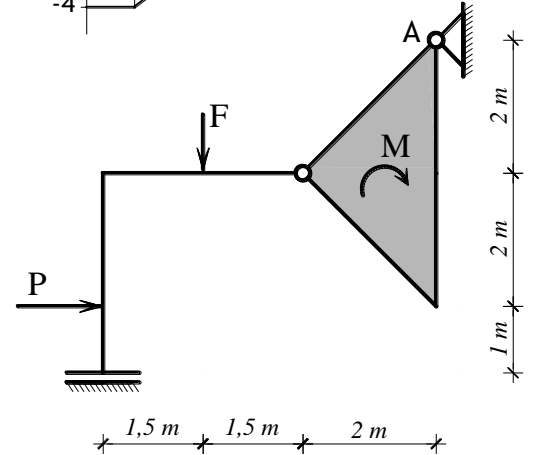
(20 bodova)

2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti vertikalnu reakciju u ležaju A. **Na crtežu prikazati polove, planove pomaka oba tijela i veličine svih potrebnih pomaka.** Provjeriti točnost pomoću jednadžbi ravnoteže.

$$F = 4 \text{ [kN]}$$

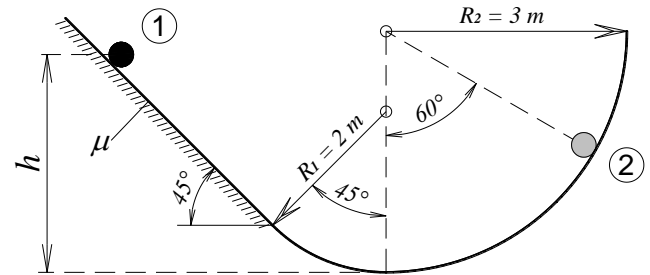
$$P = 5 \text{ [kN]}$$

$$M = 2 \text{ [kNm]}$$



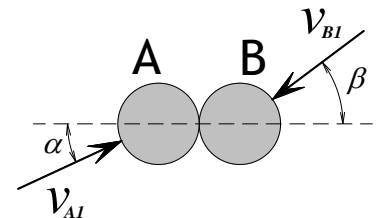
(20 bodova)

3. Čestica mase $m=3 \text{ [kg]}$ se iz **položaja 1** pusti u gibanje po prikazanoj podlozi. Treba odrediti s koje visine h treba pustiti česticu da bi u **položaju 2** pritisak na podlogu iznosio $N=6g \text{ [N]}$? Koefficient trenja na dijelu podloge u pravcu iznosi $\mu=0,2$ a na zakrivljenom dijelu podloga je apsolutno glatka.



(20 bodova)

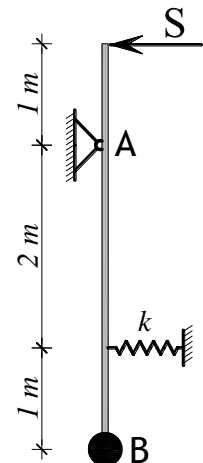
4. Čestice A i B sudare se na horizontalnoj glatkoj podlozi kako je prikazano na slici. Sudar čestica je idealno elastičan. Zadane su brzine kuglica neposredno prije sudara $v_{AI}=5 \text{ [m/s]}$ i $v_{BI}=4 \text{ [m/s]}$, kutovi $\alpha=20^\circ$ i $\beta=45^\circ$, te mase čestica $m_A=2,5 \text{ [kg]}$ i $m_B=3 \text{ [kg]}$. Treba odrediti iznos brzina obiju kuglica nakon sudara i kutove koje vektori brzina zatvaraju s linijom sraza. Vektore brzina prikazati na crtežu.



(20 bodova)

5. Prikazani mehanički sustav miruje u horizontalnoj ravnini. Štap ima jednoliko distribuiranu masu $m=3 \text{ [kg/m]}$ a masa čestice B je $m_B=4 \text{ [kg]}$, krutost opruge je $k=1200 \text{ [N/m]}$.

U jednom trenutku na sustav djeluje impuls $S=4 \text{ [Ns]}$. Potrebno je odrediti zakon oscilacija točke B, frekvenciju i period oscilacija sustava, maksimalnu kinetičku energiju za vrijeme oscilacija.



(20 bodova)

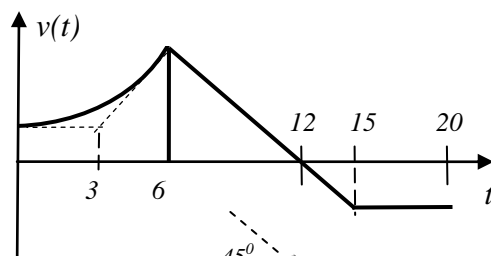
DRUGI DIO ISPITA IZ PREDMETA MEHANIKA 2, od 05.02.2014.

1. (20 bodova) Treba napisati diferencijalne i integralne odnose koji povezuju funkcije $a(t)$, $v(t)$ i $s(t)$ kod gibanja čestice po pravcu, te s **nekoliko rečenica objasniti** njihovo **geometrijsko značenje**.

Riješiti zadatak:

Čestica počne gibanje iz ishodišta po osi x s brzinom $v_0=9\text{ km/h}$, i ubrzava tako da za 6 s postigne brzinu $75,6\text{ km/h}$, a zatim se brzina mijenja prema prikazanom grafu. Treba odrediti:

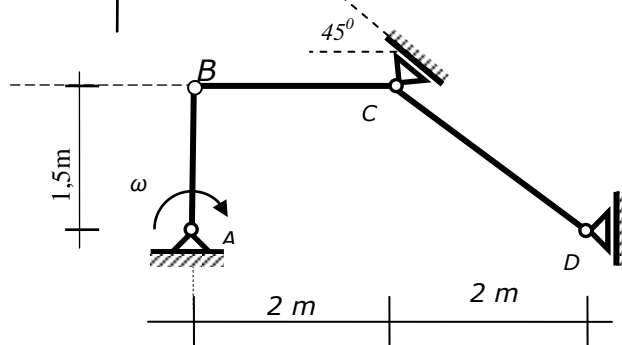
- sve potrebne veličine, i nacrtati funkcije $a(t)$ i $s(t)$ u mjerilu, sa ucrtanim tangentama za $0 \leq t \leq 20\text{ s}$
- koordinatu točke na osi x , $x_{\max}=?$ do koje će doći čestica
- ukupni prijeđeni put za 20 s .



2. (20 bodova) Objasniti pretpostavke, izvod i značenje teorema o ravnopravnosti izbora pokretnog ishodišta.

Primjenom tog teorema, ako je kutna brzina štapa AB $\omega_I=2\text{ rad/s}=\text{const.}$ uz **grafičko** rješenje vektorskih jednadžbi treba odrediti:

- iznose brzina i ubrzanja u označenim točkama.
- vektore i iznose kutnih brzina i kutnih ubrzanja svih štapova u prikazanom mehanizmu,

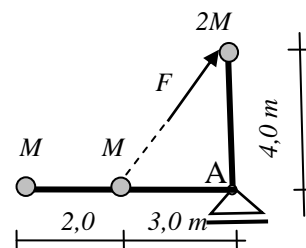


3. (18 bodova) Opisati koji se zakoni primjenjuju i kako se analizira gibanje sustava čestica pod djelovanjem sila u ravnini. Napisati jednadžbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednadžbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka:

Tri čestice vezane štapom bez mase miruju na horizontalnoj glatkoj podlozi u ravnini crteža. U jednom trenutku na sustav počne djelovati sila $F=100\text{ N}$.

Masa $M=3,0\text{ kg}$. Treba odrediti:

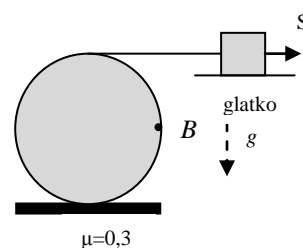
- vektor i iznos ubrzanja čestice na koju djeluje sila
- vektor u iznos ubrzanja točke A
- vektor i iznos reakcije u spoju A



4. (20 bodova) Prikazati kako se izvodi zakon impulsa za česticu, te objasniti koja je razlika u tom zakonu ako impuls djeluje na tijelo. Riješiti zadatak:

Kružni disk polumjera $R=3\text{ m}$, mase $M=6\text{ kg}$ miruje oslonjen na horizontalnu hrapavu podlogu. Na disk je namotana nit za koju je vezana čestica mase 2 kg . U jednom trenutku na česticu djeluje impuls $S=27\text{ N}\cdot\text{s}$. Za taj trenutak treba odrediti:

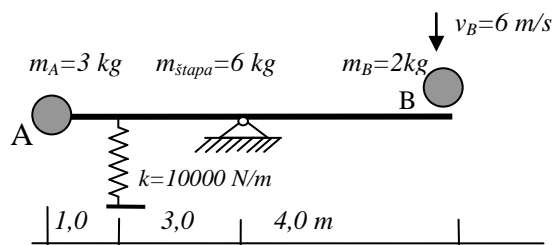
- vektor i iznos brzine čestice
- vektor i iznos kutne brzine diska
- vektor u iznos brzine točke B
- reaktivni impuls u niti



5. (22 boda) Nabrojati i ukratko objasniti postupke određivanja diferencijalne jednadžbe slobodnih oscilacija.

Riješiti zadatak: Sustav miruje položen na **horizontalnu** glatku ravninu u trenutku kad u štap udara kuglica B. Sraz je plastičan. Treba odrediti:

- diferencijalnu jednadžbu slobodnih oscilacija točke A pomoću metode virtualnog rada
- frekvenciju i period slobodnih oscilacija
- zakon gibanja točke A
- odrediti veličinu maksimalne deformacije opruge za vrijeme nastalog gibanja



NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

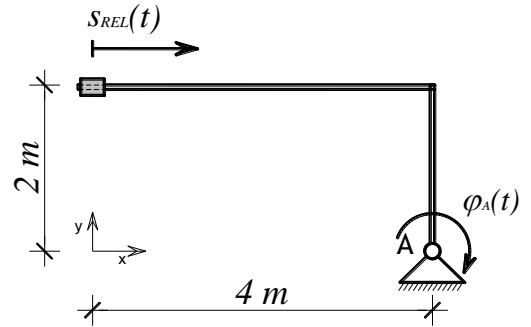
NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim **oznakama i kotama**. Prije numeričkog računa **napisati općeniti izraz** koji se koristi. Za sve orijentirane veličine potrebno je prikazati **iznos i vektor**.

1. Štap prikazanog oblika rotira oko točke A po zakonu $\varphi_A(t)$. Na štapu se nalazi klizač koji se giba prema zakonu $s_{REL}(t)$. Početni položaj sustava ($t_0 = 0$ [s]) prikazan je na slici.

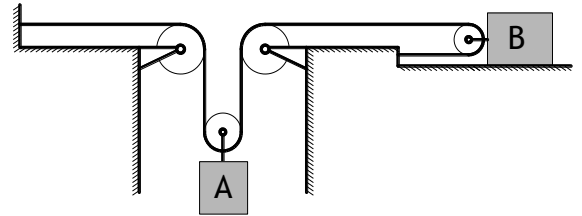
$$\varphi_A = \frac{3\pi}{16} t^2 \text{ [rad]}$$

$$s_{REL}(t) = t \text{ [m]}$$

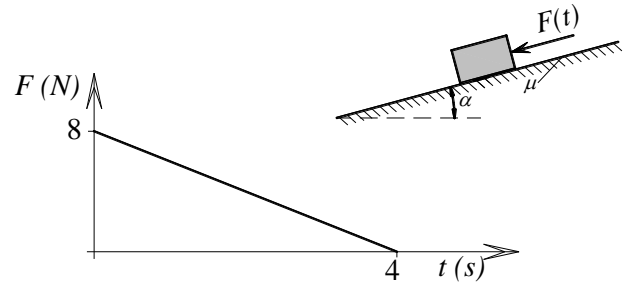
Treba odrediti vektor i iznos apsolutne brzine i apsolutnog ubrzanja klizača u trenutku $t_1 = 2$ [s]. Položaj i sve vektore treba prikazati na crtežu.



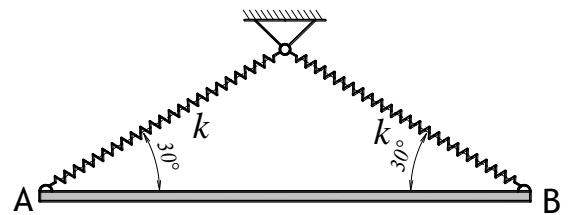
2. Tereti A i B povezani su nerastezljivim užetom kako je prikazano na slici. Potrebno je odrediti zakon promjene brzine za oba tereta i zakon promjene ubrzanja tereta B, ako sustav početno miruje i teret A se počne gibati prema dolje s ubrzanjem $a_A(t) = 3t$ [m/s²].



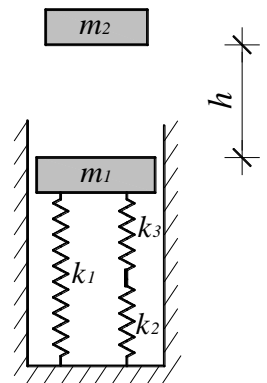
3. Čestica mase $m=3$ [kg] miruje na hrapavoj kosini ($\mu=0,25$ i $\alpha=10^\circ$), kad na nju počne djelovati sila $F(t)$ koja se u vremenu mijenja prema prikazanom grafu. Treba odrediti dijagrame $R(t)$, $a(t)$, $v(t)$ i $s(t)$ s ucrtanim tangentama i njihovim nagibima u mjerilu za vrijeme gibanja čestice.



4. Štap AB duljine $L=4$ [m] i jednoliko distribuirane mase $m=1,5$ [kg/m] spojen je s dvije identične opruge u točkama A i B u vertikalnoj ravnini. Ako se u jednom trenutku ukloni opruga spojena u točki B, odredi koliko iznosi kutno ubrzanje štapa, te vektori i iznosi ubrzanja točaka A i B za taj trenutak.



5. Čestica mase $m_1=4$ [kg] miruje spojena na sustav opruga kako je prikazano na slici. Krutosti opruga su $k_1 = 1500$ [N/m], $k_2 = 750$ [N/m] i $k_3=1200$ [N/m]. U jednom trenutku čestica mase $m_2=1$ [kg] pusti se sa visine $h=0,5$ [m] tako da udari česticu m_1 . Koeficijent restitucije sraza čestica iznosi $e=0,5$. Potrebno je odrediti period, zakon oscilacija i iznos maksimalne amplitude nastalih oscilacija.



1. (20 bodova) Prikazati izvod za radijus zakrivljenosti trajektorije pomoću kinematičkih veličina. Riješiti zadatak: Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom

$$\vec{r}(t) = [2 + 3\cos(2t)]\vec{i} + 2\sin(2t)\vec{j} \quad [m]$$

Potrebno je:

- odrediti i nacrtati jednadžbu trajektorije, položaj čestice za $t=0$ [s] i označiti smjer gibanja čestice po trajektoriji, odrediti vektorsku i skalarnu funkciju promjene brzine i ubrzanja
- odrediti položaj čestice na trajektoriji, brzinu i ubrzanje za trenutak $t_1 = \frac{\pi}{4}$ [s] (vektor i skalar)
- na crtežu prikazati položaj čestice i vektore brzine i ubrzanje za trenutak t_1
- odrediti radijus zakrivljenosti, normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja za trenutak t_1

2. (19 bodova) Objasniti svojstva apsolutnih i relativnih polova brzina u kinematici mehanizama. Navedi koji uvjeti i koja pravila vrijede pri njihovom određivanju. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka: Dvije ploče gibaju se u ravnini x,y. U promatranom trenutku poznate su koordinate točke A (14,5m; 2,0m) i točke B (10,5m; 7,0m) na ploči I, i njihove brzine $\vec{v}_B = -4,5\vec{i} + 6,75\vec{j} (m/s)$ i $\vec{v}_{Ay} = -11,25\vec{j} (m/s)$. Točka D (1,0m; 4,0m) i E (5,5m; 6,5m) nalaze se na ploči II i imaju brzine $\vec{v}_D = [-3,0\vec{i} - 4,5\vec{j}] (m/s)$ i $v_{Ex} = -6,75m/s$. Treba sve podatke prikazati na crtežu, odrediti koordinate apsolutnih polova brzina i koordinate relativnog pola brzina promatranih ploča, prikazati njihov položaj na crtežu u mjerilu, te grafički provjeriti točnost rezultata.

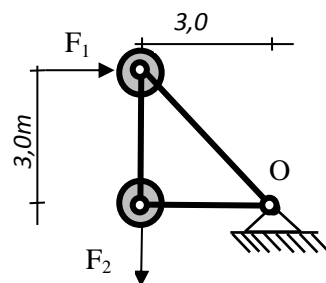
3. (18 bodova) Navesti i objasniti kako se određuje rad koji vrši neka sila, i koji je zakon povezan s radom. Riješiti zadatak:

Čestica mase $1,5 \text{ kg}$ miruje na glatkoj horizontalnoj podlozi. U jednom trenutku čestica se zbog djelovanja sile $F(t)$ počne gibati po kružnoj putanji radijusa $R=1m$ po zakonu $s(t)=1,5t^2$. Treba odrediti

- silu $F(t)$
- koji rad izvrši sila ako čestica dva puta obiđe kružnicu

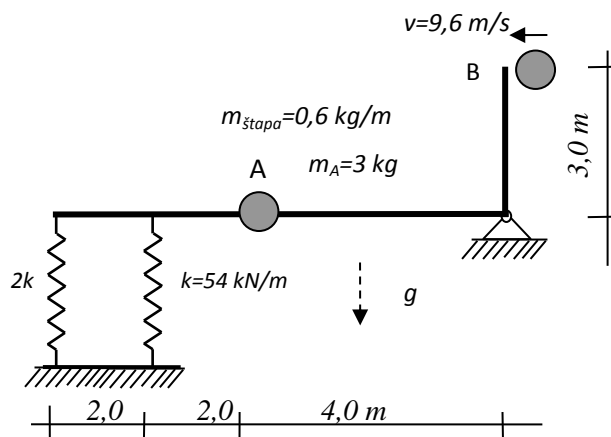
4. (18 bodova) Opisati koji se zakoni primjenjuju i kako se analizira gibanje sustava čestica pod djelovanjem sila u ravnini. Napisati jednadžbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednadžbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka:

Dvije jednake čestice mase $m=2\text{kg}$ spojene štapovima bez mase miruju na horizontalnoj glatkoj podlozi kad na njih počnu djelovati sile $F_1=152\text{N}$ i $F_2=80\text{N}$. Treba odrediti vektor i iznos reakcije u spoju O i iznose sila u štapovima u trenutku kad počne gibanje.



5. (25 bodova) Prikazani sustav miruje u gravitacijskom polju. U jednom trenutku udari kuglica mase 2 kg u točku B na štapu. Sraz je idealno elastičan. Za nastalo gibanje sustava treba odrediti:

- funkciju promjene kinetičke energije u vremenu
- funkciju promjene potencijalne energije u vremenu
- diferencijalnu jednadžbu oscilacija čestice A iz funkcije ukupne mehaničke energije zadanog sustava, frekvenciju i period slob. oscilacija
- zakon gibanja točke A nakon udara čestice
- zakon promjene brzine točke A
- maksimalnu brzinu točke A



NAPOMENA:

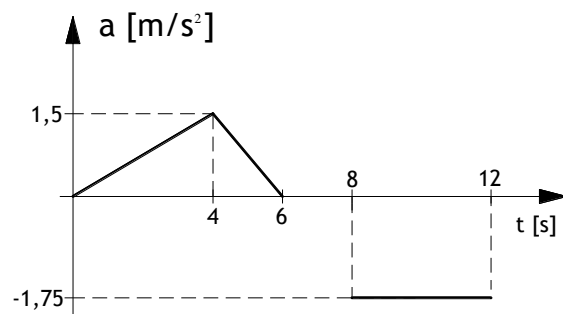
Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim **oznakama i kotama**. Prije numeričkog računa **napisati općeniti izraz** koji se koristi. Za sve orijentirane veličine potrebno je prikazati **iznos i vektor**.

1. Čestica se giba po pravcu. Zadan je dijagram promjene ubrzanja. Prijedeni put u trenutku $t=6$ s iznosi 27 m. Potrebno je napisati **diferencijalne i integralne odnose** koji povezuju ubrzanje, brzinu i prijedeni put, te koristeći te odnose odrediti dijagrame $v(t)$ i $s(t)$ u mjerilu, ucrtati **tangente i nagibe tangenti**.

(21 bod)



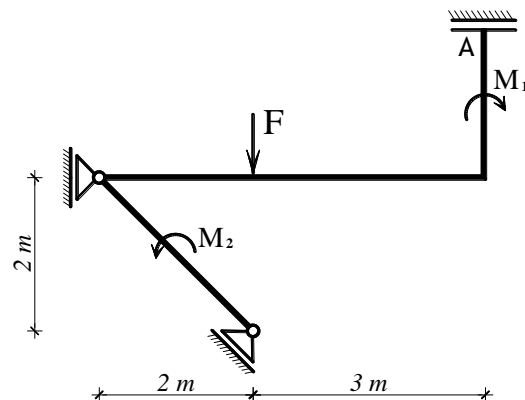
2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti reaktivni moment u spoju A, potrebno je odrediti polove i nacrtati plan horizontalnih i vertikalnih pomaka. **Na planu pomaka označiti veličine svih potrebnih pomaka.**

$$F = 2 \text{ [kN]}$$

$$M_1 = 3 \text{ [kNm]}$$

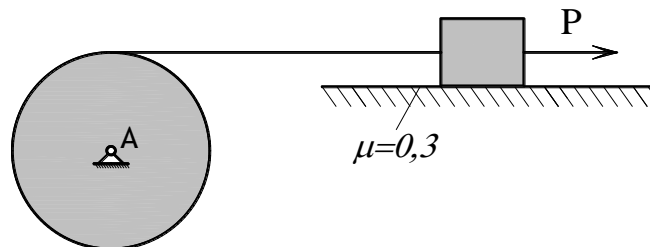
$$M_2 = 5 \text{ [kNm]}$$

(21 bod)



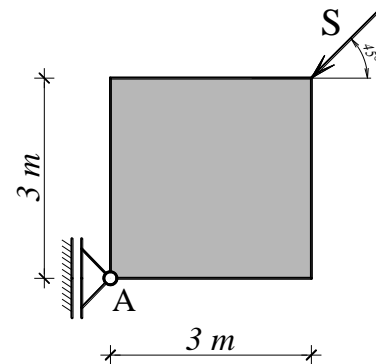
3. Teret mase $m = 2$ [kg] povezan je nerastezljivim užetom koje je bez mase. Uže je namotano na kružni disk koji je zglobno spojen u točki A kako je prikazano na slici. Sustav miruje u vertikalnoj ravnini. Potrebno je odrediti koliko iznosi sila u užetu te reakcija u spoju A u trenutku kada na teret počne djelovati sila $P = 10$ [N]. Disk ima polumjer $R = 0,5$ [m] i masu $m_D = 6$ [kg].

(18 bodova)



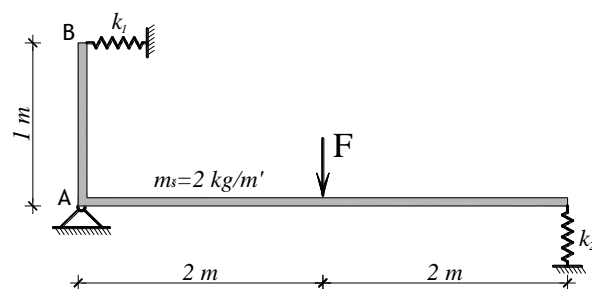
4. Ploča mase $m_p = 10$ [kg] miruje na horizontalnoj glatkoj podlozi. Ploča je spojena zglobnim kliznim spojem u točki A kako je prikazano na slici. U jednom trenutku na ploču djeluje impuls $S = 5$ [Ns]. Za taj trenutak potrebno je odrediti reaktivni impuls u točki A, vektor i iznos brzine točke A i kutnu brzinu s kojom počinje gibanje ploče.

(20 bodova)



5. Štap prikazanog oblika, jednoliko distribuirane mase zglobno je spojen u točki A te s dvije opruge krutosti $k_1 = 1000$ [N/m'] i $k_2 = 600$ [N/m'] kako je prikazano na slici. **Sustav miruje u horizontalnoj ravnini** dok na njega djeluje statička sila $F = 25,6$ [N]. U jednom trenutku sila F naglo prestane djelovati. Odredi kružnu frekvenciju, period i zakon oscilacija točke B koje će nastati nakon uklanjanja sile F . Odredi iznos maksimalne kinetičke energije nastalih oscilacija.

(20 bodova)



1. (20 bodova) Opisati prirodni način zadavanja gibanja čestice, te kako se u tom slučaju određuje brzina i ubrzanje. Riješiti zadatak: Gibanje čestice zadano je vektorskom funkcijom $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + (3t - 4t^2)\vec{j}$.

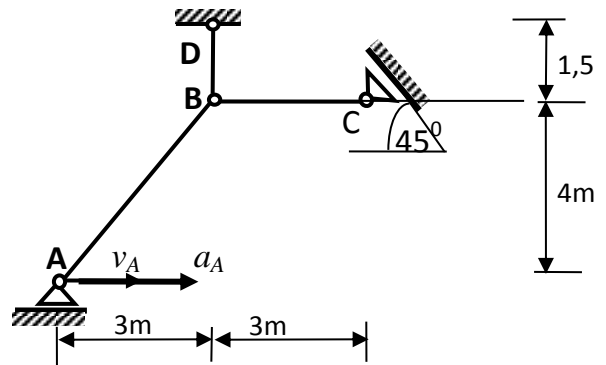
Treba:

- Odrediti i nacrtati trajektoriju po kojoj se čestica giba, prikazati smjer gibanja čestice
- Odrediti funkciju brzine i ubrzanja (vektor i iznos)
- Odrediti iznos i vektor brzine i ubrzanja u točki u kojoj trajektorija presijeca os x
- Odrediti normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja te radijus zakrivljenosti trajektorije u istoj točki

2. (20 bodova) Prikazati izvod osnovnog teorema kinematike uz objašnjenje osnovnih pretpostavki i značenja pojedinih veličina. Riješiti zadatak: U prikazanom položaju mehanizma na slici poznata je brzina i ubrzanje točke A,

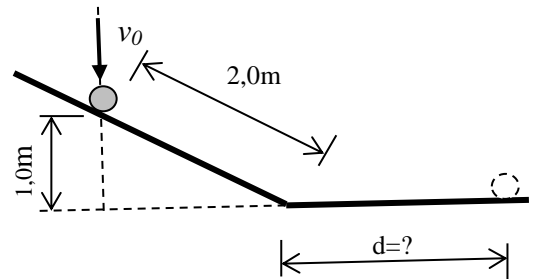
$v_A = 1,5 \text{ m/s}$ i $a_A = 3,5 \text{ m/s}^2$. Treba odrediti:

- brzinu i ubrzanje točke B i točke C u tom trenutku
- vektore kutnih brzina i kutnih ubrzanja svih štapova u tom trenutku



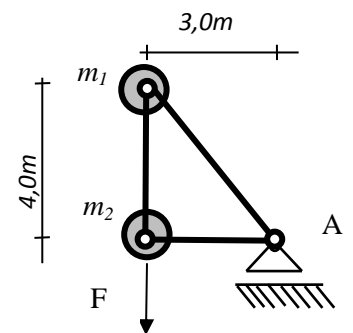
3. (15 bodova) Opisati pretpostavke i zakonitosti koje vrijede kod sruca čestica. Riješiti zadatak: Kuglica mase $0,2 \text{ kg}$ udara u kosu podlogu brzinom $\vec{v}_0 = -8\vec{j} \text{ m/s}$. Koeficijent restitucije $e = 0,5$. Treba odrediti

- brzinu kuglice nakon sruca (iznos i smjer) u (1)
- udaljenost d na kojoj će kuglica udariti u podlogu
- brzinu kuglice neposredno prije pada na horizontalnu podlogu u (2)



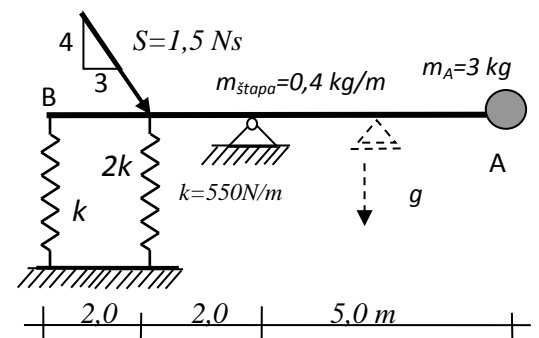
4. (18 bodova) Opisati koji se zakoni primjenjuju i kako se analizira gibanje sustava čestica pod djelovanjem sila u ravnini. Napisati jednađbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednađbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka:

Dvije čestice mase $m_1 = 6 \text{ kg}$ i $m_2 = 2 \text{ kg}$ vezane na zgلوبno spojene štapove bez mase miruju na horizontalnoj glatkoj podlozi kad na njih počne djelovati sila $F = 40,5 \text{ N}$. Treba odrediti vektor i iznos reakcije u spoju A i iznose sila u štapovima u trenutku kad počne gibanje.



5. (20 bodova) Prikazani sustav miruje u gravitacijskom polju pridržan tako da opruge nisu deformirane. U jednom trenutku djeluje impuls S , i istovremeno se uklanja pridržanje. Za nastalo gibanje sustava treba odrediti:

- prikazati izvod funkcije promjene ukupne potencijalne energije sustava za proizvoljni trenutak gibanja u gravitacijskom polju
- diferencijalnu jednađbu oscilacija čestice A, te frekvenciju i period slobodnih oscilacija
- zakon gibanja točke A
- maksimalnu deformaciju opruge u točki B



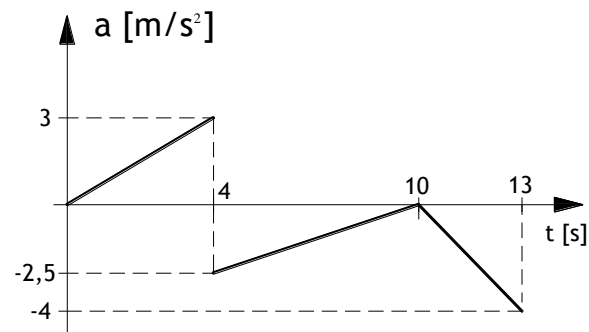
NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim **oznakama i kotama**. Prije numeričkog računa **napisati općeniti izraz** koji se koristi. Za sve orijentirane veličine potrebno je prikazati **iznos i vektor**.

1. Čestica se giba po pravcu. Zadan je dijagram promjene ubrzanja. Prijedeni put u trenutku $t=10$ s iznosi 29 m. Potrebno je napisati **diferencijalne i integralne odnose** koji povezuju ubrzanje, brzinu i prijedeni put, te koristeći te odnose odrediti dijagrame $v(t)$ i $s(t)$ **u mjerilu, ucrtati tangente i nagibe tangenti**.

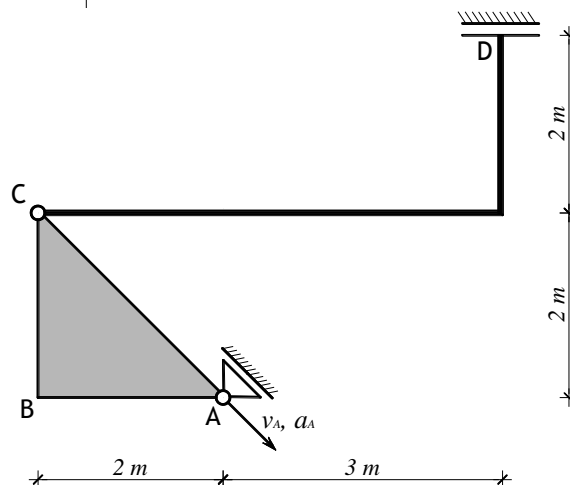


2. Prikazani mehanizam giba se u ravnini XY. U položaju prikazanom na slici poznata je brzina i ubrzanje točke A:

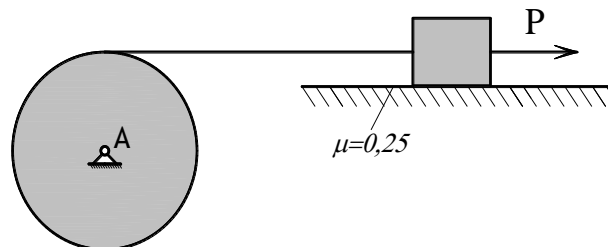
$$v_A = 2\sqrt{2} \text{ [r/s]}$$

$$a_A = 4\sqrt{2} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

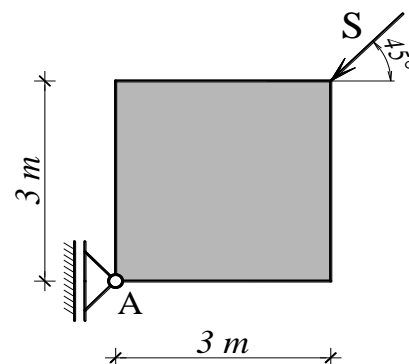
Potrebno je napisati vektorske jednadžbe koje povezuju brzine i ubrzanja označenih točaka i riješiti ih **grafičkim postupkom**. Odrediti vektore i iznose brzina i ubrzanja svih točaka, kutne brzine i kutna ubrzanja tijela.



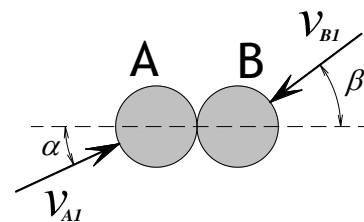
3. Teret mase $m = 2$ [kg] povezan je nerastezljivim užetom koje je bez mase. Uže je namotano na kružni disk koji je zgloбно spojen u točki A kako je prikazano na slici. Sustav miruje u vertikalnoj ravnini. Potrebno je odrediti koliko iznosi sila u užetu te reakcija u spoju A u trenutku kada na teret počne djelovati sila $P = 10$ [N]. Disk ima polumjer $R = 0,5$ [m] i masu $m_D = 6$ [kg].



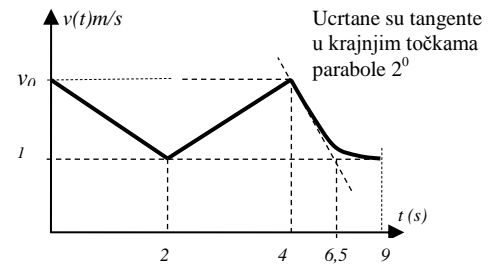
4. Ploča mase $m_P = 12$ [kg] miruje na horizontalnoj glatkoj podlozi. Ploča je spojena zglobnim kliznim spojem u točki A kako je prikazano na slici. U jednom trenutku na ploču djeluje impuls $S = 6,5$ [Ns]. Za taj trenutak potrebno je odrediti reaktivni impuls u točki A, vektor i iznos brzine točke A i kutnu brzinu s kojom počinje gibanje ploče.



5. Čestice A i B sudare se na horizontalnoj glatkoj podlozi kako je prikazano na slici. Sudar čestica je plastičan. Zadane su brzine kuglica neposredno prije sudara $v_{AI} = 5$ [m/s] i $v_{BI} = 4$ [m/s], kutovi $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 45^\circ$, te mase čestica $m_A = 2,5$ [kg] i $m_B = 3$ [kg]. Treba odrediti iznos brzina obiju kuglica nakon sudara i kutove koje vektori brzina zatvaraju s linijom sraza. Vektore brzina prikazati na crtežu.



1. Napisati opće izraze diferencijalnih i integralnih odnosa između ubrzanja, brzine i prijeđenog puta čestice koja se giba po pravcu te **ukratko objasniti geometrijsko značenje** svakog napisanog izraza. Primjeniti i pokazati razumijevanje navedenog pri određivanju veličina i crtanju grafova funkcija $a(t)$ i $s(t)$ iz zadane funkcije $v(t)$, a ne na crtežima funkcija iz skripte. Treba odrediti v_0 , ako čestica za 9 s prijeđe 15 m, nacrtati sve funkcije i tangente trokutima u mjerilu, upisati i pokazati kako su određene sve vrijednosti na grafovima te kako su određene i ucrtane tangente.

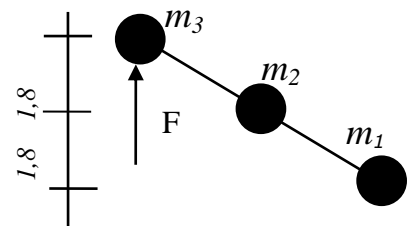


2. Objasniti svojstva i načine određivanja apsolutnih i relativnih polova brzina u kinematici mehanizama. Navesti i objasniti **zaključke** Kennedyevog teorema (ne traži se izvod teorema). Pokaži da to vrijedi na primjeru: Dvije ploče gibaju se u ravnini x,y. U promatranom trenutku poznate su koordinate točke A (10,5m ; 4,5m) i točke B (7,5m; 0,5m) na ploči I, i njihova brzina $\vec{v}_A = 6\vec{i} - \vec{j} (m/s)$ i $\vec{v}_{By} = 5,5\vec{j} (m/s)$. U istom trenutku ploča II rotira se kutnom brzinom $\vec{\omega}_{II} = 2\vec{k} (r/s)$ tako da točka C(1,5m; 0,5m) na ploči II ima brzinu $\vec{v}_C = -9\vec{i} - 3\vec{j} (m/s)$. Treba odrediti koordinate apsolutnih polova i koordinate relativnog pola brzina promatranih ploča isključivo koristeći kinematička svojstva polova. Na crtežu treba označiti sve zadane točke i vektore, označiti pretpostavke i rješenja traženih veličina i pokazati da vrijedi Kennedyev teorem.

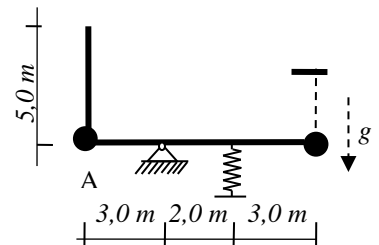
3. Objasniti početne pretpostavke i prikazati izvod osnovnog teorema kinematike nedeformabilnog tijela. Pokazati primjenu pri određivanju brzina točaka A, B i C na ploči koja se giba u ravnini XY. U promatranom trenutku poznat je položaji svih točaka: C(-3m; 3m), točka A nalazi se u ishodištu i ima brzinu $\vec{v}_A = 7\vec{i} (m/s)$, a točka B ima koordinate B(4m;3m) i poznatu y koordinatu vektora brzine $\vec{v}_{By} = 4\vec{j} (m/s)$. Treba odrediti vektore i iznose brzina zadanih točaka isključivo pomoću navedenog teorema!

4. Objasniti prvi i drugi Newtonov aksiom i njihovu primjenu na analizu gibanja sustava čestica. Pokazati na rješenju zadatka:

Tri čestice zanemarivih dimenzija i mase $m_1=2,5 \text{ kg}$, $m_2=1,5 \text{ kg}$ i $m_3=1 \text{ kg}$, kruto su spojene na štap duljine $L=6,0 \text{ m}$ bez mase, kako je prikazano na crtežu. Štap s kuglicama miruje na glatkoj horizontalnoj podlozi u trenutku kad na česticu m_3 djeluje sila $F=120 \text{ N}$. Treba odrediti veličinu ubrzanja kuglice 3, te veličinu i položaj ukupne sile inercije sustava u trenutku kad na česticu m_3 djeluje sila $F=120 \text{ N}$.



5. Pokazati postupke za određivanje diferencijalne jednadžbe oscilacija sustava s jednim stupnjem slobode, uz objašnjenje pretpostavki i značenja pojedinih oznaka. Primijeniti jedan od navedenih načina na određivanje diferencijalne jednadžbe slobodnih oscilacija čestice A u prikazanom sustavu. Treba odrediti zakon slobodnih oscilacija čestice A, koje će nastati ako se ukloni pridržanje pri kojem opruga nije bila deformirana. Krutost opruge je $k=5500 \text{ N/m}$. Masa štapova je $1,5 \text{ kg/m}^1$ a obje čestice imaju jednaku masu $m=2,5 \text{ kg}$.



SVI ZADACI NOSE JEDNAKI BROJ BODOVA: 20 x 5=100

NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$). Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim oznakama i kotama. Prije numeričkog računa **navesti općeniti zakon** koji se koristi (npr. $I_A \vec{\epsilon} = \sum \vec{M}_A$). Na kraju svakog zadatka iskazati tražena rješenja.

1. Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom:

$$\vec{r}(t) = 2 \cos(t) \vec{i} + 4(\cos^2(t) - 1) \vec{j}$$

Treba odrediti:

a) Vektorske funkcije brzine i ubrzanja čestice, jednadžbu trajektorije i nacrtati graf, odrediti i označiti

položaj točke za trenutke $t = 0$ s i $t_1 = \frac{\pi}{2}$ s,

b) veličinu i vektor brzine i ubrzanja za trenutak $t_1 = \frac{\pi}{2}$ s, te normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja. Odredi koliko iznosi radijus zakrivljenosti trajektorije za t_1 .

(20 bodova)

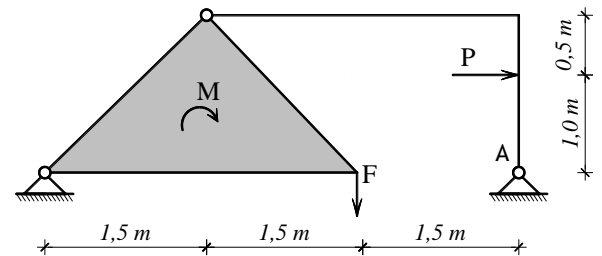
2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti horizontalnu reakciju u ležaju A. **Na crtežu prikazati polove, planove pomaka oba tijela i veličine svih potrebnih pomaka.** Provjeriti točnost pomoću jednadžbi ravnoteže.

$$P = 1,5 \text{ [kN]}$$

$$F = 2 \text{ [kN]}$$

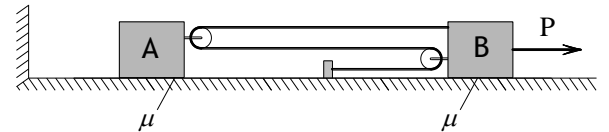
$$M = 3 \text{ [kNm]}$$

(22 boda)



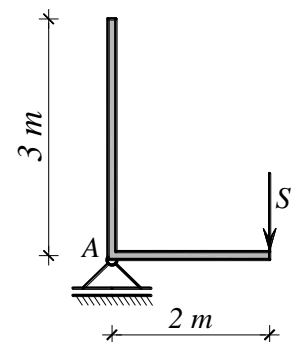
3. Dva tereta A i B povezana su nerastezljivim užetom kako je prikazano na slici. Masa tereta A je $m_A = 4$ [kg] a masa tereta B iznosi $m_B = 6$ [kg]. Koeficijent trenja između tereta i podloge je $\mu = 0,15$. Odredi koliko iznosi sila u užetu te ubrzanja tereta A i B ako na sustav djeluje konstantna sila $P = 20$ [N].

(18 bodova)



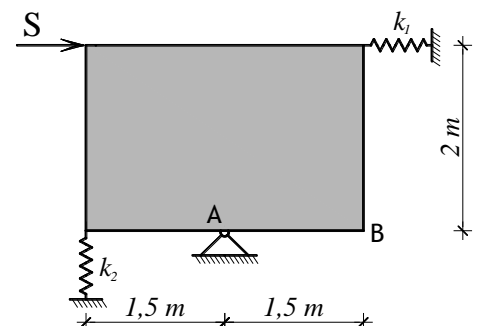
4. Štap prikazanog oblika ima masu $m = 2$ [kg/m], spojen je zglobnim kliznim ležajem kako je prikazano na slici. Sustav miruje u horizontalnoj ravnini. Odredi koliko iznosi reaktivni impuls u spoju A te iznos i vektor brzine točke A ako u jednom trenutku na sustav djeluje impuls $S = 12$ [Ns].

(20 bodova)



5. Ploča mase $m = 12$ [kg] zgloбно je spojena u točki A te s dvije opruge $k_1 = 1200$ [N/m] i $k_2 = 900$ [N/m], kako je prikazano na slici. Sustav miruje u horizontalnoj ravnini u trenutku kada na njega djeluje impuls $S = 5$ [Ns]. Potrebno je odrediti kružnu frekvenciju i period oscilacija sustava, te zakon oscilacija točke B radi djelovanja impulsa S.

(20 bodova)



1. (20 bodova) Prikazati izvod za radijus zakrivljenosti trajektorije pomoću kinematičkih veličina. Riješiti zadatak: Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom $\vec{r}(t) = [2 + 4 \cos t] \vec{i} + [2 + 2 \sin t] \vec{j} \quad [m]$

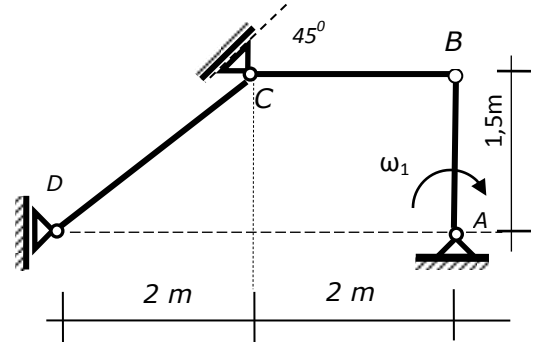
Potrebno je:

- odrediti i nacrtati jednadžbu trajektorije, položaj čestice za $t=0$ [s] i označiti smjer gibanja čestice po trajektoriji, odrediti vektorsku i skalarnu funkciju promjene brzine i ubrzanja
- odrediti položaj čestice na trajektoriji, brzinu i ubrzanje za trenutak $t_1 = \pi$ [s] (vektor i skalar)
- na crtežu prikazati položaj čestice i ucrtati vektore brzine i ubrzanja za trenutak t_1
- odrediti radijus zakrivljenosti, te iznos normalne i tangencijalne komponente ubrzanja za trenutak t_1

2. (20 bodova) Objasniti pretpostavke, izvod i značenje teorema o ravnopravnosti izbora pokretnog ishodišta. Primjenom tog teorema, ako je kutna brzina štapa AB $\omega_1 = 2r/s = \text{const.}$ uz grafičko rješenje vektorskih jednadžbi treba odrediti:

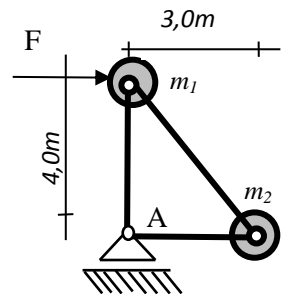
- iznose brzina i ubrzanja u označenim točkama.

- vektore i iznose kutnih brzina i kutnih ubrzanja svih štapova u prikazanom mehanizmu,



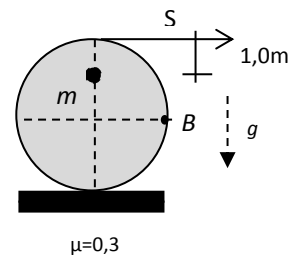
3. (20 bodova) Opisati zakone koji se primjenjuju pri analizi gibanja sustava čestica u ravnini pod djelovanjem sila. Napisati jednadžbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednadžbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka:

Dvije čestice mase $m_1 = 6kg$ i $m_2 = 2kg$ vezane na zgloбно spojene štapove bez mase miruju položene na horizontalnu glatku podlogu kad na njih počne djelovati sila $F = 42 N$. Treba odrediti veličine koje opisuju gibanje sustava, vektor i iznos reakcije u spoju A, te ubrzanje čestice na koju djeluje sila F, u trenutku kad počne gibanje.



4. (20 bodova) Prikazati kako se izvodi zakon impulsa za tijelo, te objasniti po čemu se razlikuje od djelovanja impulsa na česticu. Riješiti zadatak:

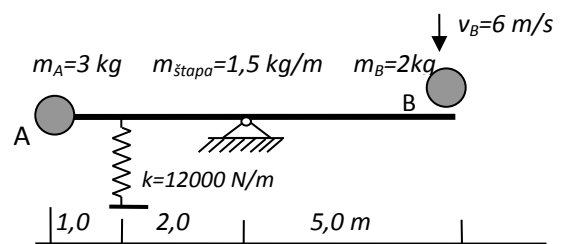
Kružni disk polumjera $R = 3m$, mase $M = 6kg$ sa kruto spojenom česticom $m = 2kg$, miruje oslonjen na horizontalnu hrapavu podlogu. Na disk u jednom trenutku djeluje impuls $S = 18Ns$. Za taj trenutak treba odrediti:



- vektor u iznos brzine centra diska
- vektor u iznos brzine točke B

5. (20 bodova) Prikazani sustav miruje u gravitacijskom polju. U jednom trenutku udari kuglica mase 2 kg u točku B na štapu. Sraz je idealno elastičan. Treba navesti postupke za određivanje dif. Jednadžbe slobodnih oscilacija i odrediti:

- diferencijalnu jednadžbu oscilacija čestice A
- frekvenciju i period slobodnih oscilacija
- zakon gibanja točke A nakon sraza štapa i čestice
- iznos maksimalne sile u opruzi za vrijeme gibanja



NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim **oznakama i kotama**. Prije numeričkog računa **navesti općeniti zakon** koji se koristi (npr. $I_A \vec{\epsilon} = \sum \vec{M}_A$). Na kraju svakog zadatka iskazati tražena rješenja. Boduju se isključivo točno napisani zakoni i rješenja te uredni crteži.

1. Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom:

$$\vec{r}(t) = 3 \cos(2t) \vec{i} + 3(1 - \cos^2(2t)) \vec{j}$$

Treba odrediti:

- a) Vektorske funkcije brzine i ubrzanja čestice, jednadžbu trajektorije i nacrtati graf, odrediti i označiti položaj točke

za trenutke $t = 0$ s i $t_1 = \frac{\pi}{4}$ s,

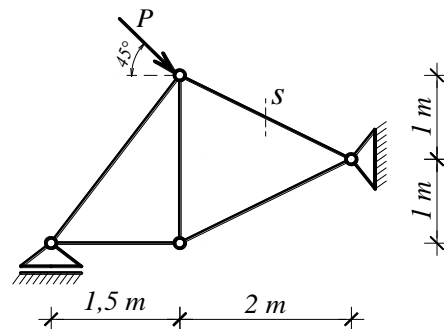
- b) veličinu i vektor brzine i ubrzanja za trenutak $t_1 = \frac{\pi}{4}$ s, te normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja. Odredi koliko iznosi radijus zakrivljenosti trajektorije za t_1 .

(20 bodova)

2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti silu S u označenom štapu. **Na crtežu prikazati polove, planove pomaka te veličine svih potrebnih pomaka.**

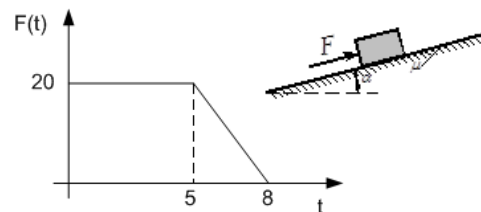
$$P = 10 \text{ [kN]}$$

(20 bodova)



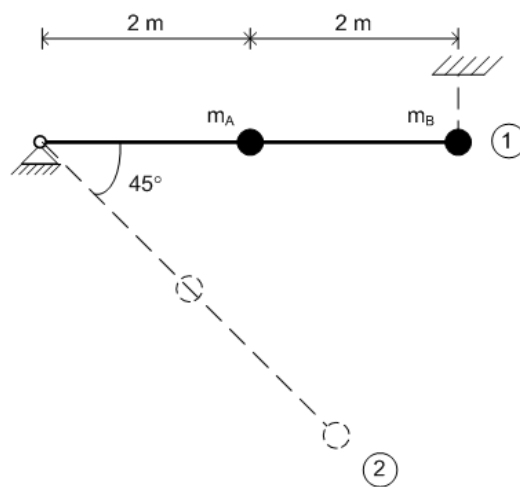
3. Čestica mase $m = 8 \text{ kg}$ miruje na hrapavoj kosini ($\mu = 0,1$ i $\alpha = 5^\circ$), kad na nju počne djelovati sila $F(t)$ koja se u vremenu mijenja prema prikazanom dijagramu. Treba odrediti dijagrame $R(t)$, $a(t)$, $v(t)$ i $s(t)$ s ucrtanim tangentama i njihovim nagibima u mjerilu za vremenski interval gibanja čestice.

(20 bodova)



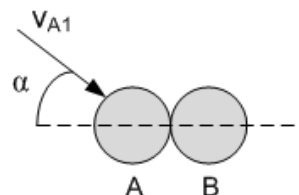
4. Dvije čestice mase $m_A = 3 \text{ kg}$ i $m_B = 4 \text{ kg}$ kruto su spojene za apsolutno kruti štap koji je bez mase. Sustav je pridržan u položaju 1 u vertikalnoj ravnini. Odredi koliko iznose brzine i ubrzanja čestice A i B te reakciju u osloncu u položaju 2 ako se u jednom trenutku ukloni pridržanje čestice B.

(25 bodova)



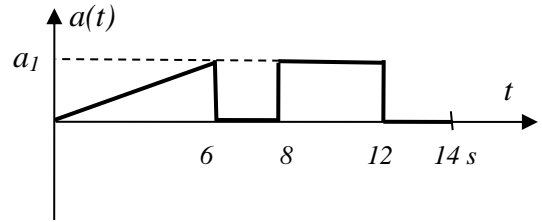
5. Čestica B mase $m_B = 12 \text{ kg}$ miruje na horizontalnoj glatkoj podlozi. U jednom trenutku čestica A mase $m_A = 4 \text{ kg}$ udara u česticu B brzinom $v_{A1} = 8 \text{ m/s}$ kako je prikazano na slici ($\tan(\alpha) = 3/4$), koeficijent restitucije sudara iznosi $e = 0,6$. Potrebno je odrediti iznos brzina objiju kuglica nakon sudara i kutove koji vektori brzina zatvaraju s linijom sruza. Vektore brzina prikazati na crtežu.

(15 bodova)



1. Treba napisati diferencijalne i integralne odnose koji povezuju funkcije $a(t)$, $v(t)$ i $s(t)$ kod gibanja čestice po pravcu, te s **ukratko objasniti** njihovo **geometrijsko značenje**. Pokazati primjenu pri rješenu zadatka:

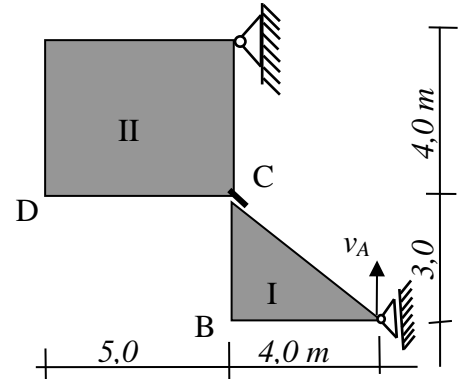
Čestica se giba po osi x tako da ubrzanje mijenja prema zadanom grafu $a(t)$, a gibanje počinje u ishodištu s brzinom v_0 . Treba odrediti početnu brzinu v_0 i iznos ubrzanja a_1 , ako u trenutku $t_1=8s$ čestica ima brzinu $v_1=0m/s$, a za $14s$ od početka gibanja položaj na osi x određen je koordinatom $x_{14}=4m$.



Treba nacrtati dijagrame funkcija $v(t)$ i $s(t)$ sa ucrtanim tangentama za vrijeme $0 < t < 14 s$

(22 bodova)

2. Navesti teoreme, pretpostavke i pravila koje koristimo pri određivanju plana projekcija pomaka i brzina u kinematici mehanizama. Opisati kinematičke uvjete gibanja u spoju C, te isključivo **primjenom plana projekcija** brzina odrediti vektore i iznose brzina u točkama B, C i D i vektore kutnih brzina ploča, ako je zadana brzina točke A, $v_A=18,5m/s$.

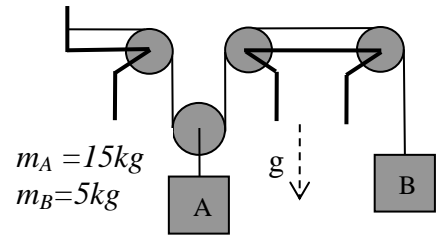


(18 bodova)

3. Napisati i objasniti prvi, drugi i treći Newtonov zakon te primijeniti odgovarajući zakon na rješenu zadatka:

Prikazani sustav miruje pridržan u vertikalnoj ravnini. U jednom trenutku ukloni se vanjsko pridržanje i sustav se počne gibati. Koloture su bez mase. Treba odrediti:

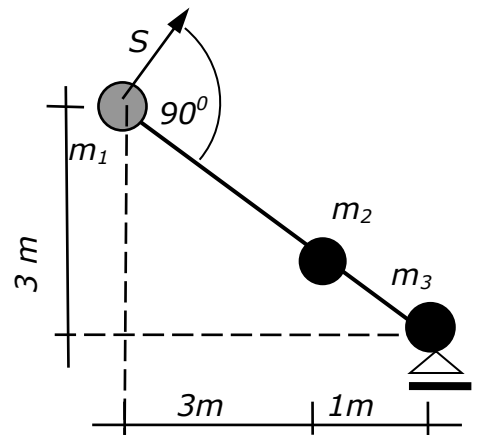
- vektore ubrzanja čestica A i B.
- koliko se pomakla čestica A nakon 5s od početka gibanja



(20 bodova)

4. Treba objasniti razliku u kinetičkoj energiji jedne čestice i sustava čestica. Prikazati izvod zakona promjene kinetičke energije čestice. Riješiti zadatak: Tri kuglice zanemarivih dimenzija mase $m_1=3,5 kg$, $m_2=2 kg$, i $m_3=2,5 kg$ kruto su spojene na krajeve krutog štapa bez mase, miruju spojene u horizontalnoj glatkoj podlozi. U jednom trenutku na česticu m_1 djeluje u horizontalnoj ravnini impuls $S=12 Ns$. Za trenutak kad počne gibanje treba odrediti

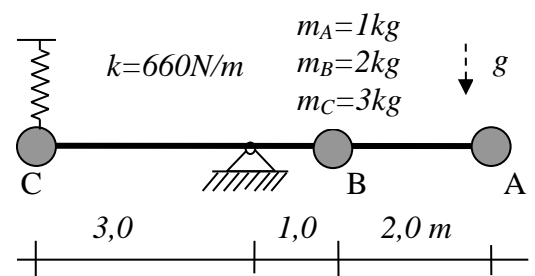
- iznos brzine čestice m_1
- brzinu klizača
- ukupnu kinetičku energiju sustava



(20 bodova)

5. Tri čestice spojene su štapom mase $0,5 kg/m$ u prikazani sustav koji miruje u **vertikalnoj ravnini** pridržan tako da opruga nije deformirana. U jednom trenutku ukloni se pridržanje. Za nastalo gibanje treba:

- prikazati izvod funkcije promjene ukupne mehaničke energije sustava u vremenu
- odrediti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje nastalo gibanje
- odrediti frekvenciju i period nastalog gibanja
- odrediti zakon gibanja točke A



(20 bodova)

NAPOMENA: Odgovori se boduju navedenim bodovima samo ako rješenja sadrže crteže, oznake i objašnjenja u oba dijela pitanja, te su u rješenu zadatka navedeni opći zakoni koji se primjenjuju.

Rješenja zadataka:

U teorijskom dijelu treba ukratko odgovoriti na sva postavljena pitanja

1. $v_0 = -3,0 \text{ m/s}$, $a_I = 1 \text{ m/s}^2$ (12 bodova)

2. $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = 2\vec{k} \text{ r/s}$ $v_B = 10,5 \text{ m/s}$, $v_D = 12,81 \text{ m/s}$ $v_{C,I} = 12,09 \text{ m/s}$ $v_{C,II} = 8 \text{ m/s}$
(15 bodova)

3. $\vec{a}_A = -1,4\vec{j} \text{ m/s}^2$ $\vec{a}_B = 2,8\vec{j} \text{ m/s}^2$ $s_{t=5} = 17,5 \text{ m}$ (15 bodova)

4. $v_1 = 3,32 \text{ m/s}$ $\vec{v}_k = -0,12\vec{i} \text{ m/s}$ $E_{kin} = 19,852 \text{ J}$ (14 bodova)

5.

a) $E_{uk}(t) = 2,611 \cdot \dot{x}^2(t) + 330 \cdot x^2(t) + c$

b) $\ddot{x}(t) + 126,38x(t) = 0$

c) $\Omega = 11,24 \text{ r/s}$ $T = 0,559 \text{ s}$

d) $x(t) = \pm 0,0198 \cos 11,24t$ (predznak ovisi o odabiru smjera $x(t)$ koji treba označiti na crtežu)

a) (8 bodova) - izvod umjesto teorijskog pitanja

b) - d) (12 bodova)

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim oznakama i kotama. Prije numeričkog računa navesti općeniti zakon koji se koristi (npr. $I_A \ddot{\varphi} = \sum \overline{M_A}$). Vektorske veličine u jednažbama moraju odgovarati gibanju ili pretpostavci gibanja koja je označena na crtežu. **Boduju se isključivo točno napisani izrazi i rješenja.**

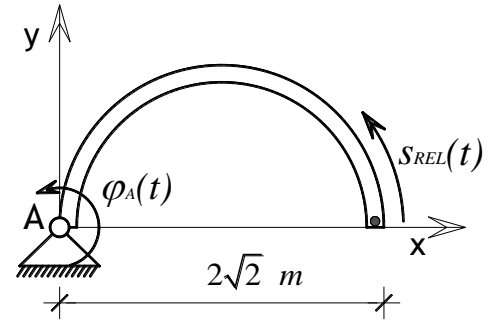
1. Polukružna cijev spojena je zglobno u točki A oko koje rotira po zakonu $\varphi_A(t)$. U cijevi se nalazi kuglica koja se giba po zakonu $s_{REL}(t)$. Početni položaj sustava ($t_0 = 0$ [s]) prikazan je na slici.

$$\varphi_A(t) = \pi t^2 \text{ [rad]}$$

$$s_{REL}(t) = \pi \sqrt{2} t \text{ [m]}$$

Treba odrediti vektor i iznos apsolutne brzine i apsolutnog ubrzanja kuglice u trenutku $t_1 = 0,5$ [s]. Položaj i sve vektore treba prikazati na crtežu.

(25 bodova)

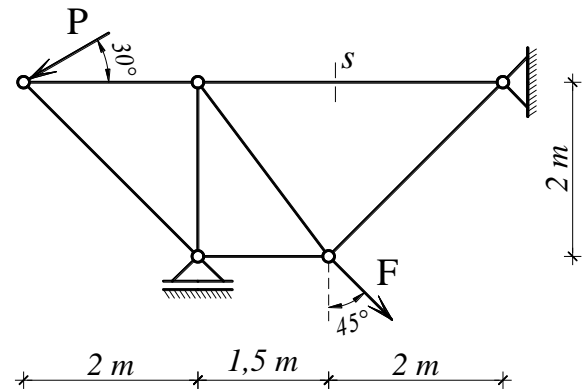


2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti silu u označenom štapu. Na crtežu prikazati polove, planove pomaka i veličine svih potrebnih pomaka. Provjeriti točnost pomoću jednažbi ravnoteže.

$$P = 4 \text{ [kN]}$$

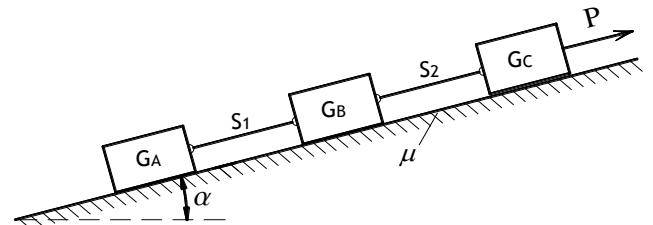
$$F = 5 \text{ [kN]}$$

(22 boda)



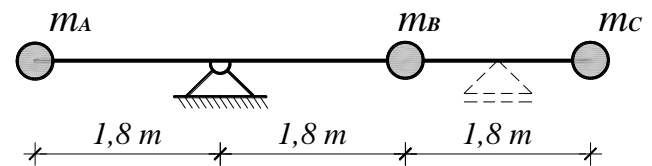
3. Tri tereta $G_A = 3$ [N], $G_B = 8$ [N] i $G_C = 5$ [N] povezani su štapovima S_1 i S_2 , sustav se nalazi na hrapavoj kosini ($\alpha = 30^\circ$ i $\mu = 0,2$) kako je prikazano na slici. Odredi koliko iznose sile u štapovima ako na sustav djeluje konstantna sila $P = 16$ [N].

(18 bodova)



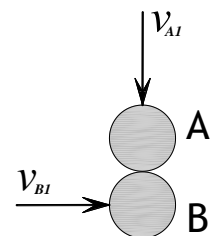
4. Tri čestice masa $m_A = 3$ [kg], $m_B = 1$ [kg] i $m_C = 0,5$ [kg] spojene su na apsolutno kruti štap koji je bez mase. Nakon uklanjanja pridržanja doći će do gibanja u **vertikalnoj ravni**. Odredi koliko iznose kutna brzina, kutno ubrzanje i reakcija u zglobnom spoju u trenutku kada počinje gibanje i u trenutku kada se štap nalazi u vertikalnom položaju.

(22 boda)

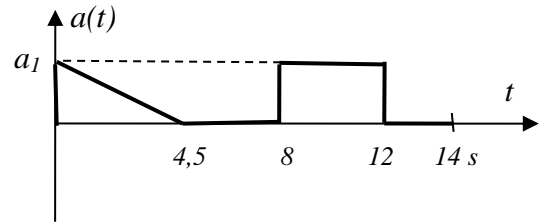


5. Kuglica A mase $m_A = 2$ [kg] i brzine $v_{A1} = 6$ [m/s] sudari se na horizontalnoj glatkoj podlozi sa kuglicom B mase $m_B = 4$ [kg] koja ima brzinu $v_{B1} = 4$ [m/s]. Koeficijent restitucije pri sudaru iznosi $e = 0,5$. Treba odrediti iznos i vektor brzina obiju kuglica nakon sraza te kut koji vektori brzina zatvaraju s linijom sraza.

(13 bodova)

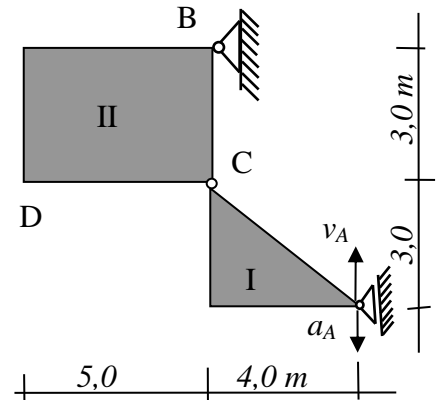


1. (22 boda) Napisati opće izraze diferencijalnih i integralnih odnosa između ubrzanja, brzine i prijeđenog puta čestice koja se giba po pravcu te **ukratko objasniti geometrijsko značenje** svakog napisanog izraza. Primijeniti i pokazati razumijevanje navedenog pri određivanju veličina i crtanju grafova funkcija $v(t)$ i $s(t)$ iz zadanih podataka i funkcije $a(t)$, a ne na crtežima iz skripte. Pokazati primjenu pri rješenju zadatka:



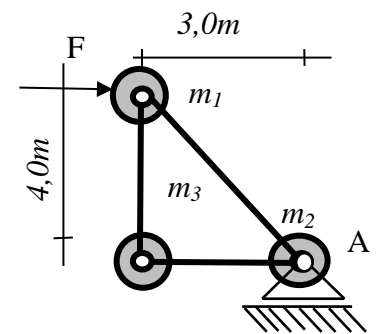
Čestica se giba po osi x tako da ubrzanje mijenja prema zadanom grafu $a(t)$, a gibanje počinje u ishodištu s brzinom v_0 . Treba odrediti početnu brzinu v_0 i iznos ubrzanja a_1 , ako u trenutku $t_1=12s$ čestica ima brzinu $v_1=6m/s$, i njezina udaljenost od ishodišta je $37,3m$. Treba nacrtati dijagrame funkcija $v(t)$ i $s(t)$ sa ucrtanim tangentama za vrijeme $0 < t < 14 s$

2. (21 bodova) Navesti pretpostavke, te objasniti izvod i značenje veličina u teoremu o ravnopravnosti izbora pokretnog ishodišta. Primjenom tog teorema uz grafičko rješenje vektorskih jednadžbi treba riješiti zadatak: U prikazanom položaju mehanizma na slici poznati su vektori brzine i ubrzanja za točku A: $v_A=2,0 m/s$ i $a_A=1,25m/s^2$. Za prikazani trenutak treba odrediti:



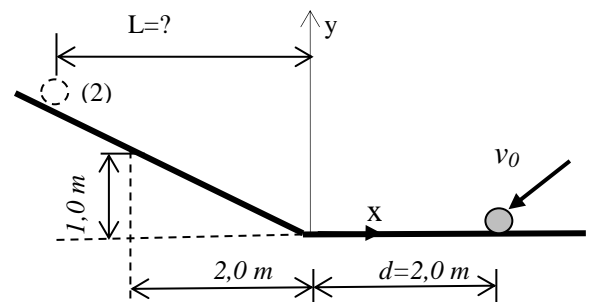
- iznose brzina i ubrzanja u točkama C i D
- vektore kutnih brzina i kutnih ubrzanja oba tijela

3. (20 bodova) Opisati zakone koji se primjenjuju pri analizi gibanja sustava čestica u ravnini pod djelovanjem sila. Napisati jednadžbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednadžbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka: Tri čestice mase $m_1=4kg$, $m_2=2kg$ i $m_3=2kg$, vezane na zglobno spojene štapove bez mase miruju položene na horizontalnu glatku podlogu kad na njih počne djelovati sila $F=43 N$. Za početni trenutak treba odrediti vektore i iznose:



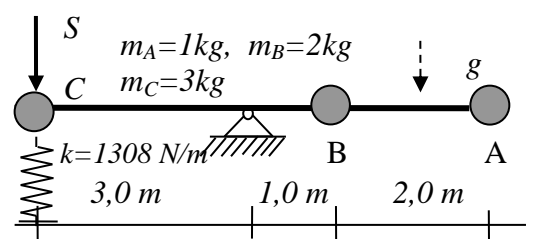
- veličina koje određuju gibanje sustava čestica
- reakcije u spoju A
- ubrzanje čestice na koju djeluje sila F
- ubrzanje točke A

4. (17 bodova) Opisati pretpostavke i zakonitosti koje vrijede kod sraza čestica. Riješiti zadatak: Kuglica mase $0,2 kg$ udari u podlogu brzinom $\vec{v}_0 = -8\vec{i} - 8\vec{j} (m/s)$.



- Koeficijent restitucije $e=0,5$. Treba odrediti
- udaljenost L na kojoj će kuglica pasti na podlogu
 - iznos brzine kuglice neposredno prije pada na podlogu u (2)

5. (20 boda) Tri čestice A, B i C spojene su štapom mase $1,0 kg/m$ u prikazani sustav koji miruje u **vertikalnoj ravnini**. U jednom trenutku djeluje impuls $S=11,2 Ns$. Za nastalo gibanje treba:



- prikazati izvod funkcije ukupne mehaničke energije sustava masa i opruga u gravitacijskom polju za proizvoljni trenutak gibanja t
- iz te funkcije odrediti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje nastalo gibanje
- odrediti frekvenciju i period nastalog gibanja
- odrediti zakon gibanja čestice A

NAPOMENA: Odgovori se boduju navedenim bodovima samo ako rješenja sadrže crteže, oznake i objašnjenja u oba dijela pitanja, te su u rješenju zadatka navedeni opći zakoni koji se primjenjuju.

Rješenja zadataka:

1. zadatak

$$a_0 = 0,8 \text{ m/s}^2, v_0 = 1,0 \text{ m/s}, s_{(t=14)} = 49,3 \text{ m/s}$$

2. zadatak

$$a) v_C = 1,5 \text{ m/s}, v_D = 2,9 \text{ m/s}, a_C = 3,15 \text{ m/s}^2, a_D = 6,12 \text{ m/s}^2$$

$$b) \vec{\omega}_1 = 0,5\vec{k} \text{ r/s}, \vec{\omega}_2 = -0,5\vec{k} \text{ r/s}, \vec{\epsilon}_1 = -0,7\vec{r}/\text{s}^2, \vec{\epsilon}_2 = 1,0\vec{r}/\text{s}^2$$

3. Zadatak

$$a) \vec{a}_{CM} = 5,375\vec{i} + 2,25\vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}, a_{CM} = 5,83 \text{ m/s}^2, \vec{\epsilon} = -1,0\vec{r}/\text{s}^2$$

$$b) \vec{R}_A = 18,0\vec{j} \text{ N}$$

$$c) \vec{a}_1 = 7,375\vec{i} + 3,0\vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}, a_1 = 7,96 \text{ m/s}^2$$

$$d) \vec{a}_A = 3,375\vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

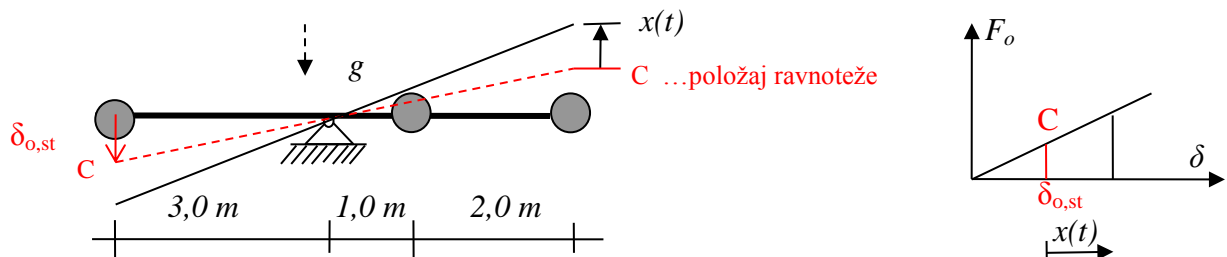
4. Zadatak

$$a) L = 1,612 \text{ m}$$

$$b) \vec{v}_2 = -8\vec{i} - 0,43\vec{j} \text{ (m/s)}, v_2 = 8,01 \text{ m/s}$$

5. Zadatak

a) Rješenje mora sadržati crtež sa svim oznakama za definiranje potencijalne energije (ravnotežni položaj, $x(t)$, odabrana ploha konstantnog potencijala c-c, i pripadna deformacija opruge):



$$\delta_{o,st} = \frac{4g}{3k}$$

$$E_{pot}(t) = -3g \cdot x(t) + 2g \frac{x(t)}{3} + g \cdot x(t) + \frac{k}{2} (\delta_{o,st} + x(t))^2 - \frac{k}{2} (\delta_{o,st})^2 + c$$

kvadrira se $(\delta_{o,st} + x(t))^2$, uvrsti $\delta_{o,st}$ te se dosta toga pokradi

$$E_{pot}(t) = \frac{k}{2} x(t)^2 + c = 654 \cdot x(t)^2 + c$$

$$I_0 = 56 \text{ kgm}^2$$

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{x}(t)}{3} \right)^2 = 3,111 \cdot \dot{x}^2(t)$$

$$E_{uk}(t) = 3,111 \cdot \dot{x}^2(t) + 654 \cdot x(t)^2 + c$$

$$b) \ddot{x}(t) + 210,21x(t) = 0$$

$$c) \Omega = 14,5 \text{ r/s} \quad T = 0,43 \text{ s}$$

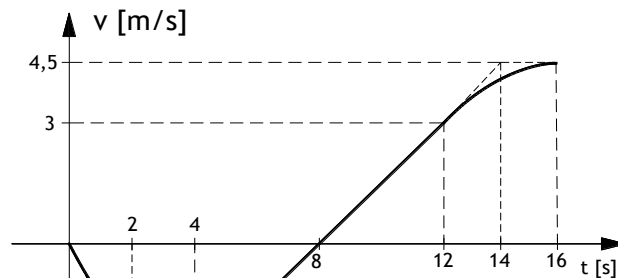
$$d) v_0 = 1,8 \text{ m/s}, \quad x(t) = 0,124 \sin 14,5t \text{ m}$$

NAPOMENA: Odgovori se boduju navedenim bodovima samo ako rješenja sadrže crteže, oznake i objašnjenja u oba dijela pitanja, te su u rješenju zadatka navedeni opći zakoni koji se primjenjuju.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim oznakama i kotama. Prije numeričkog računa **navesti općeniti zakon** koji se koristi (npr. $I_A \ddot{\epsilon} = \Sigma \vec{M}_A$). Vektorske veličine u jednadžbama moraju odgovarati gibanju ili pretpostavci gibanja koja je označena na crtežu. **Boduju se isključivo točno napisani izrazi i rješenja.**

1. Čestica se giba po pravcu. Zadan je dijagram promjene brzine. **Napisati diferencijalne i integralne odnose** koji povezuju ubrzanje, brzinu i prijeđeni put, te koristeći te odnose odrediti dijagrame $a(t)$ i $s(t)$ sa ucrtanim tangentama i njihovim nagibima.

(23 boda)



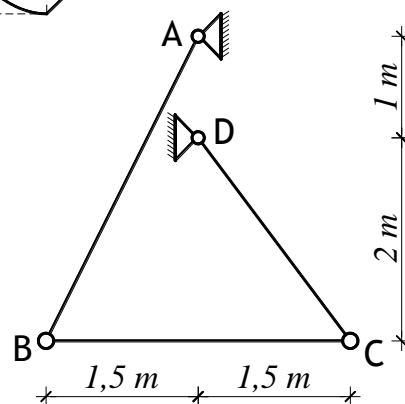
2. Prikazani mehanizam giba se u ravni XY. U položaju prikazanom na slici poznate su kutna brzina i kutno ubrzanje štapa AB:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{k} \quad [r/s]$$

$$\vec{\epsilon}_1 = -0,5\vec{k} \quad [r/s^2]$$

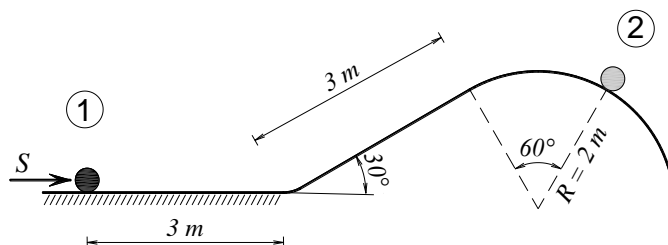
Potrebno je napisati vektorske jednadžbe koje povezuju brzine i ubrzanja označenih točaka i riješiti ih grafičkim postupkom. Potrebno je odrediti vektore i iznose brzina i ubrzanja svih označenih točaka te kutnu brzinu i kutno ubrzanje štapova BC i CD.

(25 bodova)



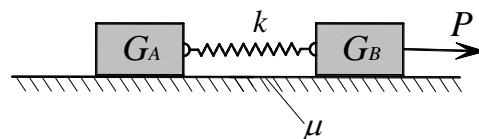
3. Na česticu mase $m=3$ [kg] u **položaju 1** djeluje impuls $S=21$ [Ns] nakon čega se ona početi gibati po prikazanoj podlozi. Koeficijent trenja na horizontalnom dijelu podloge u pravcu iznosi $\mu=0,15$ a dok je ostali dio podloge apsolutno gladak. Odredi koliko iznosi brzina i pritisak čestice na podlogu u **položaju 2**.

(15 bodova)



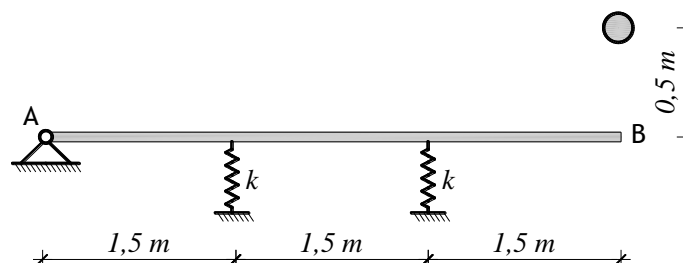
4. Tereti A i B težine $G_A=3$ [N], $G_B=7$ [N] spojene su elastičnom oprugom krutosti $k=600$ [N/m']. Sustav se giba pod djelovanjem konstante sile $P=10$ [N]. Koeficijent trenja između čestica i podloge iznosi $\mu=0,2$. Odredi koliko iznosi deformacija opruge za vrijeme gibanja.

(15 bodova)



5. Štap težine $G=20$ [N] vezan je zglobno u točki A i oslonjen na dvije opruge krutosti $k=3000$ [N/m'] kako je prikazano na slici. Štap miruje u vertikalnoj ravni. Sa visine $h=0,5$ [m] padne čestica težine $G_\epsilon=5$ [N] i udari u kraj štapa B. Odredi zakon oscilacija točke B nakon udara čestice ako je sraz plastičan.

(22 boda)



1. (20 bodova) Prikazati izvod za radijus zakrivljenosti trajektorije pomoću kinematičkih veličina. Riješiti zadatak: Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom

$$\vec{r}(t) = [2 + 3\cos(2t)]\vec{i} + 2\sin(2t)\vec{j} \quad [m]$$

Potrebno je:

- odrediti i nacrtati jednadžbu trajektorije, položaj čestice za $t=0$ [s] i označiti smjer gibanja čestice po trajektoriji, odrediti vektorsku i skalarnu funkciju promjene brzine i ubrzanja
- odrediti položaj čestice na trajektoriji, brzinu i ubrzanje za trenutak $t_1 = \frac{\pi}{4}$ [s] (vektor i skalar)
- na crtežu prikazati položaj čestice i vektore brzine i ubrzanje za trenutak t_1
- odrediti radijus zakrivljenosti, normalnu i tangencijalnu komponentu ubrzanja za trenutak t_1

2. (19 bodova) Objasniti svojstva apsolutnih i relativnih polova brzina u kinematici mehanizama. Navedi koji uvjeti i koja pravila vrijede pri njihovom određivanju. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka: Dvije ploče gibaju se u ravnini x,y. U promatranom trenutku poznate su koordinate točke A (14,5m; 2,0m) i točke B (10,5m; 7,0m) na ploči I, i njihove brzine $\vec{v}_B = -4,5\vec{i} + 6,75\vec{j} (m/s)$ i $\vec{v}_{Ay} = -11,25\vec{j} (m/s)$. Točka D (1,0m; 4,0m) i E (5,5m; 6,5m) nalaze se na ploči II i imaju brzine $\vec{v}_D = [-3,0\vec{i} - 4,5\vec{j}] (m/s)$ i $v_{Ex} = -6,75m/s$. Treba sve podatke prikazati na crtežu, odrediti koordinate apsolutnih polova brzina i koordinate relativnog pola brzina promatranih ploča, prikazati njihov položaj na crtežu u mjerilu, te grafički provjeriti točnost rezultata.

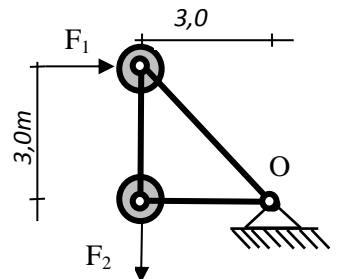
3. (18 bodova) Navesti i objasniti kako se određuje rad koji vrši neka sila, i koji je zakon povezan s radom. Riješiti zadatak:

Čestica mase $1,5 \text{ kg}$ miruje na glatkoj horizontalnoj podlozi. U jednom trenutku čestica se zbog djelovanja sile $F(t)$ počne gibati po kružnoj putanji radijusa $R=1m$ po zakonu $s(t)=1,5t^2$. Treba odrediti

- silu $F(t)$
- koji rad izvrši sila ako čestica dva puta obiđe kružnicu

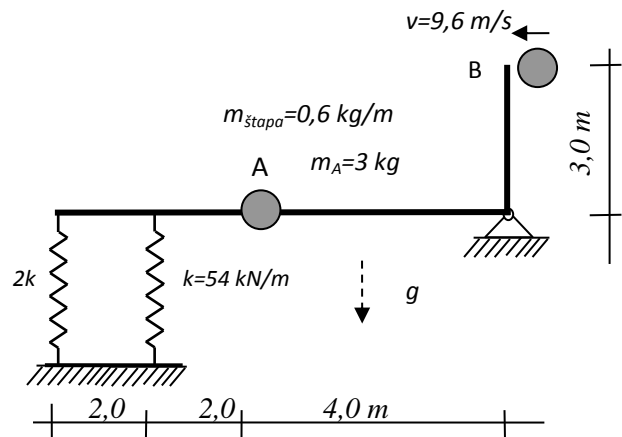
4. (18 bodova) Opisati koji se zakoni primjenjuju i kako se analizira gibanje sustava čestica pod djelovanjem sila u ravnini. Napisati jednadžbe i objasniti značenje svih veličina u tim jednadžbama. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka:

Dvije jednake čestice mase $m=2\text{kg}$ spojene štapovima bez mase miruju na horizontalnoj glatkoj podlozi kad na njih počnu djelovati sile $F_1=152\text{N}$ i $F_2=80\text{N}$. Treba odrediti vektor i iznos reakcije u spoju O i iznose sila u štapovima u trenutku kad počne gibanje.



5. (25 bodova) Prikazani sustav miruje u gravitacijskom polju. U jednom trenutku udari kuglica mase 2 kg u točku B na štapu. Sraz je idealno elastičan. Za nastalo gibanje sustava treba odrediti:

- funkciju promjene kinetičke energije u vremenu
- funkciju promjene potencijalne energije u vremenu
- diferencijalnu jednadžbu oscilacija čestice A iz funkcije ukupne mehaničke energije zadanog sustava, frekvenciju i period slob. oscilacija
- zakon gibanja točke A nakon udara čestice
- zakon promjene brzine točke A
- maksimalnu brzinu točke A



NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.

NAPOMENA: Zadatak mora biti riješen uredno i pregledno. Rješenja moraju sadržavati crteže s potrebnim oznakama i kotama. Prije numeričkog računa **navesti općeniti zakon** koji se koristi (npr. $I_A \vec{\epsilon} = \sum \vec{M}_A$). Vektorske veličine u jednažbama moraju odgovarati gibanju ili pretpostavci gibanja koja je označena na crtežu. **Buduju se isključivo točno napisani izrazi i rješenja.**

1. Položaj čestice određen je vektorskom funkcijom:

$$\vec{r}(t) = -6t\vec{i} + (36t^2 - 18t)\vec{j}$$

Treba odrediti:

- a) Vektorske funkcije brzine i ubrzanja čestice, jednažbu trajektorije i nacrtati graf, odrediti i označiti položaj točke za trenutke $t = 0$ s i $t_1 = 0,5$ s,
 b) veličinu i vektor brzine i ubrzanja za trenutak $t_1 = 0,5$ s, te iznos normalne i tangencijalne komponente ubrzanja. Sve vektore treba prikazati na crtežu.

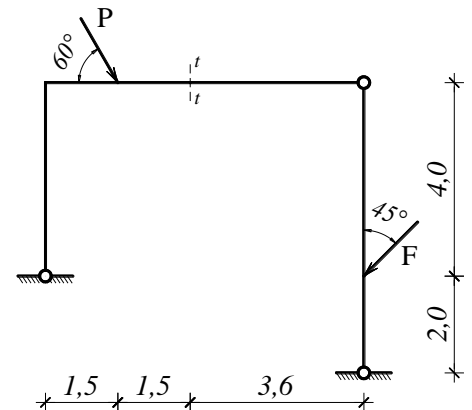
(20 bodova)

2. Za zadani statički sustav potrebno je metodom virtualnog rada odrediti moment savijanja u presjeku t-t. Na crtežu prikazati polove, planove pomaka i veličine svih potrebnih pomaka.

$$P = 12 \text{ [kN]}$$

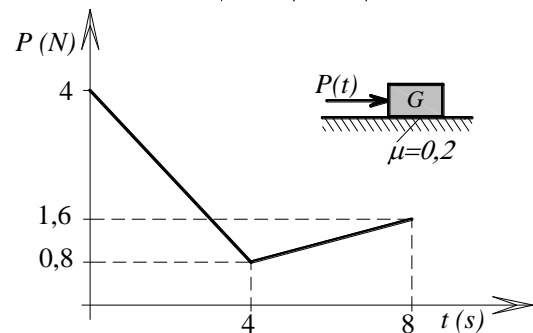
$$F = 8 \text{ [kN]}$$

(20 bodova)



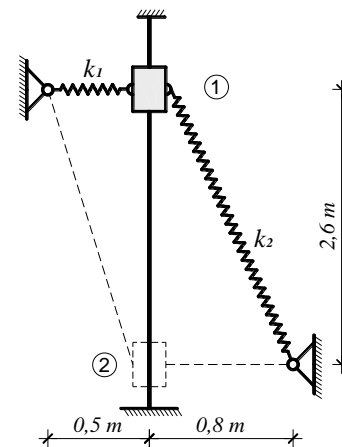
3. Čestica težine $G=8$ [N] miruje na hrapavoj horizontalnoj podlozi ($\mu=0,2$) kad na nju počne djelovati sila $P(t)$ koja se mijenja prema prikazanom dijagramu. Treba odrediti dijagrame $R(t)$, $a(t)$, $v(t)$ i $s(t)$ s ucrtanim tangentama i njihovim nagibima u mjerilu za vrijeme gibanja čestice (do zaustavljanja).

(30 bodova)



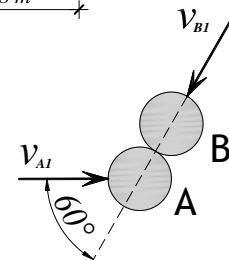
4. Prsten mase $m=5$ [kg] vezan je oprugama $k_1=100$ [N/m] i $k_2=50$ [N/m] te je pridržan u položaju 1. U jednom trenutku prsten se pusti u gibanje da klizi po vertikalnom štapu bez trenja. Potrebno je odrediti koliko iznosi brzina prstena i pritisak prstena na štap u položaju 2. Nedeformirana duljina obiju opruga iznosi $L_0=0,6$ [m].

(15 bodova)



5. Čestice A i B sudare se na horizontalnoj glatkoj podlozi kako je prikazano na slici. Koeficijent restitucije sudara iznosi $e=0,6$. Zadani su iznosi brzina kuglica neposredno prije sudara $v_{A1}=8$ [m/s] i $v_{B1}=8$ [m/s], te mase čestice $m_A=10$ [kg] i $m_B=5$ [kg]. Treba odrediti iznos brzina obiju kuglica nakon sudara.

(15 bodova)



DRUGI DIO ISPITA IZ PREDMETA MEHANIKA 2, od 16.09.2014.

1. (17 bodova) Objasniti koji podaci su potrebni i kako se određuje brzina i ubrzanje čestice ako je gibanje zadano na **prirodni način**. Primijeniti na rješenje zadatka: Čestica se giba po krivulji zadanoj jednadžbom

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \left(\frac{y+3}{2}\right)^2 = 1$$

U trenutku $t_0=0$ čestica u položaju $y_0 = -5m$. Promjena položaja čestice zadana je zakonom

$$s(t) = \frac{\pi}{2} \cdot t^2 (m) \text{ u smjeru kazaljke na satu. Treba}$$

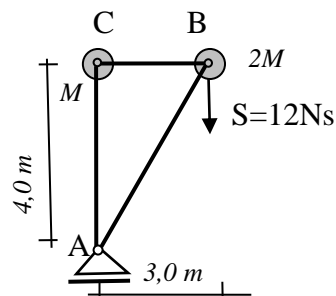
- nacrtati krivulju, ucrtati početni položaj čestice i smjer gibanja
- odrediti skalarne funkcije promjene brzine i ubrzanja u vremenu
- odrediti vektore i iznose, te nacrtati položaj vektora brzine i ubrzanja čestice za trenutak $t_1=2(s)$

2. (20 bodova) Objasniti svojstva apsolutnih i relativnih polova brzina u kinematici mehanizama. Navedi koji uvjeti i koja pravila vrijede pri njihovom određivanju. Primijeniti navedeno na rješenje zadatka: Dvije ploče gibaju se u ravnini x,y. U promatranom trenutku poznate su koordinate točke A (2,0m; 2,0m) i točke B (3,0m; 4,0m) na ploči II, i njihove brzine $\vec{v}_A = -3,0\vec{i} + 4,0\vec{j} (m/s)$ i $\vec{v}_B = 3,5\vec{j} (m/s)$. Točka C(6,5m;6,0m) ima brzinu $\vec{v}_C = [-2,5\vec{i} - 3,5\vec{j}] (m/s)$ i nalazi se na ploči I koja ima kutnu brzinu $\vec{\omega}_I = 1,0 (r/s)$. Treba:

- a) sve zadane podatke i ploče koje sadrže zadane točke prikazati na crtežu,
- b) označiti i kotirati položaje zadanih i traženih točaka,
- c) odrediti koordinate apsolutnih polova brzina i koordinate relativnog pola brzina promatranih ploča,
- d) prikazati njihov položaj na crtežu u mjerilu, te grafički provjeriti točnost rezultata.

3. (20 bodova) Prikazati kako se izvodi zakon impulsa za česticu, te objasniti što se mijenja u tom zakonu i napisati jednadžbe koje vrijede ako impuls djeluje na sustav čestica. Riješiti zadatak: Dvije čestice vezane na rešetku bez mase miruju u horizontalnoj ravnini. $M=2,0 \text{ kg}$. U prikazanom trenutku na sustav djeluje impuls S. Za trenutak neposredno nakon djelovanja impulsa treba odrediti:

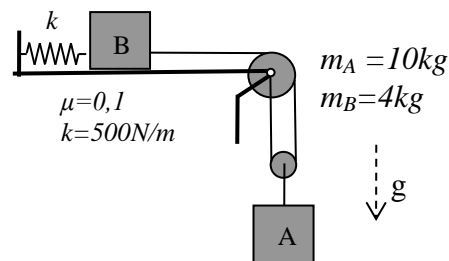
- a) brzinu čestice A i B
- b) reaktivni impuls u spoju A
- c) reaktivni impuls u štapu CB



4. (20 bodova) Prikazati i objasniti izvod zakona promjene kinetičke energije. Riješiti zadatak primjenom navedenog zakona:

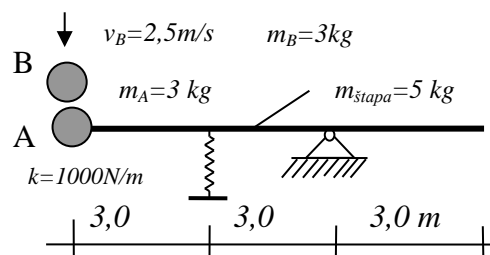
Prikazani sustav miruje pridržan tako da opruga nije deformirana. U jednom trenutku pridržanje se ukloni i sustav se počne gibati. Za nastalo gibanje treba odrediti

- a) maksimalnu deformaciju opruge
- b) statičku deformaciju opruge



5. (23 boda) Sustav miruje u **vertikalnoj** ravnini pridržan tako da opruga nije deformirana. U jednom trenutku u česticu A udari čestica B i istovremeno se ukloni pridržanje. Sraz je plastičan. Treba odrediti:

- a) funkciju promjene potencijalne energije u vremenu
 - b) diferencijalnu jednadžbu slobodnih oscilacija točke A
 - c) frekvenciju i period slobodnih oscilacija
 - d) zakon gibanja točke A
- odrediti veličinu maksimalnu brzinu gibanja čestice A



NAPOMENA:

Rješenja zadataka moraju biti pregledna i trebaju sadržavati potrebne skice s oznakama koje se koriste u računu. Prije uvrštavanja napisati zakon koji se koristi u općem obliku (npr. $\Delta E_K = \Sigma W_{1,2}$).

Svaki zadatak početi na novoj stranici te na kraju zadatka pregledno iskazati tražena rješenja.