

NUMERIČKO MODELIRANJE KONSTRUKCIJA

Mladen Meštrović

Zagreb, 2017.

Sadržaj

1. Matematički model konstrukcije	1
1.1. Uvod	1
1.2. Materijalni kontinuum	1
1.3. Geometrijske (kinematičke) ovisnosti	1
1.4. Uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti)	3
1.5. Uvjeti ravnoteže	5
1.6. Zakoni ponašanja (konstitucije)	6
1.7. Rubni uvjeti	7
1.8. Primjeri formulacije rubnih zadataka	9
2. Metode rješavanja rubnih zadataka	11
2.1. Uvod	11
2.2. Metoda sila	11
2.3. Metoda pomaka	14
3. Jaka formulacija	18
3.1. Uvod	18
3.2. Problemi pri rješavanju matematičkog modela	18
3.3. Pojam podmodela	18
3.4. Osnovna lema - integralni oblik jake formulacije	20
3.5. Osnovna lema	21
4. Slaba formulacija	22
4.1. Pojam slabe formulacije	22
4.2. Zaključno o slaboj formulaciji	22
4.3. Slaba formulacija rubnih zadataka u proračunu konstrukcija .	23
5. Aproksimacija funkcije pomaka	25
5.1. Uvod u aproksimaciju pomaka	25
5.2. Slaba formulacija u diskretnom obliku	26
5.3. Sustav linearnih jednadžbi	27
6. Ritzova metoda	29
6.1. Uvod	29
6.2. Proračun poprečno opterećene grede Ritzovom metodom .	29
6.3. Minimizacija potencijalne energije u diskretnom obliku . .	31
6.4. Nužni uvjeti za izbor koordinatnih funkcija	32

6.5. Numerički primjeri	34
7. Metoda konačnih razlika	41
7.1. Aproksimacija pomaka metodom konačnih razlika	41
7.2. Koordinatne funkcije kod metode konačnih razlika	44
7.3. Numerički primjeri	45
8. Uvod u metodu konačnih elemenata	59
8.1. Motivacija	59
8.2. Razvoj metode konačnih elemenata	60
8.3. Proračun konstrukcije pomoću MKE	60
8.4. Izbor konačnog elementa	62
8.5. Greška rješenja metodom konačnih elemenata	63

1. Matematički model konstrukcije

1.1. Uvod

Razvojem društva postupno je nastajala potreba i za većim praktičnim znanjima. Razvojem i percepcijom novih praktičnih znanja, nastajali su i početni pokušaji znanstvenih objašnjenja primjenjivanih znanja i postupaka. Na taj način došlo je do bitnog razvoja matematičke fizike i teorije elastičnosti. Postavljene su diferencijalne jednačbe za mnoge fizikalne procese. Kao dio takvog razvoja javlja se teorija elastičnosti i pripadni matematički modeli u teoriji konstrukcija.

1.2. Materijalni kontinuum

Promatramo područje $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Rub područja Ω označimo $\partial\Omega = \Gamma$. Položaj svake točke unutar područja Ω jednoznačno je određen uređenom trojkom $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Između proizvoljne dvije točke područja Ω uvijek postoji još barem jedna točka. Takvo područje zovemo *kontinuum*. Kontinuum sadrži beskonačno mnogo točaka. Proizvoljne dvije točke kontinuuma možemo uvijek spojiti proizvoljnom neprekidnom krivuljom.

Stvarno stanje konstrukcija zapravo je drugačije. Materija je sastavljena od vrlo bliskih atoma i molekula. U mikroskopskim uvjetima znači da model kontinuuma ne vrijedi. Između dvije čestice možemo naći prazninu. Kod nekih gradiva diskontinuiteti su i makroskopski očiti, npr. pukotine u drvetu, pukotine u betonu, diskontinuitet stjenovitog temeljnog tla.

Idealizacija konstrukcija kontinuumom svejedno je dobra. Rješenja diferencijalnih jednačbi temeljenih na kontinuumu pokazala su poklapanja s rezultatima pokusa uz relativno mala rasipanja oko prosječnih vrijednosti. To zapravo znači da materija na makroskopskoj razini teži uprosječenju svojih svojstava na mikroskopskoj razini. Znakovit primjer za takav stav su rezultati dobiveni ispitivanjem betonskih uzoraka, pri čemu je razdioba rezultata betonskih uzoraka pripremljenih u istim uvjetima načelno grupirana oko prosječne vrijednosti s vrlo malim odstupanjima. Na temelju takvih razmišljanja možemo pretpostaviti da će kontinuum dovoljno dobro aproksimirati mikroskopske konfiguracije konstruktivnih gradiva. Takvom idealizacijom značajno možemo smanjiti broj nepoznanica u standardnim zadaćama proračuna konstrukcije.

U praktičnom proračunu možemo uvesti i dodatna pojednostavljenja. Pretpostavljamo da kontinuum ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim svojim točkama - kontinuum je *homogen*. Kod nekih gradiva možemo pretpostaviti da ima jednaka fizikalno-mehanička svojstva u svim smjerovima - kontinuum je *izotropan*.

1.3. Geometrijske (kinematičke) ovisnosti

Konstrukcija se pod djelovanjem opterećenja deformira. Nastaje tenzorsko polje deformacija, ϵ , matrica skalarnih funkcija,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ ili } \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Za posmične komponente deformacija vrijedi odnos $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$. Točke deformabilnog tijela, točke unutar područja (konstrukcije) mijenjaju svoj položaj. Na taj način nastaje

vektorsko polje pomaka, \mathbf{w} , vektor skalarnih funkcija,

$$\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^T . \quad (1.3.2)$$

Očito je da između deformacija i pomaka postoji međusobna ovisnost. Ovisnost deformacije i pomaka nazivamo **geometrijska ovisnost**. Komponente deformacija možemo izraziti kao funkcije pomaka,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i} \right) + \sum_{k \in \{x, y, z\}} \frac{\partial w_k}{\partial i} \frac{\partial w_k}{\partial j} , \quad i, j \in x, y, z , \quad (1.3.3)$$

što u raspisanom obliku za svaku komponentu glasi

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] , \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] , \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) , \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) , \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) . \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Matrica tenzora deformacije je simetrična (simetričnost očito slijedi prema definiciji geometrijske ovisnosti pojedinih komponenata), $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, $i, j \in x, y, z$, pa tenzor deformacije možemo prikazati preko 6 komponenti

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{zx}]^T , \quad (1.3.5)$$

ili

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T . \quad (1.3.6)$$

Kod realnih konstrukcija relativne su dužinske deformacije ($\partial w_x / \partial x, \dots$) i kutovi zaokreta ($\partial w_z / \partial x, \dots$) mali (u odnosu na dimenzije konstrukcije), što povlači da možemo zanemariti kvadratne članove te slijede poznate linearne komponente Cauchyjevog tenzora deformacija

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) , \quad i, j \in x, y, z , \quad (1.3.7)$$

ili u raspisanom obliku za svaku komponentu

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} , \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} , \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} , \quad \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} , \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} , \quad \gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} , \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Sustav jednažbi, (1.3.3), možemo zapisati i u matičnom obliku, uz uporabu γ_{ij} oznaka za posmičnu deformaciju

$$\epsilon = \mathbf{L} \mathbf{w} , \quad (1.3.9)$$

gdje je \mathbf{L} diferencijalni operator

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (1.3.10)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} , & \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} , \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} , & \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial y} , \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} , & \gamma_{zx} &= 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} , \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

odnosno u indeksnom zapisu

$$\epsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial i} , \quad i = x, y, z \quad , \quad \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} , \quad ij = xy, yz, zx \quad . \quad (1.3.2)$$

1.4. Uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti)

Konstrukcija pod djelovanjem opterećenja postaje deformirana. Uvjet kompatibilnosti zahtijeva da je polje deformacija nastalih zbog djelovanja opterećenja neprekidno i jednoznačno određeno. To zapravo znači da kontinuum i nakon deformiranja ostaje kontinuum. Ako je polje deformacija neprekidno onda su i komponente polja deformacija integrabilne što povlači da je i polje pomaka neprekidno.

Neprekidnost i jednoznačnost nužni su uvjeti koje mora zadovoljiti polje deformacija. Derivacijom neprekidnog i jednoznačnog polja pomaka jednostavno možemo odrediti polje deformacija. Međutim, ako iz polja deformacija želimo integriranjem dobiti polje pomaka zadaća postaje matematički preodređena, iz 6 komponenti polja deformacija potrebno je odrediti 3 komponente polja pomaka. To znači da su komponente deformacija međusobno ovisne. Postoje tri dodatna uvjeta, tri jednažbe koje će odrediti međusobnu ovisnost komponenti deformacija. Deriviranjem jednažbi (1.3.7) dobivamo tri jednažbe

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jj}}{\partial i^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial i \partial j} = 0, \quad (i, j) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\} , \quad (1.4.3)$$

koje raspisano po komponentama glase

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

te predstavljaju ponašanje polja deformacija u pripadnim koordinatnim ravninama xy , yz i zx . Na isti način kombiniranjem derivacija jednadžbi (1.3.7) dobivamo nove tri jednadžbe

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial j \partial k} + 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial i^2} - \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial k} + \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial \epsilon_{ki}}{\partial j} \right) = 0, \quad (i, j, k) \in \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\},\tag{1.4.5}$$

koje raspisano po komponentama glase

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial z \partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

te predstavljaju ponašanje polja deformacija u prostoru. Jednadžbe (1.4.3) i (1.4.5) nazivamo uvjeti neprekinutosti (kompatibilnosti) deformacija.

Sustave jednadžbi (1.4.3) i (1.4.5) možemo zapisati i u matričnom obliku pomoću pripadnih diferencijalnih operatora, \mathbf{L}_r za ravninske uvjete i \mathbf{L}_p za prostorne uvjete

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \end{bmatrix},\tag{1.4.7}$$

$$\tag{1.4.8}$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \end{bmatrix},\tag{1.4.9}$$

a sustavi jednostavno slijede

$$\mathbf{L}_r \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_p \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}.\tag{1.4.10}$$

Deformacije (1.3.9) uz jednu od grupa jednadžbi neprekinutosti (1.4.10) daju jedinstveno polje pomaka. Uz devet nepoznanica (tri komponente vektora pomaka i šest komponenti tenzora deformacija) imamo i devet jednadžbi. Polje pomaka je dovoljno puta derivabilno, klase C^3 , pa vrijedi i obrat.

Uvjet neprekinutosti ne dozvoljava proizvoljan izbor polja deformacija. Komponente deformacija moraju biti međusobno povezane. Struktura realnih konstrukcija ne odgovara u potpunosti definiciji kontinuuma. To znači da niti uvjet neprekinutosti ne može biti zadovoljen. Uprosječenje pogrešaka u strukturi omogućuje primjenu uvjeta neprekinutosti.

1.5. Uvjeti ravnoteže

Prema poznatom I. Newtonovom zakonu tijelo u inercijalnom sustavu miruje samo ako na njega ne djeluje sila. Tijelo miruje ako je rezultanta svih sila i momenata jednaka nul-vektoru

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{0} , \quad (1.5.1)$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \mathbf{0} , \quad (1.5.2)$$

gdje su \mathbf{f}_i sile, \mathbf{m}_j koncentrirani momenti koji djeluju na tijelo, a \mathbf{r}_i radijus vektori hvatišta sila. Jednadžbe (1.5.1) i (1.5.2) predstavljaju uvjete ravnoteže.

U opterećenoj konstrukciji dolazi do pojave naprezanja. Nastaje tenzorsko polje naprezanja, $\boldsymbol{\sigma}$, matrica skalarnih funkcija,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} . \quad (1.5.3)$$

Za posmične komponente naprezanja često se koristi oznaka τ_{ij} . Komponente naprezanja moraju zadovoljiti i diferencijalne uvjete ravnoteže koje možemo izvesti iz jednadžbe (1.5.1)

$$\sum_{l=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial l} + f_i = 0 , \quad i = x, y, z , \quad (1.5.4)$$

odnosno u obliku raspisanom po komponentama,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 , \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 , \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 , \quad (1.5.6)$$

pri čemu su f_x, f_y, f_z komponente vektora volumenskih sila unutar konstrukcije,

$$\mathbf{f}^T = [f_x \quad f_y \quad f_z] . \quad (1.5.7)$$

Iz jednadžbi (1.5.2) možemo izvesti zakon o uzajamnosti posmičnih naprezanja, što povlači simetričnost tenzora naprezanja $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j \in x, y, z$. Tenzor naprezanja možemo prikazati pomoću 6 komponenti vektora

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}] . \quad (1.5.8)$$

Sustav jednadžbi ravnoteže (1.5.4) možemo prikazati matrično

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} , \quad (1.5.9)$$

ili tenzorski

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad . \quad (1.5.10)$$

Ako je opterećeno tijelo u mirovanju, tada miruje i svaki dio opterećenog tijela. Tada i svaki izdvojeni dio opet možemo promatrati kao opterećeno tijelo koje miruje i za taj dio opet vrijedi prvi Newtonov zakon. To znači da i svaki izdvojeni dio tijela mora biti u ravnoteži, rezultanta svih sila i momenata koji djeluju na taj izdvojeni dio tijela mora biti jednaka nul-vektoru.

Nakon opterećenja tijelo poprimi deformirani položaj i nalazi se u stanju ravnoteže. To znači da bi uvjete ravnoteže morali postaviti na deformiranom stanju. Ali, deformirano stanje nije unaprijed poznato. Deformirano stanje je rezultat proračuna. Jednadžbe ravnoteže su nelinearne. Kod relativno malih deformacija uvjete ravnoteže možemo linearizirati, možemo prethodno nepoznati deformirani oblik tijela aproksimirati početnim nedeformiranim oblikom tijela.

Za nepoznatih šest komponenti naprezanja imamo samo tri jednadžbe ravnoteže. To znači, kao i kod deformacija, da su naprezanja međusobno zavisna. Tri dodatne jednadžbe možemo dobiti ako u jedan od uvjeta neprekinutosti, jednadžbe (1.4.10), uvrstimo zakon ponašanja. Dobivamo uvjete kompatibilnosti naprezanja (Beltrami-Michellove jednadžbe).

1.6. Zakoni ponašanja (konstitucije)

Uvjeti kompatibilnosti odnose se na polje deformacija, a uvjeti ravnoteže na polje naprezanja. Očito postoji veza između naprezanja i deformacija. Veza između naprezanja i deformacija ovisi o mehaničkim svojstvima materijala utemeljenim na silama između elementarnih čestica.

1.6.1. Elastični modeli

Najjednostavniji model veze između naprezanja i deformacija je linearno elastičan model - Hookeov zakon. Prema Hookeovom zakonu naprezanja su proporcionalna deformacijama

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad , \quad (1.6.1)$$

gdje je \mathbf{C} matrica materijalnih konstanti

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6.2)$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad , \quad (1.6.3)$$

pri čemu je E modul elastičnosti, a ν Poissonov koeficijent. Za ravninsko stanje naprezanja matrica proporcionalnosti glasi

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.6.4)$$

ili u obliku

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (1.6.5)$$

pri čemu je $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modul posmika. Raspisani zakon konstitucije za ravninsko stanje naprezanja glasi

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \quad (1.6.6)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}), \quad (1.6.7)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (1.6.8)$$

Za jednoosno stanje naprezanja, umjesto matrice \mathbf{C} imamo skalarnu vrijednost, konstantu proporcionalnosti, modul elastičnosti materijala E

$$\sigma = E\epsilon. \quad (1.6.9)$$

Postoji i nelinearno elastičan model. Odnos naprezanja i deformacija je elastičan, ali nije proporcionalan. Jednadžba nelinearno elastičnog modela glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (1.6.10)$$

1.6.2. Neelastični modeli

Idealno elastično ponašanje većine materijala ostvarivo je samo pod djelovanjem malih opterećenja. Za realne materijale uobičajena su odstupanja krivulje opterećenja i rasterećenja i kod malih opterećenja. Potrebno je poznavati trenutni prirast deformacije $\dot{\epsilon}$, a u složenijim slučajevima i cijelu povijest ponašanja materijala. Takav odnos naprezanja i deformacije možemo prikazati jednadžbom

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}). \quad (1.6.11)$$

1.7. Rubni uvjeti

1.7.1. Rubni uvjeti na rubu područja

Uvjeti ravnoteže i uvjeti kompatibilnosti moraju vrijediti i na rubu tijela. Uvjete ravnoteže i kompatibilnosti na rubu tijela zajednički nazivamo **rubnim uvjetima**. Uvjete ravnoteže zovemo **prirodnim** ili Neumannovim uvjetima, a uvjete kompatibilnosti zovemo **geometrijskim** ili Dirichletovim rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \mathbf{w}|_{\Gamma_w} = \mathbf{w}_0, \quad (1.7.1)$$

gdje su Γ_σ i Γ_w područja ruba sa zadanim naprezanjima $\boldsymbol{\sigma}_0$ i pomacima \mathbf{w}_0 pri čemu mora vrijediti

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_w = \Gamma, \Gamma_\sigma \cap \Gamma_w = \emptyset. \quad (1.7.2)$$

To znači da ne može biti preklapanja rubnih uvjeta u nekoj točki. Rubni uvjet mora u svakoj točki biti jednoznačno definiran. U slučaju da su zadana naprezanja i pomaci na rubu jednaki 0, $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$, govorimo o **homogenim rubnim uvjetima**.

Na slobodnom rubu mora biti zadovoljen prirodni rubni uvjet, uvjet ravnoteže. Nema susjednog tijela, pa nema potrebe za kompatibilnosti. Naprezanja u smjeru normale σ_{nn} i komponente posmičnih naprezanja $\sigma_{\xi n}$ i $\sigma_{\eta n}$ moraju odgovarati komponentama zadanog naprezanja u tim smjerovima. Ostale komponente $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\xi\eta}$ i $\sigma_{\eta\xi}$ nisu određene rubnim uvjetima. Rubne uvjete možemo zapisati

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{nn} \quad \sigma_{\xi n} \quad \sigma_{\eta n}]^T = \boldsymbol{\sigma}_0 = [\sigma_{nn,0} \quad \sigma_{\xi n,0} \quad \sigma_{\eta n,0}]^T, \quad (1.7.3)$$

pri čemu je $\boldsymbol{\sigma}$ vektor totalnog naprezanja, a $\boldsymbol{\sigma}_0$ vektor vanjskog djelovanja u promatranoj točki. Ako je slobodni rub neopterećen onda su i naprezanja na rubu jednaka nuli (na neopterećenom slobodnom kraju konzolne grede, moment i poprečna sila jednaki su nuli, ako na slobodnom kraju konzolne grede djeluje koncentrirana sila okomito na gredu ili koncentrirani moment onda su poprečna sila i moment jednaki iznosima zadanih sile i momenta).

1.7.2. Rubni uvjeti na spoju

Ako je tijelo u ravnoteži tada je i svaki izdvojeni dio u ravnoteži. Možemo promatrati izdvojeni dio koji sadrži plohu spoja dvaju susjednih tijela. Smanjivanjem promatranog dijela možemo zadaću svesti na ravnotežu sustava dvije bliske točke. Naprezanja među njima moraju biti u ravnoteži jer ne može postojati neuravnotežena komponenta naprezanja zbog ravnoteže cijelog sustava. Analogno vrijedi i za deformacije, ako shvatimo cijeli sustav kao sastavljen od niza malih dijelova, možemo opet svesti zadaću na dvije bliske točke. Za takve dvije točke moraju opet vrijediti uvjeti kompatibilnosti, ne može doći do odvajanja točaka na spoju. Na spoju tijela moraju vrijediti prirodni i geometrijski rubni uvjeti.

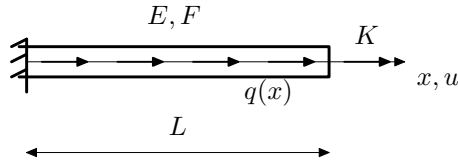
Ako je spoj dvaju tijela elastičan, nepoznati su i pomaci i naprezanja. Tada mora nužno biti zadana veza između pomaka i naprezanja na spoju. Takav rubni uvjet zovemo **mješovit ili Robinov rubni uvjet**. Primjer za takvu vezu su tijela koja u nekoj točki spoja u smjeru normale imaju definiranu elastičnu oprugu zadane krutosti.

U proračunu znamo uvesti idealizaciju da je neko susjedno tijelo apsolutno kruto i nepomično. Takvo tijelo ne može se niti deformirati niti gibati na takvom spoju. Promatrano tijelo ne može se gibati, ali se može deformirati. Za deformabilno tijelo u mirovanju vrijedi prvi Newtonov zakon. Na spoju se moraju pojaviti reakcije koje za zadana opterećenja moraju zadovoljiti uvjete ravnoteže. Prirodni rubni uvjeti automatski su tako zadovoljeni uslijed pojave reakcija. Pomaci apsolutno krutog i nepomičnog tijela jednaki su nuli. Uvjet kompatibilnosti vrijedi i na spoju što povlači da točke promatranog tijela spojene za točke apsolutno krutog tijela moraju pri deformiranju imati pomake jednake nuli (homogeni uvjet).

1.8. Primjeri formulacije rubnih zadaća

1.8.1. Uzdužno opterećena greda

Promatramo gredu duljine L , modula elastičnosti $E(x)$, poprečnog presjeka $F(x)$ pod djelovanjem opterećenja $q(x)$ duž uzdužne osi grede i koncentrirane uzdužne sile K na slobodnom kraju grede. Takva je zadaća jednodimenzionalna. Polje pomaka \mathbf{u} zapravo je



Slika 1.8.1: Uzdužno opterećena greda

skalarna vrijednost pomaka točkaka grede u smjeru uzdužne osi grede, $u(x)$. Polje deformacija ϵ jednako je uzdužnoj deformaciji, u smjeru osi grede, $\epsilon_{xx}(x)$, a polje naprezanja σ jednako je komponenti uzdužnog naprezanja u smjeru osi grede $\sigma_{xx}(x)$ koje možemo i reprezentirati poljem uzdužnih sila, $N = \sigma_{xx} \cdot F$ u presjecima grede. Jednadžba ravnoteže, kinematički uvjet i zakon ponašanja u takvom jednodimenzionalnom slučaju glase

$$\frac{d\sigma_{xx}(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad (1.8.1)$$

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (1.8.2)$$

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)\epsilon_{xx}(x), \quad (1.8.3)$$

što uz rubne uvjete

$$\text{rubni uvjet pomaka} : u(0) = u_0, \quad (1.8.4)$$

$$\text{rubni uvjet naprezanja} : \sigma_{xx}(L) = N_0/F(L), \quad (1.8.5)$$

predstavlja jednoznačno rješivu zadaću uzdužno opterećene grede, sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice $(\epsilon_{xx}, \sigma_{xx}, u(x))$.

Ako zakon konstitucije, (1.8.3), uvrstimo u jednadžbu ravnoteže, (1.8.1), slijedi jednadžba ravnoteže iskazana preko deformacije

$$\frac{d(E\epsilon_{xx}(x))}{dx} + q(x) = 0. \quad (1.8.6)$$

U jednadžbi (1.8.2) izraženu deformaciju preko pomaka i uvrstimo u jednadžbu (1.8.6), slijedi jednadžba ravnoteže izražena preko pomaka

$$\frac{d\left(E\frac{du(x)}{dx}\right)}{dx} + q(x) = 0. \quad (1.8.7)$$

Iz toga slijedi diferencijalna jednadžba ravnoteže grede opterećene u smjeru uzdužne osi izražena preko pomaka u obliku

$$(EFu')' + q = 0, \text{ na } \Omega = [0, L], \quad (1.8.8)$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = 0 \quad \Gamma_u = \{0\} , \quad (1.8.9)$$

$$N(L) = K \quad \Gamma_N = \{L\} . \quad (1.8.10)$$

Neka je greda neopterećena, $q(x) = 0$, slijedi rješenje diferencijalne jednačbe, funkcija pomaka

$$u(x) = \frac{K}{EF}x , \quad (1.8.11)$$

a iz jednačbi (1.8.2) i (1.8.3) deformacija i naprezanje

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{K}{EF} , \quad \sigma_{xx}(x) = \frac{K}{F} . \quad (1.8.12)$$

1.8.2. Ravninska zadaća - zidni nosač opterećen u svojoj ravnini

Promatramo zidni nosač u ravnini xy , površinskih izmjera $L \times H$, modula elastičnosti $E(x, y)$, Poissonovog koeficijenta $\nu(x, y)$, debljine $d(x, y)$ pod djelovanjem opterećenja $\mathbf{q}(x, y)$ u središnjoj ravnini nosača i linearno raspodjeljenog opterećenja $q_0(x, y)$ na pravcima unutar ili po obodu zida. Takva je zadaća dvodimenzionalna. Polje pomaka \mathbf{w} u svakoj točki zida dvodimenzionalno je polje $\mathbf{w} = [u(x, y) \quad v(x, y)]^T$.

Polje deformacija dvodimenzionalno je polje, $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx}(x, y) \quad \epsilon_{yy}(x, y) \quad \gamma_{xy}(x, y)]^T$, kao i polje naprezanja $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}(x, y) \quad \sigma_{yy}(x, y) \quad \tau_{xy}(x, y)]^T$. Jednačba ravnoteže, kinematički uvjet i zakon ponašanja u takvom dvodimenzionalnom slučaju glase

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(x, y) + \mathbf{q}(x, y) = \mathbf{0} , \quad (1.8.13)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y) = \mathbf{L} \mathbf{w}(x, y) , \quad (1.8.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{C}(x, y) \boldsymbol{\epsilon}(x, y) . \quad (1.8.15)$$

U ovakvoj dvodimenzionalnoj zadaći jednačbu ravnoteže, (1.8.13), predstavljaju dvije skalarne jednačbe, a jednačbe geometrijske ovisnosti, (1.8.14), i zakon konstitucije, (1.8.15), po tri skalarne jednačbe. Tako definirane jednačbe uz rubne uvjete

$$\text{rubni uvjet pomaka} : \mathbf{w}_{\Gamma_w} = \mathbf{w}_0 , \quad (1.8.16)$$

$$\text{rubni uvjet sila} : \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{q}_0/d , \quad (1.8.17)$$

predstavljaju jednoznačno rješivu zadaću ravninskog nosača opterećenog u svojoj ravnini, sustav osam jednačbi s osam nepoznanica $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$.

2. Metode rješavanja rubnih zadaća

2.1. Uvod

Osnovne grupe jednadžbi u prostornim zadaćama su

- šest geometrijskih jednadžbi: $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{w}$,
- tri uvjeta ravnoteže: $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$,
- šest jednadžbi zakona konstitucije: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$.

Stanje svake točke područja Ω može biti opisano sustavom od petnaest jednadžbi, a nepoznanice su šest komponenti naprezanja, šest komponenti deformacija i tri komponente pomaka. Potrebno je pronaći stanje konstrukcije koje zadovoljava istovremeno sve jednadžbe. U prethodnih petnaest jednadžbi nisu uključeni i uvjeti neprekinutosti. Uvjeti neprekinutosti nisu temeljni uvjeti, dobiveni su izravno iz geometrijskih uvjeta eliminiranjem komponenti pomaka. Jedinstveno rješenje sustava osigurano je poštivanjem rubnih uvjeta

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \mathbf{w}|_{\Gamma_w} = \mathbf{w}_0. \quad (2.1.1)$$

Umetanjem rubnih uvjeta pričvršćujemo konstrukciju u prostoru i osigurana je jedinstvenost rješenja. Tako definiranu zadaću zovemo **rubna zadaća**.

Unutar područja i na rubu polje naprezanja mora zadovoljiti uvjete ravnoteže, a polje pomaka uvjete kompatibilnosti. Polja naprezanja i polja pomaka su nepoznata, ali su povezana zakonom konstitucije, što povlači da možemo promatrati jedno nepoznato polje (ili polje pomaka ili polje naprezanja).

Metode rješavanja zadanih konstrukcija su **metoda sila** i **metoda pomaka**. Temeljna ideja obje metode je **diskretizacija** matematičkog modela radi jednostavnijeg proračuna. Gredni modeli imaju beskonačno mnogo nepoznanica (u svakoj točki grede) koje u proračunu koncentriramo na **konačan broj točaka** (čvorova). Kod metode sila model je konačan broj puta statički određen, a kod metode pomaka model ima konačan broj nepoznatih stupnjeva slobode.

2.2. Metoda sila

Metoda sila postupak je kojim eliminiramo pomake iz jednadžbi geometrijske ovisnosti (1.3.1), a deformacije iz jednadžbi zakona ponašanja (1.6.1). Nepoznanice ostaju šest komponenti naprezanja. Pomake smo već eliminirali iz geometrijskih uvjeta pri određivanju uvjeta kompatibilnosti, pa možemo, umjesto geometrijskih jednadžbi (1.3.1), upotrijebiti jednu od međusobno zavisnih grupa jednadžbi (1.4.10),

$$\mathbf{L}_r\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \quad \text{ili} \quad \mathbf{L}_p\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}. \quad (2.2.1)$$

Uzimanjem zakona konstitucije (1.6.1) eliminiramo deformacije i slijede grupe jednadžbi

$$\mathbf{L}_r\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{ili} \quad \mathbf{L}_p\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.2.2)$$

Dobivene matrice zapise možemo raspisati, te uz dodatne transformacije i deriviranja uvjeta ravnoteže po x , y i z slijede Beltrami-Michellove jednačbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ili

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial f_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Objekte grupe jednačbi možemo zapisati i u indeksnom zapisu

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial k^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial i \partial j} + \frac{\partial f_i}{\partial j} + \frac{\partial f_j}{\partial i} = 0, \quad ij = xy, yz, zx \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial k^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial i^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial f_k}{\partial k} + 2 \frac{\partial f_i}{\partial i} = 0, \quad i = x, y, z \quad (2.2.6)$$

Ove jednačbe predstavljaju uvjete kompatibilnosti izražene pomoću naprezanja. Neovisna je samo jedna grupa jednačbi. To znači da za šest komponenti naprezanja imamo samo tri neovisne jednačbe koje zadovoljavaju geometrijske rubne uvjete. Istodobno moramo riješiti i tri uvjeta ravnoteže (1.5.9) čime dobivamo šest jednačbi za šest potrebnih nepoznatih komponenti naprezanja. Nakon proaćuna naprezanja, deformacije i pomaci slijede pomoću jednačbi

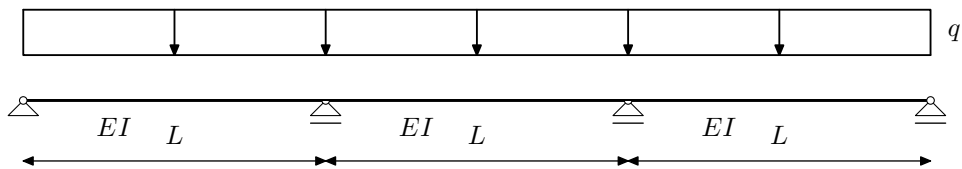
$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.2.8)$$

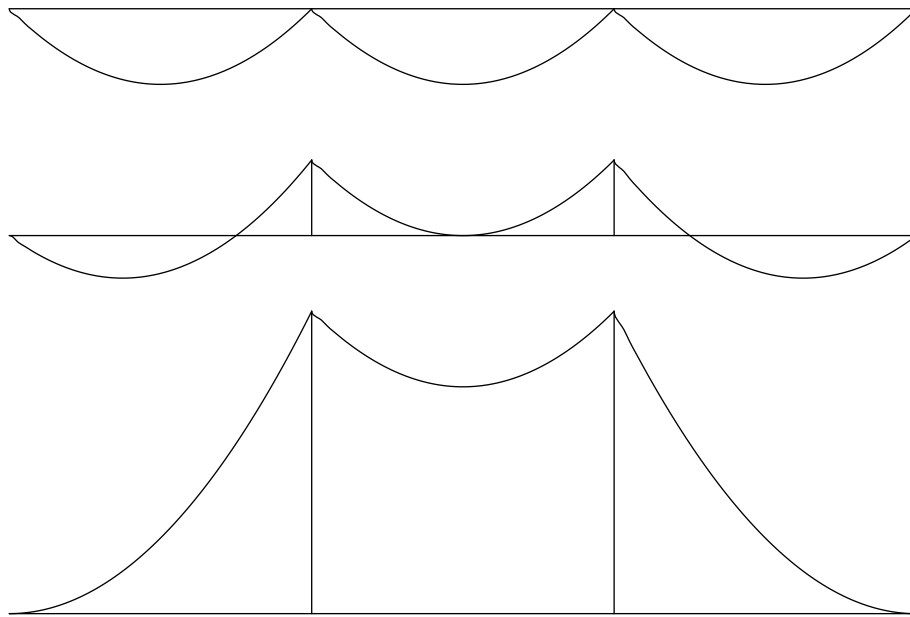
Primjer 2.2.1. Metoda sila na grednom modelu

Postoji beskonačno mnogo polja naprezanja koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže statički neodređenog sustava. Promatramo trolejnu kontinuiranu gredu pod djelovanjem jednoliko distribuiranog opterećenja.

Za zadani kontinuirani nosač možemo prikazati nekoliko mogućih momentnih dijagrama. Svi prikazani dijagrami, (Slika 2.2.1.2) zadovoljavaju uvjete ravnoteže i prirodne rubne uvjete (uvjete ravnoteže na ležajima). Provjes parabole momentnog dijagrama iznosi $qL^2/8$. Postoji beskonačno takvih mogućih momentnih dijagrama koji će zadovoljiti uvjete ravnoteže i rubne uvjete. Definirana zadaća jednoliko opterećene trolejne kontinuirane grede linearna je i ima jedinstveno rješenje. To znači da je samo jedno ravnotežno stanje zapravo ispravno rješenje (samo jedno ravnotežno stanje zadovoljava uvjete neprekinutosti) koje daje ispravnu progibnu liniju. Kako pronaći takvo stanje?



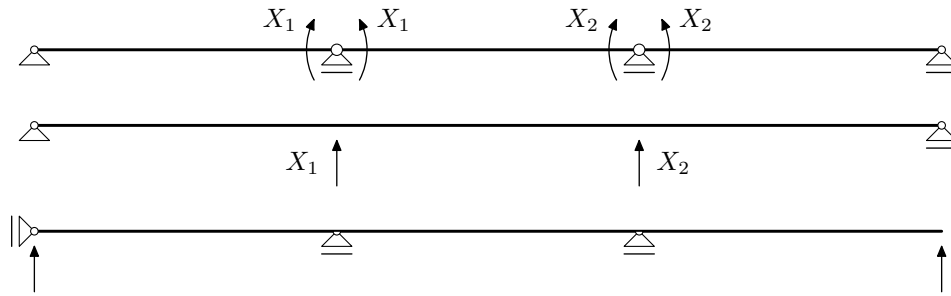
Slika 2.2.1.1: Tropoljna kontinuirana greda po djelovanjem jednoliko distribuiranog opterećenja



Slika 2.2.1.2: Mogući momentni dijagrami

Progibna linija je neprekidna. Zadana greda je kontinuirana (nema zglobnih spojeva duž grede) što znači da je i derivacija progibne linije neprekidna. Očito je da je progibna linija kod svih mogućih rješenja neprekidna. Potrebno je postaviti i riješiti uvjete neprekidnosti u svakoj točki grede. Kod složenijih konstrukcija nije jednostavno pronaći jedno od ravnotežnih stanja koje zadovoljava uvjete neprekidnosti. Tražimo stanje za koje možemo na jednostavniji način odrediti uvjete ravnoteže (odrediti dijagrame unutarnjih sila), ali ujedno i koncentrirati uzroke nekompatibilnosti na zadana mjesta na konstrukciji. Za sustav u ravnoteži ravnoteža vrijedi za svaki dio sustava i za sve međusobne spojeve dijelova sustava neovisno o načinu spajanja. Zbog toga možemo podijeliti gredu na dijelove i odrediti spajanja kako nam odgovara pazeći da ne stvorimo mehanizam. Na taj način dobivamo, iz Građevne statike poznati, **osnovni sustav**. Osnovni sustavi su statički određeni sustavi dobiveni oslabljavanjem veza zadanog statički neodređenog sustava. Statički određeni sustavi jednostavniji su za proračun unutarnjih sila od vanjskog opterećenja, a dijagrami su i jedinstveni za zadano opterećenje jer je potrebno riješiti samo uvjete ravnoteže.

U daljnjoj analizi promatramo najgornji osnovni sustav, niz od tri zglobno povezane jednostavne grede, s oslobođenim vezama iznad ležajeva. Progibna linija osnovnog sustavaa nije kompatibilna samo u diskretnim točkama, a uzrok takvim nekompatibilnostima



Slika 2.2.1.3: Mogući osnovni sustavi

su unutarnje sile oslobođene u tim točkama (otvaranjem zglobova unutar grede dobivamo lom progibne linije, derivacija progibne funkcije nije neprekidna funkcija u tim točkama). Iznose tih sila određujemo iz uvjeta neprekinutosti u tim točkama (nema relativnih pomaka i kuteva zaokreta na mjestima oslobođenih veza). Dodajemo sile na tim mjestima kao vanjsko opterećenje tako da zadani i osnovni sistem budu kompatibilni. Dobivamo statički određeni osnovni sustav opterećen vanjskim opterećenjem i silama u oslobođenim vezama (koncentriranim momentima savijanja u ovom primjeru). Uvjeti neprekinutosti su zadovoljeni u svim točkama (progibna linija je neprekidna) osim u točkama oslobođenih veza (zglobovima nad ležajevima u ovom primjeru). Zadaća je linearna što znači da konačno rješenje možemo dobiti superpozicijom pojedinačnih rješenja koja pripadaju zadanim opterećenjima. Sile u oslobođenim vezama nisu nam poznate (momenti nad ležajevima u ovom primjeru). Ne možemo ih odrediti iz uvjeta ravnoteže jer je bilo koji par sila (par momenta u ovom primjeru) u ravnoteži. Ispravni su samo oni iznosi sila (momenta) koji na mjestima oslobođenih veza osiguravaju da su relativni pomaci ili kutevi zaokreta jednaki nuli (relativni kutevi zaokreta nad ležajevima u ovom primjeru). To znači da tangenta na gredu lijevo i desno od ležajeva mora biti zajednička, nema nikakvog loma na zadanoj gredi (derivacija progibne funkcije mora biti neprekidna funkcija i u tim točkama). Na taj način dobivamo dodatne jednadžbe (dviije dodatne jednadžbe u ovom primjeru) kojima ćemo zadovoljiti uvjete neprekinutosti i proračunati vrijednosti sila u oslobođenim vezama (vrijednost momenata nad ležajevima u ovom primjeru).

Između beskonačno mnogo polja naprezanja koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže, odabrali smo ono polje naprezanja koje zadovoljava uvjete kompatibilnosti. Neovisno o veličini momenata nad ležajevima sustav će biti u ravnoteži, ali samo u jednom slučaju bit će i kompatibilan.

2.3. Metoda pomaka

Iz jednadžbi geometrijske ovisnosti (1.3.1) i jednadžbi zakona konstitucije (1.6.1) eliminiramo polje deformacija, a polje naprezanja izrazimo pomoću polja pomaka. Polje pomaka (3 komponente) ostaje jedino nepoznato polje. Slijede jednadžbe koje imaju značaj uvjeta ravnoteže

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{w} . \quad (2.3.1)$$

Uvrštavanjem tih jednadžbi u jednadžbu ravnoteže (1.5.9) slijedi

$$\mathbf{L}^T \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (2.3.2)$$

Uz supstituciju $\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L}$ i $\mathbf{q} = -\mathbf{f}$ slijedi poznati sustav

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q} . \quad (2.3.3)$$

Matricu \mathbf{K} zovemo *matrica krutosti elementarnog volumena*. Ako matricu \mathbf{C} definiranu s E i ν zapišemo s pomoću Laméovih koeficijenata λ i μ , zbog čega trebamo ovisnosti

$$E = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \quad \text{i} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}, \quad (2.3.4)$$

nakon raspisivanja i sređivanja jednadžbi sustava dobivamo poznate Laméove diferencijalne jednadžbe ravnoteže

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + f_x &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + f_y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Uvođenjem oznaka za gradijent i divergenciju vektorskog polja

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{i} \quad \text{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.3.6)$$

te Laplaceov operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.3.7)$$

jednadžbe (2.3.5)-(2.3.6) možemo zapisati u vektorskom obliku

$$[(\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \Delta] \mathbf{w} = \mathbf{q} . \quad (2.3.8)$$

Matrica \mathbf{K} sadrži diferencijalne izraze, matricni je zapis diferencijalnog operatora nad vektorom \mathbf{u}

$$\mathcal{K} = (\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \Delta . \quad (2.3.9)$$

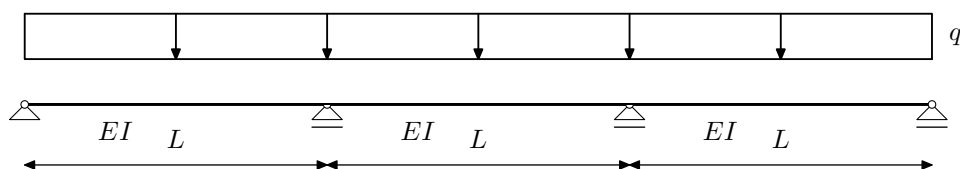
Rješenjem sustava jednadžbi (2.3.8) dobivamo komponente polja pomaka \mathbf{w} . Tada možemo izračunati deformacije i naprezanja. Deformacije moraju zadovoljiti uvjete kompatibilnosti, geometrijske zavisnosti nisu jednoznačne. Isto vrijedi i na rubu. Moramo zadovoljiti samo geometrijske rubne uvjete

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_w} = \mathbf{w}_0, \quad (2.3.10)$$

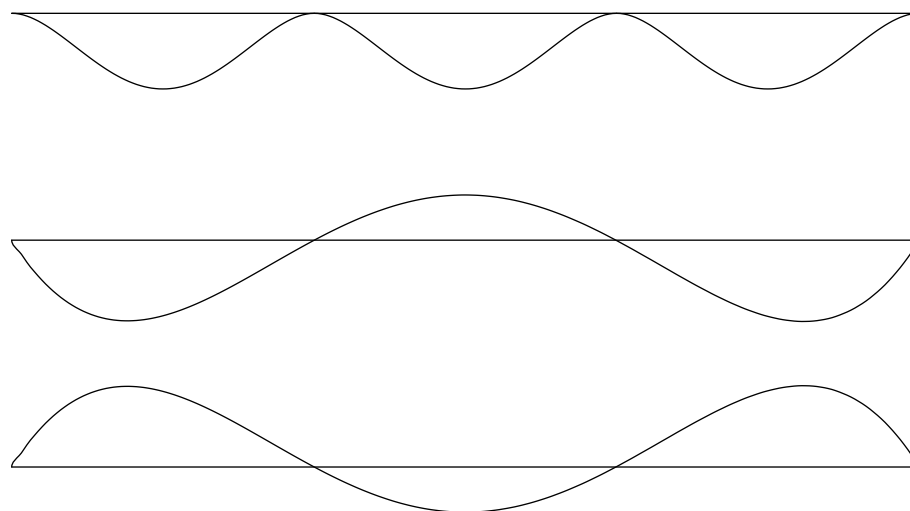
jer su prirodni rubni uvjeti zadovoljeni diferencijalnim jednadžbama ravnoteže.

Primjer 2.3.1. Metoda pomaka na štapnom modelu

Kod statički neodređenih sustava postoji beskonačno mnogo polja pomaka koja su kompatibilna i zadovoljavaju geometrijske rubne uvjete. Promotrimo tropoljnu kontinuiranu gredu iz prethodnog primjera, (Slika 2.3.1.1).



Slika 2.3.1.1: Tropoljna kontinuirana greda po djelovanjem jednoliko distribuiranog opterećenja



Slika 2.3.1.2: Moguće progibne linije

Za zadani kontinuirani nosač možemo prikazati nekoliko mogućih polja pomaka, (Slika 2.3.1.2).

U primjeru tropoljnog kontinuiranog nosača sve prikazane funkcije su kompatibilne (neprekidne, pomaci jednaki nula u ležajevima). Zbog jedinstvenosti rješenja linearne zadaće samo jedna takva funkcija pomaka zadovoljava uvjete ravnoteže. Potrebno je postaviti uvjete ravnoteže u svakoj točki konstrukcije. Izbor spojeva u čvorovima nije proizvoljan jer moraju zadovoljiti uvjete neprekinutosti. Kod metode pomaka nije potreban osnovni sustav. Raspored spojeva biramo tako da na nastalim dijelovima možemo jednostavnije pretpostaviti oblik kompatibilne funkcije pomaka i jednostavnije riješiti diferencijalne jednadžbe ravnoteže svakog dijela. Postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe za opterećenja vanjskim djelovanjem i pomacima odgovara stanjima pune upetosti i stanjima slobodnih pomaka (Građevna statika). Rješenja takvih jednadžbi zadovoljavaju ravnotežu u svim točkama osim u čvorovima. Dobivena rješenja su reakcije dijelova nosača izražene kao funkcije nepoznatih pomaka i zaokteta čvorova. Nepoznanice dobivamo postavljanjem jednadžbi ravnoteže čvorova.

U primjeru tropoljnog kontinuiranog nosača kao čvorove odredimo točke nad ležajevima i pretpostavimo međusobnu punu upetost greda u čvorovima. Za takve rubne uvjete riješimo diferencijalnu jednadžbu svake grede. Uvjeti kompatibilnosti su zadovoljeni u svim točkama nosača, a jednadžbe ravnoteže u svim točkama osim u čvorovima. Reakcije greda nisu u ravnoteži, ravnoteža momenata u čvorovima nije zadovoljena. Reakcije su izražene kao funkcije kuteva zaokreta čvorova. Čvor mora biti u ravnoteži, pa iz uvjeta

ravnoteže čvora možemo izračunati reakcije u čvorovima.

Između beskonačno mnogo polja deformacija koje zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti, moramo odabrati ono polje za koje pripadno polje naprezanja zadovoljava uvjete ravnoteže. Neovisno o veličinama pomaka i zaokreta čvorova sustav je uvijek kompatibilan, ali samo je u jednom slučaju u ravnoteži.

3. Jaka formulacija

3.1. Uvod

Metoda pomaka u praktičnom smislu ima znatno veću primjenu od metode sila. Jednostavnije je pronaći skup kompatibilnih polja pomaka nego skup ravnotežnih polja naprezanja (komplicirano rješavanje diferencijalnih ravnoteža složenih konstrukcija kod metode sila). Algoritme potrebne za provedbu metode u nekom programskom jeziku znatno je jednostavnije postaviti po metodi pomaka. Pristup proračunu matematičkog modela pretežno temeljimo na metodi pomaka.

3.2. Problemi pri rješavanju matematičkog modela

Diferencijalne jednačbe trodimenzionalnog područja (kontinuum) temeljene na metodi pomaka možemo konačno zapisati u obliku

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}) = \mathbf{q}, \quad (3.2.1)$$

pri čemu je \mathcal{K} diferencijalni operator koji djeluje na nepoznato vektorsko polje pomaka \mathbf{u} . Rezultat djelovanja diferencijalnog operatora na polju pomaka mora odgovarati poznatom vektorskom polju zadanog vanjskog opterećenja \mathbf{q} jer jednačbe predstavljaju uvjete ravnoteže. Ovakav klasičan pristup matematičkom modelu pomoću diferencijalnog operatora (diferencijalne jednačbe) zovemo **jaka formulacija** rubne zadaće (engl. *strong formulation*).

Analitičko rješenje zadaće možemo dobiti samo u nekim posebnim slučajevima. Složenije zadaće rješavamo pomoću poluanalitičkog pristupa, potrebne integrale proračunamo numerički ili pretpostavljamo rješenja razvijena u redove. Postupno su razvijene numeričke metode pomoću kojih možemo riješiti i najsloženije zadaće. Za realnu konstrukciju dobivamo velike sustave jednačbi teško rješive raspoloživim računalima. Postoji opasnost od gomilanja numeričke pogreške. Pojedini proračuni traju prilično dugo što posebno stvara problem kod potrebe ponavljanja proračuna. Znatna količina dobivenih rezultata otežava shvaćanje stvarnog ponašanja konstrukcije.

3.3. Pojam podmodela

Zbog složenosti pojedinih rubnih zadaća, s obzirom na oblik tijela, rubne uvjete i opterećenja, možemo uvesti dodatne pretpostavke o stanju naprezanja i deformacija što povlači jednostavniji matematički model. Takav model nazivamo **podmodel**.

Najjednostavniji primjer podmodela je podmodel grede. Ako tijelo ima jednu dimenziju dominantno veću od preostale dvije možemo uvesti podmodel grede. Gredu ne moramo promatrati kao 3D kontinuum, dovoljno je uzeti gredni model, pravac težišne osi grede, a poprečni presjek definirati kao presjek u ravnini okomitoj na težišnu os. Preostale dvije dimenzije uzimamo u obzir definiranjem krutosti. Sva opterećenja, rubne uvjete i naprezanja svodimo na težišnu os grede. Na taj način za podmodel grede svejedno je da li je greda opterećena po gornjem ili donjem rubu.

Za daljnji proračun takvog podmodela potrebno je uvesti dodatne pretpostavke. Osnovna pretpostavka kojom se koristimo kod proračuna konstrukcija je Bernoullijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka, *poprečni presjeci nakon deformacije ostaju u ravnini okomitoj*

na deformiranu težišnu os štapa. U proračunu tada zanemarujemo utjecaj poprečnih sila na deformaciju, uzimamo u obzir samo deformaciju zbog savijanja. Takva pretpostavka zapravo definira ponašanje polja deformacija, komponente ϵ_{xx} . Komponenta je linearno ovisna o visini grede i proporcionalna je udaljenosti, (z), promatrane osi od težišne osi (neutralne osi),

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{r}, \quad (3.3.1)$$

gdje je r udaljenost težišne (neutralne osi) od središta zakrivljenosti grede.

Kod greda kod kojih je omjer raspona i visine poprečnih nosača manji (visokostijeni nosači, $L/H < 5$) takav podmodel više ne može biti korektan. Utjecaj poprečnih sila više ne može biti zanemaren. Hipoteza ravnih poprečnih presjeka tada više ne vrijedi. Posmična naprezanja τ_{xz} i posmične deformacije γ_{xz} uzrokuju krivljenje poprečnih presjeka. Posmična naprezanja određujemo iz uvjeta ravnoteže u smjeru osi grede, a nastaju zbog neravnoteže uzdužnih naprezanja na krajevima izdvojenog dijela grede,

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{T_z S_y}{I_y B G}, \quad (3.3.2)$$

gdje je T_z iznos poprečne sile, S_y statički moment promatranog presjeka oko neutralne osi, B širina poprečnog presjeka, a G modul posmika.

Kod greda s većim odnosom raspona i visine poprečnog presjeka grede, krivljenje duž grede je malo i možemo zanemariti posmičnu deformaciju ($\gamma_{xz} \approx 0$) i pretpostavka o ravnim poprečnim presjecima predstavlja dobru aproksimaciju ponašanja konstrukcije. Rezultat takve aproksimacije je diferencijalna jednadžba ravnoteže koja ima samo jednu komponentu pomaka w ovisnu o koordinati x ,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x) I(x) \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] = q_z(x), \quad (3.3.3)$$

gdje je $q_z(x)$ poprečno opterećenje grede, $E(x)$ modul elastičnosti grede, a $I_y(x)$ moment tromosti poprečnog presjeka oko osi y . Uz konstanti poprečni presjek i modul elastičnosti, te uz dodatnu pretpostavku malih zaokreta (geometrijska linearizacija, $(dw/dx)^2 \ll 1$) dobivamo poznatu diferencijalnu jednadžbu progiba grede,

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q_z(x)}{EI_y}. \quad (3.3.4)$$

Kod manjih odnosa raspona i visine poprečnog presjeka na oblik progibne linije značajnije utječe poprečna sila. Između ostalog i zato što je utjecaj savijanja zbog relativno velikog momenta tromosti zapravo prilično mali. Takav utjecaj uzimamo u obzir koristeći se Timošenkovom diferencijalnom jednadžbom savijanja grede. Prema Timošenkovoj pretpostavci poprečni presjeci ostaju u ravnini, ali više nisu okomiti na pripadnu tangentu na deformiranu neutralnu os grede. Na taj način uvjetujemo konstantnu posmičnu deformaciju što povlači i konstantna posmična naprezanja.

Možemo spomenuti da postoje i druge varijante podmodela grede. Gredu koja preuzima samo uzdužne sile možemo prikazati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{q_x(x)}{EF}, \quad (3.3.5)$$

gdje je F površina poprečnog presjeka grede, E modul elastičnosti grede a $q_x(x)$ opterećenje u smjeru uzdužne osi grede. Kod grede s vrlo malim momentom tromosti ($I_y \rightarrow 0$), podmodel grede zapravo je podmodel užeta koji opisujemo diferencijalnom jednađbom užeta napetog konstantom silom N

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q_z(x)}{N} . \quad (3.3.6)$$

Osnovni podmodeli, uz podmodel grede, su podmodeli ploče, ljske i zidnog nosača. Podmodel ploče dobivamo ako pretpostavke podmodela grede primijenimo u dvije dimenzije. Ploča je tijelo kod kojeg je jedna dimenzija (debljina ploče d) znatno manja od preostale dvije (tlocrtne) dimenzije. Primjenom Bernoullijeve hipoteze na ploču dobivamo Kirchhoffovu teoriju savijanja tankih ploča,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D} , \quad (3.3.7)$$

gdje je D krutost ploče na savijanje,

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} . \quad (3.3.8)$$

Poopćenjem Timošenkovih pretpostavki na ploče dobivamo Mindlinovu diferencijalnu jednađbu savijanja debelih ploča. Ako je debljina ploče sve manja, ploča gubi krutost na savijanje i postaje **membrana** čije ponašanje je opisano linearnom diferencijalnom jednađbom

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q_z}{S} , \quad (3.3.9)$$

gdje je S napetost membrane. Prostorno zakrivljene nosače kod kojih je jedna dimenzija znatno manja od ostale dvije zovemo ljske. Kao i kod ploča, postoje teorije tankih i debelih ljski.

3.4. Osnovna lema - integralni oblik jake formulacije

3.4.1. Pojam reziduala

Jaku formulaciju možemo zapisati i u obliku

$$\mathbf{q} - \mathcal{K}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} , \quad (3.4.1)$$

odnosno uvesti funkciju reziduala

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathcal{K}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} . \quad (3.4.2)$$

Fizikalno, funkcija reziduala predstavlja **neuravnoteženo opterećenje**. Kod analitičkog rješenja diferencijalne jednađbe funkcija reziduala uvijek je jednaka nul-funkciji. Kod približnog, numerički dobivenog rješenja, funkcija reziduala različita je od nul-funkcije, jer se približno rješenje $\bar{\mathbf{w}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]$ razlikuje od analitičkog rješenja. Uslijed toga nisu zadovoljeni uvjeti ravnoteže u svim točkama područja. Uvrštavanjem približnog rješenja u diferencijalnu jednađbu ne vrijedi više jednakost nego slijedi nejednakost,

$$\mathbf{q} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}}) \neq \mathbf{0} . \quad (3.4.3)$$

Prirodno je pri numeričkom rješavanju rubne zadaće tražiti rješenje sa što manjim odstupanjem

$$\mathbf{q} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}}) \simeq \mathbf{0} . \quad (3.4.4)$$

3.5. Osnovna lema

Uvodimo globalnu (integralnu) procjenu kakvoće odstupanja definiranu izrazom

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r} \psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{q} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}})] \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad (3.5.1)$$

pri čemu su \mathbf{r} i ψ_i neprekidne funkcije. Funkciju ψ_i zovemo **test funkcije**. Ako izraz (3.5.1) vrijedi za bilo koju neprekidnu test funkciju, tada je $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pa je jaka formulacija zadovoljena. Jednostavno je uočljivo da vrijedi i obrat. Ako znamo analitičko rješenje jednadžbe, tada je $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, pa vrijedi izraz (3.5.1). Izraz (3.5.1) zovemo **osnovna lema** varijacijskog računa.

4. Slaba formulacija

4.1. Pojam slabe formulacije

Osnovna lema je zapravo samo drugačiji zapis jake formulacije. Lema ima smisla jer je diferencijalnu jednadžbu teže riješiti nego pripadni integral osnovne leme. U istom smislu zadržavamo se na integralnom pristupu, ali uz umanjene zahtjeve

- funkcija reziduala može biti prekidna,
- skup test funkcija je prilično sužen, konačan.

Prvi ustupak nije problematičan, integral prekidne funkcije možemo odrediti. Prema drugom ustupku test funkcija koja ispunjava osnovnu lemu nije više proizvoljna nego je iz nekog konačnog skupa od n funkcija. Taj skup označimo sa S . Na taj način osnovnu lemu možemo zadovoljiti samo približno, samo za konačni broj test funkcija, pa govorimo o slaboformulaciji rubne zadaće (engl. *weak formulation*),

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r}\psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{q} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}})] \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad \psi_i \in S, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.1)$$

Pomaci $\bar{\mathbf{u}}$ predstavljaju zapravo točno rješenje, ali za približno opterećenje $\bar{\mathbf{q}}$, zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$\mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{q}}. \quad (4.1.2)$$

Sada slabu formulaciju (4.1.1) možemo zapisati u obliku

$$d \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{r}\psi_i d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \psi_i d\bar{\Omega} = 0, \quad \psi_i \in S, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.3)$$

Ako su jednadžbe (4.1.1) i (4.1.3) zadovoljene za svaku test funkciju iz skupa S , tada je slaba formulacija zadovoljena. Izrazi u zagradama tada moraju biti jednaki nuli pa dobivamo

$$\mathcal{K}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{q} \quad \text{ i } \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}. \quad (4.1.4)$$

U smislu slabe formulacije približno rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu, a približno je opterećenje dobra aproksimacija vektora desne strane jednadžbe. Jasno je da svako rješenje jake formulacije zadovoljava i jednadžbe (4.1.1) i (4.1.3). S obzirom da je za praktične potrebe teško riješiti diferencijalnu jednadžbu, a ako i uspijemo riješiti onda nam slaba formulacija nije potrebna, nama je važno da li rješenje koje zadovoljava slabu formulaciju jamči zadovoljenje jake formulacije.

Rješenje koje zadovoljava slabu formulaciju **ne jamči** zadovoljenje jake formulacije, ali takvo rješenje može biti dovoljno dobro s fizikalnog stanovišta.

4.2. Zaključno o slaboformulaciji

Jaka formulacija ima jedinstveno i točno rješenje. Slaba formulacija može imati beskonačno mnogo prihvatljivih rješenja. Za razliku od jakog rješenja, slabo rješenje nije osjetljivo na promjene koje variraju oko točnog rješenja.

Fizikalno gledano sve funkcije opterećenja koje zadovoljavaju slabu formulaciju su prihvatljiva rješenja. Pod takvim opterećenjem dobivamo približno iste progibe. U smislu jake formulacije sve takve funkcije su loše jer uvijek vrijedi $r \neq 0$. U praktičnom smislu, jednostavnije je pronaći jedno rješenje iz skupa dovoljno dobrih rješenja nego tražiti samo jedno točno rješenje. Pogotovo treba uzeti u obzir da niti točno rješenje modela ne može u potpunosti odgovarati rješenju realne zadaće. Zbog toga nije potrebno uvijek inzistirati na točnosti koju dobivamo rješenjem jake formulacije. Model koji rješavamo već je idealizacija realne zadaće, pa je zbog toga i njegovo točno rješenje zapravo rješenje idealnog slučaja stvarne zadaće.

Osnovna je ideja naći približnu funkciju opterećenja \bar{q} kako bismo jednostavnije riješili diferencijalnu jednadžbu podmodela $\mathcal{K}(\bar{w}) = \bar{q}$ i dobili dovoljno dobru aproksimaciju pomaka \bar{w} .

4.3. Slaba formulacija rubnih zadaća u proračunu konstrukcija

4.3.1. Uzdužno opterećena greda

Promatramo gredu duljine L , modula elastičnosti $E(x)$, poprečnog presjeka $F(x)$ pod djelovanjem opterećenja $q(x)$ duž uzdužne osi štapa i koncentrirane uzdužne sile N_0 na slobodnom kraju štapa. Takva je zadaća jednodimenzionalna. Polje pomaka grede \mathbf{u} zapravo je skalarna vrijednost pomaka točaka težišne osi grede u smjeru uzdužne osi grede, $u(x)$. Polje deformacija ϵ jednako je uzdužnoj deformaciji, u smjeru osi grede, $\epsilon_{xx}(x)$, a polje naprezanja σ jednako je komponenti uzdužnog naprezanja u smjeru osi grede $\sigma_{xx}(x)$ koje možemo i reprezentirati poljem uzdužnih sila, $N = \sigma_{xx} \cdot F$ u presjecima grede. Jednadžba ravnoteže, kinematički uvjet i zakon ponašanja u takvom jednodimenzionalnom slučaju glase,

$$\frac{d\sigma_{xx}(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (4.3.2)$$

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)\epsilon_{xx}(x), \quad (4.3.3)$$

što uz rubne uvjete

$$\text{rubni uvjet pomaka} : u(0) = u_0, \quad (4.3.4)$$

$$\text{rubni uvjet sila} : \sigma_{xx}(L) = N_0/F(L), \quad (4.3.5)$$

predstavlja jednoznačno rješivu zadaću uzdužno opterećene grede, sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice $(\epsilon_{xx}, \sigma_{xx}, u(x))$.

Diferencijalna jednadžba ravnoteže grede opterećenog u smjeru uzdužne osi glasi

$$(EFu')' + q = 0, \text{ na } \Omega = [0, L], \quad (4.3.6)$$

uz rubne uvjete

$$u = \bar{u} \quad \text{na } \Gamma_u \quad (4.3.7)$$

$$N = \bar{N} \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (4.3.8)$$

Za prikaz slabe formulacije diferencijalnu jednadžbu pomnožimo testfunkcijom $v \in V$, gdje je V prostor dopustivih test funkcija,

$$V = v, v \in C^1(\Omega), v_{\Gamma_u} = 0. \quad (4.3.9)$$

Integracijom po duljini grede slijedi

$$\int_0^L (EFu')' \cdot v dx + \int_0^L q \cdot v dx = 0, \quad (4.3.10)$$

Nakon parcijalne integracije prvog člana, $\int_0^L f'g dx = (fg)|_0^L - \int_0^L fg' dx$, uz $f + EFu'$ i $g = v$, slijedi

$$(EFu' \cdot v)|_0^L - \int_0^L EFu' \cdot v' dx + \int_0^L q \cdot v dx = 0, \quad (4.3.11)$$

pa uz poznati izraz za silu u gredi, $EFu' = N$, slijedi

$$\int_0^L EFu' \cdot v' dx - \int_0^L q \cdot v dx - (N \cdot v)|_0^L = 0, \quad (4.3.12)$$

Za rubne uvjete sila vrijedi $N = \bar{N} = K$, pa pripadna slaba formulacija rubnih uvjeta sila slijedi kao produkt s test mfunkcijom $(N - \bar{N}) \cdot v = 0$. Test funkcije moraju biti jednake 0 u točkama rubnih uvjeta pomaka što znači da prethodna jednakost vrijedi u svim rubnim točkama,

$$(N - \bar{N}) \cdot v = 0 \quad \forall x \in \Gamma. \quad (4.3.13)$$

Slaba formulacija rubne zadaće uzdužno opterećene grede glasi

$$R(u, v) = \int_0^L EFu' \cdot v' dx - \int_0^L q \cdot v dx - (N \cdot v)|_0^L = 0, \quad (4.3.14)$$

Za dovoljno glatke funkcije $(u, v) \in C^2(\Omega) \times C^1(\Omega)$, jednadžba $R(u, v) = 0$ predstavlja slabu formulaciju ekvivalentnu zadanoj rubnoj zadaći. Analitičko rješenje rubne zadaće (rješenje koje zadovoljava jaku formulaciju) uvijek zadovoljava slabu formulaciju rubne zadaće. Svako slabo rješenje, rješenje slabe formulacije za proizvoljnu test funkciju $v \in V$, dovoljne točnosti približno je rješenje zadane rubne zadaće.

5. Aproksimacija funkcije pomaka

5.1. Uvod u aproksimaciju pomaka

Promatramo funkciju pomaka štapa $w(x)$. Osnovna je ideja postupka rješavanja rubne zadaće, dodatno pojednostavljenje, razviti funkciju pomaka u konačan red. Funkciju pomaka možemo razviti u beskonačni red, Taylorov red oko točke x_0 ,

$$\begin{aligned} w(x) &= w(x_0) + \frac{dw}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2w}{dx^2}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n w}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Funkcije reda, polinomi $(x - x_0)^n$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, čine potpuni skup funkcija. Takva je aproksimacija dobra i na nekom intervalu $I = (x_a, x_b)$ u okolini točke x_0 . Tada funkcija na tom intervalu mora biti beskonačno puta derivabilna (klase C^∞) i $[x_0, x] \in I$. Za potpuni skup funkcija možemo uzeti i trigonometrijske funkcije. Funkciju pomaka razvijamo u Fourierov red

$$w(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.1.2)$$

pri čemu su koeficijenti Fourierova reda jednaki,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \cos nx dx \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \sin nx dx. \quad (5.1.3)$$

Za razvoj u Fourierov red funkcija $w(x)$ mora biti integrabilna na intervalu $[\pi, \pi]$.

Uzimanjem u obzir većeg broja članova prikazanih redova vrijednost aproksimacije postaje sve bliža stvarnoj vrijednosti funkcije. Za realne parametre funkcije pomaka, već i uzimanje prvih nekoliko članova reda može svesti aproksimaciju funkcije pomaka na vrlo prihvatljivu razinu. Takvu aproksimaciju funkcije pomaka zovemo **diskretizacija funkcije pomaka**. Pogreška približnog rješenja reda je veličine prvog zanemarenog člana reda. Prema ideji diskretizacije, konačan red, red s konačnim brojem članova u razvoju, možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} w(x) \approx \bar{w}(x) &= \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i(x) = [\varphi_1(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varphi}(x)^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}(x), \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

gdje su funkcije $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ funkcije baze reda (**bazne funkcije, koordinatne funkcije**), a a_i , $i = 1, \dots, k$ skalarni članovi (amplitude baznih funkcija), koeficijenti linearne kombinacije funkcija baze. Osnovi problem pri rješavanju rubne zadaće je činjenica da funkcija $w(x)$ nije unaprijed poznata. Zbog toga ne možemo odrediti funkcije $\varphi_i(x)$ u Taylorovom redu ili koeficijente a_i u Fourierovom redu. Funkcije $\varphi_i(x)$ možemo odabrati unaprijed, tako da uz što manje članova reda što bolje aproksimiramo traženu funkciju pomaka.

5.2. Slaba formulacija u diskretnom obliku

Primijenimo aproksimaciju funkcije pomaka na matematičke podmodele za određivanje polja pomaka konstrukcije. Pri određivanju progiba konstrukcije nepoznata je samo jedna komponenta polja pomaka (w) koju možemo zapisati u obliku

$$w \approx \bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i, \quad (5.2.1)$$

gdje je \bar{w} približni oblik progibne linije. Uz takvu diskretizaciju, (5.2.1), slaba formulacija poprima oblik

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i [q_z - \mathcal{K}(\bar{w})] d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[q_z - \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right) \right] d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.2.2)$$

Ovakav oblik slabe formulacije povećanjem broja članova reda konvergira prema jakoj formulaciji. Diskretni oblik funkcije opterećenja poprima oblik

$$\bar{q}_z = \mathcal{K}(\bar{w}) = \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right). \quad (5.2.3)$$

U primjeru trodimenzionalne rubne zadaće jednadžbu (5.2.1) možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{w} \approx \bar{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = [\mathbf{N}_1 \dots \mathbf{N}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}. \quad (5.2.4)$$

Vektorsko polje $\bar{\mathbf{w}}$ sadrži skalarne funkcije, a vektori \mathbf{a}_i sadrže brojeve,

$$\bar{\mathbf{w}} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}], \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{a}_i = [a_{x,i} \quad a_{y,i} \quad a_{z,i}]. \quad (5.2.6)$$

Članovi matrice \mathbf{N} su podmatrice

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_i \end{bmatrix} = \varphi_i \mathbf{I}. \quad (5.2.7)$$

Prema aproksimaciji funkcije pomaka (5.2.4) slabu formulaciju možemo zapisati u obliku

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i [\mathbf{f} - \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}})] d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[\mathbf{f} - \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{N}_j \mathbf{a}_j \right) \right] d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.2.8)$$

a približno opterećenje

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}}) = \mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{N}_j \mathbf{a}_j \right). \quad (5.2.9)$$

Opisanom diskretizacijom matematički model prelazi u numerički model.

5.3. Sustav linearnih jednadžbi

Primjenom diskretnog oblika slabe formulacije dobivamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi numeričkog modela. Promatramo jednodimenzionalni model (5.2.3). Operator \mathcal{K} je linearan. To znači da vrijedi

$$\mathcal{K} \left(\sum_{j=1}^k a_j \varphi_j \right) = \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{K}(\varphi_j) = 0. \quad (5.3.1)$$

Slaba formulacija (5.2.2) poprima oblik

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi_i \left[q_z - \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{K}(\varphi_j) \right] d\bar{\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.3.2)$$

a nakon množenja izraza u zagradi s test funkcijom,

$$\int_{\bar{\Omega}} \left[\psi_i q_z - \sum_{j=1}^k a_j \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) \right] d\bar{\Omega}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.3.3)$$

Integral sume po dijelovima neprekidnih funkcija jednak je sumi integrala (koordinatne funkcije u najgorem slučaju moraju biti barem po dijelovima neprekidne jer moraju aproksimirati strogo neprekidnu funkciju progiba). Tada izraz (5.3.3) možemo zapisati u obliku

$$\sum_{j=1}^k a_j \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i q_z d\bar{\Omega}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.3.4)$$

Raspisivanjem zborja dobivamo sustav jednadžbi koji možemo prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_1) d\bar{\Omega} & \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_2) d\bar{\Omega} & \dots & \int_{\bar{\Omega}} \psi_k \mathcal{K}(\varphi_k) d\bar{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\bar{\Omega}} \psi_1 q_z d\bar{\Omega} \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_2 q_z d\bar{\Omega} \\ \vdots \\ \int_{\bar{\Omega}} \psi_k q_z d\bar{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Sustav možemo pisati u skraćenom obliku

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{q}, \quad (5.3.6)$$

pri čemu su članovi matrice \mathbf{K} i vektora \mathbf{q} brojevi

$$K_{ij} = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i \mathcal{K}(\varphi_j) d\bar{\Omega} \quad \text{i} \quad q_i = \int_{\bar{\Omega}} \psi_i q_z d\bar{\Omega}. \quad (5.3.7)$$

Broj test funkcija ψ_i odgovara broju koordinatnih funkcija φ_i , odnosno broju članova reda k . Zato je matrica \mathbf{K} kvadratna, a sustav algebarskih jednadžbi je linearan jer je temeljen

na linearnom matematičkom modelu. Članovi matrice sustava ne ovise o nepoznatim parametrima a_i . Zbog toga je matrica \mathbf{K} regularna i postoji inverzna matrica što povlači da sustav mora imati jedinstveno rješenje

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} . \quad (5.3.8)$$

Dobiveni koeficijenti a_i uvršteni u (5.2.1) daju aproksimaciju progiba. Tek aproksimacijom funkcije progiba unutar slabe formulacije dobivamo numerički model s konačnim brojem nepoznanica koji možemo prikazati sustavom linearnih algebarskih jednadžbi. Na taj način više ne rješavamo diferencijalnu jednadžbu kontinuiranog modela.

6. Ritzova metoda

6.1. Uvod

Ritzova metoda temelji se na integralnoj (slaboj) formulaciji. Metoda ne polazi od reziduala diferencijalne jednačbe, već od funkcionala energije matematičkog modela. Zadaća je svedena na određivanje minimuma ukupne potencijalne energije linearnog elastičnog modela. Takvu ukupnu potencijalnu energiju uz geometrijske ovisnosti i rubne uvjete po pomacima zovemo Lagrangeov funkcional energije. Funkcional energije ima oblik

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{q} \mathbf{w} d\bar{\Omega}. \quad (6.1.1)$$

Prvi član funkcionala predstavlja potencijalnu energiju deformacija, a drugi član potencijal (rad s negativnim predznakom) volumenskih \mathbf{q} . Znamo da prema metodi pomaka sva nepoznata polja možemo svesti na nepoznato polje pomaka. Tada prvi član funkcionala neće biti ovisan o nepoznatom polju naprežanja i deformacija nego o nepoznatom polju pomaka. Pomoću zakona konstitucije $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ iz kojeg slijedi $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C}^T$, uz simetričnost matrice elastičnosti $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, i jednačbe geometrijske ovisnosti $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{w}$ iz koje slijedi $\boldsymbol{\epsilon}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{L}^T$, prvi član funkcionala energije možemo zapisati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} d\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{w}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{w} d\bar{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} d\bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

pa izraz za potencijalnu energiju glasi

$$\Pi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{q} \mathbf{w} d\bar{\Omega}. \quad (6.1.3)$$

Na funkcional u takvom obliku, izraženom preko nepoznatog polja pomaka, primijenimo Ritzovu ideju. Funkcional diskretiziramo umetanjem poznatog oblika za približno rješenje polja pomaka

$$\mathbf{w} \approx \bar{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i, \quad (6.1.4)$$

i tražimo minimum tako diskretiziranog funkcionala. Dobivamo sustav algebarskih jednačbi s nepoznatim koeficijentima, članovima vektora \mathbf{a}_i . Uvrštavanjem koeficijenata možemo raspisati približno polje pomaka. Ovakav način je također diskretna aproksimacija slabe formulacije.

6.2. Proračun poprečno opterećene grede Ritzovom metodom

6.2.1. Potencijalna energija savijanja grede

Usvajanjem podmodela grede transformiramo izraz za funkcional energije (6.1.1). Integrale po volumenu $\bar{\Omega}$ u tom su slučaju rastavljamo na integral po osi duljine grede L i

integral po površini poprečnog presjeka grede $F(x)$. Površinski integral možemo prikazati kao integral po opterećenom dijelu i širini djelovanja. Uz pretpostavku ravnih poprečnih presjeka, posmične deformacije ne ulaze u izraz za energiju. Funkcional potencijalne energije grede tada možemo zapisati u obliku

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dF \right) dx - \int_0^L \left(\int_{F(x)} q_z w dF \right) dx ,$$

gdje je q_z volumenska sila po jedinici volumena grede, a K_i koncentrirane sile u krajevima grede. Prvi integral izražen je preko nepoznatih naprezanja i defromacija, a ideja je izraziti taj integral preko nepoznatog pomaka w . Za uzdužnu deformaciju po visini poprečnog presjeka znamo da vrijedi

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{r} = z\rho , \quad (6.2.1)$$

gdje je z udaljenost od težišne osi, a ρ zakrivljenost progibne linije

$$\rho = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} . \quad (6.2.2)$$

Uz pretpostavku malih zaokreta zakrivljenost možemo linearizirati

$$\rho \approx \frac{d^2 w}{dx^2} ; \quad (6.2.3)$$

što daje izraz za uzdužnu deformaciju u obliku

$$\epsilon_{xx} = z \frac{d^2 w}{dx^2} . \quad (6.2.4)$$

Prema zakonu konstitucije znamo da je $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$. Prvi integral funkcionala energije možemo onda transformirati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dF \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{F(x)} E \epsilon_{xx}^2 dF \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_{F(x)} E \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 z^2 dF \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[E \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \int_{F(x)} z^2 dF \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Ako pretpostavimo da su volumenske sile konstantne po površini, $q_z = const.$, uz oznake $q(x) = q_z F(x)$, slijedi

$$\int_0^L \left(\int_{F(x)} q_z w dF \right) dx = \int_0^L q w dx . \quad (6.2.6)$$

Izraz za potencijalnu energiju savijanja grede sada glasi

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L q w dx . \quad (6.2.7)$$

Energija ovisi samo o progibu (vertikalnom pomaku) w . Znači da smo uvođenjem grednih pretpostavki potencijalnu energiju trodimenzionalnog modela transformirali u potencijalnu energiju osi grede.

6.2.2. Diskretni oblik potencijalne energije

Izraz za približno rješenje funkcije progiba \bar{w}

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad (6.2.8)$$

možemo uvrstiti u izraz za potencijalnu energiju grede (6.2.7) i dobivamo približni i diskretni izraz za potencijalnu energiju savijanja grede,

$$V\Pi(\bar{w}) = \Pi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\sum_{i=1}^k a_i \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L q \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i dx . \quad (6.2.9)$$

6.3. Minimizacija potencijalne energije u diskretnom obliku

Nakon diskretizacije potencijalne energije grede, na izraz u diskretnom obliku možemo primijeniti teorem o minimumu potencijalne energije: Tijelo u ravnoteži ima ekstremnu vrijednost potencijalne energije. U slučaju stabilne ravnoteže vrijednost je minimalna. Ekstremnu vrijednost dobivamo ako parcijalne derivacije po a_i izjednačimo s nulom. Na taj način dobivamo sustav jednadžbi

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{a})}{\partial a_i} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\sum_{j=1}^k a_j \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \right) \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} dx - \int_0^L q \varphi_i dx = 0 , \quad i = 1, \dots, k . \quad (6.3.1)$$

Ako članove sume u prvom integralu pomnožimo s članovima izvan sumacije, a znamo da je i integral zbroja jednak zbroju integrala, a a_j su konstante koje ne ovise o području integracije dobivamo sustav

$$\sum_{j=1}^k a_j \int_0^L EI_y \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} dx = \int_0^L q \varphi_i dx , \quad i = 1, \dots, k , \quad (6.3.2)$$

odnosno u matričnom zapisu uz $d^2 \varphi_i / dx^2 = \varphi_i''$

$$\begin{bmatrix} \int_0^L EI_y \varphi_1''^2 dx & \int_0^L EI_y \varphi_1'' \varphi_2'' dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_1'' \varphi_k'' dx \\ \int_0^L EI_y \varphi_2'' \varphi_1'' dx & \int_0^L EI_y \varphi_2''^2 dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_2'' \varphi_k'' dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^L EI_y \varphi_k'' \varphi_1'' dx & \int_0^L EI_y \varphi_k'' \varphi_2'' dx & \dots & \int_0^L EI_y \varphi_k''^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L q \varphi_1 dx \\ \int_0^L q \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^L q \varphi_k dx \end{bmatrix} , \quad (6.3.3)$$

ili u skraćenom matričnom obliku

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{q} \quad , \quad (6.3.4)$$

pri čemu su koeficijenti

$$K_{i,j} = \int_0^L EI_y \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad , \quad (6.3.5)$$

$$q_i = \int_0^L q_z \varphi_i dx \quad . \quad (6.3.6)$$

6.4. Nužni uvjeti za izbor koordinatnih funkcija

6.4.1. Uvjeti neprekinutosti

Koordinatne funkcije moraju aproksimirati neprekidnu funkciju pomaka. Zbog toga koordinatne funkcije moraju biti neprekidne ili po dijelovima prekidne (integrabilne su i u zbroju mogu dati neprekidnu funkciju, ali takve treba izbjegavati jer može biti potrebna i neprekidnosti mekih derivacija). Ovisno o stupnju diferencijalne jednadžbe koju aproksimiramo i neke derivacije koordinatnih funkcija moraju biti neprekidne. Za jednadžbu n -tog reda, mora postojati derivacija funkcije reda $n/2$, ali ta derivacija može biti prekidna, odnosno da je funkcija klase $C^{(n/2-1)}(\Omega)$. Na taj način postavljeni zahtjevi na derivabilnost koordinatnih funkcija su slabiji u odnosu na prethodne postupke. Prethodni postupci koriste stupanj derivacije iz diferencijalne jednadžbe, a ovaj postupak koristi stupanj derivacije pripadnog funkcionala energije.

Zadaća savijanja poprečno opterećene grede opisana je diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. U izrazu za energiju javlja se najviše druga derivacija i može biti prekidna. To znači da je dovoljno da pomaci (funkcija) i kutovi zaokreta (prva derivacija) budu neprekidni. Koordinatne funkcije su polinomi trećeg stupnja.

6.4.2. Rubni uvjeti

Za koordinatne funkcije dovoljno je da zadovolje homogene geometrijske rubne uvjete. Ako su zadani nehomogeni geometrijski rubni uvjeti tada aproksimaciju funkcije progiba možemo zapisati u obliku

$$\bar{w} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \quad , \quad (6.4.1)$$

pri čemu funkcija φ_0 zadovoljava nehomogene rubne uvjete. Fizikalno funkcija φ_0 predstavlja početni progib štapa.

Prirodni rubni uvjeti sadržani su u funkcionalu energije. Područje integracije prvog člana ($\bar{\Omega}$ uključuje i rub Γ , jer naprezanja na rubu doprinose potencijalnoj energiji deformacija (rub modela pod opterećenjem bude deformiran, pa naprezanja na rubu rade na deformacijama ruba). Uvjete ravnoteže dobivamo minimizacijom funkcionala energije. Zbog toga uvjeti ravnoteže sadrže i rubna naprezanja, a to su prirodni rubni uvjeti. Koordinatne funkcije ne moraju zadovoljiti prirodne rubne uvjete, ali će ih linearna kombinacija koordinatnih funkcija približno zadovoljiti, jer su a_i i \bar{w} dobiveni i iz uvjeta ravnoteže po rubu.

6.4.3. Uvjet linearne nezavisnosti

Koordinatne funkcije nužno moraju biti linearno nezavisne. Funkcije φ_i , $i = 1, \dots, k$ su linearno nezavisne ako vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^k a_i \varphi_i = 0 \iff a_i = 0 \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.4.2)$$

To zapravo znači da nijednu koordinatnu funkciju ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ostalih koordinatnih funkcija.

U ravnini samo dva vektora mogu biti linearno nezavisna, jer uvijek treći vektor možemo prikazati kao linearnu kombinaciju dva linearno nezavisna vektora. U prostoru samo tri vektora mogu biti linearno nezavisna, a svaki četvrti možemo prikazati kao linearnu kombinaciju tri linearno nezavisna vektora. Općenito, u k -dimenzionalnom prostoru potrebno je k linearno nezavisnih vektora.

Ako su koordinatne funkcije φ_i linearno nezavisne tada su stupci i retci matrice \mathbf{K} linearno nezavisni. Determinanta matrice različita je od nule i osigurano je jedinstveno rješenje sustava. Za numeričko rješavanje nepovoljna je situacija ako je determinanta bliska nuli. U vektorskom smislu, to znači da su dva linearno nezavisna vektora pod vrlo malim kutem, međusobno se gotovo podudaraju. Sustav jednadžbi je u tom slučaju loše uvjetovan i rješenje nije stabilno.

6.4.4. Uvjet potpunosti

Linearnom kombinacijom koordinatnih funkcija moramo biti u mogućnosti dobiti bilo kakvu neprekidnu funkciju progiba. Tada možemo reći da je zadovoljen uvjet potpunosti. Zahtjev je bolje pokazati suprotnim primjerima. Ako želimo aproksimirati funkciju progiba, ne možemo izabrati koordinatne funkcije koje imaju nul-točku na istom mjestu jer će i njihova linearna kombinacija dati u istoj točki vrijednost nula. U numeričkom smislu nije dobro uzeti niti koordinatne funkcije s bliskim nul-točkama. Ako su koordinatne funkcije simetrične onda je i njihova linearna kombinacija simetrična, pa bilo kakvo nesimetrično rješenje nije moguće opisati takvim funkcijama.

Svaki konačan skup funkcija je nepotpun jer ne može opisati zadaću s beskonačno mnogo nepoznanica. Za naše potrebe smatramo da je sustav koordinatnih funkcija potpun ako bilo koje potencijalno rješenje možemo proizvoljno točno aproksimirati (u diskretnom obliku slabe formulacije) kao linearna kombinacija koordinatnih funkcija.

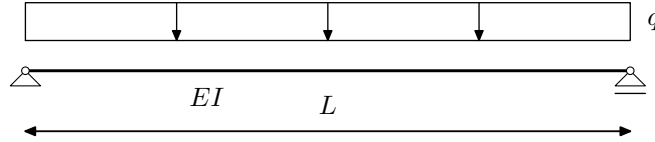
6.4.5. Uvjet ortogonalnosti

Uvjet ortogonalnosti nije nužan, ali je poželjan. Izborom ortogonalnih funkcija matrice postaju povoljnije definirane (matrica sustava postaje dijagonalna matrica) za numeričko rješavanje. Uvjet ortogonalnosti glasi

$$\int_0^L \varphi_i \mathcal{K} \varphi_j dx = 0 \quad i \neq j. \quad (6.4.3)$$

6.5. Numerički primjeri

Primjer 6.5.1. Ritzovom metodom odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q



Slika 6.5.1.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

Ritzovom metodom, umjesto diferencijalne jednačbe progibne linije savijanja grede, rješavamo problem minimizacije potencijalne energije u diskretnom obliku. Funkciju progiba aproksimiramo linearnom kombinacijom konačnog broja (k) koordinatnih funkcija ($\varphi_i, i = 1, \dots, k$)

$$w \approx \bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i . \quad (6.5.1.1)$$

Zadaću svodimo na rješavanje sustava jednačbi

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{q} , \quad (6.5.1.2)$$

pri čemu je \mathbf{a} vektor nepoznatih koeficijenata linearne kombinacije, \mathbf{K} poznata matrica sustava, a \mathbf{q} poznati vektor opterećenja,

$$K_{i,j} = \int_0^L EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx , \quad (6.5.1.3)$$

$$q_i = \int_0^L q \varphi_i dx . \quad (6.5.1.4)$$

Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za slobodno oslonjenu greda izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točkama $x = 0$ i $x = L$. Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) , \quad (6.5.1.5)$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 2x) . \quad (6.5.1.6)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1'' \varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L , \quad (6.5.1.7)$$

$$\varphi_1'' \varphi_2'' = 12L - 24x \Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = 0 , \quad (6.5.1.8)$$

$$\varphi_2'' \varphi_2'' = 36L^2 - 144Lx + 144x^2 \Rightarrow K_{2,2} = 12L^3 , \quad (6.5.1.9)$$

a za članove vektora opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{6}, \quad q_2 = 0. \quad (6.5.1.10)$$

Sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5.1.11)$$

Vidimo da su članovi matrice sustava izvan dijagonale jednaki nuli, što znači da smo odabrali ortogonalne koordinatne funkcije. Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{24EI}, \quad a_2 = 0. \quad (6.5.1.12)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\bar{w}(x) = \frac{qL^2}{24EI}x(L-x). \quad (6.5.1.13)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\frac{\bar{w}_{L/2}}{w_{L/2}} = \frac{qL^4}{96EI}, \quad \Delta_{L/2} = 25\%, \quad (6.5.1.14)$$

$$\frac{\bar{w}_{L/3}}{w_{L/3}} = \frac{qL^4}{108EI}, \quad \Delta_{L/3} = 18,2\%, \quad (6.5.1.15)$$

$$\frac{\bar{w}_{L/4}}{w_{L/4}} = \frac{qL^4}{128EI}, \quad \Delta_{L/4} = 15,8\%. \quad (6.5.1.16)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI\bar{w}(x) = -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left(\frac{qL^2}{24EI} \cdot (-2) + 0 \cdot 12x \right) = \frac{qL^2}{12}. \end{aligned} \quad (6.5.1.17)$$

Momentna funkcija je aproksimirana konstantnom funkcijom duž cijele grede što očito ne odgovara stvarnom ponašanju, $M(x) = qx(L-x)/2$. Za kvalitetniju aproksimaciju progibne i momentne funkcije potrebno je odabrati neke druge koordinatne funkcije.

Za sljedeću aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L-x), \quad (6.5.1.18)$$

$$\varphi_2(x) = x(L-x)(L-3x)(2L-3x). \quad (6.5.1.19)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L, \quad (6.5.1.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1''\varphi_2'' &= 44L^2 - 216Lx + 216x^2 \\ &\Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = 8L^3, \end{aligned} \quad (6.5.1.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2''\varphi_2'' &= 484L^4 - 4752L^3x + 16416L^2x^2 - 23328Lx^3 + 11664x^4 \\ &\Rightarrow K_{2,2} = \frac{404}{5}L^5, \end{aligned} \quad (6.5.1.22)$$

a za vektor članove opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{6}, \quad q_2 = \frac{qL^5}{30}. \quad (6.5.1.23)$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 8L^3 \\ 8L^3 & \frac{404}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^5}{30} \end{bmatrix}. \quad (6.5.1.24)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenta linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{11qL^2}{216EI}, \quad a_2 = -\frac{q}{216EI}. \quad (6.5.1.25)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) &= \frac{11qL^2}{216EI}x(L-x) - \frac{q}{216EI}x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \\ &= \frac{q}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x). \end{aligned} \quad (6.5.1.26)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama dobivamo točnu vrijednost progiba

$$\bar{w}_{L/2} = \frac{5qL^4}{384EI}, \quad (6.5.1.27)$$

$$\bar{w}_{L/3} = \frac{11qL^4}{972EI}, \quad (6.5.1.28)$$

$$\bar{w}_{L/4} = \frac{57qL^4}{6144EI}. \quad (6.5.1.29)$$

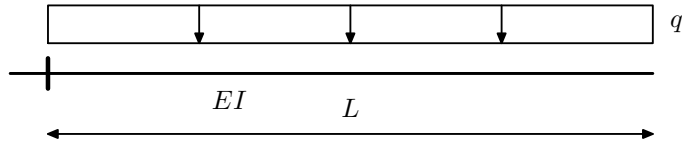
Momentna funkcija aproksimirana je izrazom

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left[\frac{11qL^2}{216EI} \cdot (-2) - \frac{q}{216EI}(-22L^2 + 54Lx - 108x^2) \right] \\ &= \frac{q}{4}(2x^2 - Lx). \end{aligned} \quad (6.5.1.30)$$

Vidljivo je da takva aproksimacija značajno odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije, $M(x) = q(Lx - x^2)/2$ u karakterističnim točkama grede. Na desnom ležaju moment nije jednak nuli, $\bar{M}(L) = qL^2/4$, a u sredini raspona nije dostignuta poznata ekstremna vrijednost $qL^2/8$, nego je dobiveni moment jednak nuli, $\bar{M}(L/2) = 0$.

Primjer 6.5.2. Ritzovom metodom odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem q

Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za konzolnu gredu izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točki $x = 0$ i nul-točku prve derivacije u točki $x = 0$



Slika 6.5.2.1: Konzolna greda opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem

(progib i kut zaokreta na upetom lezaju jednaki su nuli). Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x^2, \quad (6.5.2.1)$$

$$\varphi_2(x) = x^2(L - 2x). \quad (6.5.2.2)$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L, \quad (6.5.2.3)$$

$$\varphi_1''\varphi_2'' = 4L - 24x \Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = -8L^2, \quad (6.5.2.4)$$

$$\varphi_2''\varphi_2'' = 4L^2 - 48Lx + 144x^2 \Rightarrow K_{2,2} = 28L^3, \quad (6.5.2.5)$$

a za članove vektora opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{3}, \quad q_2 = -\frac{qL^4}{6}. \quad (6.5.2.6)$$

Sustav jednažbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & -8L^2 \\ -8L^2 & 28L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} \\ -\frac{L^4}{6} \end{bmatrix}. \quad (6.5.2.7)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{6EI}, \quad a_2 = \frac{qL}{24EI}. \quad (6.5.2.8)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) &= \frac{qL^2}{6EI}x^2 + \frac{qL}{24EI}x^2(L - 2x) \\ &= \frac{q}{24EI}(5L^2x^2 - 2lx^3). \end{aligned} \quad (6.5.2.9)$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\bar{w}_L = \frac{qL^4}{8EI}, \quad \Delta_L = 0\%, \quad (6.5.2.10)$$

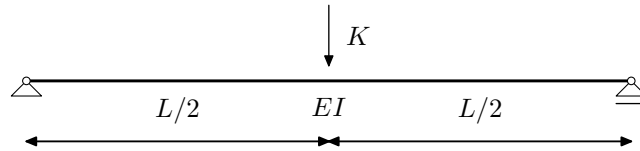
$$\bar{w}_{L/2} = \frac{qL^4}{24EI}, \quad \Delta_{L/2} = 5,9\%. \quad (6.5.2.11)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo opet kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned}\bar{M}(x) &= -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI\left[\frac{qL^2}{6EI} \cdot (2) - \frac{qL}{24EI}(2L - 12x)\right] \\ &= -\frac{q}{12}(5L^2 - 6Lx) .\end{aligned}\quad (6.5.2.12)$$

Takva aproksimacija vidljivo odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije konzolne grede, $M(x) = -q(L^2 - x^2)/2$ u karakterističnim točkama konzolne grede. Na desnom slobodnom kraju grede moment nije jednak nuli, $\bar{M}(L) = qL^2/12$, a na upetom ležaju nije dobivena poznata ekstremna vrijednost $-qL^2/2$, nego odstupanje od 16,7%, $\bar{M}(L/2) = -5qL^2/12$.

Primjer 6.5.3. Ritzovom metodom odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene koncentriranom silom K u sredini raspona



Slika 6.5.3.1: Slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Koordinatne funkcije uzet ćemo jednake kao za slobodno oslonjenu gredu u prvom primjeru. ačelno izbor koordinatnih funkcija treba podrediti zadanoj konstrukciji, a ne opterećenju. Iznimno, na temelju iskustva, može se u konkretnim slučajevima pokušati odabrati koordinatne funkcije sličnog oblika kao očekivana progibna funkcija. Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) , \quad (6.5.3.1)$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 2x) . \quad (6.5.3.2)$$

Matrica sustava ne ovisi o opterećenju, nego samo o geometriji konstrukcije i izboru koordinatnih funkcija. To znači da je jednaka kao u prvom primjeru za iste kordinatne funkcije. Vektor opterećenja, s obzirom da je zadano opterećenje koncentrirana sila u točki $x_K = L/2$, $K(x) = 0$ za $x \neq x_K$, izračunamo na temelju izraza da je integral produkta funkcije φ_i i funkcije zadane u samo jednoj točki jednak iznosu funkcije φ_i u točki u kojoj vrijednost druge funkcije nije jednaka nuli,

$$\int_0^L \varphi_i(x)K(x)dx = \varphi_i(x_K) . \quad (6.5.3.3)$$

Tako dobivamo članove vektora opterećenja,

$$q_1 = \varphi_1(L/2) = \frac{KL^2}{4} , \quad q_2 = \varphi_2(L/2) = 0 . \quad (6.5.3.4)$$

Sustav jednađbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KL^2}{4} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5.3.5)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{KL}{16EI}, \quad a_2 = 0. \quad (6.5.3.6)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\bar{w}(x) = \frac{KL}{16EI}x(L-x). \quad (6.5.3.7)$$

Izračunamo aproksimaciju progiba i pripadnu pogrešku u sredini i četvrtini raspona

$$\overline{w_{L/2}} = \frac{KL^3}{64EI}, \quad \Delta_{L/2} = 25\%, \quad (6.5.3.8)$$

$$\overline{w_{L/4}} = \frac{3KL^3}{256EI}, \quad \Delta_{L/4} = 28,6\%. \quad (6.5.3.9)$$

Aproksimaciju momentnu funkciju dobijemo kao linearnu kombinaciju drugih derivacija koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI\bar{w}(x) = -EI(a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left(\frac{KL}{16EI} \cdot (-2) + 0 \cdot 12x \right) = \frac{KL}{32}. \end{aligned} \quad (6.5.3.10)$$

Momentna funkcija je aproksimirana konstantnom funkcijom duž cijele grede što očito ne odgovara stvarnom ponašanju. Za kvalitetniju aproksimaciju progibne i momentne funkcije potrebno je odabrati neke druge koordinatne funkcije.

Za sljedeću aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L-x), \quad (6.5.3.11)$$

$$\varphi_2(x) = x(L-x)(L-3x)(2L-3x). \quad (6.5.3.12)$$

Matrica sustava za ovaj izbor koordinatnih funkcija izračunata je u prvom primjeru. Članovi vektora opterećenja slijede prema

$$q_1 = \varphi_1(L/2) = \frac{KL^2}{4}, \quad q_2 = \varphi_2(L/2) = -\frac{KL^4}{16}. \quad (6.5.3.13)$$

Sustav jednađbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 8L^3 \\ 8L^3 & \frac{404}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \\ -\frac{L^4}{16} \end{bmatrix}. \quad (6.5.3.14)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{13KL}{288EI}, \quad a_2 = -\frac{5K}{576LEI}. \quad (6.5.3.15)$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned}\bar{w}(x) &= \frac{13KL}{288EI}x(L-x) - \frac{5K}{576LEI}x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \\ &= \frac{K}{576EI} (17L^2x - 29Lx^2 - 90x^3 + 45x^4/L) .\end{aligned}\quad (6.5.3.16)$$

Izračunamo aproksimaciju progiba i pripadnu pogrešku u pojedinim točkama

$$\overline{w_{L/2}} = \frac{189KL^3}{9216EI} , \quad \Delta_{L/2} = 1,6\% , \quad (6.5.3.17)$$

$$\overline{w_{L/4}} = \frac{391KL^3}{49152EI} , \quad \Delta_{L/4} = 12,7\% . \quad (6.5.3.18)$$

Momentna funkcija aproksimirana je izrazom

$$\begin{aligned}\bar{M}(x) &= -EI (a_1\varphi_1''(x) + a_2\varphi_2''(x)) \\ &= -EI \left[\frac{3KL}{188EI} \cdot (-2) - \frac{5K}{576LEI} (-22L^2 + 54Lx - 108x^2) \right] \\ &= \frac{K}{32} (9L - 15x + 30x^2/L) .\end{aligned}\quad (6.5.3.19)$$

Takva aproksimacija odstupa od stvarnih vrijednosti momentne funkcije u karakterističnim točkama grede. U sredini raspona proizlazi moment $9KL/32$ što je odstupanje 12,5% od analitičke vrijednosti, ali na ležajima iznosi momenata nisu jednaki nuli, $\bar{M}(0) = 9KL/32$ i $\bar{M}(L) = 3KL/4$. Stvarna momentna funkcija ima skok derivacije u točki djelovanja koncentrirane sile, a približna proračunata funkcija beskonačno je glatka u svim točkama područja.

7. Metoda konačnih razlika

7.1. Aproksimacija pomaka metodom konačnih razlika

Klasičan pristup diskretizaciji matematičkog modela temelji se na metodi konačnih razlika. Potrebno je približno riješiti diferencijalnu jednadžbu u određenom broju točaka. Tražimo da u tim točkama rezidual bude jednak nuli. Bit aproksimacije metodom konačnih razlika je u zamjeni derivacije (nagiba tangente) konačnom razlikom (nagibom sekante) na krivulju progiba. Ako pretpostavimo jednaki razmak među točkama (h), možemo pisati

$$w'(x_i) \approx \bar{w}'(x_i) = \tan \alpha = \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (7.1.1)$$

Nagib tangente funkcije $w(x)$ u točki $(x_i, w(x_i))$ aproksimiramo nagibom sekante kroz točke $(x_i - h, w(x_i - h))$ i $(x_i + h, w(x_i + h))$. Ako razmak točaka h teži nuli, jednadžba (7.1.1) zapravo je klasična definicija prve derivacije funkcije

$$w'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (7.1.2)$$

Pogrešku aproksimacije derivacije možemo odrediti pomoću razvoja funkcije u Taylorov red i procjene vrijednosti progiba u točkama $x_i + h$ i $x_i - h$,

$$\begin{aligned} w(x_i + h) &= w(x_i) + hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) + \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad , \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

$$\begin{aligned} w(x_i - h) &= w(x_i) - hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) - \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Ako oduzmemo drugu jednadžbu od prve jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} w(x_i + h) - w(x_i - h) &= 2hw'(x_i) + 2\frac{1}{6}h^3w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + 2\frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}h^{2k-1}w^{(2k-1)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Ako podijelimo jednadžbu s $2h$ slijedi

$$\begin{aligned} \frac{w(x_i + h) - w(x_i - h)}{2h} &= w'(x_i) + \frac{1}{3!}h^2w'''(x_i) + \frac{1}{5!}h^4w^{(5)}(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^{2k}}{(2k+1)!}w^{(2k+1)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Vidimo da aproksimacijom prve derivacije lijevom strane jednadžbe odbacujemo članove uz h^2 i više potencije korak h što znači da je pogreška proporcionalna s h^2 i pišemo $\mathcal{O}(h^2)$.

Na isti način možemo odrediti i aproksimaciju druge derivacije kao približnu derivaciju prvih derivacija funkcije u točkama $x_i + \frac{h}{2}$ i $x_i - \frac{h}{2}$,

$$\begin{aligned} w''(x_i) = (w'(x_i))' &\approx \bar{w}''(x_i) = \frac{1}{h} [w'(x_i + h/2) - w'(x_i - h/2)] \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{h} [w(x_i + h) - w(x_i)] - \frac{1}{h} [w(x_i) - w(x_i - h)] \right\} \\ &= \frac{w(x_i + h) - 2w(x_i) + w(x_i - h)}{h^2} . \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Za rubne zadaće u analizi konstrukcija potrebne su nam i aproksimacije treće i četvrte derivacije. Njihove aproksimacije metodom konačnih razlika su

$$\begin{aligned} \bar{w}'''(x_i) &= \frac{w(x_i + 2h) - 2w(x_i + h) + 2w(x_i - h) - w(x_i - 2h)}{2h^3} , \quad (7.1.8) \\ \bar{w}''''(x_i) &= \frac{w(x_i + 2h) - 4w(x_i + h) + 6w(x_i) - 4w(x_i - h) + w(x_i - 2h)}{h^4} . \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Vrijednost derivacije funkcije u točki x_i izrazili smo kao linearnu kombinaciju vrijednosti funkcije u susjednim točkama. Koeficijente linearne kombinacije možemo dobiti i iz sustava postavljenog u smislu najbolje aproksimacije tražene derivacije. Vidimo da je n -ta derivacija izražena kao linearna kombinacija vrijednosti funkcije u $n + 1$ točaka. Postupak ćemo pokazati na definiranju linearne kombinacije za drugu derivaciju pomoću tri proizvoljne točke, $x_{i+\alpha h}$, $x_{i+\beta h}$ i $x_{i+\gamma h}$. Za svaku odabranu točku možemo izraziti pripadnu aproksimaciju Taylorovim redom u okolini točke x_i ,

$$w(x_i + \alpha h) = w(x_i) + \alpha h w'(x_i) + \frac{(\alpha h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\alpha h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots , \quad (7.1.10)$$

$$w(x_i + \beta h) = w(x_i) + \beta h w'(x_i) + \frac{(\beta h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\beta h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots , \quad (7.1.11)$$

$$w(x_i + \gamma h) = w(x_i) + \gamma h w'(x_i) + \frac{(\gamma h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\gamma h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots . \quad (7.1.12)$$

Izjednačimo drugu derivaciju u točki x_i s linearnom kombinacijom vrijednosti funkcije u odabranim točkama,

$$w''(x_i) = Aw(x_i + \alpha h) + Aw(x_i + \beta h) + Aw(x_i + \gamma h) . \quad (7.1.13)$$

Za suvislu aproksimaciju druge derivacije (u općenitom slučaju n -te derivacije) sve prethodne derivacije, uključujući i vrijednosti funkcije u tim točkama moraju iščeznuti. Uvrštavanjem razvoja u Taylorov red za pripadne vrijednosti u linearnoj kombinaciji slijedi jednadžba

$$\begin{aligned} w''(x_i) &= Aw(x_i + \alpha h) + Aw(x_i + \beta h) + Aw(x_i + \gamma h) \quad (7.1.14) \\ &= A \left(w(x_i) + \alpha h w'(x_i) + \frac{(\alpha h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\alpha h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right) \\ &+ B \left(w(x_i) + \beta h w'(x_i) + \frac{(\beta h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\beta h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right) \\ &+ C \left(w(x_i) + \gamma h w'(x_i) + \frac{(\gamma h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\gamma h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right) . \end{aligned}$$

Sada grupiramo članove razvoja uz istu derivaciju u točki x_i , pa slijedi

$$w''(x_i) = Aw(x_i + \alpha h) + Aw(x_i + \beta h) + Aw(x_i + \gamma h) \quad (7.1.15)$$

$$= (A + B + C)w(x_i) \quad (7.1.16)$$

$$+ (A\alpha + B\beta + C\gamma)hw'(x_i)$$

$$+ (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)\frac{h^2}{2}w''(x_i)$$

$$+ (A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3)\frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots$$

Želimo da takva linearna kombinacija najbolje aproksimira traženu drugu derivaciju u točki x_i . To znači da koeficijent uz $w''(x_i)$ treba biti jednak, koeficijent uz sve niže derivacije jednak nuli, a dio uz više derivacije jedinstavno odbacujemo kao pogrešku aproksimacije. Izjednačavanjem pripadnih linearnih kombinacija s 1 ili 0 slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ h(\alpha A + \beta B + \gamma C) &= 0 \\ \frac{h^2}{2}(\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C) &= 1 \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

koji možemo zapisati i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}. \quad (7.1.18)$$

Rješenjem sustava slijede koeficijenti linearne kombinacije

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \\ \frac{2}{h^2(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} \\ \frac{2}{h^2(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (7.1.19)$$

U općenitom slučaju kad tražimo koeficijente linearne kombinacije A_j , $j = 1, \dots, n + 1$ za aproksimaciju n -te derivacije pomoću vrijednosti funkcije u proizvoljnim točkama

$x_i + \alpha_j h$, $j = 1, \dots, n + 1$, sustav jednađbi u matričnom zapisu glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_j^k & \dots & \alpha_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_j^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_j^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{n!}{h^n} \end{bmatrix}. \quad (7.1.20)$$

7.2. Koordinatne funkcije kod metode konačnih razlika

Postupak proračuna rubne zadaće provodimo diskretizacijom područja definiranjem n čvorova na razmaku h i za svaki čvor napišemo jednađbu konačnih razlika, ovisno o stupnju derivacije diferencijalne jednađbe rubne zadaće. Izraz (7.1.1) je točan samo ako je progibna linija $w(x)$ parabola (tada su tangenta u x_i lokalnom tjemenu parabole i pripadna sekanta kroz $x_i - h$ i $x_i + h$ paralelne). Funkciju $w(x)$ na segmentu $[x_i - h, x_i + h]$ aproksimirali smo zapravo linearnom kombinacijom triju parabola φ_j , $j = 1, 2, 3$

$$w(x) \approx \bar{w}(x) = \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j, \quad (7.2.1)$$

pri čemu su parabole φ_j i pripadni koeficijenti linearne kombinacije a_j

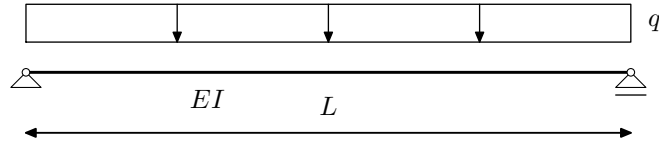
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 - \frac{x - x_i}{h} \right], & a_1 &= w(x_i - h), \\ \varphi_2 &= 1 - \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2, & a_2 &= w(x_i), \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 + \frac{x - x_i}{h} \right], & a_3 &= w(x_i + h). \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Koeficijenti linearne kombinacije a_j su zapravo vrijednosti progiba u čvorovima. Jednađbe konačnih razlika možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{K} \left[\sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j \right] (x_i) = q_z(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.2.3)$$

7.3. Numerički primjeri

Primjer 7.3.1. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*



Slika 7.3.1.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

Diferencijalna jednačnja progibne linije grede glasi

$$(E(x)I(x)w'')'' = q(x) . \quad (7.3.1.1)$$

Ako uzmemo u obzir da su poprečni presjek i modul elastičnosti konstantni uzduž grede, a opterećenje jednoliko distribuirano, jednačnja glasi

$$EIw^{(iv)} = q . \quad (7.3.1.2)$$

Zadana je greda na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 , \quad (7.3.1.3)$$

$$w(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0 . \quad (7.3.1.4)$$

Gredu (područje) podijelimo na k jednakih dijelova, $h = L/k$, a čvorove ($k + 1$ čvorova) podjele označimo $x_i = ih, i = 0, \dots, k$ (diskretizacija područja). Takva podjela ($x_i - x_{i-1} = h, \forall i \in \{1, \dots, n\}$) naziva se ekvidistantna podjela.

Vrijednosti funkcije progiba i potrebne derivacije u čvorovima možemo kraće zapisati kao

$$w(x_i) = w_i , w'(x_i) = w'_i \dots \dots \quad (7.3.1.5)$$

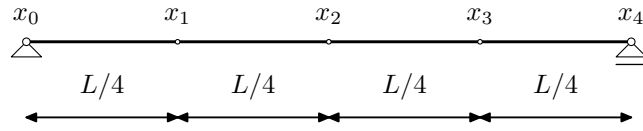
U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednačnja progiba. Jednačnju možemo zapisati za svaki čvor x_i

$$EIw_i^{(iv)} = q . \quad (7.3.1.6)$$

Aproksimacija potrebne četvrte derivacije u smislu metode konačnih razlika glasi

$$w_i^{iv} \approx \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] . \quad (7.3.1.7)$$

Ako za svaki čvor x_i raspíšemo pripadnu jednačnju dobivamo $k + 1$ jednačnji. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i , u jednačnjama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k + 5$ nepoznanica. Umjesto tih jednačnji uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednačnje u čvorovima x_0 i x_k uzmemo jednačnje za geometrijske rubne uvjete (zadane vrijednosti progiba) u ležajnim

Slika 7.3.1.2: Podjela grede na čvorove, $h = L/4$

čvorovima. Za proračun progiba u čvorovima x_{-1} i x_{k+1} izvan područja uzmemo jednadžbe za iznose momenata u ležajnim čvorovima.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$. Za svaki čvor raspisemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$EI \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q. \quad (7.3.1.8)$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.1.9)$$

U jednadžbama se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi i zadnji čvor uvodimo geometrijske rubne uvjete, $w_0 = 0$ i $w_4 = 0$. Za proračun vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove x_1 i x_3 iskoristit ćemo rubne uvjete $M_0 = 0$ i $M_4 = 0$. Momente proračunavamo prema izrazu

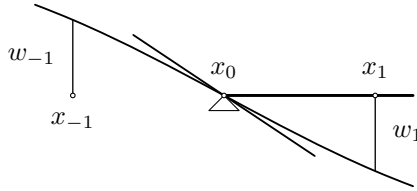
$$M(x) = -EIw''(x). \quad (7.3.1.10)$$

Za čvorove x_0 i x_4 slijede jednadžbe

$$M_0 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_{-1} - 2w_0 + w_1], \quad (7.3.1.11)$$

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5]. \quad (7.3.1.12)$$

U izrazima imamo još uvijek vrijednosti progiba u točkama izvan područja. Potrebno je izraziti vrijednosti progiba u tim točkama preko vrijednosti progiba u točkama unutar područja. U točkama u kojima je moment jednak nuli očito je i druga derivacija progiba jednaka nuli ($w'' = 0$) što znači da su to ujedno i točke infleksije. Zbog toga možemo funkciju progiba izvan područja aproksimirati kao antimetričnu funkciju progiba unutar područja, $w_{-i} = w_i$. To znači da vrijedi $w_{-1} = w_1$ i $w_5 = w_3$ i te jednakosti uvrstimo u



Slika 7.3.1.3: Aproksimacija vrijednosti izvan područja oko slobodno oslonjenog ležaja

jednadžbe za četvrtu derivaciju u točkama w_1 i w_3 , uz $w_0 = 0$ i $w_4 = 0$, pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 \\ &= 5w_1 - 4w_2 + w_3, \end{aligned} \quad (7.3.1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 \\ &= w_1 - 4w_2 + 5w_3. \end{aligned} \quad (7.3.1.14)$$

Sustav jednadžbi sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.1.15)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{512} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_2 = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.1.16)$$

Pogreška vrijednosti progiba u sredini raspona dobivenog metodom konačnih razlika uz podjelu grede na 4 dijela, 5 čvorova iznosi 5%,

$$w_{an.}(L/2) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.25}{384} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.1.17)$$

Momente u čvorovima grede proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EIw''(x), \quad (7.3.1.18)$$

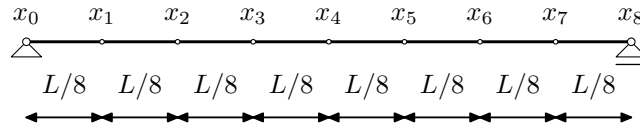
$$M_i = -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}]. \quad (7.3.1.19)$$

Na taj način momenti u sredini i četvrtini raspona iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (5 - 2 \cdot 7 + 5) = \frac{qL^2}{8}, \quad (7.3.1.20)$$

$$M_{L/4} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (0 - 2 \cdot 5 + 7) = \frac{3qL^2}{32}, \quad (7.3.1.21)$$

i jednaki su stvarnim momentima u tim točkama.

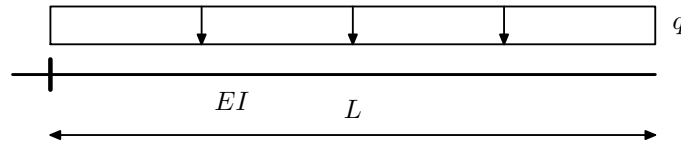
Slika 7.3.1.4: Podjela grede na čvorove, $h = L/8$

Ako podijelimo gredu na 8 dijelova, $h = L/8$, 9 čvorova $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$, rješenje u sredini raspona glasi

$$w_{fdms}(L/2) = \frac{27}{2048} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.0625}{384} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.1.22)$$

Pogreška iznosi 1.25%, što je četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela. Metoda konačnih razlika kvadratno konvergira, n puta manji korak povlači n^2 puta manju pogrešku, što u našem primjeru znači da dvostruko manji korak mreže čvorova povlači četiri puta manju pogrešku.

Primjer 7.3.2. *Metodom konačnih razlika odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*



Slika 7.3.2.1: Konzolna greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

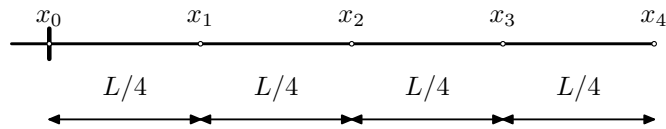
Konzolna greda je na jednom kraju upeta, a drugi kraj je potpuno slobodan, što znači da su progib i kut zaokreta na upetom ležaju jednaki nuli, a na slobodnom kraju moment i porečna sila jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad (7.3.2.1)$$

$$T(L) = -EIw'''(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \quad . \quad (7.3.2.2)$$

Ako za svaki čvor x_i raspišemo pripadnu jednadžbu dobivamo $k + 1$ jednadžbi. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i , u jednadžbama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k + 5$ nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe za čvor x_0 uzmemo geometrijski rubni uvjet $w_0 = 0$, a za proračun vrijednosti progiba w_{-1} iskoristit ćemo prirodni rubni uvjet $w'_0 = 0$. Za proračun progiba w_{k+1} i w_{k+2} izvan područja iskoristit ćemo jednadžbe za moment i poprečnu silu u čvoru na slobodnom kraju konzolne grede.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$. Za svaki čvor raspišemo pripadnu jednadžbu u smislu



metode konačnih razlika

$$\frac{EI}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q, \quad (7.3.2.3)$$

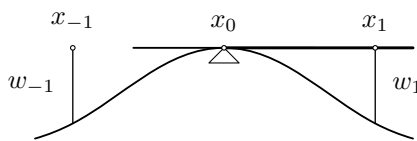
koju koristimo u obliku

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{qh^4}{EI}. \quad (7.3.2.4)$$

Dobivamo sustav jednažbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.2.5)$$

U jednažbi se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednažbe za prvi čvor x_0 uvodimo geometrijski rubni uvjet, $w_0 = 0$. Za proračun potrebnih vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednažbama za čvorove x_1 , x_3 i x_4 iskoristit ćemo rubne uvjete $w'_0 = 0$, $M_4 = 0$ i $T_4 = 0$. Kut zaokreta tangente na progibnu liniju u čvoru x_0 jednak je nuli. Progibnu funkciju izvan područja možemo aproksimirati kao simetričnu progibnoj funkciji unutar područja, $w_{-1} = w_1$. To znači da vrijedi $w_{-1} = w_1$ i tu jednakosti uvrstimo u jednažbe za četvrtu



derivaciju u točki w_1 , uz $w_0 = 0$, pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 \\ &= 7w_1 - 4w_2 + w_3. \end{aligned} \quad (7.3.2.6)$$

Momente proračunavamo prema standardnom izrazu

$$M(x) = -EIw''(x), \quad (7.3.2.7)$$

pa za moment u čvoru x_4 slijedi jednačica

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5] , \quad (7.3.2.8)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_5 ,

$$w_5 = 2w_4 - w_3 . \quad (7.3.2.9)$$

Poprečne sile proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EI w'''(x) , \quad (7.3.2.10)$$

pa za poprečnu silu u čvoru x_4 slijedi jednačica

$$T_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^3} [w_2 - 2w_3 + 2w_5 - w_6] , \quad (7.3.2.11)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_6 ,

$$\begin{aligned} w_6 &= w_2 - 2w_3 + 2w_5 \\ &= w_2 - 2w_3 + 2(2w_4 - w_3) \\ &= w_2 - 4w_3 + 4w_4 . \end{aligned} \quad (7.3.2.12)$$

Uvrštavanjem jednačice (7.3.2.9) u jednačicu za četvrtu derivaciju u točki w_3 slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 \\ &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + (2w_4 - w_3) \\ &= w_1 - 4w_2 + 5w_3 - 2w_4 . \end{aligned} \quad (7.3.2.13)$$

Uvrštavanjem jednačice (7.3.2.12) i (7.3.2.9) u jednačicu za četvrtu derivaciju u točki w_4 slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_6 \\ &= w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4(2w_4 - w_3) + (w_2 - 4w_3 + 4w_4) \\ &= 2w_2 - 4w_3 + 2w_4 . \end{aligned} \quad (7.3.2.14)$$

Jednačica sustava sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (7.3.2.15)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima grede

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI} , & w_2 &= \frac{25}{512} \frac{qL^4}{EI} , \\ w_3 &= \frac{23}{256} \frac{qL^4}{EI} , & w_4 &= \frac{17}{128} \frac{qL^4}{EI} . \end{aligned} \quad (7.3.2.16)$$

Pogreška vrijednosti progiba na rubu konzole dobivenog metodom konačnih razlika uz podjelu grede na 4 dijela, 5 čvorova iznosi 6.25%,

$$w_{an.}(L) = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{17}{128} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.0625}{8} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.2.17)$$

Momente u čvorovima proračunavamo prema izrazu

$$\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x), \\ M_i &= -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}]. \end{aligned} \quad (7.3.2.18)$$

Na taj način moment na upetom ležaju iznosi

$$M_0 = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{64EI} \cdot 2 = \frac{qL^2}{2}, \quad (7.3.2.19)$$

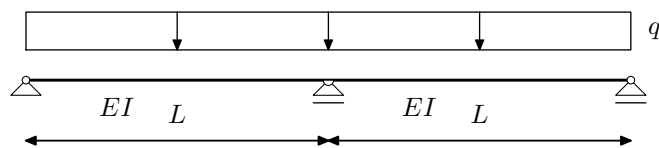
i jednak je stvarnom momentu na upetom ležaju.

Ako podijelimo gredu na 8 dijelova, $h = L/8$, 9 čvorova $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$, vrijednost progiba na kraju konzole grede iznosi

$$w_{fdm_8}(L) = \frac{65}{512} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.015625}{8} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.2.20)$$

Pogreška iznosi 1.5625%, što je opet četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela čime smo i u ovom primjeru pokazali kvadratnu konvergenciju niza rješenja.

Primjer 7.3.3. Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini raspona kontinuirane grede preko dva jednaka raspona duljine L , konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q duž oba raspona



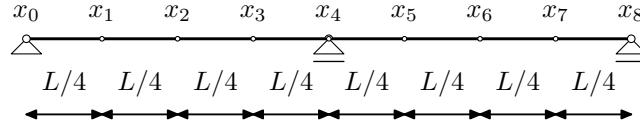
Slika 7.3.3.1: Kontinuirana greda preko dva raspona opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

Zadana greda je na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. U srednjoj točki grede, $x = L$ definiran je klizni ležaj koji ne dozvoljava progib. Rubni uvjeti za krajeve i za srednji klizni ležaj glase

$$w(0) = 0, \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0, \quad (7.3.3.1)$$

$$w(L) = 0, \quad (7.3.3.2)$$

$$w(2L) = 0, \quad M(2L) = -EIw''(2L) = 0 \Rightarrow w''(2L) = 0. \quad (7.3.3.3)$$

Slika 7.3.3.2: Podjela grede na čvorove, $h = L/4$

U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednadžba progiba. Jednadžbu možemo zapisati za svaki čvor x_i

$$EIw_i^{(iv)} = q. \quad (7.3.3.4)$$

Gredu možemo podijeliti na osam dijelova jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$. Za svaki čvor raspíšemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$\frac{EI}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q. \quad (7.3.3.5)$$

Na srednjem ležaju postoji reakcija. Reakcija srednjeg ležaja daje skok u dijagramu poprečnih sila. Poprečna sila neposredno lijevo od presjeka i poprečna sila neposredno desno od presjeka nisu jednake. To znači da u točki $x = L$ nije definirana treća derivacija. Posljedično ne postoji niti četvrta derivacija. Umjesto jednadžbe za četvrtu derivaciju u $x = L$ koristimo zadani rubni uvjet $w_L = 0$. Uzimanjem definiranih jednadžbi za četvrtu derivaciju i uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.3.6)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$\begin{aligned} w_1 &= w_7 = \frac{15}{2816} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_2 &= w_6 = \frac{37}{5632} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_3 &= w_5 = \frac{5}{1408} \frac{qL^4}{EI}. \end{aligned} \quad (7.3.3.7)$$

Pogreška vrijednosti progiba u sredini raspona iznosi 26.1%,

$$w_{an.}(L) = \frac{1}{192} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{37}{5632} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.261}{192} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.3.8)$$

Momenti u sredini raspona i na srednjem ležaju iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{5632EI} (30 - 2 \cdot 37 + 20) = \frac{3}{44} qL^2, \quad (7.3.3.9)$$

$$M_L = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{1408EI} (5 - 2 \cdot 0 + 5) = -\frac{5}{44} qL^2, \quad (7.3.3.10)$$

pri čemu su odstupanja od analitičkih vrijednosti

$$\Delta_{L/2} = \Delta_L = 9.1\% . \quad (7.3.3.11)$$

Podjelom grede na 16 jednakih dijelova, $h = L/8$, progib u sredini raspona iznosi

$$w(L/2) = \frac{489}{88064} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.066}{192} \frac{qL^4}{EI} , \Delta = 6.6\% , \quad (7.3.3.12)$$

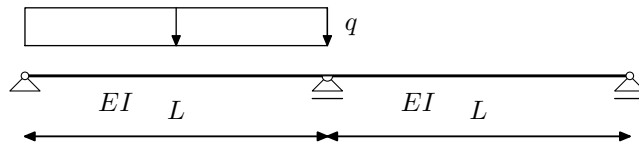
moment na srednjem ležaju iznosi

$$M(L) = -\frac{21}{172} qL^2 = -\frac{0.977}{8} qL^2 , \Delta_L = 2.3\% , \quad (7.3.3.13)$$

a moment u sredini polja iznosi

$$M(L/2) = \frac{143}{2236} qL^2 = \frac{1.023}{16} qL^2 , \Delta_{L/2} = 2.3\% . \quad (7.3.3.14)$$

Primjer 7.3.4. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini raspona kontinuirane grede preko dva jednaka raspona duljine L , konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q duž jednog raspona*



Slika 7.3.4.1: Kontinuirana greda preko dva raspona opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem duž jednog raspona

U odnosu na prethodni primjer, razlika je jedino u opterećenju. Matrica sustava uz istu podjelu bit će jednaka. Vektor opterećenja se razlikuje u dijelu za drugi raspon koji je u ovom primjeru neopterećen. Sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (7.3.4.1)$$

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 7.8%,

$$w_{an.}(L) = \frac{7}{768} \frac{qL^4}{EI} , w_{fdm_4}(L/2) = \frac{57}{5632} \frac{qL^4}{EI} = \frac{7.773}{768} \frac{qL^4}{EI} . \quad (7.3.4.2)$$

Moment na srednjem ležaju iznosi

$$M_L = -\frac{5}{88}qL^2, = -\frac{0.909}{16}qL^2, \Delta_L = 9.1\%. \quad (7.3.4.3)$$

Podjelom grede na 16 jednakih dijelova, $h = L/8$, progib u sredini raspona iznosi

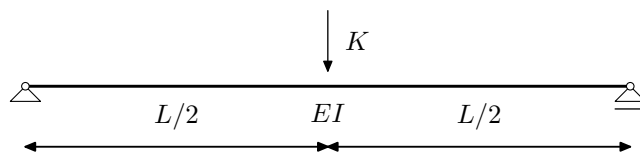
$$w(L/2) = \frac{825}{88064} \frac{qL^4}{EI} = \frac{7.195}{768} \frac{qL^4}{EI}, \Delta = 2.8\%, \quad (7.3.4.4)$$

a moment na srednjem ležaju iznosi

$$M(L) = -\frac{21}{344}qL^2 = -\frac{0.977}{16}qL^2, \Delta_L = 2.3\%. \quad (7.3.4.5)$$

Ovaj primjer je znakovit jer ukazuje na određeni nedostatak postupka proračuna metodom konačnih razlika. Ako promatramo ovaj isti primjer uz zadanu krutost neopterećenog raspona nEI , dobiveno numeričko rješenje bit će uvijek jednako neovisno o koeficijentu povećanja krutosti neopterećenog raspona. Na neopterećenom dijelu desna strana jednadžbe uvijek će biti jednaka nuli i nigdje neće biti iskazana promjena krutosti tog dijela. Variranje koeficijenta povećanja krutosti n ne utječe na prikazano numeričko rješenje što jasno ne odgovara zadanoj rubnoj zadaći.

Primjer 7.3.5. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E , opterećene koncentriranom silom K u sredini raspona*



Slika 7.3.5.1: Slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Zadana je konstrukcija jednaka kao u prvom primjeru uz jedinu razliku u zadanom opterećenju. U ovom primjeru zadana je koncentrirana sila u sredini raspona. Diferencijalna jednadžba progibne linije grede uz konstantni poprečni presjek i modul elastičnosti glasi

$$EIw^{(iv)} = q. \quad (7.3.5.1)$$

Rubni uvjeti su

$$w(0) = 0, w''(0) = 0, w(L) = 0, w''(L) = 0. \quad (7.3.5.2)$$

U svim točkama grede opterećenje q jednako je nuli. U sredini raspona zadana je koncentrirana sila K . Koncentrirana sila ne može biti jednostavno stavljena na desnu stranu jednadžbe jer ne odgovara mjerna jedinica prema definiranoj diferencijalnoj jednadžbi. Postoje varijante zamjene koncentrirane sile distribuiranim opterećenjem čime mjerna jedinica desne strane jednadžbe odgovara definiranoj diferencijalnoj jednadžbi. Takvi postupci ne odgovaraju fizikalnom smislu zadane rubne zadaće u točki djelovanja koncentrirane sile. U točki djelovanja koncentrirane sile razlikuju se poprečne sile lijevo i

desno od presjeka. Razlika je jednaka iznosu zadane sile K . To znači da u toj točki treća derivacija progibne funkcije nije neprekidna funkcija. Umjesto uobičajne jednadžbe za četvrtu derivaciju, u točki djelovanja koncentrirane sile potrebno je postaviti jednadžbu koja odgovara fizikalnoj pojavi u toj točki, potrebno je postaviti jednadžbu da je razlika poprečne sile lijevo i desno od presjeka jednaka zadanoj sili K . Zbog toga moramo posebno definirati izraze za proračun poprečne sile lijevo i desno od točke djelovanja zadane sile. Poprečnu silu proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EIw'''(x) . \quad (7.3.5.3)$$

Potrebne poprečne sile sa svake strane od točke u kojoj djeluje zada sila K , x_K , definiramo preko pripadnih derivacija,

$$T^-(x) = -EIw'''(x)^- , , T^+(x) = -EIw'''(x)^+ , \quad (7.3.5.4)$$

pri čemu $-$ predstavlja vrijednost neposredno lijevo od promatrane točke, a $+$ predstavlja vrijednost neposredno desno od promatrane točke. Potrebne treće derivacije sa svake strane promatrane točke izrazit ćemo preko konačnih razlika, ali isključivo pomoću vrijednosti funkcija s pripadne strane promatrane točke. Na taj način aproksimacije traženih trećih derivacija glase

$$w'''(x)^- = \frac{w_i - 3w_{i-1} + 3w_{i-2} - w_{i-3}}{h^3} , \quad (7.3.5.5)$$

$$w'''(x)^+ = \frac{-w_i + 3w_{i+1} - 3w_{i+2} + w_{i+3}}{h^3} . \quad (7.3.5.6)$$

Razliku poprečnih sila u promatranoj točki djelovanja sile K izrazimo jednadžbom

$$\Delta T_i = [-EIw'''(x)^-] - [-EIw'''(x)^+] = K , \quad (7.3.5.7)$$

što u raspisanom obliku daje

$$\begin{aligned} w_{i-3} - 3w_{i-2} + 3w_{i+1} - 2w_i \\ + 3w_{i-1} - 3w_{i-2} + w_{i-3} = \frac{Kh^3}{EI} . \end{aligned} \quad (7.3.5.8)$$

Takvom jednadžbom zapravo mijenjamo uobičajenu jednadžbu za aproksimaciju četvrte derivacije u točki u kojoj je zadana koncentrirana sila.

Ako gredu podijelimo na osam jednakih dijelova sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{KL^3}{512EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (7.3.5.9)$$

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 3.125%,

$$w_{an.}(L) = \frac{1}{48} \frac{KL^3}{EI}, \quad w_{fdms}(L/2) = \frac{11}{512} \frac{KL^3}{EI} = \frac{1.03125}{48} \frac{KL^3}{EI}. \quad (7.3.5.10)$$

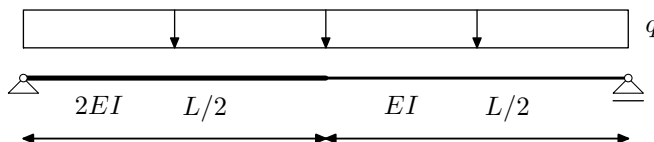
Povećanjem broja čvorova možemo pokazati pripadnu konvergenciju niza numeričkih rješenja, Tablica 1. Prema nizu numeričkih rješenja prikazanom u tablici 1 očita je

Tablica 1: Progib u sredini raspona

m	$w_{\frac{L}{2}} / \left(\frac{KL^3}{EI} \right)$	error %
9	$\frac{11}{512} = \frac{1.03125}{48}$	3.125%
17	$\frac{43}{2048} = \frac{1.00781}{48}$	0.78125%
33	$\frac{171}{8192} = \frac{1.00195}{48}$	0.1953125%
65	$\frac{683}{32768} = \frac{1.00048}{48}$	0.048828%
an.	$\frac{1}{48}$	

kvadratna konvergencija.

Primjer 7.3.6. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini slobodno oslonjene grede raspona L konstantnog modula elastičnosti E , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q uz promjenu vrijednosti momenta inercije poprečnog presjeka u sredini raspona*



Slika 7.3.6.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem uz promjenu vrijednosti momenta inercije poprečnog presjeka u sredini raspona

Zadana je konstrukcija s momentom inercije poprečnog presjeka definiranim funkcijom

$$EI(x) = \begin{cases} 2EI & x \in [0, L/2] \\ EI & x \in (L/2, L] \end{cases}. \quad (7.3.6.1)$$

Prema definiranoj diferencijalnoj jednadžbi rubne zadaće savijanja grede, gredu zapravo možemo promatrati kao gredu konstantne krutosti, ali s promjenom u opterećenju. Možemo opterećenje podijeliti s pripadnom krutosti i definirati novo opterećenje $\bar{q}(x) = \frac{q(x)}{EI(x)}$,

$$w'''' = \bar{q}(x) = \begin{cases} \frac{q}{2EI} & x \in [0, L/2) \\ \frac{q}{EI} & x \in (L/2, L] \end{cases}. \quad (7.3.6.2)$$

Fizikalno je jasno da u točki promjene krutosti druga derivacije progibne funkcije nije neprekidna. To znači da ne možemo definirati četvrtu derivaciju progibne funkcije u toj točki. Pokušat ćemo taj prekid, skok druge derivacije izgladiti, odnosno uzet ćemo srednju vrijednu krutosti lijevo i desno od te točke,

$$\bar{q}(L/2) = \frac{\frac{q}{2EI} + \frac{q}{EI}}{2} = \frac{3}{4} \frac{q}{EI}.$$

Ako gredu podijelimo na osam jednakih dijelova, uz uzimanje u obzir rubnih uvjeta, sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.3.6.3)$$

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 1.25%,

$$w_{an.}(L) = \frac{5}{512} \frac{KL^3}{EI}, \quad w_{fdms}(L/2) = \frac{81}{8192} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.0625}{512} \frac{qL^4}{EI}. \quad (7.3.6.4)$$

Povećanjem broja čvorova možemo pokazati pripadnu konvergenciju niza numeričkih rješenja, Tablica 2.

Prema nizu numeričkih rješenja prikazanom u tablici 2 očita je kvadratna konvergencija.

Tablica 2: Progib u sredini raspona

m	$w_{\frac{L}{2}} / \left(\frac{qL^4}{EI} \right)$	error %
9	$\frac{81}{8192} = \frac{5.0625}{512}$	1.25%
17	$\frac{321}{32768} = \frac{5.015625}{512}$	0.3125%
33	$\frac{1281}{131072} = \frac{5.00391}{512}$	0.078125%
65	$\frac{5121}{524288} = \frac{5.00098}{512}$	0.019531%
an.	$\frac{5}{512}$	

8. Uvod u metodu konačnih elemenata

8.1. Motivacija

Mnoge se fizikalne pojave u prirodi mogu izraziti pripadnim matematičkim jednadžbama i rubnim uvjetima. Pripadne su jednadžbe najčešće u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (PDJ), običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) ili integralnih jednadžbi (IJ). Matematički, metoda konačnih elemenata numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih diferencijalnih jednadžbi.

Inženjerski, metoda konačnih elemenata (MKE) numerička je metoda za rješavanje skupa povezanih jednadžbi dobivenih aproksimacijom nepoznatih varijabli kontinuiranog područja skupom nepoznatih varijabli u konačnom broju diskretnih točaka (čvorova) tog polja. U proračunu konstrukcija, povezane jednadžbe su jednadžbe ravnoteže, a skup varijabli su pomaci čvorova. Postupak rješavanja MKE svodi se na kompletnu transformaciju diferencijalnih jednadžbi (stacionarne zadaće) ili transformaciju PDJ u ekvivalentne ODJ pogodne za rješavanje metodom konačnih elemenata.

Mnoge inženjerske zadaće imaju vrlo složenu geometriju i rubne uvjete, što dovodi do nemogućnosti dobivanja analitičkih (zatvorenih) rješenja polaznih jednadžbi. Analitičko rješenje rubnih zadaća u zatvorenom obliku moguće je iskazati samo za pojedine posebne slučajeve s nizom pojednostavljenja u odnosu na izvornu zadaću. Zbog toga su osmišljene mnoge numeričke metode, (MKE, engl. FEM - finite element method), metoda konačnih traka (MKT, engl. FSM - finite strip method), metoda konačnih razlika (MKR, engl. FDM - finite difference method), metoda konačnih volumena (MKV, engl. FVM - finite volume method), metoda rubnih elemenata (MRE, engl. BEM - boundary element method), hibridna RE-KE metoda, za dobivanje uporabom računala približnog rješenja polazne zadaće koje je zadovoljavajuće točnosti. Numeričke metode daju rješenje u obliku skupa rješenja jednadžbi koje matematički opisuju fizikalnu pojavu u pojedinim točkama područja nad kojim je postavljena zadaća. Polazna jednadžba ne rješava se izravno nego se tijekom procedure rješavanja svodi na konačni sustav algebarskih jednadžbi. Rješenje sustava jednadžbi približno je rješenje polazne jednadžbe u konačnom broju točaka.

Između svih navedenih metoda, MKE je najraspostranjenija, najprimijenjenija, ali i najprimjerenija metoda koja je i sastavni dio većine komercijalnih programskih paketa u području inženjerske analize. S obzirom da MKE može biti prilagođena zadaćama velike složenosti i neuobičajene geometrije područja zadaće, posebno je značajno i korisno sredstvo u rješavanju kritičnih zadaća proračuna konstrukcija, provođenja topline ili mehanike fluida. Dostupnost računala omogućuje inženjerima svakodnevno rješavanje inženjerskih zadaća metodom konačnih elemenata. MKE aktualno je najdominantnija metoda za numerički proračun rubnih zadaća nastalih kao matematički model fizikalnih pojava. Razvoj računalnih procesora omogućio je rješavanje velikih sustava jednadžbi u kratkom proračunskom vremenu. Na taj način suvremeni proračun daje mogućnost optimalnog dimenzioniranja i projektiranja konstrukcija. Proračun konstrukcije zapravo je pokušaj proračuna teoretske konstrukcije što sličnije stvarnoj, izvedenoj konstrukciji. Metoda konačnih elemenata i suvremeni proračunski programski paketi značajno olakšavaju inženjerski posao, ali uz nužnu ispravnu procjenu realnosti odabranog numeričkog modela i kvalitete dobivenih rezultata proračuna.

8.2. Razvoj metode konačnih elemenata

Razvoj proračuna konstrukcija prvenstveno može biti promatran kroz prizmu razvoja proračuna greda i okvira. U početku proračuni su temeljeni na **Metodi sila** pri čemu su nepoznanice bile nepoznate sile u oslobođenim vezama konstrukcije. Takav pristup nije mogao mnogo pridonijeti razvoju proračuna zbog načina provedbe postupka. Za svaku novu konstrukciju potrebno je provesti niz proračunskih procedura koje su kod složenijih konstrukcije zahtijevale značajan opseg proračunskog posla.

Iskorak u proračunu konstrukcija dogodio se definiranjem **metode pomaka** ili **metode deformacija**. Nepoznanice u postupku proračuna nepoznati su pomaci (translatorni pomaci u smjeru koordinatnih osi i kutevi zaokreta) definiranih čvorova konstrukcije. Metoda pomaka zapravo je prethodnica metodi konačnih elemenata. To se posebno odražava kod proračuna greda i okvira pri čemu metoda pomaka i metoda konačnih elemenata vode do istih sustava jednadžbi. Matrična formulacija jednadžbi dodatno doprinosi razvoju numeričkih proračunskih metoda. Istovremeno dolazi do izuma prvih računala i pripadnih kodova za proračunske postupke. Prednost i primjenjivost metode pomaka pritom dolazi do punog izražaja. Takvo okruženje posebno je pogodno za razvoj numeričkih postupaka s naglaskom na metodu konačnih elemenata. Razvojem računalnih procesora veliki broj jednadžbi u sustavu više ne predstavlja nikakav računski problem. Potpunim preuzimanjem numeričkih proračunskih postupaka metoda konačnih elemenata nametnula se kao najkvalitetniji aparat za proračun konstrukcija. Varijacijska formulacija, princip virtualnog rada pojavili su se kao podloga za postavljanje teorijskih temelja za metodu konačnih elemenata. Iz tih osnovnih teorijskih postavki proizlazi razvoj matematičke formulacije metode konačnih elemenata. Postavljeni su nužni teoremi kojima je dokazana egzistencija rješenja, a posebno jedinstvenost rješenja metodom konačnih elemenata i pripadne ocjene pogreške proračuna za rubne zadatke postavljene za razne fizikalne pojave (savijanje grede, savijanje ploče, proračun zidova, ...).

U numeričkom smislu metoda konačnih elemenata izravno je poboljšanje **Ritzove metode**. Ritzova metoda je zbog zahtjeva prema koordinatnim funkcijama bila relativno ograničena. Na glatkim rubnim zadacima rješenja su bila prihvatljiva, ali već kod malo zahtjevnijih zadataka (koncentrirane sile, otvori, ...), za dobivanje kvalitetnih rješenja potrebno je uložiti značajan trud u dobar izbor koordinatnih funkcija. Problem je riješen metodom konačnih elemenata. Područje je podijeljeno na niz dijelova, elemenata i svaki element je promatran kao zasebna rubna zadatak koju rješavamo Ritzovom metodom. Rubni uvjeti su ujedno bile i nepoznanice na krajevima elemenata. Koordinatne funkcije su odabrane tako da su te nepoznanice na krajevima elemenata koeficijenti linearne kombinacije koordinatnih funkcija. Zbog uvjeta kompatibilnosti i uklapanjem svih elemenata u jednu cjelinu proizlazi sustav jednadžbi s nepoznatim pomacima u točkama između elemenata (čvorovima).

8.3. Proračun konstrukcije pomoću MKE

Osnovni korak proračuna metodom konačnih elemenata **diskretizacija** je područja. Konstrukcija je diskretizirana podjelom na mrežu konačnih elemenata. U odnosu na stvarno ponašanje konstrukcije imamo dvije pogreške, **pogrešku modela** i **pogrešku diskretizacije**. Pogrešku modela možemo smanjiti boljim modelom konstrukcije koji bude kvalitetnije opisivao stvarno ponašanje konstrukcije. Pogrešku diskretizacije možemo smanjiti kvalitet-

nijom, finijom mrežom konačnih elemenata ili povećanjem stupnjeva slobode (polinomi višeg stupnja) konačnih elemenata za opis polja pomaka.

Jednodimenzionalna mreža K^h otvorenog skupa Ω , familija je dužina (K_i) , takvih da je $\forall K_i, K_j \in K^h$ zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \overline{\Omega}. \quad (8.3.2)$$

To znači da u jednodimenzionalnom slučaju (npr. greda) mreža konačnih elemenata mora pokriti cijelu gredu, a da dva elementa mogu imati zajednički čvor, ili nemaju nikakvih zajedničkih točaka, ili je to jedan te isti element. Lagrangeov konačni element je trojka (K, Σ_K, P) , gdje je K dužina, Σ_K skup čvorova na K i P prostor polinoma definiranih na K .

Dvodimenzionalna mreža K^h otvorenog skupa Ω , familija je trokuta ili četverokuta (K_i) , takvih da je $\forall K_i, K_j \in K^h$ zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednička stranica} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \overline{\Omega}. \quad (8.3.4)$$

Za dvodimenzionalne elemente to znači da dva elementa imaju ili zajednički čvor, ili zajedničku stranicu, ili nemaju nijednu zajedničku točku ili je to jedan te isti element. Kod mreže dvodimenzionalnih konačnih elemenata sa složenim oblikom ruba (npr. zakrivljeni rub), mrežom konačnih elemenata potpuno je pokriveno područje aproksimirano poligonalnim rubom između čvorova definiranih na rubu područja. Lagrangeov konačni element je trojka (K, Σ_K, P) , gdje je K trokut ili četverokut, Σ_K skup čvorova na K i P prostor polinoma definiranih na K .

Trodimenzionalna mreža K^h otvorenog skupa Ω , familija je tetraedara ili heksaedara (K_i) , takvih da je $\forall K_i, K_j \in K^h$ zadovoljeno samo jedno od sljedećih svojstava:

$$\begin{aligned} K_i &= K_j \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednička stranica} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički brid} \\ K_i \cap K_j &\text{ je zajednički čvor} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

i vrijedi

$$\cup_{K_i \in K^h} K_i = \overline{\Omega}. \quad (8.3.6)$$

Za trodimenzionalne elemente to znači da dva elementa imaju ili zajednički čvor, ili zajednički brid, ili zajedničku stranicu, ili nemaju nijednu zajedničku točku ili je to jedan te isti element. Lagrangeov konačni element je trojka (K, Σ_K, P) , gdje je K tetraedar ili heksedar, Σ_K skup čvorova na K i P prostor polinoma definiranih na K .

Uporabom računala dolazi i do moguće numeričke pogreške. Numerička pogreška je uobičajeno mala, ovisi o mogućnosti spremanja numeričkih veličina u memoriju (spremanje određenog broja značajnih znamenki). U posebnim slučajevima, npr. velike razlike u krutostima pojedinih dijelova konstrukcije, numerička pogreška može imati i veći utjecaj. Numerička i diskretizacijska pogreška su zapravo računalna pogreška.

8.4. Izbor konačnog elementa

8.4.1. Klasa nepoznatog polja pomaka, uvjet integrabilnosti

Rješenje metodom konačnih elemenata mora zadovoljiti određene uvjete za konvergenciju prema analitičkom rješenju pripadne rubne zadaće. Zbog fizikalne prirode rubnih zadaća, osnovni uvjet za izbor polja pomaka je neprekidnost duž konačnog elementa. Polinomijalna aproksimacija nepoznatog polja izravno ispunjava potreban uvjet neprekidnosti. Polinomijalna aproksimacija mora imati derivaciju reda koji se javlja u podintegralnoj funkciji za dobivanje elementarne matrice krutosti.

Podintegralna funkcija mora imati primitivnu funkciju. Za integrabilnost podintegralne funkcije potrebno je definirati vezu s redom derivacije u formulaciji rubne zadaće primjenom principa virtualnog rada. Ako se u principu virtualnog rada za pripadnu rubnu zadaću javlja m -ta derivacija polja pomaka, polje pomaka mora imati neprekidnu derivaciju reda $(m-1)$, polje pomaka mora biti klase C^{m-1} na području na kojem je definirana rubna zadaća. Najjednostavniji primjeri su uzdužno i poprečno opterećena greda. Za uzdužno opterećenu gredu u principu virtualnog rada javlja se prva derivacija polja pomaka što znači da je nužno da je na elementu aproksimacija polja pomaka klase C^0 , da je aproksimacija polja pomaka neprekidna na elementu što je izravna posljedica polinomijalne aproksimacije. Za poprečno opterećene grede u principu virtualnog rada javlja se druga derivacija što znači da je nužno da aproksimacija polja pomaka ima neprekidnu prvu derivaciju na zadanom području, odnosno da je klase C^1 .

8.4.2. Uvjet krutog tijela i uvjet konstantne deformacije

Polje pomaka ne može dozvoliti deformaciju unutar elementa nastalu zbog pomaka čvorova kao pomaka krutog tijela. To je jednostavni fizikalni uvjet, zapravo znači da ako fizički premjestamo konstrukciju kao cjelinu nema naprezanja i deformacija unutar same konstrukcije. Ako promatramo najjednostavniji element s dva čvora koji imaju jednak pomak onda i svi pomaci unutar elementa imaju istu tu vrijednost pomaka. Matematički je taj uvjet zadovoljen ako je zbroj vrijednosti funkcija oblika, N_i , u svakoj točki unutar elementa (e) jednak 1, $\sum_i N_i(x) = 1, \forall x \in (e)$.

Polje pomaka mora biti takvo da su pomaci čvorova kompatibilni s poljem konstantnih deformacija. Smanjivanjem dimenzije elementa deformacije bliske konstantnim postaju konstantne. Uvjet konstantne deformacije zapravo je poseban slučaj uvjeta krutog tijela kad je polje deformacija jednako nuli. Ispunjavanje ova dva uvjeta daje kvalitnije i konvergentno rješenje.

8.4.3. Uvjet kompatibilnosti, uvjet potpunosti i geometrijska invarijantnost

Konačni elementi trebaju biti kompatibilni. To znači da polje pomaka klase C^m mora imati neprekidnu m -tu derivaciju na dodiru elemenata (u zajedničkom čvoru u 1D, na

zajedničkoj stranici u 2D). Takve elemente nazivamo **konformni elementi**. Ovaj uvjet načelno je zadovoljen kad je polje pomaka definirano polinomima s jediničnom vrijednosti u čvorovima konačnih elemenata. U posebnim slučajevima (neki elementi za ploče) to nije dovoljno za kompatibilnost. Elemente koji ne ispunjavaju uvjet kompatibilnosti nazivamo **nekonformni elementi**. Rješenja dobivena uporabom nekonformnih elemenata konvergiraju ako elementi zadovoljavaju **patch-test**. To znači da vrijednosti na rubu konvergiraju ispunjenju uvjeta ako progustimo mrežu konačnih elemenata.

Rješenje metodom konačnih elemenata zapravo je jednako konačnom dijelu Taylorovog reda analitičkog rješenja. Polinomijalna aproksimacija rješenja polinomom stupnja m može dati analitičko rješenje istog stupnja samo ako polinomijalna aproksimacija sadrži sve članove polinoma m -tog stupnja. U tom slučaju rješenje konvergira redom $(m + 1)$. Nepotpuni polinomi uobičajena su pojava kod višedimenzionalnih zadaća zbog manje nepoznanica. Poželjno je polinomijalnu aproksimaciju provesti potpunim polinomima, a ako se provodi s nepotpunim polinomima treba pokušati da budu što je moguće potpuniji. Korištenje nepotpunih polinoma ne isključuje konvergenciju rješenja.

Za konačne elemente poželjno je, ali ne i nužno da budu geometrijski invarijantni. To znači da su svi stupnjevi slobode izraženi istim polinomima i ne ovise o promjeni koordinatnog sustava. Za geometrijsku invarijantnost dovoljno je uzimati kompletne interpolacijske polinome.

8.4.4. Konačni elementi višeg reda ili više konačnih elemenata manjeg reda

Konačni element mora omogućiti dostizanje rješenja koje odgovara početnoj fizikalnoj zadaći. Izbor elementa višeg reda ili većeg broja elemenata manjeg reda standardna je dvojba na početku rješavanja zadaće. Rješenje elementima višeg reda imaju veći red konvergencije, ali i veći broj računskih operacija za dobivanje sustava jednadžbi. Elementi višeg reda s većim brojem nepoznanica u čvorovima zahtijevaju i strože uvjete za neprekinutost derivacije u čvorovima što na mjestu koncentriranih sila ili promjena krutosti ne mora uvijek niti biti u prirodi fizikalne zadaće koju rješavamo (npr. kvintički element za poprečno opterećenu gredu kao rješenje daje progib s neprekinutom drugom derivacijom u čvorovima što u točkama u kojima je zadana promjena krutosti grede na savijanje uopće nije fizikalno točno). Načelni parametar za odluku o izboru između elemenata može biti odnos točnosti i broja nepoznanica po čvoru. Problem je jer kod rješavanja rubnih zadaća ne znamo unaprijed rješenje, pa ne možemo uvijek eksplicitno izraziti točnost. Razvojem računala čime proračun većih sustava linearnih jednadžbi ne predstavlja problem, može se uvijek početna rješenja dobiti s većim brojem elemenata manjeg reda. U dvojbi između dva elementa različitog reda, načelno treba uzeti jednostavniji konačni element što je zapravo konačni element manjeg reda.

8.5. Greška rješenja metodom konačnih elemenata

8.5.1. Greška diskretizacije

Greška diskretizacije izravna je posljedica uzimanja konačnog dijela Taylorovog reda. Greška je reda jednakog potenciji prvog izostavljenog člana Taylorovog reda. Za jednodimenzionalnu zadaću uz polinomijalnu aproksimaciju polinomom stupnja m ograda greške iznosi

$$err = CL^{(e)m+1} M_{(m+1),(e)} , \quad (8.5.1)$$

pri čemu je $L^{(e)}$ duljina elementa (e), $M_{(m+1),(e)}$ maksimalna vrijednost $m+1$ -ve derivacije na elementu (e), a C konstanta ovisna o tipu elementa. Iz izraza za grešku, (8.5.1) očito je da grešku možemo smanjiti profinjenjem mreže elemenata ili povećanjem stupnja polinoma aproksimacije.

8.5.2. Greška aproksimacije geometrije

Takva greška se javlja uglavnom kod aproksimacije zakrivljenih rubova poligonalnim rubom. Mreža konačnih elemenata i definirani tipovi elemenata izravno definiraju aproksimaciju ruba područja koji je ujedno i rub elementa. U slučajevima kad se taj aproksimirani rub ne poklapa sa stvarnom geometrijom ruba područja zapravo dobivamo rješenje za približno područje. Očito da će uzimanjem više čvorova na rubu aproksimacija biti kvalitetnija. Takva greška se ne javlja kod linijskih konstrukcija i ravninskih konstrukcija s pravilnim (poligonalnim) rubovima zbog poklapanja ruba elemenata s rubom zadanog područja.

8.5.3. Greške povezane s definiranim zakonima ponašanja

Takve su greške posljedica pogrešno definiranih svojstava materijala. Proračunske jednadžbe definirane su za linearno elastično ponašanje materijala, a stvarno ponašanje materijala pod djelovanjem opterećenja u određenim područjima može odstupati od pretpostavljenih odnosa. Pretpostavljena homogenost i izotropnost materijala ne mora u potpunosti odgovarati stvarnom materijalu konstrukcije. Greške u definiranim svojstvima materijala mogu biti veće od svih ostalih spomenutih grešaka u proračunskoj proceduri.

8.5.4. Greške proračuna

Greške proračuna su greške u algoritmima definiranim u proračunskoj proceduri. Takve greške se javljaju kod numeričke integracije, rješavanja sustava jednadžbi.

Za egzaktnu numeričku integraciju potrebno je imati dovoljan broj točaka integracije sukladno stupnju podintegralne funkcije. Nedovoljan broj točaka integracije dovodi do greške već kod proračuna elementarnih matrica krutosti. U nekim slučajevima egzaktna integracija nije niti moguća ako su podintegralne funkcije racionalne funkcije. Povećanje broja točaka integracije dovodi do točnije vrijednosti integrala, ali može i značajno povećati broj proračunskih operacija čime opet neizravno (zaokruživanje, oduzimanje bliskih brojeva, ...) dobivamo dodatna odstupanja od egzaktnih vrijednosti. U nekim slučajevima uzimanje manjeg broja točaka integracije može čak dovesti i do kvalitetnijeg rješenja.

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi standardni je dio proračunske procedure kod rješavanja rubnih zadataka metodom konačnih elemenata. Neovisno o metodi rješavanja sustava jednadžbi greške se javljaju zbog loše uvjetovanosti (engl. ill-conditioning) matrice sustava, zaokruživanja vrijednosti ili odbacivanja dijela brojeva izvan proračunske memorije računala. Loša uvjetovanost matrice sustava znači da mala promjena matrice krutosti ili vektora opterećenja uzrokuje bitnu promjenu rješenja. Uzrok loše uvjetovanosti može biti povezanost elemenata velike i male krutosti. U tom slučaju postoje velike razlike u redu veličine članova matrice krutosti i matrica postaje bliska singularnoj matrici. Kod velikih razlika između članova proračunskih operacija, manja veličina, zbog zaokruživanja ili odbacivanja nakon nekih proračunskih operacija, može u potpunosti izgubiti utjecaj na rješenje. Zaokruživanje proračunatih vrijednosti najmanje je utjecajno na rješenje, razlika

zbog zaokruživanja je zapravo samo u zadnjoj znamenki brojeva koje računalo memorira za daljnji proračun. Uzimanjem u obzir dvostruke preciznosti (double precision) takva odstupanja praktično su zanemariva. Veći utjecaj ima greška zbog odbacivanja znamenki nakon značajnog broja znamenki koje računalo memorira. To je posebno uočljivo kod operacija s brojevima bitno različitog reda veličine, pri čemu broj manjeg reda više ne utječe na međubroj (posebno kod zbrajanja ili oduzimanja) ili kod oduzimanja bliskih brojeva pri čemu su značajne znamenke rezultat iz područja odbacivanja ili zaokruživanja.

Uvjetovanost matrice možemo izračunati prema izrazu

$$\text{cond}\mathbf{K} = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}, \quad (8.5.2)$$

gdje su λ_{max} i λ_{min} najveća i najmanja svojstvena vrijednost matrice \mathbf{K} .