

# NUMERIČKE METODE U PRORAČUNU KONSTRUKCIJA

Mladen Meštrović

Zagreb, 2020.

# Sadržaj

<b>1. Eulerova metoda</b>	<b>1</b>
1.1. Diferencijalna jednadžba	1
1.2. Sustav jednadžbi	1
1.3. Jednadžba drugog reda	1
<b>2. Poboljšana Eulerova metoda</b>	<b>1</b>
2.1. Diferencijalna jednadžba	1
<b>3. Runge-Kutta metode</b>	<b>3</b>
3.1. RK2	3
3.2. RK <sub>n</sub>	3
3.3. RK4	3
<b>4. Predictor-Corrector metode</b>	<b>4</b>
4.1. Adams-Bashforth-Moulton $m$ -koračna predictor-corrector metoda	4
4.2. Standardna Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector metoda	4
4.3. Red konvergencije standardne predictor-corrector metode	4
4.4. Poboljšana predictor-corrector metoda	5
4.5. Red konvergencije poboljšane predictor-corrector metode	5
<b>5. Primjena poboljšane predictor-corrector metode na standardnu Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector metodu</b>	<b>5</b>
<b>6. Metoda konačnih razlika</b>	<b>7</b>
6.1. Aproksimacija pomaka metodom konačnih razlika	7
6.2. Koordinatne funkcije kod metode konačnih razlika	9
6.3. Numerički primjeri	10

## 1. Eulerova metoda

### 1.1. Diferencijalna jednadžba

diferencijalna jednadžba

$$x' = f(t, x) \quad (1.1.1)$$

početni uvjet  $x(t_0) = x_0$

vrijednost  $t_e = ?$ ,

korak  $h = \frac{t_e - t_0}{N}$ ,  $N$  broj koraka

aproksimacija vrijednosti

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) \quad (1.1.2)$$

---

#### Algorithm 1 Eulerova metoda

---

- 1:  $t_0, t_e, x_0, n$
  - 2:  $h = (t_e - t_0)/n$
  - 3:  $x = x_0, t = t_0$
  - 4: **for**  $p = 1$  to  $n$  **do**
  - 5:    $x = x + hf(t, x)$
  - 6:    $t = t + h$
  - 7: **end for**
  - 8:  $x_e = x$
- 

### 1.2. Sustav jednadžbi

sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ x_3' &= f_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

početni uvjeti  $x_1(t_0) = x_{1,0}$ ,  $x_2(t_0) = x_{2,0}$ ,  $x_3(t_0) = x_{3,0}$   
vrijednosti

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= x_{1,i} + f_1(t_i, x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) \\ x_{2,i+1} &= x_{2,i} + f_2(t_i, x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) \\ x_{3,i+1} &= x_{3,i} + f_3(t_i, x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) \end{aligned}$$

### 1.3. Jednadžba drugog reda

jednadžba drugog reda

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t, x, x') \quad (1.3.3)$$

početni uvjeti  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$

supstitucija  $\dot{x} = y \Rightarrow$  sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(t, x, y) - ay - bx \end{aligned}$$

## 2. Poboljšana Eulerova metoda

### 2.1. Diferencijalna jednadžba

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

aproximacija vrijednosti

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, x_i) \\k_2 &= f(t_i + h, x_i + hk_1) \\x_{i+1} &= x_i + h \frac{k_1 + k_2}{2}\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

---

**Algorithm 2** Poboljšana Eulerova metoda

---

```
1:  $t_0, t_e, x_0, n$ 
2:  $h = (t_e - t_0)/n$ 
3:  $x = x_0, t = t_0$ 
4: for  $p = 1$  to  $n$  do
5:    $k1 = f(t, x)$ 
6:    $t = t + h$ 
7:    $xp = x + h * k1$ 
8:    $k2 = f(t, xp)$ 
9:    $x = x + h(k1 + k2)/2$ 
10: end for
11:  $x_e = x$ 
```

---

### 3. Runge-Kutta metode

#### 3.1. RK2

diferencijalna jednačina

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1.1)$$

aproksimacija vrijednosti

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + \alpha h, x_i + h\beta k_1) \\ x_{i+1} &= x_i + h(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

odstupanje, uz  $f_i = f(t_i, x_i)$

$$\begin{aligned} err(h) &= x_{i+1} - x_i - h[\omega_1 f_i + \omega_2 f(t_i + \alpha h, x_i + h\beta f_i)] \\ &= (1 - \omega_1 - \omega_2) h f_i + \left(\frac{1}{2} - \alpha\omega_2\right) f_{i,x} h^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\omega_2\right) f_{i,y} f_i h^2 + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

uvjeti za kubnu konvergenciju  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ ,  $\alpha\omega_2 = 1/2$ ,  $\beta\omega_2 = 1/2$   
 aproksimacija vrijednosti uz  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + h, x_i + h k_1) \\ x_{i+1} &= x_i + h \frac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

#### 3.2. RK<sub>n</sub>

diferencijalna jednačina

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.2.4)$$

aproksimacija vrijednosti

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, x_i + h\beta_{2,1} k_1) \\ k_3 &= f(t_i + \alpha_3 h, x_i + h(\beta_{3,1} k_1 + \beta_{3,2} k_2)) \\ &\vdots \\ k_n &= f\left(t_i + \alpha_n h, x_i + h \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{n,j} k_j\right) \\ x_{i+1} &= x_i + h \sum_{j=1}^n \omega_j k_j \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

#### 3.3. RK4

diferencijalna jednačina

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.3.6)$$

aproksimacija vrijednosti

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + h/2, x_i + h k_1/2) \\ k_3 &= f(t_i + h/2, x_i + h k_2/2) \\ x_{i+1} &= x_i + h(k_1 + k_2 + k_3)/6 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

## 4. Predictor-Corrector metode

### 4.1. Adams-Bashforth-Moulton $m$ -koračna predictor-corrector metoda

$$y^p(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \nabla^k f(x_i) \cdot (-1)^k \int_0^1 C_k^{-s} ds \right], \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} y^c(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_{i+1}, y^p(x_{i+1})) (-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds \\ &+ h \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \nabla^k f(x_i) \left[ (-1)^k \int_0^1 C_k^{-s} ds - (-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$h$  korak mreže, a

$$C_k^{-s} = \frac{-s(-s-1) \cdots (-s-k+1)}{k!}. \quad (4.1.3)$$

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}), \quad (4.1.4)$$

$$\nabla^k f(x_i) = \nabla(\nabla^{k-1} f(x_i)) \quad (4.1.5)$$

odnosno

$$\nabla^k f(x_i) = f(x_i) - \sum_{r=0}^{k-1} \nabla^r f(x_{i-1}). \quad (4.1.6)$$

$$y^p(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \nabla^k f(x_i) \cdot (-1)^k \int_0^1 C_k^{-s} ds \right], \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} y^c(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_{i+1}, y^p(x_{i+1})) (-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds \\ &+ h \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \nabla^k f(x_i) \left[ (-1)^k \int_0^1 C_k^{-s} ds - (-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

### 4.2. Standardna Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector metoda

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \quad (4.2.9)$$

$$y_{i+1}^c = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1}^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}), \quad (4.2.10)$$

uz  $f_k = f(x_k, y_k)$  and  $f_{i+1}^p = f(x_{i+1}, y_{i+1}^p)$

### 4.3. Red konvergencije standardne predictor-corrector metode

$$err_p = h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds, \quad (4.3.11)$$

$$err_c = h^{m+1} f^{(m)}(\zeta_i, y(\zeta_i)) (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds, \quad (4.3.12)$$

uz  $\mu_i, \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]$

#### 4.4. Poboljšana predictor-corrector metoda

$$y^m(x_{i+1}) = \frac{1}{W_1 + W_2} (W_1 y^p(x_{i+1}) + W_2 y^c(x_{i+1})) , \quad (4.4.13)$$

$$W_1 = -(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds , \quad (4.4.14)$$

$$W_2 = (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds , \quad (4.4.15)$$

$$W_1 + W_2 = (-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds . \quad (4.4.16)$$

#### 4.5. Red konvergencije poboljšane predictor-corrector metode

$$\begin{aligned} err_{mpc} &= \frac{1}{W_1 + W_2} (W_1 \cdot err_p + W_2 \cdot err_c) \\ &= \frac{-(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds}{(-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds} (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds \cdot h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) \\ &\quad + \frac{(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds}{(-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds} (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds \cdot h^{m+1} f^{(m)}(\zeta_i, y(\zeta_i)) \\ &= \frac{(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds}{(-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds} h^{m+1} [f^{(m)}(\zeta_i, y(\zeta_i)) - f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))] \\ &= \frac{(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds}{(-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds} h^{m+1} (\zeta_i - \mu_i) f^{(m+1)}(\xi_i) \\ &\leq \left| \frac{(-1)^m \int_0^1 C_m^{-s} ds (-1)^m \int_0^1 C_m^{-s+1} ds}{(-1)^{m-1} \int_0^1 C_{m-1}^{-s} ds} \right| h^{m+2} M_{m+1, f} , \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

uz  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , a  $M_{m+1, f}$  je maksimum  $(m+1)$ . derivacije na  $[x_i, x_{i+1}]$ .  
pokazano je da poboljšana metoda ima za jedan veći red konvergencije od standardne metode

### 5. Primjena poboljšane predictor-corrector metode na standardnu Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector metodu

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) , \quad (5.0.18)$$

$$y_{i+1}^c = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1}^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) , \quad (5.0.19)$$

$$y_{i+1}^m = \frac{1}{270} (251y_{i+1}^c + 19y_{i+1}^p) . \quad (5.0.20)$$

$$\begin{aligned} err_{mpc} &\leq \left| \frac{(-1)^3 \int_0^1 C_3^{-s} ds (-1)^3 \int_0^1 C_3^{-s+1} ds}{(-1)^2 \int_0^1 C_2^{-s} ds} \right| h^5 M_{4,f} \\ &= \frac{\frac{251}{720} \frac{19}{720}}{\frac{3}{8}} h^5 M_{4,f} = \frac{4769}{194400} h^5 M_{4,f} \approx 0.024532 h^5 M_{4,f} . \end{aligned} \quad (5.0.21)$$



## 6. Metoda konačnih razlika

### 6.1. Aproximacija pomaka metodom konačnih razlika

Klasičan pristup diskretizaciji matematičkog modela temelji se na metodi konačnih razlika. Potrebno je približno riješiti diferencijalnu jednadžbu u određenom broju točaka. Tražimo da u tim točkama rezidual bude jednak nuli. Bit aproksimacije metodom konačnih razlika je u zamjeni derivacije (nagiba tangente) konačnom razlikom (nagibom sekante) na krivulju progiba. Ako pretpostavimo jednaki razmak među točkama ( $h$ ), možemo pisati

$$w'(x_i) \approx \bar{w}'(x_i) = \tan \alpha = \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (6.1.1)$$

Nagib tangente funkcije  $w(x)$  u točki  $(x_i, w(x_i))$  aproksimiramo nagibom sekante kroz točke  $(x_i - h, w(x_i - h))$  i  $(x_i + h, w(x_i + h))$ . Ako razmak točaka  $h$  teži nuli, jednadžba (6.1.1) zapravo je klasična definicija prve derivacije funkcije

$$w'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [w(x_i + h) - w(x_i - h)] \quad . \quad (6.1.2)$$

Pogrešku aproksimacije derivacije možemo odrediti pomoću razvoja funkcije u Taylorov red i procjene vrijednosti progiba u točkama  $x_i + h$  i  $x_i - h$ ,

$$\begin{aligned} w(x_i + h) &= w(x_i) + hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) + \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad , \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned} w(x_i - h) &= w(x_i) - hw'(x_i) + \frac{h^2}{2!}w''(x_i) - \frac{h^3}{3!}w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k h^k}{k!}w^{(k)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Ako oduzmemo drugu jednadžbu od prve jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} w(x_i + h) - w(x_i - h) &= 2hw'(x_i) + 2\frac{1}{6}h^3w'''(x_i) + \dots \\ &\quad + 2\frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}h^{2k-1}w^{(2k-1)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Ako podijelimo jednadžbu s  $2h$  slijedi

$$\begin{aligned} \frac{w(x_i + h) - w(x_i - h)}{2h} &= w'(x_i) + \frac{1}{3!}h^2w'''(x_i) + \frac{1}{5!}h^4w^{(5)}(x_i) + \dots \\ &\quad + \frac{h^{2k}}{(2k+1)!}w^{(2k+1)}(x_i) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Vidimo da aproksimacijom prve derivacije lijevom strane jednadžbe odbacujemo članove uz  $h^2$  i više potencije korak  $h$  što znači da je pogreška proporcionalna s  $h^2$  i pišemo  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Na isti način možemo odrediti i aproksimaciju druge derivacije kao približnu derivaciju prvih derivacija funkcije u točkama  $x_i + \frac{h}{2}$  i  $x_i - \frac{h}{2}$ ,

$$\begin{aligned} w''(x_i) = (w'(x_i))' &\approx \bar{w}''(x_i) = \frac{1}{h} [w'(x_i + h/2) - w'(x_i - h/2)] \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{h} [w(x_i + h) - w(x_i)] - \frac{1}{h} [w(x_i) - w(x_i - h)] \right\} \\ &= \frac{w(x_i + h) - 2w(x_i) + w(x_i - h)}{h^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Za rubne zadaće u analizi konstrukcija potrebne su nam i aproksimacije treće i četvrte derivacije. Njihove aproksimacije metodom konačnih razlika su

$$\bar{w}'''(x_i) = \frac{w(x_i + 2h) - 2w(x_i + h) + 2w(x_i - h) - w(x_i - 2h)}{2h^3} \quad , \quad (6.1.8)$$

$$\bar{w}^{(4)}(x_i) = \frac{w(x_i + 2h) - 4w(x_i + h) + 6w(x_i) - 4w(x_i - h) + w(x_i - 2h)}{h^4} \quad . \quad (6.1.9)$$

Vrijednost derivacije funkcije u točki  $x_i$  izrazili smo kao linearnu kombinaciju vrijednosti funkcije u susjednim točkama. Koeficijente linearne kombinacije možemo dobiti i iz sustava postavljenog u smislu najbolje aproksimacije tražene derivacije. Vidimo da je  $n$ -ta derivacija izražena kao linearna kombinacija vrijednosti funkcije u  $n+1$  točaka. Postupak ćemo pokazati na definiranju linearne kombinacije za drugu derivaciju pomoću tri proizvoljne točke,  $x_{i+\alpha h}$ ,  $x_{i+\beta h}$  i  $x_{i+\gamma h}$ . Za svaku odabranu točku možemo izraziti pripadnu aproksimaciju Taylorovim redom u okolini točke  $x_i$ ,

$$w(x_i + \alpha h) = w(x_i) + \alpha h w'(x_i) + \frac{(\alpha h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\alpha h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots, \quad (6.1.10)$$

$$w(x_i + \beta h) = w(x_i) + \beta h w'(x_i) + \frac{(\beta h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\beta h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots, \quad (6.1.11)$$

$$w(x_i + \gamma h) = w(x_i) + \gamma h w'(x_i) + \frac{(\gamma h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\gamma h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots. \quad (6.1.12)$$

Izjednačimo drugu derivaciju u točki  $x_i$  s linearnom kombinacijom vrijednosti funkcije u odabranim točkama,

$$w''(x_i) = A w(x_i + \alpha h) + B w(x_i + \beta h) + C w(x_i + \gamma h). \quad (6.1.13)$$

Za suvislu aproksimaciju druge derivacije (u općenitom slučaju  $n$ -te derivacije) sve prethodne derivacije, uključujući i vrijednosti funkcije u tim točkama moraju iščeznuti. Uvrštavanjem razvoja u Taylorov red za pripadne vrijednosti u linearnoj kombinaciji slijedi jednačba

$$\begin{aligned} w''(x_i) &= A w(x_i + \alpha h) + B w(x_i + \beta h) + C w(x_i + \gamma h) \\ &= A \left( w(x_i) + \alpha h w'(x_i) + \frac{(\alpha h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\alpha h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right) \\ &+ B \left( w(x_i) + \beta h w'(x_i) + \frac{(\beta h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\beta h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right) \\ &+ C \left( w(x_i) + \gamma h w'(x_i) + \frac{(\gamma h)^2}{2!} w''(x_i) + \frac{(\gamma h)^3}{3!} w'''(x_i) + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Sada grupiramo članove razvoja uz istu derivaciju u točki  $x_i$ , pa slijedi

$$w''(x_i) = A w(x_i + \alpha h) + B w(x_i + \beta h) + C w(x_i + \gamma h) \quad (6.1.15)$$

$$= (A + B + C) w(x_i) \quad (6.1.16)$$

$$+ (A\alpha + B\beta + C\gamma) h w'(x_i)$$

$$+ (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) \frac{h^2}{2} w''(x_i)$$

$$+ (A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3) \frac{h^3}{3!} w'''(x_i) + \dots$$

Želimo da takva linearna kombinacija najbolje aproksimira traženu drugu derivaciju u točki  $x_i$ . To znači da koeficijent uz  $w''(x_i)$  treba biti jednak, koeficijent uz sve niže derivacije jednak nuli, a dio uz više derivacije jedinstavno odbacujemo kao pogrešku aproksimacije. Izjednačavanjem pripadnih linearnih kombinacija s 1 ili 0 slijedi sustav jednačbi

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ h ( \alpha A + \beta B + \gamma C ) &= 0 \\ \frac{h^2}{2} ( \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C ) &= 1 \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

koji možemo zapisati i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}. \quad (6.1.18)$$

Rješenjem sustava slijede koeficijenti linearne kombinacije

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \\ \frac{2}{h^2(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} \\ \frac{2}{h^2(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (6.1.19)$$

U općenitom slučaju kad tražimo koeficijente linearne kombinacije  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n+1$  za aproksimaciju  $n$ -te derivacije pomoću vrijednosti funkcije u proizvoljnim točkama  $x_i + \alpha_j h$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , sustav jednadžbi u matričnom zapisu glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_j^k & \dots & \alpha_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_j^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_j^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{n!}{h^n} \end{bmatrix}. \quad (6.1.20)$$

## 6.2. Koordinatne funkcije kod metode konačnih razlika

Postupak proračuna rubne zadaće provodimo diskretizacijom područja definiranjem  $n$  čvorova na razmaku  $h$  i za svaki čvor napišemo jednadžbu konačnih razlika, ovisno o stupnju derivacije diferencijalne jednadžbe rubne zadaće. Izraz (6.1.1) je točan samo ako je progibna linija  $w(x)$  parabola (tada su tangenta u  $x_i$  lokalnom tjemenu parabole i pripadna sekanta kroz  $x_i - h$  i  $x_i + h$  paralelne). Funkciju  $w(x)$  na segmentu  $[x_i - h, x_i + h]$  aproksimirali smo zapravo linearnom kombinacijom triju parabola  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$

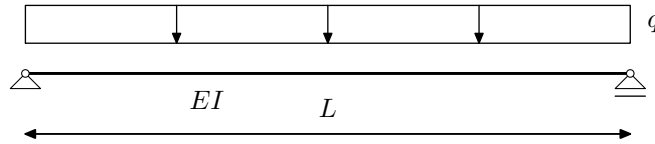
$$w(x) \approx \bar{w}(x) = \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j, \quad (6.2.1)$$

pri čemu su parabole  $\varphi_j$  i pripadni koeficijenti linearne kombinacije  $a_j$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{x-x_i}{h} \right], & a_1 &= w(x_i - h), \\ \varphi_2 &= 1 - \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2, & a_2 &= w(x_i), \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 + \frac{x-x_i}{h} \right], & a_3 &= w(x_i + h). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Koeficijenti linearne kombinacije  $a_j$  su zapravo vrijednosti progiba u čvorovima. Jednadžbe konačnih razlika možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{K} \left[ \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j \right] (x_i) = q_z(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2.3)$$



Slika 6.3.1.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

### 6.3. Numerički primjeri

**Primjer 6.3.1.** *Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_{L/2}$  u sredini slobodno oslonjene grede raspona  $L$  konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka  $I$  i modula elastičnosti  $E$ , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem  $q$*

Diferencijalna jednačina progibne linije grede glasi

$$(E(x)I(x)w'')'' = q(x). \quad (6.3.1.1)$$

Ako uzmemo u obzir da su poprečni presjek i modul elastičnosti konstantni uzduž grede, a opterećenje jednoliko distribuirano, jednačina glasi

$$EIw^{(iv)} = q. \quad (6.3.1.2)$$

Zadana je greda na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0, \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0, \quad (6.3.1.3)$$

$$w(L) = 0, \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0. \quad (6.3.1.4)$$

Gredu (područje) podijelimo na  $k$  jednakih dijelova,  $h = L/k$ , a čvorove ( $k+1$  čvorova) podjele označimo  $x_i = ih, i = 0, \dots, k$  (diskretizacija područja). Takva podjela ( $x_i - x_{i-1} = h, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) naziva se ekvidistantna podjela.

Vrijednosti funkcije progiba i potrebne derivacije u čvorovima možemo kraće zapisati kao

$$w(x_i) = w_i, w'(x_i) = w'_i, \dots \quad (6.3.1.5)$$

U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednačina progiba. Jednačinu možemo zapisati za svaki čvor  $x_i$

$$EIw_i^{(iv)} = q. \quad (6.3.1.6)$$

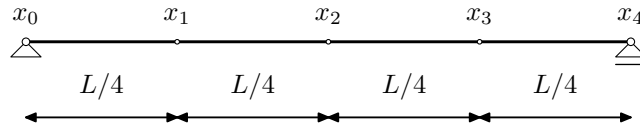
Aproksimacija potrebne četvrte derivacije u smislu metode konačnih razlika glasi

$$w_i^{(iv)} \approx \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}]. \quad (6.3.1.7)$$

Ako za svaki čvor  $x_i$  raspisemo pripadnu jednačinu dobivamo  $k+1$  jednačini. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora  $x_i$ , u jednačinama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti  $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$ , koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede  $[0, L]$ ), te imamo  $k+5$  nepoznanica. Umjesto tih jednačini uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednačine u čvorovima  $x_0$  i  $x_k$  uzimamo jednačine za geometrijske rubne uvjete (zadane vrijednosti progiba) u ležajnim čvorovima. Za proračun progiba u čvorovima  $x_{-1}$  i  $x_{k+1}$  izvan područja uzimamo jednačine za iznose momenata u ležajnim čvorovima.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža),  $h = L/4$ ,  $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$ . Za svaki čvor raspisemo pripadnu jednačinu u smislu metode konačnih razlika

$$EI \frac{1}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q. \quad (6.3.1.8)$$

Slika 6.3.1.2: Podjela grede na čvorove,  $h = L/4$ 

Dobivamo sustav jednačbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.1.9)$$

U jednačbama se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede  $[0, L]$ ). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednačbe za prvi i zadnji čvor uvodimo geometrijske rubne uvjete,  $w_0 = 0$  i  $w_4 = 0$ . Za proračun vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednačbama za čvorove  $x_1$  i  $x_3$  iskoristit ćemo rubne uvjete  $M_0 = 0$  i  $M_4 = 0$ . Momente proračunavamo prema izrazu

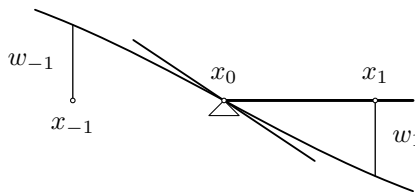
$$M(x) = -EIw''(x). \quad (6.3.1.10)$$

Za čvorove  $x_0$  i  $x_4$  slijede jednačbe

$$M_0 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_{-1} - 2w_0 + w_1], \quad (6.3.1.11)$$

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5]. \quad (6.3.1.12)$$

U izrazima imamo još uvijek vrijednosti progiba u točkama izvan područja. Potrebno je izraziti vrijednosti progiba u tim točkama preko vrijednosti progiba u točkama unutar područja. U točkama u kojima je moment jednak nuli očito je i druga derivacija progiba jednaka nuli ( $w'' = 0$ ) što znači da su to ujedno i točke infleksije. Zbog toga možemo funkciju progiba izvan područja aproksimirati kao antimetričnu funkciju progiba unutar područja,  $w_{-i} = w_i$ . To znači da vrijedi  $w_{-1} = w_1$  i  $w_5 = w_3$  i te jednakosti



Slika 6.3.1.3: Aproksimacija vrijednosti izvan područja oko slobodno oslonjenog ležaja

uvrstimo u jednačbe za četvrtu derivaciju u točkama  $w_1$  i  $w_3$ , uz  $w_0 = 0$  i  $w_4 = 0$ , pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 \\ &= 5w_1 - 4w_2 + w_3, \end{aligned} \quad (6.3.1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 \\ &= w_1 - 4w_2 + 5w_3. \end{aligned} \quad (6.3.1.14)$$

Sustav jednačbi sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.1.15)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{512} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_2 = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.1.16)$$

Pogreška vrijednosti progiba u sredini raspona dobivenog metodom konačnih razlika uz podjelu grede na 4 dijela, 5 čvorova iznosi 5%,

$$w_{an.}(L/2) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.25}{384} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.1.17)$$

Momente u čvorovima grede proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EIw''(x), \quad (6.3.1.18)$$

$$M_i = -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}]. \quad (6.3.1.19)$$

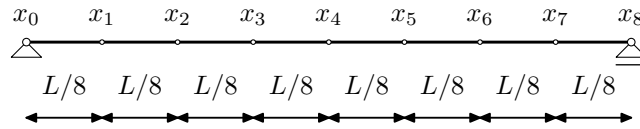
Na taj način momenti u sredini i četvrtini raspona iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (5 - 2 \cdot 7 + 5) = \frac{qL^2}{8}, \quad (6.3.1.20)$$

$$M_{L/4} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{512EI} (0 - 2 \cdot 5 + 7) = \frac{3qL^2}{32}, \quad (6.3.1.21)$$

i jednaki su stvarnim momentima u tim točkama.

Ako podijelimo gredu na 8 dijelova,  $h = L/8$ , 9 čvorova  $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$ , rješenje u sredini raspona



Slika 6.3.1.4: Podjela grede na čvorove,  $h = L/8$

glasi

$$w_{fdm_8}(L/2) = \frac{27}{2048} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.0625}{384} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.1.22)$$

Pogreška iznosi 1.25%, što je četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela. Metoda konačnih razlika kvadratno konvergira,  $n$  puta manji korak povlači  $n^2$  puta manju pogrešku, što u našem primjeru znači da dvostruko manji korak mreže čvorova povlači četiri puta manju pogrešku.

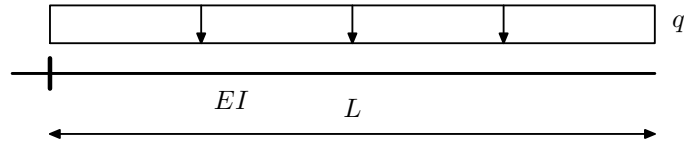
**Primjer 6.3.2.** *Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_L$  na slobodnom kraju konzolne grede raspona  $L$  konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka  $I$  i modula elastičnosti  $E$  opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem  $q$*

Konzolna greda je na jednom kraju upeta, a drugi kraj je potpuno slobodan, što znači da su progib i kut zaokreta na upetom ležaju jednaki nuli, a na slobodnom kraju moment i porečna sila jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad (6.3.2.1)$$

$$T(L) = -EIw'''(L) = 0, \quad M(L) = -EIw''(L) = 0. \quad (6.3.2.2)$$

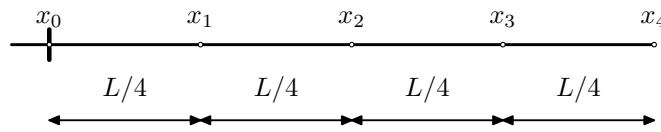
Ako za svaki čvor  $x_i$  raspišemo pripadnu jednačbu dobivamo  $k + 1$  jednačbi. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva



Slika 6.3.2.1: Konzolna greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

čvora ispred i dva čvora iza čvora  $x_i$ , u jednadžbama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti  $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$ , koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede  $[0, L]$ ), te imamo  $k + 5$  nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe za čvor  $x_0$  uzmemo geometrijski rubni uvjet  $w_0 = 0$ , a za proračun vrijednosti progiba  $w_{-1}$  iskoristit ćemo prirodni rubni uvjet  $w'_0 = 0$ . Za proračun progiba  $w_{k+1}$  i  $w_{k+2}$  izvan područja iskoristit ćemo jednadžbe za moment i poprečnu silu u čvoru na slobodnom kraju konzolne grede.

Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža),  $h = L/4$ ,  $x_i = ih, i = 0, \dots, 4$ . Za svaki čvor raspíšemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika



$$\frac{EI}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q, \quad (6.3.2.3)$$

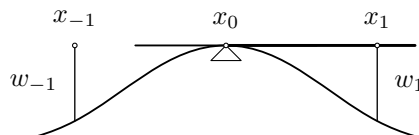
koju koristimo u obliku

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{qh^4}{EI}. \quad (6.3.2.4)$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.2.5)$$

U jednadžbi se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede  $[0, L]$ ). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi čvor  $x_0$  uvodimo geometrijski rubni uvjet,  $w_0 = 0$ . Za proračun potrebnih vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove  $x_1, x_3$  i  $x_4$  iskoristit ćemo rubne uvjete  $w'_0 = 0, M_4 = 0$  i  $T_4 = 0$ . Kut zaokreta tangente na progibnu liniju u čvoru  $x_0$  jednak je nuli. Progibnu funkciju izvan područja možemo aproksimirati kao simetričnu progibnoj funkciji unutar područja,  $w_{-1} = w_1$ . To znači da vrijedi  $w_{-1} = w_1$  i tu jednakosti uvrstimo u jednadžbe za četvrtu



derivaciju u točki  $w_1$ , uz  $w_0 = 0$ , pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 \\ &= 7w_1 - 4w_2 + w_3. \end{aligned} \quad (6.3.2.6)$$

Momente proračunavamo prema standardnom izrazu

$$M(x) = -EIw''(x), \quad (6.3.2.7)$$

pa za moment u čvoru  $x_4$  slijedi jednačina

$$M_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^2} [w_3 - 2w_4 + w_5], \quad (6.3.2.8)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost  $w_5$ ,

$$w_5 = 2w_4 - w_3. \quad (6.3.2.9)$$

Poprečne sile proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EIw'''(x), \quad (6.3.2.10)$$

pa za poprečnu silu u čvoru  $x_4$  slijedi jednačina

$$T_4 = 0 = -EI \frac{1}{h^3} [w_2 - 2w_3 + 2w_5 - w_6], \quad (6.3.2.11)$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost  $w_6$ ,

$$\begin{aligned} w_6 &= w_2 - 2w_3 + 2w_5 \\ &= w_2 - 2w_3 + 2(2w_4 - w_3) \\ &= w_2 - 4w_3 + 4w_4. \end{aligned} \quad (6.3.2.12)$$

Uvrštavanjem jednačine (6.3.2.9) u jednačinu za četvrtu derivaciju u točki  $w_3$  slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 \\ &= w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + (2w_4 - w_3) \\ &= w_1 - 4w_2 + 5w_3 - 2w_4. \end{aligned} \quad (6.3.2.13)$$

Uvrštavanjem jednačine (6.3.2.12) i (6.3.2.9) u jednačinu za četvrtu derivaciju u točki  $w_4$  slijedi

$$\begin{aligned} \frac{qh^4}{EI} &= w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_6 \\ &= w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4(2w_4 - w_3) + (w_2 - 4w_3 + 4w_4) \\ &= 2w_2 - 4w_3 + 2w_4. \end{aligned} \quad (6.3.2.14)$$

Jednačina sustava sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3.2.15)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima grede

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI}, & w_2 &= \frac{25}{512} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_3 &= \frac{23}{256} \frac{qL^4}{EI}, & w_4 &= \frac{17}{128} \frac{qL^4}{EI}. \end{aligned} \quad (6.3.2.16)$$

Pogreška vrijednosti progiba na rubu konzole dobivenog metodom konačnih razlika uz podjelu grede na 4 dijela, 5 čvorova iznosi 6.25%,

$$w_{an.}(L) = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{17}{128} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.0625}{8} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.2.17)$$



Momente u čvorovima proračunavamo prema izrazu

$$\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x), \\ M_i &= -EI \frac{1}{h^2} [w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}]. \end{aligned} \quad (6.3.2.18)$$

Na taj način moment na upetom ležaju iznosi

$$M_0 = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{64EI} \cdot 2 = \frac{qL^2}{2}, \quad (6.3.2.19)$$

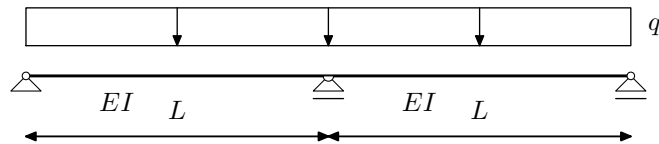
i jednak je stvarnom momentu na upetom ležaju.

Ako podijelimo gredu na 8 dijelova,  $h = L/8$ , 9 čvorova  $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$ , vrijednost progiba na kraju konzole grede iznosi

$$w_{fdms}(L) = \frac{65}{512} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.015625}{8} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.2.20)$$

Pogreška iznosi 1.5625%, što je opet četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela čime smo i u ovom primjeru pokazali kvadratnu konvergenciju niza rješenja.

**Primjer 6.3.3.** *Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_{L/2}$  u sredini raspona kontinuirane grede preko dva jednaka raspona duljine  $L$ , konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka  $I$  i modula elastičnosti  $E$ , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem  $q$  duž oba raspona*



Slika 6.3.3.1: Kontinuirana greda preko dva raspona opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem

Zadana greda je na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. U srednjoj točki grede,  $x = L$  definiran je klizni ležaj koji ne dozvoljava progib. Rubni uvjeti za krajeve i za srednji klizni ležaj glase

$$w(0) = 0, \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0, \quad (6.3.3.1)$$

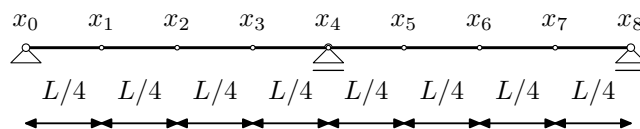
$$w(L) = 0, \quad (6.3.3.2)$$

$$w(2L) = 0, \quad M(2L) = -EIw''(2L) = 0 \Rightarrow w''(2L) = 0. \quad (6.3.3.3)$$

U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednadžba progiba. Jednadžbu možemo zapisati za svaki čvor  $x_i$

$$EIw_i^{(iv)} = q. \quad (6.3.3.4)$$

Gredu možemo podijeliti na osam dijelova jednake duljine (ekvidistantna mreža),  $h = L/4$ ,  $x_i = ih, i = 0, \dots, 8$ . Za svaki čvor raspišemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika



Slika 6.3.3.2: Podjela grede na čvorove,  $h = L/4$

$$\frac{EI}{h^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q. \quad (6.3.3.5)$$

Na srednjem ležaju postoji reakcija. Reakcija srednjeg ležaja daje skok u dijagramu poprečnih sila. Poprečna sila neposredno lijevo od presjeka i poprečna sila neposredno desno od presjeka nisu jednake. To znači da u točki  $x = L$  nije definirana treća derivacija. Posljedično ne postoji niti četvrta derivacija.

Umjesto jednadžbe za četvrtu derivaciju u  $x = L$  koristimo zadani rubni uvjet  $w_L = 0$ . Uzimanjem definiranih jednadžbi za četvrtu derivaciju i uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.3.6)$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$\begin{aligned} w_1 &= w_7 = \frac{15}{2816} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_2 &= w_6 = \frac{37}{5632} \frac{qL^4}{EI}, \\ w_3 &= w_5 = \frac{5}{1408} \frac{qL^4}{EI}. \end{aligned} \quad (6.3.3.7)$$

Pogreška vrijednosti progiba u sredini raspona iznosi 26.1%,

$$w_{an.}(L) = \frac{1}{192} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{37}{5632} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.261}{192} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.3.8)$$

Momenti u sredini raspona i na srednjem ležaju iznose

$$M_{L/2} = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{5632EI} (30 - 2 \cdot 37 + 20) = \frac{3}{44} qL^2, \quad (6.3.3.9)$$

$$M_L = -EI \frac{16}{L^2} \frac{qL^4}{1408EI} (5 - 2 \cdot 0 + 5) = -\frac{5}{44} qL^2, \quad (6.3.3.10)$$

pri čemu su odstupanja od analitičkih vrijednosti

$$\Delta_{L/2} = \Delta_L = 9.1\%. \quad (6.3.3.11)$$

Podjelom grede na 16 jednakih dijelova,  $h = L/8$ , progib u sredini raspona iznosi

$$w(L/2) = \frac{489}{88064} \frac{qL^4}{EI} = \frac{1.066}{192} \frac{qL^4}{EI}, \quad \Delta = 6.6\%, \quad (6.3.3.12)$$

moment na srednjem ležaju iznosi

$$M(L) = -\frac{21}{172} qL^2 = -\frac{0.977}{8} qL^2, \quad \Delta_L = 2.3\%, \quad (6.3.3.13)$$

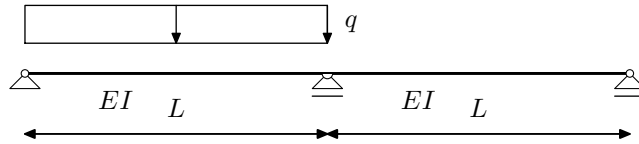
a moment u sredini polja iznosi

$$M(L/2) = \frac{143}{2236} qL^2 = \frac{1.023}{16} qL^2, \quad \Delta_{L/2} = 2.3\%. \quad (6.3.3.14)$$

**Primjer 6.3.4.** *Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_{L/2}$  u sredini raspona kontinuirane grede preko dva jednaka raspona duljine  $L$ , konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka  $I$  i modula elastičnosti  $E$ , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem  $q$  duž jednog raspona*

U odnosu na prethodni primjer, razlika je jedino u opterećenju. Matrica sustava uz istu podjelu bit će jednaka. Vektor opterećenja se razlikuje u dijelu za drugi raspon koji je u ovom primjeru neopterećen. Sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.4.1)$$



Slika 6.3.4.1: Kontinuirana greda preko dva raspona opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem duž jednog raspona

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 7.8%,

$$w_{an.}(L) = \frac{7}{768} \frac{qL^4}{EI}, \quad w_{fdm_4}(L/2) = \frac{57}{5632} \frac{qL^4}{EI} = \frac{7.773}{768} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.4.2)$$

Moment na srednjem ležaju iznosi

$$M_L = -\frac{5}{88} qL^2, \quad = -\frac{0.909}{16} qL^2, \quad \Delta_L = 9.1\%. \quad (6.3.4.3)$$

Podjelom grede na 16 jednakih dijelova,  $h = L/8$ , progib u sredini raspona iznosi

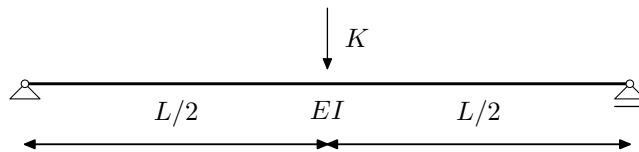
$$w(L/2) = \frac{825}{88064} \frac{qL^4}{EI} = \frac{7.195}{768} \frac{qL^4}{EI}, \quad \Delta = 2.8\%, \quad (6.3.4.4)$$

a moment na srednjem ležaju iznosi

$$M(L) = -\frac{21}{344} qL^2 = -\frac{0.977}{16} qL^2, \quad \Delta_L = 2.3\%. \quad (6.3.4.5)$$

Ovaj primjer je znakovit jer ukazuje na određeni nedostatak postupka proračuna metodom konačnih razlika. Ako promatramo ovaj isti primjer uz zadanu krutost neopterećenog raspona  $nEI$ , dobiveno numeričko rješenje bit će uvijek jednako neovisno o koeficijentu povećanja krutosti neopterećenog raspona. Na neopterećenom dijelu desna strana jednadžbe uvijek će biti jednaka nuli i nigdje neće biti iskazana promjena krutosti tog dijela. Variranje koeficijenta povećanja krutosti  $n$  ne utječe na prikazano numeričko rješenje što jasno ne odgovara zadanoj rubnoj zadaći.

**Primjer 6.3.5.** Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_{L/2}$  u sredini slobodno oslonjene grede raspona  $L$  konstantnog momenta inercije poprečnog presjeka  $I$  i modula elastičnosti  $E$ , opterećene koncentriranom silom  $K$  u sredini raspona



Slika 6.3.5.1: Slobodno oslonjena greda opterećena koncentriranom silom u sredini raspona

Zadana je konstrukcija jednaka kao u prvom primjeru uz jedinu razliku u zadanom opterećenju. U ovom primjeru zadana je koncentrirana sila u sredini raspona. Diferencijalna jednadžba progibne linije grede uz konstantni poprečni presjek i modul elastičnosti glasi

$$EIw^{(iv)} = q. \quad (6.3.5.1)$$

Rubni uvjeti su

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w''(L) = 0. \quad (6.3.5.2)$$

U svim točkama grede opterećenje  $q$  jednako je nuli. U sredini raspona zadana je koncentrirana sila  $K$ . Koncentrirana sila ne može biti jednostavno stavljena na desnu stranu jednadžbe jer ne odgovara mjerna jedinica prema definiranoj diferencijalnoj jednadžbi. Postoje varijante zamjene koncentrirane sile

distribuiranim opterećenjem čime mjerna jedinica desne strane jednadžbe odgovara definiranoj diferencijalnoj jednadžbi. Takvi postupci ne odgovaraju fizikalnom smislu zadane rubne zadaće u točki djelovanja koncentrirane sile. U točki djelovanja koncentrirane sile razlikuju se poprečne sile lijevo i desno od presjeka. Razlika je jednaka iznosu zadane sile  $K$ . To znači da u toj točki treća derivacija progibne funkcije nije neprekidna funkcija. Umjesto uobičajne jednadžbe za četvrtu derivaciju, u točki djelovanja koncentrirane sile potrebno je postaviti jednadžbu koja odgovara fizikalnoj pojavi u toj točki, potrebno je postaviti jednadžbu da je razlika poprečne sile lijevo i desno od presjeka jednaka zadanoj sili  $K$ . Zbog toga moramo posebno definirati izraze za proračun poprečne sile lijevo i desno od točke djelovanja zadane sile. Poprečnu silu proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EIw'''(x). \quad (6.3.5.3)$$

Potrebne poprečne sile sa svake strane od točke u kojoj djeluje zada sila  $K$ ,  $x_K$ , definiramo preko pripadnih derivacija,

$$T^-(x) = -EIw'''(x)^-, \quad T^+(x) = -EIw'''(x)^+, \quad (6.3.5.4)$$

pri čemu  $-$  predstavlja vrijednost neposredno lijevo od promatrane točke, a  $+$  predstavlja vrijednost neposredno desno od promatrane točke. Potrebne treće derivacije sa svake strane promatrane točke izrazit ćemo preko konačnih razlika, ali isključivo pomoću vrijednosti funkcija s pripadne strane promatrane točke. Na taj način aproksimacije traženih trećih derivacija glase

$$w'''(x)^- = \frac{w_i - 3w_{i-1} + 3w_{i-2} - w_{i-3}}{h^3}, \quad (6.3.5.5)$$

$$w'''(x)^+ = \frac{-w_i + 3w_{i+1} - 3w_{i+2} + w_{i+3}}{h^3}. \quad (6.3.5.6)$$

Razliku poprečnih sila u promatranoj točki djelovanja sile  $K$  izrazimo jednadžbom

$$\Delta T_i = [-EIw'''(x)^-] - [-EIw'''(x)^+] = K, \quad (6.3.5.7)$$

što u raspisanom obliku daje

$$\begin{aligned} w_{i-3} - 3w_{i-2} + 3w_{i+1} - 2w_i \\ + 3w_{i-1} - 3w_{i-2} + w_{i-3} = \frac{Kh^3}{EI}. \end{aligned} \quad (6.3.5.8)$$

Takvom jednadžbom zapravo mijenjamo uobičajenu jednadžbu za aproksimaciju četvrte derivacije u točki u kojoj je zadana koncentrirana sila.

Ako gredu podijelimo na osam jednakih dijelova sustav jednadžbi glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{KL^3}{512EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.5.9)$$

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 3.125%,

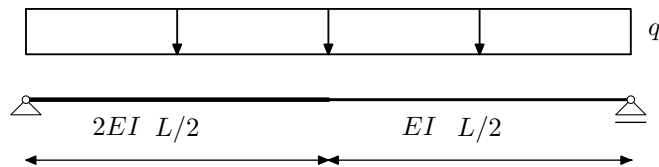
$$w_{an.}(L) = \frac{1}{48} \frac{KL^3}{EI}, \quad w_{fdm_8}(L/2) = \frac{11}{512} \frac{KL^3}{EI} = \frac{1.03125}{48} \frac{KL^3}{EI}. \quad (6.3.5.10)$$

Povećanjem broja čvorova možemo pokazati pripadnu konvergenciju niza numeričkih rješenja, Tablica 1. Prema nizu numeričkih rješenja prikazanom u tablici 1 očita je kvadratna konvergencija.

**Primjer 6.3.6.** *Metodom konačnih razlika odrediti progib  $w_{L/2}$  u sredini slobodno oslonjene grede raspona  $L$  konstantnog modula elastičnosti  $E$ , opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem  $q$  uz promjenu vrijednosti momenta inercije poprečnog presjeka u sredini raspona*

Tablica 1: Progib u sredini raspona

$m$	$w_{L/2} / \left( \frac{KL^3}{EI} \right)$	error %
9	$\frac{11}{512} = \frac{1.03125}{48}$	3.125%
17	$\frac{43}{2048} = \frac{1.00781}{48}$	0.78125%
33	$\frac{171}{8192} = \frac{1.00195}{48}$	0.1953125%
65	$\frac{683}{32768} = \frac{1.00048}{48}$	0.048828%
an.	$\frac{1}{48}$	



Slika 6.3.6.1: Slobodno oslonjena greda opterećena jednoliko distribuiranim opterećenjem uz promjenu vrijednosti momenta inercije poprečnog presjeka u sredini raspona

Zadana je konstrukcija s momentom inercije poprečnog presjeka definiranim funkcijom

$$EI(x) = \begin{cases} 2EI & x \in [0, L/2] \\ EI & x \in (L/2, L] \end{cases} . \quad (6.3.6.1)$$

Prema definiranoj diferencijalnoj jednadžbi rubne zadaće savijanja grede, gredu zapravo možemo promatrati kao gredu konstantne krutosti, ali s promjenom u opterećenju. Možemo opterećenje podijeliti s pripadnom krutosti i definirati novo opterećenje  $\bar{q}(x) = \frac{q(x)}{EI(x)}$ ,

$$w'''' = \bar{q}(x) = \begin{cases} \frac{q}{2EI} & x \in [0, L/2) \\ \frac{q}{EI} & x \in (L/2, L] \end{cases} . \quad (6.3.6.2)$$

Fizikalno je jasno da u točki promjene krutosti druga derivacije progibne funkcije nije neprekidna. To znači da ne možemo definirati četvrtu derivaciju progibne funkcije u toj točki. Pokušat ćemo taj prekid, skok druge derivacije izgladiti, odnosno uzet ćemo srednju vrijednu krutosti lijevo i desno od te točke,

$$\bar{q}(L/2) = \frac{\frac{q}{2EI} + \frac{q}{EI}}{2} = \frac{3}{4} \frac{q}{EI} .$$

Ako gredu podijelimo na osam jednakih dijelova, uz uzimanje u obzir rubnih uvjeta, sustav jednadžbi

glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3.6.3)$$

Rješenjem sustava dobijemo vrijednost progiba u sredini opterećenog raspona, pri čemu pripadna pogreška vrijednosti progiba iznosi 1.25%,

$$w_{an.}(L) = \frac{5}{512} \frac{KL^3}{EI}, \quad w_{fdm_s}(L/2) = \frac{81}{8192} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5.0625}{512} \frac{qL^4}{EI}. \quad (6.3.6.4)$$

Povećanjem broja čvorova možemo pokazati pripadnu konvergenciju niza numeričkih rješenja, Tablica 2.

Tablica 2: Progib u sredini raspona

$m$	$w_{\frac{L}{2}} / \left( \frac{qL^4}{EI} \right)$	error %
9	$\frac{81}{8192} = \frac{5.0625}{512}$	1.25%
17	$\frac{321}{32768} = \frac{5.015625}{512}$	0.3125%
33	$\frac{1281}{131072} = \frac{5.00391}{512}$	0.078125%
65	$\frac{5121}{524288} = \frac{5.00098}{512}$	0.019531%
an.	$\frac{5}{512}$	

Prema nizu numeričkih rješenja prikazanom u tablici 2 očita je kvadratna konvergencija.