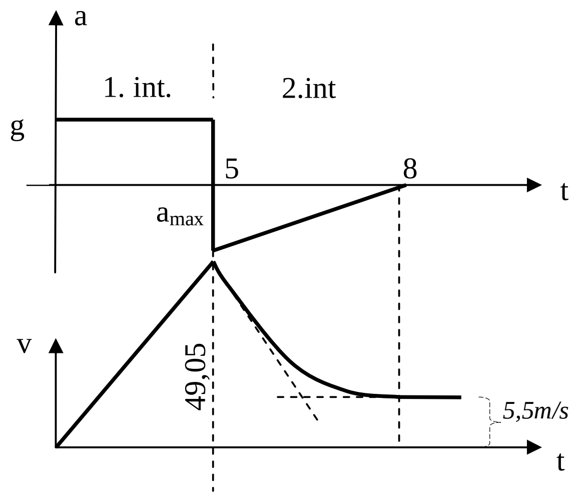
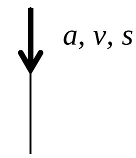
1. Padobranac skoči iz aviona i slobodno pada prvih 5 sekundi, a zatim otvori padobran tako da trenutno naglo uspori. U slijedeće 3 sekunde (mjereno od trenutka otvaranja padobrana), padobranac postigne konstantnu brzinu od 5,5m/s. Koliko je njegovo max. usporenje uz pretpostavkuda se mijenja linearno od max. vrijednosti u trenutku otvaranja padobrana do nule (u trenutku postizanja konstantne brzine).





Pri crtanju funkcija pretpostavljena je pozitivna orijentacija *a* i *v*, u smjeru gibanja

Funkciju brzine odredimo integracijom funkcije ubrzanja:

- Analitičko rješenje:

<u>1. interval ($0 \le t \le 5$ s):</u> $a_I = g$

$$v_I = \int_0^t a_I\,dt + v_0 = gt \quad \rightarrow \quad s_I = \int_0^t v_I\,dt + s_0 = \frac{gt^2}{2}$$

- *za t=5* $\rightarrow$ $v_I = 9{,}81 \cdot 5 = 49{,}05$ *m/s*

<u>2. interval ($5 \le t \le 8$ s)</u>

uvodi se vrijeme $t^* = t - 5$ (t^* se mjeri od pete sekunde)

$$a_{II} = -a_{max} + \frac{a_{max}}{3} t^*$$

Početna brzina u drugom intervalu jednaka je brzini na kraju prvog intervala:

$v_{02} = v_{I(t=5)} = 49{,}05$

U tekstu zadatka zadano je: u trećoj sekundi drugog intervala ($t^*=3$) ubrzanje a = 0 m/s^2, i brzina $v = 5{,}5$ *m/s* .

$$v_{II} = \int_0^{t^*} a_{II}\,dt^* + v_{02} \quad \rightarrow \quad v_{II} = 49{,}05 - a_{max} t^* + \frac{a_{max} t^{*2}}{3 \cdot 2}$$

za $t^* = 3s$, $v_{II} = 5{,}5$ *m/s* $\rightarrow$ $5{,}5 = 49{,}05 - 3\,a_{max} + a_{max}\dfrac{3^2}{6}$ $\rightarrow$ $a_{max} = 29{,}03$ *m/s*^{2}

<u>Maksimalno usporenje padobranca je $29{,}03$ *m/s*^{2}</u>

a) <u>Grafoanalitičko rješenje</u> (određeni integral jednak je površini ispod integrirane funkcije):

$v(t=5) = g\,t = 9{,}81 \cdot 5 = 49{,}05$ *m/s*

$v(t=8) = v_{(t=5)} - a_{max}\dfrac{3}{2} = 5{,}5 \quad \rightarrow \quad 49{,}05 - 5{,}5 = a\dfrac{3}{2} \quad \rightarrow \quad a_{max} = 29{,}03$ *m/s*^{2}

pripremila: doc.dr.sc.V.Raduka

2. Gibanje materijalne točke određeno je parametarski jednadžbama: x(t)=3t , y(t)=2 sin 3t . Treba odrediti:

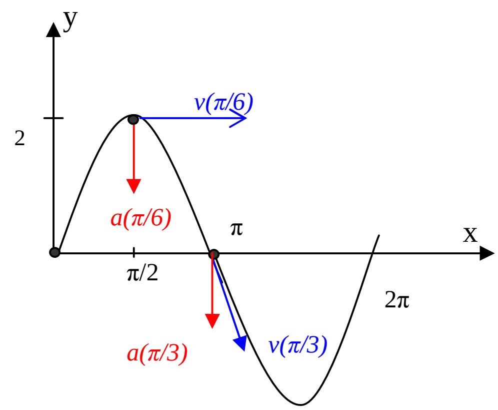
- **jednadžbu trajektorije, funkciju brzine, funkciju ubrzanja, i komponente a_T, a_N**
- **polumjer zakrivljenosti trajektorije po kojoj se giba točka u položaju koji odgovara trenutku presjecanja trajektorije i osi x.**

Jednadžba trajektorije *y(x)* odredi se eliminacijom vremena *t* iz parametarskih jednadžbi

$x = 3t \qquad y = 2\sin 3t$

$t = x/3 \qquad \underline{y = 2\sin x}$

Gibanje počinje u ishodištu (t=0).



- Brzina točke:

$v_x = \dot{x} = 3 \qquad v_y = \dot{y} = 6\cos 3t$

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \underline{\sqrt{9 + 36\cos^2 3t}}$

- Ubrzanje točke:

$a_x = \ddot{x} = 0\,, \qquad a_y = \ddot{y} = -18\sin 3t\,, \qquad a^T(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{72\cdot\cos 3t\cdot(-\sin 3t)\cdot 3}{2\sqrt{9+36\cos^2 3t}} = -\dfrac{54\sin 6t}{\sqrt{9+36\cos^2 3t}}$

$\underline{a(t) = -18\sin 3t} \qquad a^N = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{|v\times a|}{v} = \dfrac{54\sin 3t}{\sqrt{9+36\cos^2 3t}}$

kontrola: Provjera veličine ukupnog ubrzanja

$$a = \sqrt{\left(\frac{54\sin 3t}{\sqrt{9+36\cos^2 3t}}\right)^2 + \left(\frac{54\sin 6t}{\sqrt{9+36\cos^2 3t}}\right)^2} = \sqrt{\frac{54^2(\sin^2 3t + \sin^2 6t)}{9+36\cos^2 3t}} =$$

$$a = \sqrt{\frac{54^2\sin^2 3t(1+4\cos^2 3t)}{9(1+4\cos^2 3t)}} = 18\sin 3t$$

- Polumjer zakrivljenosti trajektorije: $\rho = \dfrac{v^3}{|\vec{v}x\vec{a}|}$, $\qquad \vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6\cos 3t & 0 \\ 0 & -18\sin 3t & 0 \end{vmatrix} = -54\sin 3t\vec{k}$

$$\rho(t) = \frac{(9+36\cos^2 3t)^{\frac{3}{2}}}{54\sin 3t}$$

Presjecište trajektorije po kojoj se točka giba i osi x određeno je jednadžbom $y = 0 \;\rightarrow\; 0 = 2\sin 3t$

$3t_1 = \pi \;\rightarrow\; t_1 = \dfrac{\pi}{3}\ s \;\rightarrow$ brzina: $\qquad v_1 = \sqrt{45} = 6{,}708\ m/s$

ubrzanje: $\qquad a_1 = 0\ \ m/s^2$

polumjer zakrivljenosti: $\qquad \rho_1 = \infty\ m$

Riješeni zadaci
KINEMATIKA TOČKE

Gibanje materijalne točke zadano je jednadžbama: x=3t , y=4t-3t² .
Treba odrediti polumjer zakrivljenosti trajektorije po kojoj se giba točka, u položaju koji odgovara trenutku presjecanja trajektorije po kojoj se giba točka i osi x.

Jednadžba trajektorije *y(x)* odredi se eliminacijom vremena *t* iz parametarskih jednadžbi

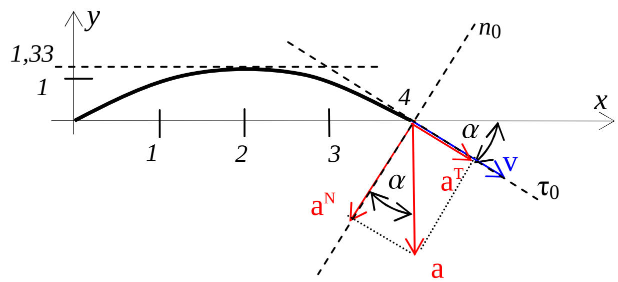
$x = 3t,$
$y = 4t\text{-}3t^2$

$y = 0 \Longrightarrow za\ t_1=0\ \ i\ \ \underline{t_2= 4/3\ s}$ (trenutak presjecanja osi x)

$x(4/3) = 3 \cdot 4/3 = 4m$

Trajektorija je parabola: $y = \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{3}$

$x = 3t, \quad \dot{x} = 3 \quad \ddot{x} = 0$
$y = 4t - 3t^2, \quad \dot{y} = 4 - 6t, \quad \ddot{y} = -6$



Zakon promjene brzine i ubrzanja:

$x=3t, \quad \dot{x} = 3, \quad \ddot{x} = 0$
$y = 4t - 3t^2, \quad \dot{y} = 4 - 6t, \quad \ddot{y} = -6$

$v = \sqrt{3^2 + (4-6t)^2} = \sqrt{9 + 16 - 48t + 36t^2} = \sqrt{25 - 48t + 36t^2}\ m/s$
$a = 6\ m/s^2$

$\underline{za\ t_2=4/3:}$

$v_2 = \sqrt{25 - 18 \cdot 4/3 + 36 \cdot 16/9} = \sqrt{25-0} = 5\ m/s$

Vektor brzine i vektor tangencijalne komponente ubrzanja su kolinearni vektori (smjer tangente).

$y' = \frac{4}{3} - \frac{2x}{3} \quad za \quad x = 4 \quad y' = -\frac{4}{3}, \quad y' = tg\ \alpha$ Isti nagib ima i vektor brzine:

$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{3}{5}, \quad a^N = a\cos\alpha = \frac{18}{5}, \quad a^T = a\sin\alpha = \frac{24}{5}$

Polumjer zakrivljenosti:

$$\rho = \frac{v^2}{a^N}$$

$$\rho_2 = \frac{25 \cdot 5}{18} = 6,94\ m$$

Iz kinematskih podataka polumjer zakrivljenosti trajektorije može se odrediti kako slijedi:

$$\vec{a} = \vec{a}^N + \vec{a}^T$$

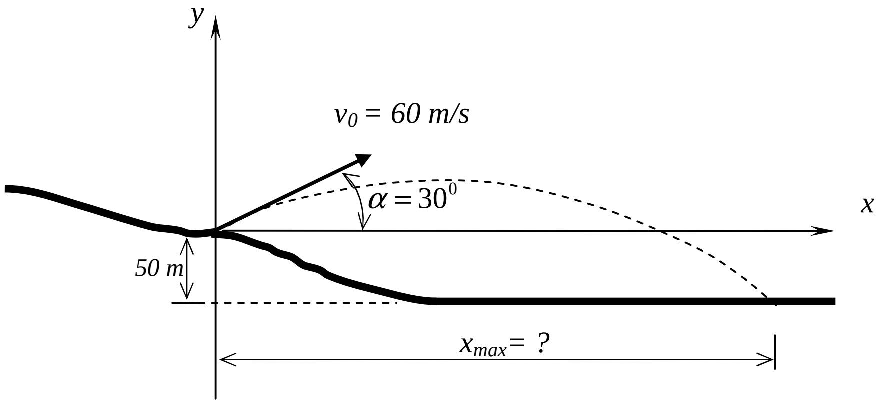
$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times \vec{a}^N + \vec{v} \times \vec{a}^T = \vec{v} \times \vec{a}^N$$

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = v \cdot a^N = v^3/\rho$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{5^3}{|(3\vec{i} - 4\vec{j}) \times (-6\vec{j})|} = 6,94\ m$$

pripremila: doc.dr.sc.V.Raduka

1. Tane je ispaljeno sa povišenog dijela prikazanog terena sa početnom brzinom $v = 60{,}0\ m/s$ **, pod kutem** $\alpha = 30^0$ **prema horizontali.**
Treba odrediti horizontalnu udaljenost do točke u kojoj će tane pasti na tlo i maksimalnu visinu do koje će tane dospjeti, ako zanemarimo otpor zraka ($x_{max}=?$, $y_{max}=?$**).**



Tane se giba u gravitacijskom polju, dakle poznate su koordinate vektora akceleracije u odabranom koordinatnom sustavu

$$a_x = 0, \text{ i } a_y = -g.$$

Koordinate vektora početne brzine određene su zadanim kutem i brzinom

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{i} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha\,.$$

Nakon integracije određene su komponente funkcije brzine

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \quad \text{i} \quad v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt\,,$$

i komponente funkcije položaja taneta

$$x(t) = tv_0 \cos\alpha \quad \text{i} \quad y(t) = tv_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Trenutku pada taneta na tlo pridružimo vrijeme t_1, i poznatu koordinatu y_1 u prikazanom koordinatnom sustavu.

$$y_1 = -50 = y(t) \quad \rightarrow \quad -50 = 60 \cdot 0{,}5 \cdot t - \frac{9{,}81 \cdot t^2}{2}$$

$$4{,}9\, t^2 - 30\, t - 50 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 980}}{9{,}8} = \frac{30 \pm 43{,}3}{9{,}8}$$

$t_1 = 7{,}48\ s$ (rješenje $t_2 < 0$ nije fizikalno realno)

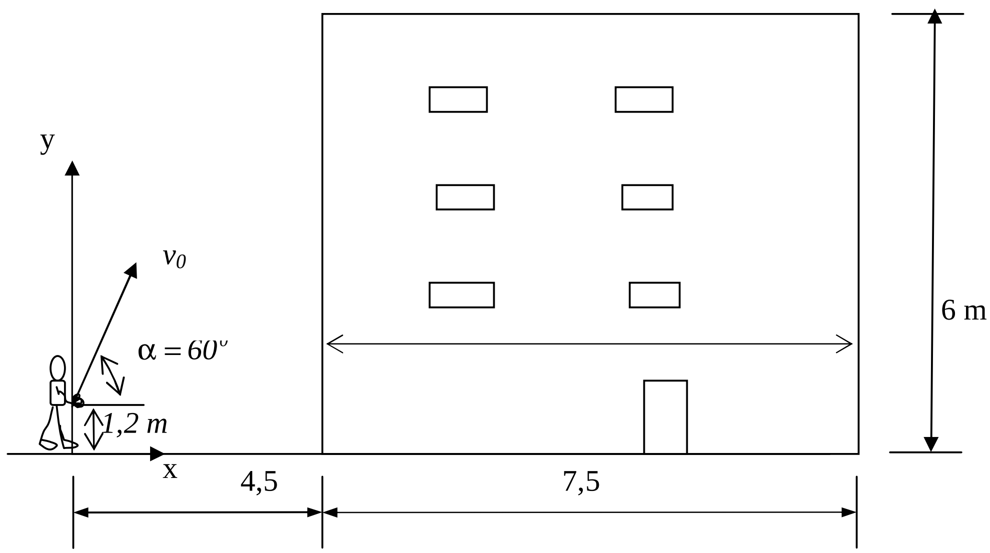
$$x_{max} = x(t_1) = 60 \cdot 0{,}866 \cdot 7{,}48 = 388\ m.$$

Maksimalna visina y_{max} odgovara položaju u kojem je tangenta horizontalna. Ako tom trenutku pridružimo vrijeme t_3, vertikalna komponenta brzine iščezava.

$$v_y = 0 = v_0 \sin\alpha - g \cdot t_3 = 30 - 9{,}81\, t_3 \quad \rightarrow \quad t_3 = \frac{30}{9{,}81} = 3{,}05\ s$$

$$y_{max} = y(t_3) = 60 \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}05 - \frac{9{,}81 \cdot 3{,}05^2}{2} = 45{,}78\ m.$$

2. Iz vatrogasnog šmrka voda izlazi brzinom $12\,{}^{m}\!/_{s}$ pod kutem α = 60^0 prema horizontali. Treba odrediti mjesto gdje će mlaz pogoditi krov, i granične vrijednosti brzine v_0 tako da mlaz vode dospije na krov.



$v_0 = 12\,{}^{m}\!/_{s}$

$x = t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha$

$y = y_0 + t \cdot v_0 \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$

Svakoj točki mlaza vode (sa koordinatama x i y), pridružen je zajednički trenutak - vrijeme t:

$t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$.

Trajektorija po kojoj putuju točke mlaza vode je:

$y = v_0 \sin\alpha \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} - \dfrac{g}{2} \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + y_0 = x \cdot tg\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + y_0$

Da mlaz dospije na krov mora zadovoljiti uvjete: $y=6m$, i $4{,}5m \le x \le 12m$

Za y = 6 → $0{,}1362x^2-1{,}732x+4{,}8=0$

$x = \dfrac{1{,}732 \pm \sqrt{2{,}999 - 2{,}61504}}{0{,}2724} = \dfrac{1{,}732 \pm 0{,}612}{0{,}2721}$ → $x_1=3{,}8\ m$, $\underline{x_2=8{,}6\ m}$, → $\Delta x = 8{,}6 - 4{,}5 = 4{,}1m$

Mlaz pada na krov u točki udaljenoj za *4,1 m* od bližeg ruba krova.
Granične vrijednosti brzine v_0:

$y = xtg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + y_0$

- za $x=4{,}5m$ → $6=4{,}5\cdot 1{,}73-\dfrac{9{,}81 \cdot 4{,}5^2}{2 \cdot 0{,}25 v_0^2}+1{,}2$

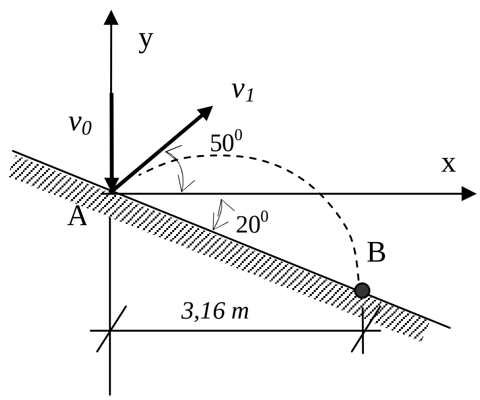
$2{,}985=\dfrac{9{,}81 \cdot 20{,}25}{0{,}5 \cdot v_0^2}$ → $v_{0\,1} = 11{,}52\,{}^{m}\!/_{s}$,

- za $x = x_2 = 12m$ istim postukom → $v_{0\,2} = 13{,}3\,{}^{m}\!/_{s}$

$\underline{11{,}54\,{}^{m}\!/_{s} \le v_0 \le 13{,}3\,{}^{m}\!/_{s}}$

pripremila: doc.dr.sc.V.Raduka

3. Kuglica padne vertikalno na kosu podlogu u točki A i odbije se pod kutem 40^0 mjereno prema vertikali, tako da nakon toga opet udari u podlogu u točki B. Kolika je brzina v_1 i koliko sekundi će proći dok kuglica iz položaja A dospije u položaj B.



Gibanje kuglice nakon odbijanja od podloge u točki A:
Početna brzina:

$$v_{1x} = v_1 \cos 50^0$$

$$v_{1y} = v_1 \sin 50^0$$

Zakon gibanja kuglice u parametarskom obliku (kosi hitac):

$$x(t) = v_1\, t \cos 50^0 \qquad \text{.........................}(1)$$

$$y(t) = v_1\, t \sin 50^0 - 0{,}5\, g\, t^2 \qquad \text{..............}(2)$$

Kosa podloga definirana je jednadžbom $y(x) = -\,x\, tg\, 20^0$ ....(3)

Kuglica pada na kosinu u točki B: $x_B = 3{,}16\ m$.

Iz jednadžbi *1, 2, i 3* za zadani x_B (uvijet da je kuglica dospijela u točku B), odredimo brzinu koju kuglica mora imati u točki A, i vrijeme za prijeđeni put:

$$x_B = v_1\, t \cos 50^0$$

$$v_1\, t \sin 50^0 - \frac{gt^2}{2} = -\,x_B\, tg 20^0$$

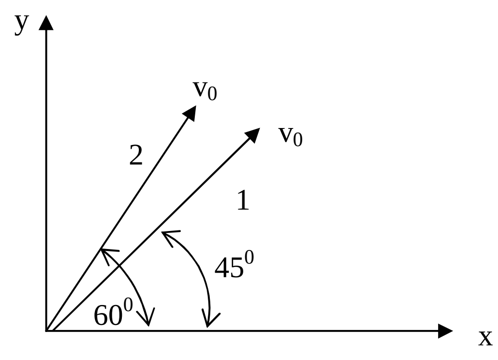
$$t = \frac{x_B}{v_1 \cos 50^0} = \frac{3{,}16}{v_1 \cos 50^0}$$

$$-3{,}16\ tg 20^0 = v_1 \frac{3{,}16}{v_1 \cos 50^0} \sin 50^0 - \frac{9{,}81}{2} \frac{3{,}16^2}{v_1^2 \cos^2 50^0}$$

$$v_1 = 4{,}91054\ m/s$$

$$t = 1{,}00113\ s$$

4. Top ispali dva projektila sa istog mjesta i sa jednakom početnom brzinom v_0 =800m/s , usmjerene pod različitim kutevima $\alpha_1 = 45^0$ i $\alpha_2 = 60^0$. Treba odrediti koliko sekundi mora proći između ispaljivanja da bi se projektili sudarili.



Da bi se projektili sudarili moraju se u jednom trenutku naći na istom položaju. Vrijeme t^* za opis gibanja drugog projektila, počinje se mjeriti Δt sekuni nakon ispaljivanja prvog ($t^* = t + \Delta t$), dakle mora biti:

$x_1(t) = x_2(t^*)$ i $y_1(t) = y_2(t^*)$

Jednadžbe za kosi hitac u općem obliku su: $x(t) = v_0 \cdot t \cos\alpha$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$x_1(t) = x_2(t^*) \rightarrow \quad v_0\, t \cos\alpha_1 = v_0\, t^* \cos\alpha_2$ ....(1)

$y_1(t) = y_2(t^*) \rightarrow \quad v_0\, t \sin\alpha_1 - \dfrac{gt^2}{2} = v_0\, t^* \sin\alpha_2 - \dfrac{g}{2} t^{*2}$ ....(2)

iz (1) $\rightarrow \quad t^* = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\, t$

$$v_0\, t \sin\alpha_1 - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha_2 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\, t - \frac{g}{2} \frac{(\cos\alpha_1)^2}{(\cos\alpha_2)^2}\, t^2$$

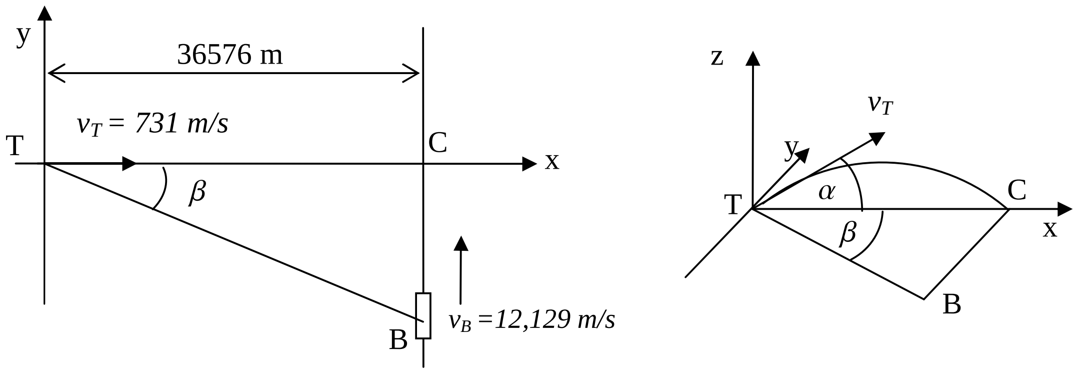
$t = 84{,}4262$ s

$t^* = 119{,}397$ s

$\underline{\Delta t = 34{,}9705 \text{ s}}$

Riješeni zadaci
KINEMATIKA TOČKE

Brod B plovi brzinom v_B=12,129m/s=const. prema sjeveru. Top T treba sa obale rijeke pogoditi brod u trenutku kada mu je najbliže. Početna brzina taneta je v_T = 731 m/s. Položaj topa na obali udaljen je 36,576 km od linije plovidbe broda.
Treba odrediti:
a) pod kojim kutem α, prema horizontali treba ispaliti tane?
b) u kojem položaju mora biti brod u odnosu na top, da bi ga tane pogodilo?



Tane mora pogoditi brod u točki C, što znači da će za vrijeme gibanja taneta od T do C, brod prijeći put od B do C . Pri tome su trajektorije BC i TC vezane relacijom:

$$d_{BC} = x_C \ tg\,\beta$$

$$x_C = 36576 \ m$$

Brod B plovi konstantnom brzinom po pravcu, pa vrijedi:

$$s_B = d_{BC} = v_B \, t \qquad ....(1)$$

Za tane vrijede jednadžbe kosog hitca u ravnini x-z:

$$x_T = v_T \ t \cos\alpha$$

$$z_T = v_T \cdot t \cdot \sin\alpha - g \cdot \frac{t^2}{2}$$

U trenutku pogotka je:

$$z_T = 0 \quad \rightarrow \quad v_T \sin\alpha = \frac{g \cdot t}{2} \qquad ....(2)$$

$$x_T = x_C \quad \rightarrow \quad v_T \ t \cos\alpha = 36576 \qquad ....(3)$$

$$s_B = d_{BC} \quad \rightarrow \quad v_B \ t = x_C \ tg\,\beta \qquad ....(4)$$

iz *(4)* $\rightarrow$ $t = \dfrac{x_C \cdot tg\beta}{v_B} = \dfrac{36576 \cdot tg\beta}{12{,}129}$

uvrstimo *t* u *(2) i (3)* $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 731 \cdot \sin\alpha &= \frac{g}{2} \cdot \frac{36576 \cdot tg\beta}{12{,}129} \\ 731 \cdot \frac{36576 \cdot tg\beta}{12{,}129} \cos\alpha &= 36576 \end{aligned}\right\}$$

Ovaj sustav jednadžbi riješimo po α i β (koristimo transformaciju $2 \sin\alpha \ \cos\alpha = \sin 2\alpha$)

Moguća su dva rješenja: 1. rjesenje: $\underline{\alpha = 21{,}09^0}$, $\underline{\beta = 1{,}0188^0}$, $\underline{d_{BC} = 650{,}453 \ m}$
2. rjesenje: $\underline{\alpha = 68{,}91^0}$, $\underline{\beta = 2{,}640^0}$, $\underline{d_{BC} = 1686.52 \ m}$

pripremila: doc.dr.sc.V.Raduka