

1. Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

1.1. Vjerojatnosni prostor

Familija \mathcal{A} podskupova od Σ jest algebra skupova (na Σ) ako je

$$A1. \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$A2. A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A3. A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}.$$

Familija \mathcal{F} podskupova od Σ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Sigma)$) jest σ -algebra skupova (na Σ) ako je

$$F1. \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$F2. A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$F3. A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Neka je \mathcal{F} σ -algebra na skupu Σ . Uređen par (Σ, \mathcal{F}) zove se izmjeriv prostor. Neka je (Σ, \mathcal{F}) izmjeriv prostor. Funkcija $P : \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{R}$ jest vjerojatnost (na \mathcal{F} , na Σ) ako vrijedi

$$P1. P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}; P(\Sigma) = 1$$

$$P2. A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N} \text{ i } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ za } i \neq j \text{ (skupovi su disjunktni)}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uređena trojka (Σ, \mathcal{F}, P) gdje je \mathcal{F} σ -algebra na Σ , P vjerojatnost na \mathcal{F} , zove se vjerojatnosni prostor. Elemente σ -algebre \mathcal{F} zovemo događaji, a broj $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$ zove se vjerojatnost događaja A .

1.2. Slučajna varijabla

Neka je (Σ, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Sigma \Rightarrow \mathbf{R}$ jest slučajna varijabla (na Σ) ako je $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$ ($X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$). Neka je (Σ, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor i $X : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^n$. Kažemo da je X n -dimenzionalni slučajni vektor (na Σ) ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svako $B \in \mathcal{B}^n$, $X^{-1}(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{F}$. Neka je X slučajna varijabla na Σ . Funkcija distribucije slučajne varijable X jest funkcija $F_X : \mathbf{R} \Rightarrow [0, 1]$ definirana sa

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P\{\omega \in \mathbf{R}; X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}, x \in \mathbf{R}. \quad (1.2.1)$$

Neka je X slučajni vektor, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Funkcija distribucije slučajnog vektora X jest funkcija $F_X : \mathbf{R}^n \Rightarrow [0, 1]$ definirana sa

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) P_X((-\infty, x]) = P\{X \leq x\} = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \\ &= P\{\omega \in \Sigma; X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Matematičko očekivanje (ili očekivanje) slučajne varijable X definirano je sa

$$E[X] = \int_{\Sigma} X(\omega) P(\omega) d\omega \quad (1.2.3)$$

$E[X^r]$ zovemo r -ti moment od X , a $E(|X^r|)$ zovemo r -ti apsolutni moment od X . Neka $E[X]$ postoji (u stvari, neka je konačno). Tada $E[(X - E[X])^r]$ zovemo r -ti centralni moment od X , a $E[|X - E[X]|^r]$ zovemo r -ti apsolutni centralni moment od X . Varijanca od X jest drugi centralni moment od X ,

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] \quad (1.2.4)$$

Standardna devijacija od X pozitivan je korijen varijance, $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$.

1.3. Karakterizacija funkcija slučajnih varijabli

Promatramo slučajnu varijablu Y kao funkciju slučajne varijable X , $Z = f(X)$, za koju znamo očekivanje X_0 i varijancu σ_X^2 . Potrebno je definirati očekivanje i varijancu slučajne varijable Y . Slučajnu varijablu Y , kao funkciju slučajne varijable X možemo raspisati u obliku Taylorovog reda oko očekivanja slučajne varijable X .

$$\begin{aligned} Y &= f(X) \\ &= f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0) + \frac{f''(X_0)}{2!}(X - X_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(X_0)}{i!} (X - X_0)^i \quad . \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Za očekivanje slučajne varijable Y sada slijedi jednostavna ovisnost o očekivanju slučajne varijable X

$$E[Y] = f(X_0) = f(E[X]) \quad . \quad (1.3.6)$$

Aproksimacija vrijednosti varijance slučajne varijable Y slijedi primjenom definicije varijance i uzimanjem u obzir samo prva dva člana u Taylorovom redu (linearni članovi) zbog jednostavnije daljnje analize

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E[(Y - E[Y])^2] \\ &= E[(f(X) - E[f(X)])^2] \\ &\approx E[(X_0 + f'(X_0)(X - X_0) - X_0)^2] \\ &= E[(f'(X_0)(X - X_0))^2] \\ &= (f'(X_0))^2 E[(X - X_0)^2] \\ &= (f'(X_0))^2 \sigma_X^2 \quad . \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Ako slučajnu varijablu Z definiramo kao produkt dviju nekoreliranih slučajnih varijabli X i Y , $Z = XY$, tada za očekivanje i varijancu slučajne varijable Z slijedi

$$E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y] \quad , \quad (1.3.8)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{XY}^2 = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + X_0^2 \sigma_Y^2 + Y_0^2 \sigma_X^2 \quad . \quad (1.3.9)$$

1.4. Slučajna polja

Neka je (Σ, \mathcal{F}, P) vjerojatnosti prostor i neka je $T = \mathbf{R}$ ili je T interval na \mathbf{R} . Familiju $\{X_t, t \in T\}$ slučajnih varijabli na Σ zovemo **slučajni proces**. S obzirom na karakter promjena u zadaći jednadžbe ploče, možemo za daljnju analizu promatrati samo stacionarne procese, procese konstantne u vremenu. Promatramo područje $\Omega \in \mathbf{R}^n$. Neka za svaku proizvoljnu konkretnu točku $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ imamo definiranu slučajnu varijablu $g_{\mathbf{x}}$ konstantnu po vremenu. Familiju slučajnih varijabli na cijelom zadanom području Ω nazivamo **slučajno polje** i označavamo $g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Slučajno polje je **homogeno** ako funkcija distribucije ne ovisi o izboru točke nego o odnosu točaka.

Kovarijancu vrijednosti slučajnog polja $g(\mathbf{x})$ u dvije različite točke \mathbf{x} i \mathbf{x}' zovemo **kovarijancna, korelacijska ili autokorelacijska funkcija** i označavamo

$$\begin{aligned} cvf_g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &:= \text{Cov}[g(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}')] \\ &= E[g(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}')] - E[g(\mathbf{x})]E[g(\mathbf{x}')] \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Koeficijent korelacije između $f(\mathbf{x})$ i $f(\mathbf{x}')$ označavamo

$$crf_g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \frac{\text{Cov}[g(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}')] }{\sigma(g(\mathbf{x}))\sigma(g(\mathbf{x}'))} , \quad (1.4.11)$$

pri čemu postoje izvori koji i koeficijent korelacije nazivaju korelacijska funkcija. Za homogeno slučajno polje $g(\mathbf{x})$ vrijedi

$$\begin{aligned} cvf_g(\mathbf{x}), (\mathbf{x}') &= cvf_g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= cvf_g(\zeta) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

gdje je $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots, x_n - x'_n)$, što u stvari znači da vrijednost ne ovisi o apsolutnom izboru točaka nego samo o relativnom odnosu točaka \mathbf{x} i \mathbf{x}' . Za homogeno slučajno polje $g(\mathbf{x})$ uvodimo standardnu oznaku za autokorelacijsku funkciju $R_{gg}(\zeta)$. Za autokorelacijsku funkciju vrijedi

$$R_{gg}(0) = \sigma_g^2 . \quad (1.4.13)$$

1.5. Spektralna dekompozicija slučajnih polja

Svako slučajno polje $g(\mathbf{x})$ može biti prikazano kao zbroj očekivanja slučajnog polja, $E[g(\mathbf{x})]$, i $2K$ nezavisnih slučajnih sinusoidalnih elementarnih funkcija $g_K(\mathbf{x})$ s pripadnim frekvencijama $\omega_k = \pm[\Delta\omega(2K - 1)/2]$, slučajnim amplitudama C_K i slučajnim faznim kutevima Ψ_K u obliku

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= E[g(\mathbf{x})] + \sum_{-K}^K g_K(\mathbf{x}) \\ &= E[g(\mathbf{x})] + \sum_{-K}^K C_K \cos(\omega_K t + \Psi_K) . \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Fazni kutevi Ψ_K slučajne su varijable s uniformnom razdiobom na intervalu $[0, 2\pi]$. Za elementarne slučajne funkcije $g_K(\mathbf{x})$ vrijedi

$$E[g_K(\mathbf{x})] = 0 , \quad (1.5.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{g_K}^2 &= E[g_K^2(\mathbf{x})] \\ &= E[C_K^2] E[\cos^2(\omega_K t + \Psi_K)] \\ &= \frac{1}{2} E[C_K^2] . \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Za varijancu slučajnog polja $g(\mathbf{x})$ sada vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma_g^2 &= \sum_{-K}^K \sigma_{g_K}^2 \\ &= \sum_{-K}^K \frac{1}{2} E[C_K^2] . \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Varijancu σ_g^2 možemo sada razdijeliti po diskretnim frekvencijama ω_K i uvesti funkciju spektralne mase $S_{gg}(\omega_K)\Delta\omega$ definiranu sa

$$S(\omega_K)\Delta\omega = \frac{1}{2} E[C_K^2] . \quad (1.5.18)$$

Sada očito slijedi novi izraz za varijancu slučajnog polja g

$$\begin{aligned}\sigma_g^2 &= \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{-K}^K S_{gg}(\omega_K) \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\omega) d\omega\end{aligned}\quad (1.5.19)$$

pri čemu funkciju $S_{gg}(\omega)$ nazivamo funkcija spektralne gustoće slučajnog polja $g(x)$. Između autokorelacijske funkcije i funkcije spektralne gustoće postoji međusobna funkcijska ovisnost u obliku Fourierove ili Wiener-Khintchineove transformacije za izražavanje autokorelacijske funkcije na temelju poznate funkcije spektralne gustoće

$$R_{gg}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega \quad , \quad (1.5.20)$$

odnosno inverzni oblik prethodne transformacije za izražavanje funkcije spektralne gustoće na temelju poznate autokorelacijske funkcije

$$S_{gg}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\zeta} R_{gg}(\zeta) d\zeta \quad , \quad (1.5.21)$$

pri čemu je n dimenzija prostora na kojem je definirano područje Ω (u analizi zadatke savijanja ploče $n = 2$).

1.6. Doob-Dynkinova lema

Za matematičku formulaciju metode težinskih integrala potrebno je iskazati Doob-Dynkinovu lemu. Skup svih σ -algebri od Ω koji sadrže skup U označavamo

$$\mathcal{H}_U = \cup \{ \mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ } \sigma\text{-algebra od } \Omega, u \subset \mathcal{H} \} \quad , \quad (1.6.22)$$

i zovemo σ -algebra generirana sa U . Ako je U skup svih itvorenih skupova topološkog prostora Ω , skup $\mathcal{B} = \mathcal{H}_U$ zovemo Borelova σ -algebra na Ω , čije elemente $B \in \mathcal{B}$ zovemo Borelovi skupovi.

Neka je (Ω, \mathcal{F}, p) vjerojatnosni prostor, tada funkciju $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ zovemo \mathcal{F} -izmjeriva ako

$$Y^{-1}(U) := \{ \omega \in \Omega : Y(\omega) \in U \} \in \mathcal{F} \quad (1.6.23)$$

za sve otvorene skupove $U \in \mathbf{R}^n$. Ako je $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ bilo koja funkcija, tada je σ -algebra \mathcal{H}_X generirana sa X najmanja σ -algebra na Ω koja sadrži sve skupove $X^{-1}(U)$, $U \subset \mathbf{R}^n$, U otvoren skup. Neka je skup $\mathcal{H}_x = \{ X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$, gdje je \mathcal{B} Borelova σ -algebra na \mathbf{R}^n , tada je X \mathcal{H}_X -izmjeriva funkcija, a \mathcal{H}_X najmanja takva σ -algebra.

Lema 1. (Doob-Dynkinova lema, ([?], str. 9)) *Ako su dane funkcije $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$. Tada je Y \mathcal{H}_X -izmjeriva ako i samo ako postoji Borel-izmjeriva funkcija $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ takva da je $Y = g(X)$.*

Dokaz leme može se naći u knjizi [?].

2. Varijabilnost fizikalnih i geometrijskih karakteristika ploče

2.1. Neizvjesnost vrijednosti ulaznih parametara

Standardni numerički proračun konstrukcija metodom konačnih elemenata svodi se u pravilu na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Za definiranje matrice krutosti konstrukcije potrebno je prije proračuna znati eksplicitno izražene vrijednosti fizikalnih i geometrijskih karakteristika konstrukcije. U standardnim determinističkim numeričkim proračunima, ulazni fizikalni i geometrijski parametri su determinističke vrijednosti, a vrijednosti su ovisne o izboru gradiva i unaprijed pretpostavljenim dimenzijama konstrukcije. Svako realizirano stanje konstrukcije rezultiralo bi vrijednostima različitim u odnosu na projektirane vrijednosti i vrijednosti realizirane kod prethodnih realizacija. Stvarno realizirano stanje konstrukcije zapravo je takvo da u svakoj točki konstrukcije fizikalna (modul elastičnosti) i geometrijska (dimenzije poprečnih presjeka) svojstva konstrukcije poprimaju određenu neizvjesnu vrijednost koja ne mora biti jednaka prethodno, za deterministički numerički proračun, definiranoj vrijednosti. Vrijednosti fizikalnih i geometrijskih svojstava konstrukcije u različitim točkama u stvarnom, konačno izvedenom stanju konstrukcije ne poprimaju jednaku vrijednost. Svako fizikalno i geometrijsko svojstvo u svakoj točki konstrukcije možemo definirati kao slučajna varijabla. Utjecaj promjene pojedinog parametra u nekoj točki konstrukcije odražava se svakako i na promjenu tog parametra u točkama u okolini, u određenom promjeru od te točke, što znači da je svako neizvjesno fizikalno ili geometrijsko svojstvo konstrukcije potrebno definirati kao slučajno polje na cijeloj konstrukciji.

2.2. Definiranje neizvjesnosti vrijednosti fizikalnih i geometrijskih svojstava elemenata konstrukcije

2.2.1. Definiranje neizvjesnosti vrijednosti fizikalnih i geometrijskih svojstava grede

Promatramo gredu duljine L ($x \in [0, L] = \Omega$) s težišnom osi u smjeru osi x . Na gredi odaberemo proizvoljnu točku $x \in \Omega$. Neka je proizvoljna karakteristika grede $K(x)$ u toj proizvoljnoj konkretnoj točki x jednodimenzionalna slučajna varijabla s pripadnim očekivanjem $K_0(x)$ i varijancom $\sigma_K^2(x)$. Uz pretpostavku da su očekivanje i varijanca jednake za svaku točku $x \in \Omega$, što možemo označiti sa K_0 i σ_K^2 , imamo familiju jednodimenzionalnih slučajnih varijabli, što je u stvari jednodimenzionalno homogeno slučajno polje $K(x)$ na području Ω . Takvo jednodimenzionalno slučajno polje na području Ω možemo definirati u obliku

$$K(x) = K_0[1 + k(x)] \quad , \quad (2.2.1)$$

pri čemu je $k(x)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje s očekivanjem jednakim 0 odnosno ($E[k(x)] = 0, \forall x \in \Omega$) i varijancom σ_{kk}^2 koja ujedno predstavlja i promjenu karakteristike $K(x)$ grede oko pripadnog očekivanja K_0 . Pretpostavljamo da vrijedi $|k(x)| \ll 1$ kako bi bilo zadovoljeno realno stanje relativno male varijabilnosti ulaznih parametara konstrukcije $E[k^2(x)] \ll 1$. S obzirom na karakter fizikalnih i geometrijskih karakteristika grede, vrijednosti takvih jednodimenzionalnih slučajnih polja u stvarnoj situaciji ne mogu poprimiti negativnu vrijednosti, pretpostavljamo za matematičku for-

mulaciju zadaće da je jednodimenzionalno slučajno polje $k(x)$ ograničeno sa

$$-1 + \rho \leq k(x) \leq 1 - \rho, \quad 0 < \rho < 1 \quad , \quad (2.2.2)$$

pri čemu je gornja granica definirana zbog simetrije.

Varijanca tako definiranog slučajnog polja između dvije konkretne točke na gredi, x i x' , može biti karakterizirana kovarijančnom ili autokorelacijskom funkcijom, koju označavamo sa $R_{kk}(x, x')$, definiranom sa

$$R_{kk}(x, x') = E[k(x)k(x')] \quad . \quad (2.2.3)$$

Ako karakteristiku grede definiramo kao homogeno jednodimenzionalno slučajno polje, tada vrijedi da autokorelacijska funkcija ovisi samo o udaljenosti dviju točaka, $(x - x') = \zeta$, odnosno

$$R_{kk}(\zeta) = E[k(x)k(x')] \quad . \quad (2.2.4)$$

Drugi način za karakterizaciju tako definiranog slučajnog polja je pomoću funkcije spektralne gustoće $S_{kk}(\kappa)$ funkcije $k(x)$ s valnim brojem κ . Za funkciju spektralne gustoće vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\kappa) d\kappa = \sigma_{kk}^2 \quad . \quad (2.2.5)$$

Veza između autokorelacijske funkcije $R_{kk}(\zeta)$ i funkcije spektralne gustoće $S_{kk}(\kappa)$ je Wiener-Khintchineova ili Fourierova transformacija, (1.5.20),

$$R_{kk}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\kappa) e^{i\kappa\zeta} d\kappa \quad , \quad (2.2.6)$$

ili inverzni oblik transformacije za jednodimenzionalnu zadaću , (1.5.21),

$$S_{kk}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kk}(\zeta) e^{-i\kappa\zeta} d\zeta \quad . \quad (2.2.7)$$

Vrijednost autokorelacijske funkcije $R_{kk}(\zeta)$ u točki $\zeta = 0$ jest zapravo σ_{kk}^2 , varijanca polja $k(x)$, ($\sigma_{kk}^2 = E[k(x)^2]$ zbog $E[k(x)] = 0$), (1.4.13),

$$\begin{aligned} R_{kk}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\kappa) d\kappa \\ &= E[k(x)] = \text{Var}[k(x)] = \sigma_{kk}^2. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

2.2.2. Definiranje neizvjesnosti vrijednosti fizikalnih i geometrijskih svojstava ploče

Promatramo pravokutnu ploču dimenzija $L_x \times L_y$ ($(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] = \Omega$) sa središnjom ravninom u ravnini xy . Na ploči odaberemo proizvoljnu točku $(x, y) \in \Omega$. Neka je proizvoljna karakteristika ploče $K(x, y)$ u toj proizvoljnoj konkretnoj točki (x, y) dvodimenzionalna slučajna varijabla s pripadnim očekivanjem $K_0(x, y)$ i varijancom $\sigma_K^2(x, y)$. Uz pretpostavku da su očekivanje i varijanca jednake za svaku točku $(x, y) \in \Omega$,

što možemo označiti sa K_0 i σ_K^2 , imamo familiju dvodimenzionalnih slučajnih varijabli, što je u stvari dvodimenzionalno homogeno slučajno polje $K(x, y)$ na području Ω . Takvo dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω možemo definirati u obliku

$$K(x, y) = K_0[1 + k(x, y)] \quad , \quad (2.2.9)$$

pri čemu je $k(x, y)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje s očekivanjem jednakim 0 odnosno ($E[k(x, y)] = 0, \forall(x, y) \in \Omega$) i varijancom σ_{kk}^2 koja ujedno predstavlja i promjenu karakteristike ploče $K(x, y)$ oko pripadnog očekivanja K_0 . Pretpostavljamo da vrijedi $|k(x, y)| \ll 1$ kako bi bilo zadovoljeno realno stanje relativno male varijabilnosti ulaznih parametara konstrukcije $E[k^2(x, y)] \ll 1$. S obzirom na karakter fizikalnih i geometrijskih karakteristika ploče, vrijednosti takvih dvodimenzionalnih slučajnih polja u stvarnoj situaciji ne mogu poprimiti negativnu vrijednosti, pretpostavljamo za matematičku formulu zadatice da je dvodimenzionalno slučajno polje $k(x, y)$ ograničeno sa

$$-1 + \rho \leq k(x, y) \leq 1 - \rho, \quad 0 < \rho < 1 \quad , \quad (2.2.10)$$

pri čemu je gornja granica definirana zbog simetrije kao i u jednodimenzionalnom slučaju.

Varijanca tako definiranog slučajnog polja između dvije konkretne točke na ploči, (x, y) i (x', y') karakteriziramo kovarijancnom ili autokorelacijskom funkcijom, $R_{kk}((x, y), (x', y'))$, definiranom sa

$$R_{kk}((x, y), (x', y')) = E[k(x, y)k(x', y')] \quad . \quad (2.2.11)$$

Ako karakteristiku ploče definiramo kao homogeno dvodimenzionalno slučajno polje, tada vrijedi da autokorelacijska funkcija ovisi samo o udaljenosti dviju točaka, $(x - x', y - y') = (\zeta_1, \zeta_2) = \zeta$, odnosno

$$R_{kk}(\zeta_1, \zeta_2) = E[k(x, y)k(x', y')] \quad . \quad (2.2.12)$$

Drugi način za karakterizaciju tako definiranog slučajnog polja je pomoću funkcije spektralne gustoće $S_{kk}(\boldsymbol{\kappa})$ funkcije $k(x, y)$ s valnim brojem $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$. Za funkciju spektralne gustoće vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} = \sigma_{kk}^2 \quad . \quad (2.2.13)$$

Veza između autokorelacijske funkcije $R_{kk}(\zeta)$ i funkcije spektralne gustoće $S_{kk}(\boldsymbol{\kappa})$ je Wiener-Khintchineova ili Fourierova transformacija, (1.5.20), u dvodimenzionalnom slučaju

$$R_{kk}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\zeta} d\boldsymbol{\kappa} \quad , \quad (2.2.14)$$

ili inverzni oblik transformacije za dvodimenzionalnu zadaću , (1.5.21),

$$S_{kk}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kk}(\zeta) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\zeta} d\zeta \quad . \quad (2.2.15)$$

Vrijednost autokorelacijske funkcije $R_{kk}(\zeta)$ u točki $\zeta = \mathbf{0}$ jest zapravo σ_{kk}^2 , varijanca polja $k(x, y)$, ($\sigma_{kk}^2 = E[k(x, y)^2]$ zbog $E[k(x, y)] = 0$), (1.4.13),

$$\begin{aligned} R_{kk}(\mathbf{0}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{kk}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \\ &= E[k(x, y)^2] = \text{Var}[k(x, y)] = \sigma_{kk}^2. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

2.3. Varijabilnost fizikalnih karakteristika elemenata konstrukcija

2.3.1. Varijabilnost modula elastičnosti grede

Modul elastičnosti kao fizikalna karakteristika grede, zbog same strukture gradiva nije konstantna veličine duž grede. Za modul elastičnosti pretpostavljamo da je homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području $\Omega = [0, L]$,

$$E(x) = E_0 [1 + e(x)] \quad , \quad (2.3.17)$$

pri čemu je E_0 očekivanje modula elastičnosti jednako u svim točkama grede, $E_0(x) = \text{const.}$, a $e(x, y)$ homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području Ω s očekivanjem jednakim nuli ($E[e(x)] = 0$), varijancom σ_{ee}^2 i ograničeno sa

$$-1 + \rho_e \leq e(x) \leq 1 - \rho_e, \quad 0 < \rho_e < 1 \quad (2.3.18)$$

kako bismo izbjegli, u stvarnom stanju u potpunosti nemoguće, negativne vrijednosti modula elastičnosti.

2.3.2. Varijabilnost modula elastičnosti ploče

Modul elastičnosti kao fizikalna karakteristika ploče, zbog same strukture gradiva nije konstantna veličine duž ploče. Za modul elastičnosti pretpostavljamo da je homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području $\Omega = [0, J_x] \times [0, L_y]$,

$$E(x, y) = E_0 [1 + e(x, y)] \quad , \quad (2.3.19)$$

pri čemu je E_0 očekivanje modula elastičnosti, jednako u svim točkama ploče, a $e(x, y)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω s očekivanjem jednakim nuli ($E[e(x, y)] = 0$), varijancom σ_{ee}^2 i ograničeno sa

$$-1 + \rho_e \leq e(x, y) \leq 1 - \rho_e, \quad 0 < \rho_e < 1 \quad (2.3.20)$$

kako bismo izbjegli, u stvarnom stanju u potpunosti nemoguće, negativne vrijednosti modula elastičnosti.

2.3.3. Proračun varijabilnosti modula elastičnosti

S obzirom da se projektirana konstrukcija izvodi praktički samo jednom, nemoguće je sagledati cijeli skup mogućih realizacija i proračunati parametre neizvjesnosti. Kao procjena neizvjesnosti možemo koristiti realizacije nekoliko sličnih konstrukcija ili analizu jedne izvedbe konstrukcije i proračunate parametre koristiti ujedno i kao parametre neizvjesnosti na skupu svih mogućih realizacija. Za svaku konstrukciju možemo ustanoviti pojedine fizikalne karakteristike. Kao jedan od mogućih praktičnih postupaka, ispitivanje je tlačne čvrstoće armiranobetonske ploče u nizu točaka na ploči sklerometrom ili uzimanjem uzoraka za laboratorijsko ispitivanje i naknadnim utvrđivanjem tlačne čvrstoće. Propisom (Pravilnik za beton i armirani beton, Sl.l. 11/87) definirana je funkcija modula elastičnosti u ovisnosti o tlačnoj čvrstoći betona koja glasi

$$E = 9250 (f_B + 10)^{\frac{1}{3}} = g(f_B) \quad , \quad (2.3.21)$$

gdje je f_B tlačna čvrstoća betona u MPa. Na temelju skupa podataka dobivenih ispitivanjem tlačne čvrstoće u nizu točaka, možemo izračunati očekivanje f_{B0} , varijancu $\text{Var}[f_B] = \sigma_{f_B}^2$ i koeficijent varijacije COV_{f_B} tlačne čvrstoće. Na temelju izračunatih podataka za tlačnu čvrstoću, potrebno je izračunati vrijednosti koje karakteriziraju varijabilnost modula elastičnosti. Očekivanje modula elastičnosti aproksimiramo determinističkom vrijednosti danog izraza, (1.3.6),

$$E_0 = 9250 (f_{B0} + 10)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.3.22)$$

Varijancu modula elastičnosti aproksimiramo izrazom u ovisnosti o varijanci čvrstoće, (1.3.7),

$$\text{Var}[E] \approx \left[\left(\frac{dg}{df_B} \right)_{f_B=f_{B0}} \right]^2 \text{Var}[f_B] , \quad (2.3.23)$$

gdje je $g(f_B)$ zadana funkcijska ovisnost čvrstoće i modula elastičnosti, što pri zadanoj konkretnoj funkcijskoj ovisnosti, (2.3.21), povlači

$$\text{Var}[E] \approx \frac{9250^2}{9} (f_{B0} + 10)^{-4/3} \text{Var}[f_B] , \quad (2.3.24)$$

odnosno izraz za koeficijent varijacije modula elastičnosti

$$\begin{aligned} \text{COV}_E &\approx \frac{\sqrt{\frac{9250^2}{9} (f_{B0} + 10)^{-4/3} \text{Var}[f_B]}}{E_0} \\ &= \frac{9250 (f_{B0} + 10)^{-2/3} f_{B0} \text{COV}_{f_B}}{3 \cdot 9250 (f_{B0} + 10)^{1/3}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{f_{B0}}{f_{B0} + 10} \text{COV}_{f_B} . \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

U konkretnom primjeru armiranobetonske ploče, npr. za MB 30, pri čemu je propisom definirana vrijednost modula elastičnosti uzeta kao očekivanje vrijednosti modula elastičnosti, $E_0 \approx 3,16 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 = 31,6 \text{ GPa}$, uz koeficijent varijacije tlačne čvrstoće betona $\text{COV}_{f_B} = 0,05$, koeficijent varijacije modula elastičnosti betona MB 30 iznosi $\text{COV}_E = 0,0125$. Vrijednost za koeficijent varijacije tlačne čvrstoće realna je vrijednost proračunata na temelju analize uzimanja uzoraka betonskih kocki na pojedinim gradilištima.

Proračunate vrijednosti pokazuju na stvarnim primjerima da je koeficijent varijacije modula elastičnosti unutar jedne realizacije ploče manji od 3%. Na primjeru se također jasno vidi kvaliteta aproksimacije parametara za karakterizaciju varijabilnosti modula elastičnosti pomoću funkcija parametara varijabilnosti čvrstoće prema izrazima (2.3.22), (2.3.24) i (2.3.25). Zbog odbacivanja negativnog člana u Taylorovom redu (negativna vrijednost druge derivacije funkcije modula elastičnosti u ovisnosti o tlačnoj čvrstoći), proračunate vrijednosti varijance i koeficijenta varijacije modula elastičnosti preko izraza (2.3.24) i (2.3.25) su nešto veće od stvarnih vrijednosti.

Za čelične ploče, uz očekivanje modula elastičnosti $E_0 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, koeficijent varijacije prema [?] iznosi 0,04 odnosno varijanca $\sigma_{ee} = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$. Podaci o neizvjesnosti svojstava čeličnih elemenata konstrukcije, prvenstveno u brodogradnji, mogu se naći u radu [?].

2.4. Varijabilnost geometrijskih karakteristika elemenata konstrukcije

2.4.1. Varijabilnost debljine ploče

Zbog moguće nesavršenosti u izvedbi, pogotovo zbog neravnina na oplati pri izvedbi armiranobetonskih ploča, debljina izvedene ploče u stvarnom slučaju nije uvijek konstantna veličina duž ploče. Za debljinu ploče pretpostavljamo da je homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω

$$H(x, y) = H_0 [1 + h(x, y)] \quad , \quad (2.4.26)$$

pri čemu je H_0 očekivana vrijednost debljine ploče, a $h(x, y)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω s očekivanjem jednakim nuli ($E[h(x, y)] = 0$), varijancom σ_{hh}^2 i ograničeno sa

$$-1 + \rho_h \leq h(x, y) \leq 1 - \rho_h \quad , \quad 0 < \rho_h < 1 \quad (2.4.27)$$

kako bismo u daljnjoj analizi izbjegli, u stvarnom stanju nemoguće, negativne vrijednosti debljine ploče. Debljina ploče u izrazu za krutost ploče na savijanje dolazi na treću potenciju. Tada očito slijedi da je i veličina $H^3(x, y)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω i vrijedi

$$\begin{aligned} H^3(x, y) &= H_0^3 [1 + h(x, y)]^3 \\ &= H_0^3 [1 + 3h(x, y) + 3h^2(x, y) + h^3(x, y)] \\ &= H_0^3 [1 + g(x, y)] \quad , \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

pri čemu je $g(x, y)$ homogeno dvodimenzionalno slučajno polje na području Ω definirano sa

$$g(x, y) = 3h(x, y) + 3h^2(x, y) + h^3(x, y) \quad . \quad (2.4.29)$$

Parametri koji karakteriziraju varijabilnost slučajnog polja $g(x, y)$ su očekivanje i varijanca, te iznose

$$E[g(x, y)] = 0 \quad , \quad (2.4.30)$$

$$\text{Var}[g(x, y)] = \text{Var}[3h(x, y) + 3h^2(x, y) + h^3(x, y)] \quad . \quad (2.4.31)$$

Varijancu slučajnog polja $g(x, y)$ želimo za daljnju analizu izraziti preko varijance slučajnog polja $h(x, y)$, σ_{hh} . Varijancu linearne kombinacije potencija slučajnog polja $h(x, y)$ možemo raspisati prema definiciji varijance što povlači novi raspisani oblik izraza za varijancu slučajnog polja $g(x, y)$

$$\begin{aligned} \text{Var}[g] &= \text{Var}[3h + 3h^2 + h^3] \\ &= 9\text{Var}[h] + 9\text{Var}[h^2] + \text{Var}[h^3] \\ &\quad + 18\text{Cov}(h, h^2) + 6\text{Cov}(h, h^3) + 6\text{Cov}(h^2, h^3) \quad . \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

U dobivenom izrazu za varijancu slučajnog polja $g(x, y)$ potrebno je izraziti dobivene članove, varijance i kovarijance potencija slučajnog polja $h(x, y)$. Prema definiciji varijance i kovarijance i uz prethodno zadane vrijednosti za očekivanje i varijancu polja

$h(x, y)$, $E[h] = 0$ i $\text{Var}[h] = \sigma_{hh}^2$, slijede izrazi za potrebne članove u izrazu za varijancu slučajnog polja $g(x, y)$

$$\begin{aligned}\text{Var}[h^2] &= E[h^4] - E[h^2]E[h^2] \\ &= E[h^4] - \sigma_{hh}^4, \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[h^3] &= E[h^6] - E[h^3]E[h^3] \\ &= E[h^6], \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(h, h^2) &= E[h^3] - E[h]E[h^2] \\ &= E[h^3], \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(h, h^3) &= E[h^4] - E[h]E[h^3] \\ &= E[h^4], \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(h^2, h^3) &= E[h^5] - E[h^2]E[h^3] \\ &= E[h^5] - \sigma_{hh}^2E[h^3]. \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

Za proračun dobivenih članova u prethodnim izrazima, očekivanja potencija funkcije h , potrebnih funkcije h^k pri čemu je $k \in \{3, 4, 5, 6\}$, potrebno je pripadne funkcije h^k aproksimirati Taylorovim redom oko točke a blizu 0 uz odbacivanje zadnjeg člana u Taylorovom razvoju. Takav pristup dovodi do sljedećih aproksimacija za potrebne funkcije

$$\begin{aligned}x^3 &= a^3 + 3a^2(x - a) + 3a(x - a)^2 \\ &\approx a^3 - 3a^2x + 3ax^2, \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

$$\begin{aligned}x^4 &= a^4 + 4a^3(x - a) + 6a^2(x - a)^2 + 4a(x - a)^3 \\ &\approx -a^4 + 4a^3x - 6a^2x^2 + 4ax^3, \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

$$\begin{aligned}x^5 &= a^5 + 5a^4(x - a) + 10a^3(x - a)^2 + 10a^2(x - a)^3 + 5a(x - a)^4 \\ &\approx a^5 - 5a^4x + 10a^3x^2 - 10a^2x^3 + 5ax^4, \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

$$\begin{aligned}x^6 &= a^6 + 6a^5(x - a) + 15a^4(x - a)^2 + 20a^3(x - a)^3 + 15a^2(x - a)^4 + 5a(x - a)^5 \\ &\approx a^5x - 5a^4x^2 + 10a^3x^3 - 10a^2x^4 + 5ax^5. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

S obzirom na činjenicu da je očekivanje funkcija h^k jednako nuli, za točku oko koje aproksimiramo funkciju Taylorovim polinomom potrebno je izabrati neku točku blizu nuli koja predstavlja točku iz područja unutar kojeg se očuju realne vrijednosti slučajnog polja. Za takvu, što kvalitetniju aproksimaciju potrebnih varijanci i kovarijanci, odabrana je točka $a = \sigma_{hh}^2$. Aproksimacije potrebnih očekivanja proizlaze uvrštavanjem odabrane točke u prethodne izraze, uz zadane vrijednosti $E[h] = 0$ i $E[h^2] = \sigma_{hh}^2$, te zanemarivanje potencija većih od $\sigma_{hh}^6 = (\sigma_{hh}^2)^3$, mogu se izraziti u obliku

$$E[h^3] = \sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4, \quad (2.4.42)$$

$$\begin{aligned}E[h^4] &= -\sigma_{hh}^8 - 6\sigma_{hh}^6 + 4\sigma_{hh}^2(\sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4) \\ &= 3\sigma_{hh}^8 + 6\sigma_{hh}^6 \approx 6\sigma_{hh}^6, \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

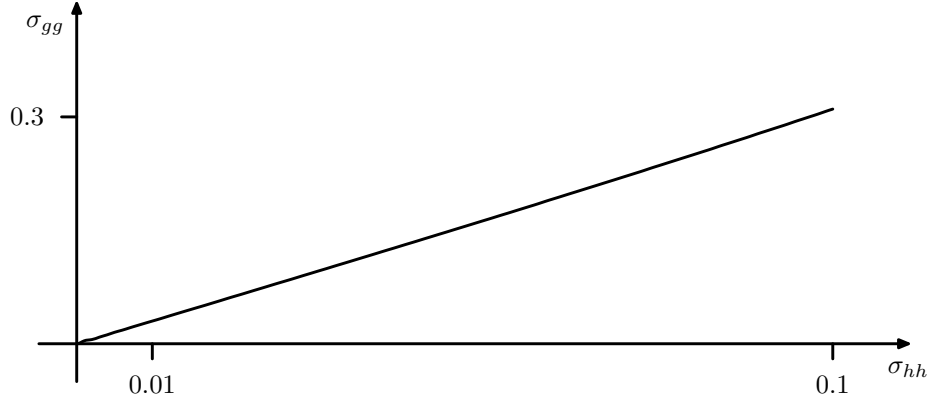
$$\begin{aligned}E[h^5] &= \sigma_{hh}^{10} + 10\sigma_{hh}^8 - 10\sigma_{hh}^4(\sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4) + 5\sigma_{hh}^2(3\sigma_{hh}^8 + 6\sigma_{hh}^6) \\ &= 6\sigma_{hh}^{10} + 10\sigma_{hh}^8 \approx 0, \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

$$E[h^6] = 10\sigma_{hh}^{12} + 15\sigma_{hh}^{10} \approx 0. \quad (2.4.45)$$

Uvrštavanjem provedenih proračuna, potrebna varijanca polja $g(x, y) = h^3(x, y)$, σ_{gg}^2 glasi

$$\begin{aligned} \text{Var}[g] = \sigma_{gg}^2 &= 9\sigma_{hh}^2 + 9(6\sigma_{hh}^6 - \sigma_{hh}^4) - (\sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4)^2 \\ &\quad + 18(\sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4) + 6 \cdot 6\sigma_{hh}^6 - 6\sigma_{hh}^2(\sigma_{hh}^6 + 3\sigma_{hh}^4) \\ &= 9\sigma_{hh}^2 + 54\sigma_{hh}^6 - 9\sigma_{hh}^4 + 18\sigma_{hh}^6 + 54\sigma_{hh}^4 + 36\sigma_{hh}^6 - 18\sigma_{hh}^6 \\ &= 9\sigma_{hh}^2 + 45\sigma_{hh}^4 + 90\sigma_{hh}^6 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Proračunatu varijabilnost polja g kao funkcija varijabilnosti debljine ploče h možemo prikazati i grafički, 2.4.1.



Slika 2.4.1: Varijabilnost polja g kao funkcija varijabilnosti debljine ploče (σ_{hh})

2.4.2. Varijabilnost visine poprečnog presjeka grede

Zbog moguće nesavršenosti u izvedbi visina poprečnog presjeka grede nije uvijek konstantna veličina duž grede. Za visinu poprečnog presjeka grede pretpostavljamo da je homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području $\Omega = [0, L]$,

$$H(x) = H_0 [1 + h(x)] \quad , \quad (2.4.47)$$

pri čemu je H_0 očekivana vrijednost visine poprečnog presjeka grede, a $h(x)$ homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području Ω s očekivanjem jednakim nuli ($E[h(x)] = 0$), varijancom σ_{hh}^2 i ograničeno sa

$$-1 + \rho_h \leq h(x) \leq 1 - \rho_h, \quad 0 < \rho_h < 1 \quad (2.4.48)$$

kako bismo u daljnjoj analizi izbjegli, u stvarnom stanju nemoguće, negativne vrijednosti visine poprečnog presjeka grede. Visina poprečnog presjeka grede u izrazu za krutost grede na savijanje (moment inercije) dolazi na treću potenciju. Tada očito slijedi da je i veličina $H^3(x)$ homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području Ω i vrijedi

$$\begin{aligned} H^3(x) &= H_0^3 [1 + h(x)]^3 \\ &= H_0^3 [1 + 3h(x) + 3h^2(x) + h^3(x)] \\ &= H_0^3 [1 + g(x)] \quad , \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

pri čemu je $g(x)$ homogeno jednodimenzionalno slučajno polje na području Ω definirano sa

$$g(x) = 3h(x) + 3h^2(x) + h^3(x) \quad . \quad (2.4.50)$$

Parametri koji karakteriziraju varijabilnost slučajnog polja $g(x,y)$ su očekivanje i varijanca, te iznose

$$E[g(x,y)] = 0 \quad , \quad (2.4.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(x,y)] &= \text{Var}[3h(x,y) + 3h^2(x,y) + h^3(x,y)] \\ &\approx 9\sigma_{hh}^2 + 45\sigma_{hh}^4 + 90\sigma_{hh}^6 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.52)$$

2.5. Varijabilnost krutosti ploče

Krutost ploče na savijanje, definirana kao faktorizirani produkt homogenih dvodimenzionalnih slučajnih polja, modula elastičnosti i treće potencije debljine ploče,

$$D(x,y) = \frac{E(x,y)H^3(x,y)}{12(1-\nu^2)} \quad (2.5.53)$$

homogeno je dvodimenzionalno slučajno polje koje možemo prikazati kao

$$\begin{aligned} D(x,y) &= D_0 [1 + r(x,y)] \\ &= \frac{E_0 H_0^3}{12(1-\nu^2)} [1 + e(x,y)] [1 + g(x,y)] \\ &= D_0 [1 + e(x,y) + g(x,y) + e(x,y)g(x,y)] \quad , \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

pri čemu je dvodimenzionalno homogeno slučajno polje $r(x,y)$ koje karakterizira varijabilnost krutosti ploče na savijanje definirano sa

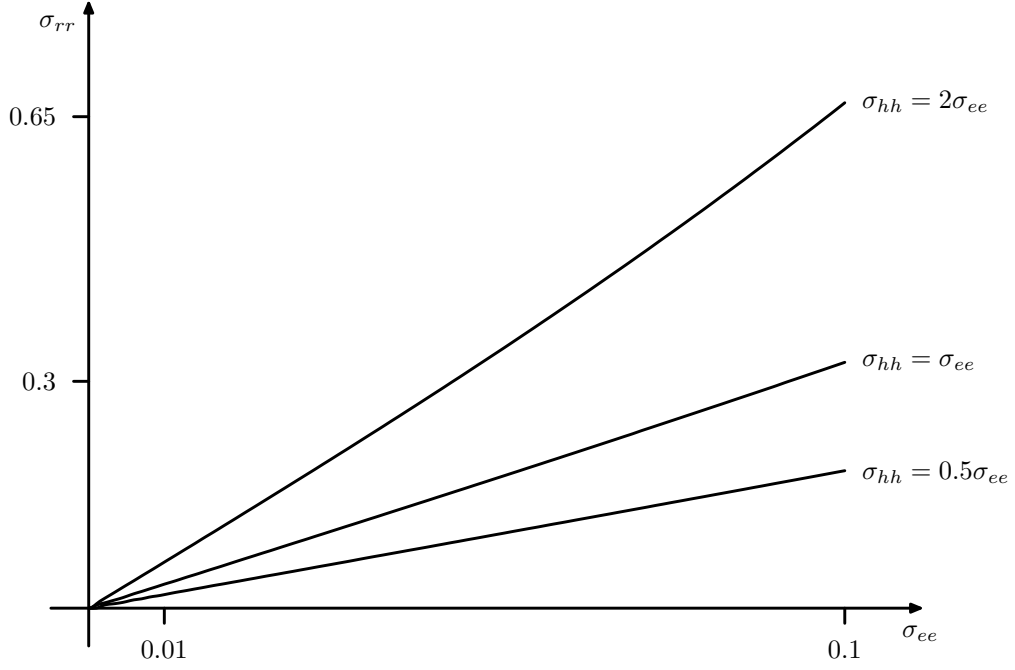
$$r(x,y) = e(x,y) + g(x,y) + e(x,y)g(x,y) \quad . \quad (2.5.55)$$

Bitna realna pretpostavka je da su polja $e(x,y)$ i $g(x,y)$ koja karakteriziraju neizvjesnost fizikalnih i geometrijskih karakteristika, u potpunosti nekorelirana, što znači da su varijabilnost fizikalnih i geometrijskih potpuno međusobno neovisne. Očekivanje polja $r(x,y)$ očito prema definiciji iznosi 0, $E[r(x,y)] = 0$, a varijanca

$$\sigma_{rr}^2 = \sigma_{ee}^2 + \sigma_{gg}^2 + \sigma_{ee}^2 \sigma_{gg}^2 \quad . \quad (2.5.56)$$

Veličinu varijabilnosti polja $r(x,y)$ možemo proračunati u konkretnim slučajevima odnosa varijanci fizikalnih i geometrijskih karakteristika, σ_{ee} i σ_{gg} , što je i grafički prikazano na 2.5.2.

Prema podacima za karakterizaciju neizvjesnosti čeličnih ploča, [?], mogu se na temelju ovih izraza proračunati parametri neizvjesnosti krutosti ploče na savijanje. Za prosječnu vrijednost koeficijenta varijacije modula elastičnosti i debljine ploče izražena je veličina 0,02. Za ekstremne vrijednosti navedenih koeficijenta varijacije izražene su veličine 0,06 za modul elastičnosti i 0,04 za debljinu ploče. Proračunate vrijednosti za koeficijent varijacije iznose 0,0633 za srednju vrijednost i 0,135 za ekstremnu vrijednost. Očito je značajno povećanje konačnog koeficijenta u odnosu na svaki pojedini, što treba uzeti u obzir pri definiranju budućih razdioba otpornosti konstrukcije u analizi pouzdanosti i proračunu indeksa i koeficijenta sigurnosti.



Slika 2.5.2: Varijabilnost krutosti ploče kao funkcija varijabilnosti modula elastičnosti (σ_{ee}) i varijabilnosti polja g (σ_{gg})

2.6. Varijabilnost krutosti grede

Krutost grede na savijanje, definirana kao faktorizirani produkt homogenih jednodimenzionalnih slučajnih polja, modula elastičnosti i treće potencije visine poprečnog presjeka grede ,

$$D(x) = \frac{E(x)B(x)H^3(x)}{12} \quad (2.6.57)$$

homogeno je jednodimenzionalno slučajno polje koje možemo prikazati kao

$$\begin{aligned} D(x) &= D_0 [1 + r(x)] \\ &= \frac{E_0 B_0 H_0^3}{12} [1 + e(x)] [1 + g(x)] \\ &= D_0 [1 + e(x) + g(x) + e(x)g(x)] \quad , \end{aligned} \quad (2.6.58)$$

pri čemu je jednodimenzionalno homogeno slučajno polje $r(x)$ koje karakterizira varijabilnost krutosti grede na savijanje definirano sa

$$r(x) = e(x) + g(x) + e(x)g(x) \quad . \quad (2.6.59)$$

Bitna realna pretpostavka je da su polja $e(x)$ i $g(x)$ koja karakteriziraju neizvjesnost fizikalnih i geometrijskih karakteristika, u potpunosti nekorelirana, što znači da su varijabilnost fizikalnih i geometrijskih potpuno međusobno neovisne. Očekivanje polja $r(x)$ očito prema definiciji iznosi 0, $E[r(x)] = 0$, a varijanca

$$\sigma_{rr}^2 = \sigma_{ee}^2 + \sigma_{gg}^2 + \sigma_{ee}^2 \sigma_{gg}^2 \quad . \quad (2.6.60)$$

2.7. Utjecaj neizvjesnosti geometrijskih karakteristika na neizvjesnost vlastite težine konstrukcije

2.7.1. Analiza opterećenja ploče

Standardno propisano opterećenje ploče, q , sastoji se od stalnog opterećenja, g i korisnog opterećenja, p . Stalno opterećenje predstavlja zbroj težina svih slojeva podne konstrukcije i podgleda ploče, Δg , i vlastite težine ploče, vt . Korisno je opterećenje propisama eksplicitno definirano ovisno o namjeni prostora. Vlastita težina ploče umnožak je debljine ploče, H , i gustoće gradiva ploče, γ . Općeniti izraz za opterećenje glasi

$$\begin{aligned} q &= g + p \\ &= (vt + \Delta g) + p \\ &= (\gamma \cdot H + \Delta g) + p \quad . \end{aligned} \quad (2.7.61)$$

2.7.2. Neizvjesnost vlastite težine ploče

S obzirom da je osnovna pretpostavka analize determinističko opterećenje, a debljina ploče je definirana kao slučajno polje, slijedi da je i opterećenje u tom slučaju slučajno polje uslijed neizvjesnosti vrijednosti debljine ploče. Za sve ostale članove u izrazu za opterećenje, osim debljine ploče, pretpostavlja se i dalje da su determinističke vrijednosti. Neizvjesnost opterećenja se sada možemo izraziti kao funkciju neizvjesnosti debljine ploče. Opterećenje možemo definirati kao slučajno polje, uz (2.4.26),

$$\begin{aligned} q(x, y) &= (\gamma \cdot H(x, y) + \Delta g) + p \\ &= \gamma H(x, y) + \Delta g + p \\ &= \gamma H_0 (1 + h(x, y)) + \Delta g + p \\ &= (\gamma H_0 + \Delta g + p) + \gamma H_0 h(x, y) \\ &= q_0 + \gamma H_0 h(x, y) \\ &= q_0 (1 + \bar{q}(x, y)) \quad , \end{aligned} \quad (2.7.62)$$

pri čemu je $\bar{q}(x, y)$ dvodimenzionalno homogeno slučajno polje definirano

$$\bar{q}(x, y) = \frac{\gamma H_0}{q_0} h(x, y) \quad . \quad (2.7.63)$$

Prema takvoj definiciji, očito slijedi da je očekivanje novog polja jednako nuli, $E[\bar{q}(x, y)] = 0$, a varijanca

$$Var[\bar{q}] = \left(\frac{\gamma H_0}{q_0} \right)^2 \sigma_{hh}^2 = \sigma_{qq}^2 \quad . \quad (2.7.64)$$

Neizvjesnost ukupnog opterećenja q sada možemo biti karakterizirano pripadnim očekivanjem, varijancom i koeficijentom varijacije

$$E[q] = q_0 \quad , \quad (2.7.65)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[q] &= q_0^2 \left(\frac{\gamma H_0}{q_0} \right)^2 \sigma_{hh}^2 \\ &= (\gamma H_0)^2 \sigma_{hh}^2 \\ &= q_0^2 \sigma_{qq}^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.7.66)$$

$$\begin{aligned} \text{CoV}[q] &= \frac{\gamma H_0}{q_0} \sigma_{hh} \\ &= \sigma_{qq} \quad . \end{aligned} \quad (2.7.67)$$

S obzirom da prema definiciji izraza za pojedine dijelove opterećenja uvijek vrijedi relacija $\gamma H_0 \leq q_0$, koeficijent varijacije opterećenja bit će manji ili jednak koeficijentu varijacije debljine ploče. U konkretnom primjeru armiranobetonske ploče debljine 16 cm, uz $\Delta g = 2,5 \text{ kN/m}^2$ i $p = 1,5 \text{ kN/m}^2$, slijedi

$$\begin{aligned} \text{CoV}[q] &= \frac{25,0 \cdot 0,16}{25,0 \cdot 0,16 + 2,5 + 1,5} \sigma_{hh} \\ &= 0,5 \sigma_{hh} \quad . \end{aligned} \quad (2.7.68)$$

U slučaju čelične ploče debljine 4 cm, uz $\Delta g = 0,36 \text{ kN/m}^2$ i $p = 4,0 \text{ kN/m}^2$, slijedi

$$\begin{aligned} \text{CoV}[q] &= \frac{78,5 \cdot 0,04}{78,5 \cdot 0,04 + 0,36 + 4,0} \sigma_{hh} \\ &= \frac{3,14}{7,5} \sigma_{hh} \approx 0,42 \sigma_{hh} \quad . \end{aligned} \quad (2.7.69)$$

2.7.3. Neizvjesnost vlastite težine grede

Visina poprečnog presjeka grede definirana je kao slučajno polje, slijedi da je i opterećenje u tom slučaju slučajno polje uslijed neizvjesnosti vrijednosti visine poprečnog presjeka grede. Za sve ostale članove u izrazu za opterećenje pretpostavlja se a su determinističke vrijednosti. Neizvjesnost opterećenja se sada možemo izraziti kao funkciju neizvjesnosti visine poprečnog presjeka grede. Opterećenje možemo definirati kao slučajno polje, uz (2.4.26),

$$\begin{aligned} q(x) &= (\gamma \cdot H(x,) + \Delta g) + p \\ &= \gamma H(x) + \Delta g + p \\ &= \gamma H_0 (1 + h(x)) + \Delta g + p \\ &= (\gamma H_0 + \Delta g + p) + \gamma H_0 h(x) \\ &= q_0 + \gamma H_0 h(x) \\ &= q_0 (1 + \bar{q}(x)) \quad , \end{aligned} \quad (2.7.70)$$

pri čemu je $\bar{q}(x)$ jednodimenzionalno homogeno slučajno polje definirano

$$\bar{q}(x) = \frac{\gamma H_0}{q_0} h(x) \quad . \quad (2.7.71)$$

Prema takvoj definiciji, očito slijedi da je očekivanje novog polja jednako nuli, $E[\bar{q}(x)] = 0$, a varijanca

$$\text{Var} [\bar{q}] = \left(\frac{\gamma H_0}{q_0} \right)^2 \sigma_{hh}^2 = \sigma_{qq}^2 \quad . \quad (2.7.72)$$

Neizvjesnost ukupnog opterećenja q sada možemo biti karakterizirano pripadnim očekivanjem, varijancom i koeficijentom varijacije

$$E [q] = q_0 \quad , \quad (2.7.73)$$

$$\begin{aligned} \text{Var} [q] &= q_0^2 \left(\frac{\gamma H_0}{q_0} \right)^2 \sigma_{hh}^2 \\ &= (\gamma H_0)^2 \sigma_{hh}^2 \\ &= q_0^2 \sigma_{qq}^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.7.74)$$

$$\begin{aligned} \text{CoV} [q] &= \frac{\gamma H_0}{q_0} \sigma_{hh} \\ &= \sigma_{qq} \quad . \end{aligned} \quad (2.7.75)$$

3. Formulacija sustava za rješavanje zadaće stohastičke analize metodom konačnih elemenata

3.1. Stohastička jednađba sustava

Stohastička analiza jednađbe ploče svedena je metodom konačnih elemenata na rješavanje sustava jednađbi

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{q} , \quad (3.1.1)$$

pri čemu je matrica krutosti \mathbf{K} stohastička matrica krutosti. Takvu stohastičku matricu krutosti možemo prikazati kao zbroj determinističkog dijela matrice krutosti \mathbf{K}_0 i stohastičkog dijela matrice krutosti $\Delta\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} . \quad (3.1.2)$$

Prema prethodnim definicijama varijabilnosti ulaznih parametara konstrukcije (fizikalnih i geometrijskih svojstava) slijedi da je očekivanje stohastičkog dijela matrice krutosti jednako nuli, $E[\Delta\mathbf{K}] = \mathbf{0}$. Vektor sila \mathbf{q} , utjecaj opterećenja, u proračun uzimamo kao deterministički vektor sila. Pojava stohastičke matrice krutosti u jednađbi sustava povlači da je i rješenje sustava, vektor odziva konstrukcije, vektor nepoznatih pomaka \mathbf{w} stohastički vektor koji možemo zapisati kao zbroj determinističkog vektora pomaka (\mathbf{w}_0) i stohastičkog dijela vektora pomaka ($\Delta\mathbf{w}$), u istom smislu kao i pripadni zapis stohastičke matrice krutosti,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \Delta\mathbf{w} . \quad (3.1.3)$$

Prvi član u takvom zapisu vektora odziva konstrukcije, \mathbf{w}_0 , deterministički je član vektora odziva konstrukcije $\mathbf{w}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q}$, rješenje determinističke zadaće određivanja odziva konstrukcije ($\mathbf{K}_0\mathbf{w}_0 = \mathbf{q}$). Jednađba zadaće sustava uz raspisani izraz za stohastičku matricu krutosti sada glasi

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\mathbf{w} = \mathbf{q} . \quad (3.1.4)$$

Stohastičku matricu krutosti možemo prikazati u sljedećem obliku pogodnijem za daljnju analizu

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} \\ &= \mathbf{K}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}) . \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Tako prikazana stohastička matrica krutosti povlači opći izraz za stohastički vektor odziva konstrukcije

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \\ &= [\mathbf{K}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{q} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q} \\ &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K} + (\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K})^2 - \dots \right] \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K})^n \right] \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K})^n \right] \mathbf{w}_0 . \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Uslijed činjenice da je realna vrijednost varijance ulaznih parametara (fizikalnih i geometrijskih karakteristika područja) relativno mala vrijednost (u stvarnom slučaju $\sigma^2 < 0,01$), možemo uzeti u obzir samo prva dva člana, ($n = 0, 1$), u raspisu za vektor odziva konstrukcije što daje pojednostavljeni približni izraz za stohastički vektor odziva konstrukcije

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}) \mathbf{w}_0 \quad . \quad (3.1.7)$$

Stohastički dio vektora odziva konstrukcije prikazan je sada kao funkcija stohastičke matrice krutosti $\Delta \mathbf{K}$, determinističke matrice krutosti \mathbf{K}_0 i determinističkog vektora odziva konstrukcije \mathbf{w}_0 u obliku

$$\Delta \mathbf{w} = -\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{w}_0 \quad . \quad (3.1.8)$$

3.2. Karakterizacija stohastičkog vektora odziva konstrukcije

Neizvjesnost proračunatih vrijednosti vektora odziva konstrukcije izrazit ćemo očekivanjem, varijancom i koeficijentom varijacije. Očekivanje stohastičkog vektora odziva konstrukcije, \mathbf{w} , tada je zbog činjenice da je očekivanje stohastičkog dijela matrice krutosti sustava jednako nuli, jednako rješenju determinističkog sustava jednadžbi

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}] = \mathbf{w}_0 \quad . \quad (3.2.9)$$

Kovarijančna matrica stohastičkog vektora odziva konstrukcije slijedi prema izrazu za definiciju kovarijančne matrice i glasi

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \mathbf{E} \left[(\mathbf{w} - \mathbf{E}[\mathbf{w}]) (\mathbf{w} - \mathbf{E}[\mathbf{w}])^T \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^T \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{w}_0 (\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{w}_0)^T \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^T \Delta \mathbf{K}^T \mathbf{K}_0^{-T} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{W}_0 \Delta \mathbf{K} \mathbf{K}_0^{-1} \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

koristeći se činjenicom da su matrice $\Delta \mathbf{K}$ i \mathbf{K}_0^{-1} simetrične, dok je matrica \mathbf{W}_0 definirana kao produkt rješenja determinističkog sustava jednadžbi (očekivanja) vektora odziva konstrukcije, $\mathbf{W}_0 = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^T$, također simetrična matrica.

Kovarijančna matrica vektora odziva konstrukcije $\text{Cov}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = [C_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}$ matrica je dimenzije $N \times N$, gdje je N broj stupnjeva slobode proračunskog modela konstrukcije. Dijagonala kovarijančne matrice varijanca je vektora odziva konstrukcije

$$\text{Var}[\mathbf{w}] = \text{diag}(\text{Cov}[\mathbf{w}, \mathbf{w}]) \mathbf{q}; \quad (3.2.11)$$

Ako promatramo pomak w_i u smjeru konkretnog stupnja slobode i , varijanca tog pomaka, i -ti član vektora varijance odziva konstrukcije, i -ti je dijagonalni član kovarijančne matrice

$$\text{Var}[w_i] = C_{ii} \quad . \quad (3.2.12)$$

Koeficijent varijacije odziva konstrukcije u smjeru navedenog konkretnog stupnja slobode dobivamo na temelju izraza

$$\text{CoV}_{w_i} = \frac{\sqrt{C_{ii}}}{w_{0i}} \quad , \quad (3.2.13)$$

gdje je w_{0i} očekivanje (rješenje determinističke zadaće) pomaka w_i .

4. Proračun stohastičke matrice krutosti

4.1. Stohastička elementarna matrica krutosti grednog konačnog elementa

Proračun metodom konačnih elemenata zahtjeva proračun elementarnih matrica krutosti čijim će uklapanjem biti formirana globalna matrica krutosti. Elementarna matrica krutosti za rješavanje zadaće savijanja ploče dana je izrazom

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{(e)} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dx \quad (4.1.1)$$

gdje je $\mathbf{D}^{(e)}$ matrica krutosti konstrukcije

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} E^{(e)} F^{(e)} & 0 \\ 0 & E^{(e)} I^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Krutost je slučajno polje

$$\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{D}_0^{(e)} [1 + r^{(e)}(x)], \quad (4.1.3)$$

pa je prema tome i elementarna matrica krutosti $\mathbf{K}^{(e)}$ stohastička matrica koja može biti prikazana u obliku zbroja determinističkog i stohastičkog dijela

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} + \Delta \mathbf{K}^{(e)}. \quad (4.1.4)$$

Matrica $\mathbf{K}_0^{(e)}$ deterministička je elementarna matrica krutosti dobivena uvrštavanjem vrijednosti očekivanja krutosti $\mathbf{D}_0^{(e)}$ u izraz za proračun elementarne matrice krutosti prema opisu kod prikaza determinističkog proračuna. Takva matrica u potpunosti je jednaka elementarnoj matrici krutosti sustava pri determinističkom proračunu konstrukcije. Stohastički dio elementarne matrice krutosti, $\Delta \mathbf{K}^{(e)}$, uključuje neizvjesnost fizikalnih i geometrijskih karakteristika elemenata konstrukcije.

4.2. Metoda težinskih integrala (weighted integral method)

Uvrštavanjem izraza za stohastičku matricu krutosti u izraz za elementarnu matricu krutosti, slijedi stohastička elementarna matrica krutosti u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} + \sum_{k=1}^{\text{BTI}} X_k^{(e)} \Delta \mathbf{K}_k^{(e)}, \quad (4.2.5)$$

gdje je BTI broj težinskih integrala $X_k^{(e)}$ u izrazu, a taj broj ovisi o izboru konačnog elementa. Za numerički proračun odabran je gredni kubični konačni element sa 6 stupnjeva slobode (u, w, ϕ u svakom čvoru)

Promatramo izdvojeni ravninski štap (konačni element) $\{ij\} = (e)$ duljine $L^{(e)}$ sa 6 stupnjeva slobode. Vektor pomaka krajeva štapa možemo standardno izraziti kao

$$\mathbf{w}^{(e)} = [w_{3i-2} \ w_{3i-1} \ w_{3i} \ w_{3j-2} \ w_{3j-1} \ w_{3j}]^T, \quad (4.2.6)$$

gdje su pomaci svakog čvora iskazani redom, pomak u smjeru osi štapa, pomak okomito na os štapa i kut zaokreta štapa u čvoru.

Slika 1. Štapni konačni element $\{ij\} = (e)$ duljine $L^{(e)}$ s pripadnim pomacima u čvorovima

Matrica funkcija oblika ravninskog štapa (prema standardnoj formulaciji metode konačnih elemenata) je

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_{3i-2}^{(e)} & 0 & 0N_{3j-2}^{(e)} & 0 & 0 & \\ 0 & N_{3i-1}^{(e)} & N_{3i}^{(e)} & 0 & N_{3j-1}^{(e)} & N_{3j}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.2.7)$$

gdje su

$$N_{3i-2}^{(e)} = 1 - \frac{x}{L^{(e)}} \quad (4.2.8)$$

$$N_{3i-1}^{(e)} = 1 - \frac{3x^2}{L^{(e)2}} + \frac{2x^3}{L^{(e)3}} \quad (4.2.9)$$

$$N_{3i}^{(e)} = x - \frac{2x^2}{L^{(e)}} + \frac{x^3}{L^{(e)2}} \quad (4.2.10)$$

$$N_{3j-2}^{(e)} = \frac{x}{L^{(e)}} \quad (4.2.11)$$

$$N_{3j-1}^{(e)} = \frac{3x^2}{L^{(e)2}} - \frac{2x^3}{L^{(e)3}} \quad (4.2.12)$$

$$N_{3j}^{(e)} = -\frac{x^2}{L^{(e)}} + \frac{x^3}{L^{(e)2}} \quad (4.2.13)$$

$$(4.2.14)$$

Derivacije funkcija oblika potrebne u daljnoj analizi su

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} B_{3i-2}^{(e)} & 0 & 0B_{3j-2}^{(e)} & 0 & 0 & \\ 0 & B_{3i-1}^{(e)} & B_{3i}^{(e)} & 0 & B_{3j-1}^{(e)} & B_{3j}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{3i-2}^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0\frac{\partial N_{3j-2}^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{\partial^2 N_{3i-1}^{(e)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3i}^{(e)}}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2 N_{3j-1}^{(e)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3j}^{(e)}}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (4.2.16)$$

gdje su

$$B_{3i-2}^{(e)} = -\frac{1}{L^{(e)}} \quad (4.2.17)$$

$$B_{3i-1}^{(e)} = -\frac{6}{L^{(e)2}} + \frac{12x}{L^{(e)3}} \quad (4.2.18)$$

$$B_{3i}^{(e)} = -\frac{4}{L^{(e)}} + \frac{6x}{L^{(e)2}} \quad (4.2.19)$$

$$B_{3j-2}^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \quad (4.2.20)$$

$$B_{3j-1}^{(e)} = \frac{6x}{L^{(e)2}} - \frac{12x}{L^{(e)3}} \quad (4.2.21)$$

$$B_{3j}^{(e)} = -\frac{2}{L^{(e)}} + \frac{6x}{L^{(e)2}} \quad (4.2.22)$$

$$(4.2.23)$$

Nakon provedene integracije proizlazi izraz za elementarnu matricu krutosti

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} + X_0^{(e)} \Delta \mathbf{K}_0^{(e)} + X_1^{(e)} \Delta \mathbf{K}_1^{(e)} + X_2^{(e)} \Delta \mathbf{K}_2^{(e)}, \quad (4.2.24)$$

gdje je $\mathbf{K}_0^{(e)}$ deterministički, a $X_0^{(e)}\Delta\mathbf{K}_0^{(e)} + X_1^{(e)}\Delta\mathbf{K}_1^{(e)} + X_2^{(e)}\Delta\mathbf{K}_2^{(e)}$ stohastički dio elementarne matrice krutosti, uz

$$\mathbf{K}_0^{(e)} = E_0^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{F^{(e)}}{L^{(e)}I^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{F^{(e)}}{L^{(e)}I^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} & 0 & -\frac{12}{L^{(e)3}} & -\frac{6}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{6}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6}{L^{(e)}} & \frac{6}{L^{(e)}} \\ -\frac{F^{(e)}}{L^{(e)}I^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{F^{(e)}}{L^{(e)}I^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} & 0 & \frac{12}{L^{(e)3}} & \frac{6}{L^{(e)2}} \\ 0 & -\frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{6}{L^{(e)}} & 0 & \frac{6}{L^{(e)2}} & \frac{4}{L^{(e)}} \end{bmatrix}, \quad (4.2.25)$$

$$\Delta\mathbf{K}_0^{(e)} = \frac{E_0^{(e)} I^{(e)}}{L^{(e)4}} \begin{bmatrix} \frac{F^{(e)}L^{(e)2}}{I^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{F^{(e)}L^{(e)2}}{I^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -24L^{(e)} & 0 & -36 & -12L^{(e)} \\ 0 & -24L^{(e)} & 16L^{(e)2} & 0 & 24L^{(e)} & 8L^{(e)2} \\ -\frac{F^{(e)}L^{(e)2}}{I^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{F^{(e)}L^{(e)2}}{I^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 24L^{(e)} & 0 & 36 & 12L^{(e)} \\ 0 & -12L^{(e)} & 8L^{(e)2} & 0 & 12L^{(e)} & 4L^{(e)2} \end{bmatrix}, \quad (4.2.26)$$

$$\Delta\mathbf{K}_1^{(e)} = \frac{E_0^{(e)} I^{(e)}}{L^{(e)5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 84L^{(e)} & 0 & 144 & 60L^{(e)} \\ 0 & 84L^{(e)} & -48L^{(e)2} & 0 & -84L^{(e)} & -36L^{(e)2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & -84L^{(e)} & 0 & -144 & -60L^{(e)} \\ 0 & 60L^{(e)} & -36L^{(e)2} & 0 & -60L^{(e)} & -24 \end{bmatrix}, \quad (4.2.27)$$

$$\Delta\mathbf{K}_2^{(e)} = \frac{E_0^{(e)} I^{(e)}}{L^{(e)6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & -72L^{(e)} & 0 & -144 & -72L^{(e)} \\ 0 & -72L^{(e)} & 36L^{(e)2} & 0 & 72L^{(e)} & 36L^{(e)2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 72L^{(e)} & 0 & 144 & 72L^{(e)2} \\ 0 & -72L^{(e)} & 36L^{(e)2} & 0 & 72L^{(e)} & 36L^{(e)2} \end{bmatrix}, \quad (4.2.28)$$

$$X_0^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} g^{(e)}(x)dx, \quad (4.2.29)$$

$$X_1^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} xg^{(e)}(x)dx, \quad (4.2.30)$$

$$X_2^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} x^2g^{(e)}(x)dx. \quad (4.2.31)$$

Stohastičke matrice krutosti izvodimo preko podintegralnih matrica, pripadnih polinoma, prema izvodu matrice krutosti u determinističkom slučaju. Globalnu stohastičku

matricu krutosti dobivamo uklapanjem elementarnih stohastičkih matrica krutosti

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N^{(e)}} \overline{\mathbf{K}^{(e)}} \quad , \quad (4.2.32)$$

gdje je $N^{(e)}$ broj konačnih elemenata, a $\overline{\mathbf{K}^{(e)}}$ proširena elementarna stohastička matrica krutosti.

4.3. Funkcija varijabilnosti odziva konstrukcije (variability response function) za grede

Vektor odziva konstrukcije, vektor nepoznatih pomaka \mathbf{w} možemo aproksimirati razvojem u Taylorov red oko vrijednosti očekivanja težinskih integrala i uzimanjem u obzir samo linearnog člana u Taylorovom redu

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}_0 + \sum_{(e)} \sum_k X_k^{(e)} \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{q} \\ \frac{\partial}{\partial X_k^{(e)}} [\mathbf{K} \mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \\ \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 + \mathbf{K}_0 \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} = 0 \\ \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} = -\mathbf{K}_0^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 \end{array} \right] \\ &= \mathbf{w}_0 - \sum_{(e)} \sum_k \mathbf{K}_0^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 X_k^{(e)} \\ &= \mathbf{w}_0 - \sum_{(e)} \sum_k \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_k^{(e)} \mathbf{w}_0 X_k^{(e)} \quad , \quad (4.3.33) \end{aligned}$$

gdje su izrazi $\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}}$ i $\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_k^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}}$ vrijednosti izračunate u točki očekivanja težinskih integrala $X_k^{(e)}$, sumacija po (e) ide po svim konačnim elementima, $(e) = 1, \dots, N^{(e)}$, pri čemu je $N^{(e)}$ ukupan broj konačnih elemenata, druga sumacija je po svim težinskim integralima (za gredu $k = 0, 1, 2$), a \mathbf{w}_0 rješenje determinističkog slučaja. Uzimanje u obzir kvadratnog člana, u daljnjoj analizi bismo dobili članove sa četverostrukom sumacijom po 3 slučajne varijable, po svakom konačnom elementu. S inženjerskog aspekta, nema smisla neznatno poboljšanje rješenja uz znatno gomilanje broja računskih operacija.

Koristeći se aproksimacijom prvog reda oko vrijednosti očekivanja težinskih integrala, aproksimacija prvog reda kovarijančne matrice vektora odziva konstrukcije \mathbf{w} slijedi u

obliku

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \mathbb{E} [(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^T] \\ &= \sum_{(e)=1}^{N^{(e)}} \sum_{(f)=1}^{N^{(e)}} \sum_k \sum_l \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_k^{(e)} \mathbf{W}_0 \left(\Delta \mathbf{K}_l^{(f)} \right)^T (\mathbf{K}_0^{-1})^T \mathbb{E} \left[X_k^{(e)} X_l^{(f)} \right] \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

pri čemu su nepoznate jedino vrijednosti očekivanja produkta težinskih integrala $\mathbb{E} \left[X_k^{(e)} X_l^{(f)} \right]$, a matrica \mathbf{W}_0 definirana je kao i prije $\mathbf{W}_0 = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^T$. Nepoznata vrijednost očekivanja produkta težinskih integrala u izrazu (4.3.34) može biti prikazana prema definiciji težinskih integrala kao

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_k^{(e)} X_l^{(f)} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{L^{(e)}} x_e^k g^{(e)}(x_e) dx_e \right) \left(\int_0^{L^{(f)}} x_f^l g^{(f)}(x_f) dx_f \right) \right] \\ &= \int_0^{L^{(e)}} \int_0^{L^{(f)}} x_e^k x_f^l \mathbb{E} \left[g^{(e)}(x_e) g^{(f)}(x_f) \right] dx_e dx_f . \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Pod pretpostavkom da su svi konačni elementi karakterizirani istim stohastičkim poljem $g(x)$, prethodno očekivanje produkta težinskih integrala, (4.3.35), možemo izraziti u jednostavnijem obliku

$$\mathbb{E} \left[g(x_e) g(x_f) \right] = R_{gg}(\Delta x_{fe} + x_f - x_e) , \quad (4.3.36)$$

gdje je $R_{rr}(\xi)$ autokorelacijska funkcija slučajnog polja $g(\xi)$, a veličina Δx_{fe} definirana je kao udaljenosti početnih čvorova konačnih elemenata (e) i (f)

$$\Delta x_{fe} = x_i^{(f)} - x_i^{(e)} . \quad (4.3.37)$$

Uzevši u obzir Wiener-Khintchinovu transformaciju, prema [?], između autokorelacijske funkcije i funkcije spektralne gustoće $S_{gg}(\kappa)$, potrebno očekivanje produkta težinskih integrala, (4.3.35), možemo pisati u obliku

$$\mathbb{E} \left[X_x^{(e)} X_l^{(f)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\kappa) e^{i(\kappa \Delta x_{fe})} \int_0^{L^{(e)}} x_e^k e^{-i\kappa x_e} \int_0^{L^{(f)}} x_f^l e^{i\kappa x_f} dx_e dx_f d\kappa . \quad (4.3.38)$$

Varijanca vektora odziva konstrukcije \mathbf{w} sada slijedi u obliku

$$\text{Var}[\mathbf{w}] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{rr}(\kappa_x) \text{VRF}_{\text{WI}}(\kappa) d\kappa , \quad (4.3.39)$$

gdje je vektor VRF_{WI} aproksimacija prvog reda funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije metodom težinskih integrala (weighted integrals)

$$\begin{aligned} \text{VRF}_{\text{WI}}(\kappa) &= \sum_{(e)} \sum_{(f)} \sum_k \sum_l \text{diag} \left(\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_k^{(e)} \mathbf{w}_0 \right) \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_l^{(f)} \mathbf{w}_0 \\ &\cdot \left[\left(C I_k^{(e)} C I_l^{(f)} + S I_k^{(e)} S I_l^{(f)} \right) \cos(\Delta x_{fe} \kappa) \right. \\ &\quad \left. - \left(S I_k^{(e)} C I_l^{(f)} - C I_k^{(e)} S I_l^{(f)} \right) \sin(\Delta x_{fe} \kappa) \right] , \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

a za $(g) = (e), (f)$

$$CI_k^{(g)} = \int_0^{L^{(g)}} x_g^k \cos(\kappa x_g) dx_g \quad (4.3.41)$$

$$SI_k^{(g)} = \int_0^{L^{(g)}} x_g^k \sin(\kappa x_g) dx_g . \quad (4.3.42)$$

4.4. Metoda lokalnog uprosječenja (local average method)

Kao alternativni prikaz stohastičke matrice krutosti u smislu smanjenja broja nepoznatih slučajnih varijabli po konačnom elementu, možemo za daljnju analizu uzeti metodu lokalnog uprosječenja. Matricu krutosti grednog konačnog elementa za svaki konačni element možemo prikazati kao

$$\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{D}_0^{(e)} [1 + \alpha_g^{(e)}] , \quad (4.4.43)$$

gdje slučajnu varijablu $\alpha_g^{(e)}$ zovemo lokalni prosjek slučajnog polja $g^{(e)}(x)$ na konačnom elementu (e) , a definiramo kao

$$\alpha_g^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \int_0^{L^{(e)}} g^{(e)}(x) dx . \quad (4.4.44)$$

Stohastička elementarna matrica krutosti je sada oblika

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} [1 + \alpha_g^{(e)}] , \quad (4.4.45)$$

odnosno stohastički dio matrice krutosti glasi

$$\Delta \mathbf{K}^{(e)} = \alpha_g^{(e)} \mathbf{K}_0^{(e)} , \quad (4.4.46)$$

pri čemu imamo samo jednu nepoznatu slučajnu varijablu, težinski integral $X_0^{(e)}$ po svakom konačnom elementu (e) .

Na temelju istog pristupa kao kod metode težinskih integrala, vektor varijance odziva konstrukcije možemo prikazati kao

$$\text{Var}[\mathbf{w}] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\kappa) \text{VRF}_{\text{LA}}(\kappa) d\kappa , \quad (4.4.47)$$

gdje je vektor VRF_{LA} aproksimacija prvog reda funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije metodom lokalnog uprosječenja (local average)

$$\begin{aligned} \text{VRF}_{\text{LA}}(\kappa_x) &= \sum_{(e)} \sum_{(f)} \text{diag} \left(\mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_0^{(e)} \mathbf{w}_0 \right) \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_0^{(f)} \mathbf{w}_0 \\ &\cdot \left[\left(CI_0^{(e)} CI_0^{(f)} + SI_0^{(e)} SI_0^{(f)} \right) \cos(\Delta x_{fe} \kappa) \right. \\ &\quad \left. - \left(SI_0^{(e)} CI_0^{(f)} - CI_0^{(e)} SI_0^{(f)} \right) \sin(\Delta x_{fe} \kappa) \right] . \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

Vektor varijance odziva definiran je sada uz značajno smanjenje broja računskih operacija u smislu davanja postupka primijenjivog s inženjerskog aspekta, to jest dobivanja rješenja neznatno slabije kvalitete uz bitno kraći i jednodavniji tijek proračuna.

4.5. Gornja granica koeficijenta varijacije

Promatramo li odziv konstrukcije u smjeru konkretnog stupnja slobode w_i i pripadnu komponentu funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije $\text{VRF}_i(\kappa)$. Varijanca tog pomaka ograničena je veličinom $\text{VRF}_i(\kappa^*)$

$$\text{Var}[w_i] \leq \sigma_{gg}^2 \text{VRF}_i(\kappa_i^*) \quad , \quad (4.5.49)$$

gdje je κ_i^* točka u području domene valnih brojeva u kojoj funkcija varijabilnosti odziva konstrukcije $\text{VRF}_i(\kappa)$ poprima maksimalnu vrijednost. Posebno je bitna činjenica da gornja granica ne ovisi o funkciji spektralne gustoće i u tom smislu neovisna je o distribuciji spektra slučajnosti ulaznih parametara. Na isti način slijedi i koeficijent varijacije progiba u smjeru konkretnog stupnja slobode kao

$$\text{CoV}_{w_i} = \sigma_{gg} \frac{\sqrt{\text{VRF}_i}}{w_{0i}} \quad . \quad (4.5.50)$$

4.6. Funkcija varijabilnosti odziva konstrukcije za ploče

Postupak provodimo jednako kao i za grede, ali u dvije dimenzije, u smjeru x i u smjeru y . Uvrštavanjem izraza za stohastičku matricu krutosti ploče na savijanje u izraz za elementarnu matricu krutosti, slijedi stohastička elementarna matrica krutosti u obliku

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} + \sum_{k=1}^{\text{BTI}} X_k^{(e)} \Delta \mathbf{K}_k^{(e)} \quad , \quad (4.6.51)$$

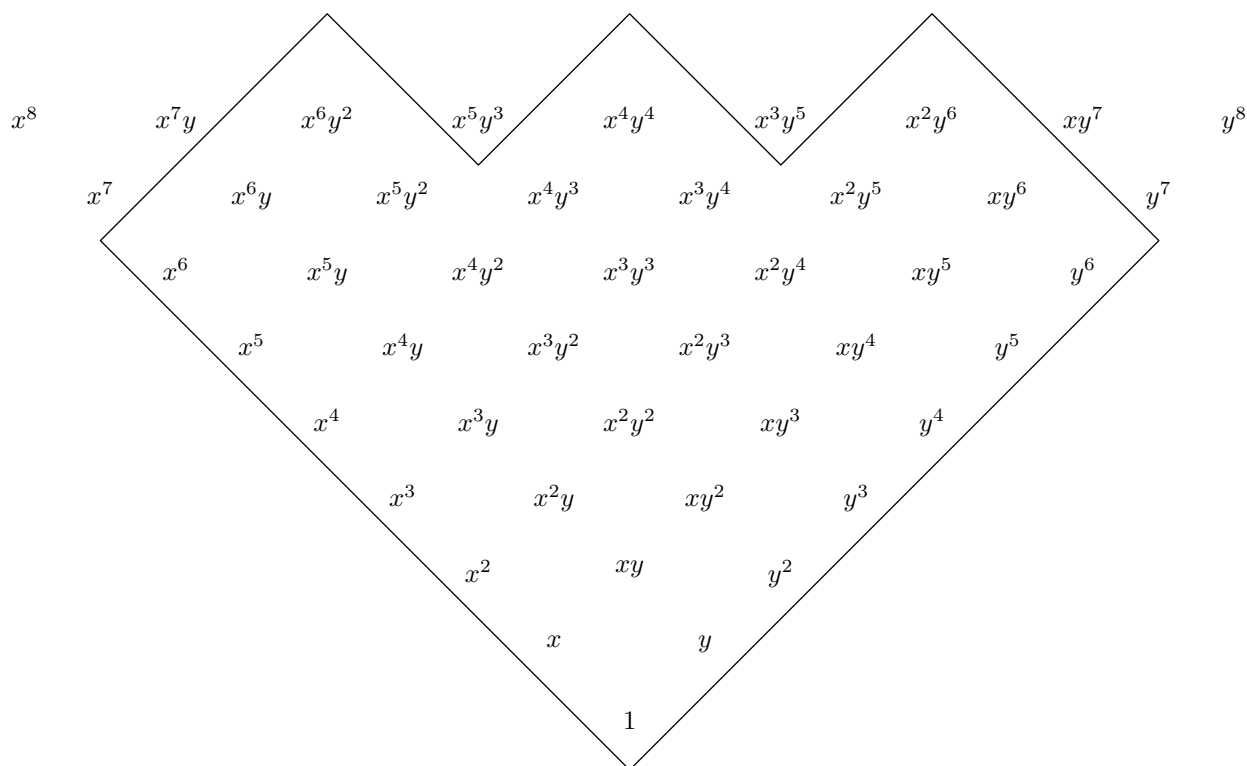
gdje je BTI broj težinskih integrala $X_k^{(e)}$ u izrazu, a taj broj ovisi o izboru konačnog elementa. Za numerički proračun odabran je pravokutni hermitski bikubični konačni element sa 16 stupnjeva slobode (w, w_x, w_y, w_{xy} u svakom čvoru) kao standardni konačni element za proračun ploča metodom konačnih elemenata. Takav odabrani konačni element u raspisu za podintegralnu matricu krutosti ima u općem slučaju 37 članova što povlači 37 težinskih integrala (BTI = 37) po svakom konačnom elementu. Stohastička elementarna matrica krutosti $\mathbf{K}^{(e)}$ iskazana je tada kao

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} = & \mathbf{K}_0^{(e)} + X_{00}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{00}^{(e)} + X_{10}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{10}^{(e)} + X_{01}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{01}^{(e)} + X_{20}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{20}^{(e)} \\ & + X_{11}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{11}^{(e)} + X_{02}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{02}^{(e)} + X_{30}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{30}^{(e)} + X_{21}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{21}^{(e)} + X_{12}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{12}^{(e)} \\ & + X_{03}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{03}^{(e)} + X_{40}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{40}^{(e)} + X_{31}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{31}^{(e)} + X_{22}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{22}^{(e)} + X_{13}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ & + X_{04}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{04}^{(e)} + X_{50}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{50}^{(e)} + X_{41}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{41}^{(e)} + X_{32}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{32}^{(e)} + X_{23}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ & + X_{14}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{14}^{(e)} + X_{05}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{05}^{(e)} + X_{60}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{60}^{(e)} + X_{51}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{51}^{(e)} + X_{42}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{42}^{(e)} \\ & + X_{33}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{33}^{(e)} + X_{24}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{24}^{(e)} + X_{15}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{15}^{(e)} + X_{06}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{06}^{(e)} + X_{61}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{61}^{(e)} \\ & + X_{52}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{52}^{(e)} + X_{43}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{43}^{(e)} + X_{34}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{34}^{(e)} + X_{25}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{25}^{(e)} + X_{16}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{16}^{(e)} \\ & + X_{06}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{06}^{(e)} + X_{44}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{44}^{(e)} + X_{26}^{(e)} \Delta \mathbf{K}_{26}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.6.52)$$

gdje su $X_{ij}^{(e)}$ 37 slučajnih varijabli (težinskih integrala) po svakom konačnom elementu, definiranih u obliku

$$X_{ij}^{(e)} = \int_0^{L_x^{(e)}} \int_0^{L_y^{(e)}} \xi^i \eta^j r^{(e)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.6.53)$$

a matrice $\mathbf{K}_0^{(e)}$ i $\Delta\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ su determinističke. Prikaz članova koji ulaze u sumaciju za odabrani konačni element može se dati i na Pascalovom trokutu, (slika 4.6.1).



Slika 4.6.1: Prikaz sudjelujućih članova u sumaciji težinskih integrala

Vektor odziva konstrukcije, vektor nepoznatih pomaka \mathbf{w} aproksimiramo razvojem u Taylorov red oko vrijednosti očekivanja težinskih integrala i uzimanjem u obzir samo

linearnog člana u Taylorovom redu

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{w}_0 + \sum_{(e)=1}^{N(e)} \sum_{(k,l)} X_{kl}^{(e)} \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \\
&= \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{q} \\ \frac{\partial}{\partial X_{kl}^{(e)}} [\mathbf{K}\mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \\ \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 + \mathbf{K}_0 \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} = 0 \\ \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} = -\mathbf{K}_0^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 \end{array} \right] \\
&= \mathbf{w}_0 - \sum_{(e)=1}^{N(e)} \sum_{(k,l)} \mathbf{K}_0^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}} \mathbf{w}_0 X_{kl}^{(e)} \\
&= \mathbf{w}_0 - \sum_{(e)=1}^{N(e)} \sum_{(k,l)} \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_{kl}^{(e)} \mathbf{w}_0 X_{kl}^{(e)}, \tag{4.6.54}
\end{aligned}$$

gdje su izrazi $\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}}$ i $\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{kl}^{(e)}} \right]_{\mathbf{E}}$ vrijednosti izračunate u točki očekivanja težinskih integrala $X_{kl}^{(e)}$, $N^{(e)}$ je ukupan broj konačnih elemenata, a druga sumacija je preko 37 (BTI = 37) prikazanih kombinacija (k, l) , $k, l = 0, \dots, 6$, $k + l \leq 8$, bez (3,5) i (5,3) prema prethodno prikazanom Pascalovom trokutu, (Slika 4.6.1), a \mathbf{w}_0 rješenje determinističkog slučaja. Uzimanje u obzir kvadratnog člana, u daljnjoj analizi bismo dobili članove sa četverostrukom sumacijom po 37 slučajnih varijabli, po svakom konačnom elementu. S inženjerskog aspekta, nema smisla neznatno poboljšanje rješenja uz znatno gomilanje broja računskih operacija.

Koristeći se aproksimacijom prvog reda oko vrijednosti očekivanja težinskih integrala, aproksimacija prvog reda kovarijančne matrice vektora odziva konstrukcije \mathbf{w} slijedi u obliku

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \mathbf{E} [(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^{\mathbf{T}}] \\
&= \sum_{(e)=1}^{N(e)} \sum_{(f)=1}^{N(e)} \sum_{(k,l)} \sum_{(m,n)} \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_{kl}^{(e)} \mathbf{w}_0 (\Delta \mathbf{K}_{mn}^{(f)})^{\mathbf{T}} (\mathbf{K}_0^{-1})^{\mathbf{T}} \mathbf{E} [X_{kl}^{(e)} X_{mn}^{(f)}] \\
&\tag{4.6.55}
\end{aligned}$$

pri čemu su nepoznate jedino vrijednosti očekivanja produkta težinskih integrala $\mathbf{E} [X_{kl}^{(e)} X_{mn}^{(f)}]$, a matrica \mathbf{W}_0 definirana je kao i prije $\mathbf{W}_0 = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^{\mathbf{T}}$. Nepoznatu vrijednost očekivanja produkta težinskih integrala u izrazu (4.6.55) možemo prikazati prema definiciji težinskih

integrala kao

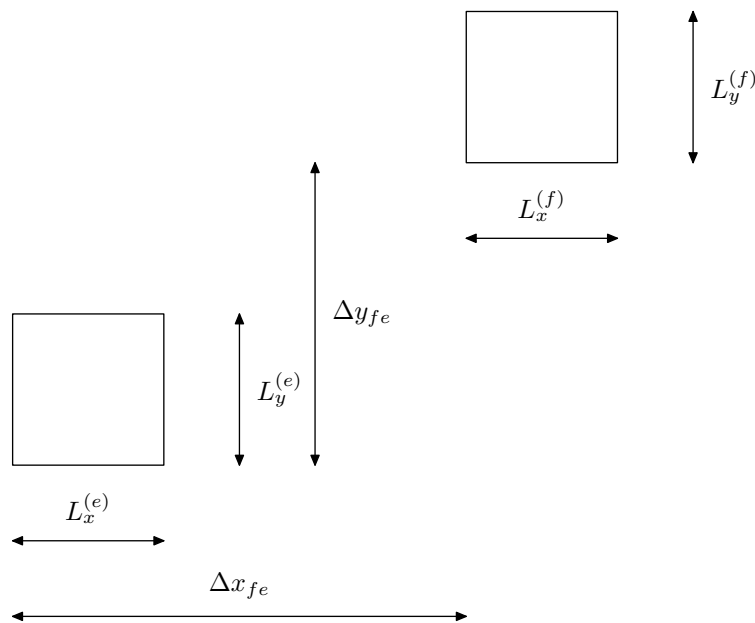
$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{kl}^{(e)} X_{mn}^{(f)} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{L_x^{(e)}} \int_0^{L_y^{(e)}} \xi_e^k \eta_e^l g^{(e)}(\xi_e, \eta_e) d\xi_e d\eta_e \right) \left(\int_0^{L_x^{(f)}} \int_0^{L_y^{(f)}} \xi_f^m \eta_f^n g^{(f)}(\xi_f, \eta_f) d\xi_f d\eta_f \right) \right] \\ &= \int_0^{L_x^{(e)}} \int_0^{L_y^{(e)}} \int_0^{L_x^{(f)}} \int_0^{L_y^{(f)}} \xi_e^k \eta_e^l \xi_f^m \eta_f^n \mathbb{E} [g^{(e)}(\xi_e, \eta_e) g^{(f)}(\xi_f, \eta_f)] d\xi_e d\eta_e d\xi_f d\eta_f . \end{aligned} \quad (4.6.56)$$

Pod pretpostavkom da su svi konačni elementi karakterizirani istim stohastičkim poljem $g(\xi, \eta)$, prethodno očekivanje produkta težinskih integrala, (4.6.56), možemo izraziti u jednostavnijem obliku

$$\mathbb{E} [g(\xi_e, \eta_e) r(\xi_f, \eta_f)] = R_{gg}(\Delta x_{fe} + \xi_f - \xi_e, \Delta y_{fe} + \eta_f - \eta_e) , \quad (4.6.57)$$

gdje je $R_{gg}(\xi, \eta)$ autokorelacijska funkcija slučajnog polja $g(\xi, \eta)$, a veličine Δx_{fe} i Δy_{fe} definirane kao udaljenosti početnih čvorova konačnih elemenata (e) i (f) u smjeru osi x i osi y

$$\Delta x_{fe} = x_i^{(f)} - x_i^{(e)} \quad , \quad \Delta y_{fe} = y_i^{(f)} - y_i^{(e)} . \quad (4.6.58)$$



Slika 4.6.2: Prikaz definiranih veličina međusobne udaljenosti konačnih elemenata (e) i (f)

Uzevši u obzir Wiener-Khintchinovu transformaciju, prema [?], između autokorelacijske funkcije i funkcije spektralne gustoće $S_{gg}(\kappa_x, \kappa_y)$, potrebno očekivanje produkta težinskih

integrala, (4.6.56), možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{kl}^{(e)} X_{mn}^{(f)} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\kappa_x, \kappa_y) e^{i(\kappa_x \Delta x_{fe} + \kappa_y \Delta y_{fe})} \\ &\quad \int_0^{L_x^{(e)}} \int_0^{L_y^{(e)}} \xi_e^k \eta_e^l e^{-i(\kappa_x \xi_e + \kappa_y \eta_e)} \\ &\quad \cdot \int_0^{L_x^{(f)}} \int_0^{L_y^{(f)}} \xi_f^m \eta_f^n e^{i(\kappa_x \xi_f + \kappa_y \eta_f)} d\xi_e d\eta_e d\xi_f d\eta_f . \end{aligned} \quad (4.6.59)$$

Varijanca vektora odziva konstrukcije \mathbf{w} sada slijedi u obliku

$$\text{Var}[\mathbf{w}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{rr}(\kappa_x, \kappa_y) \text{VRF}_{\text{WI}}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y , \quad (4.6.60)$$

gdje je vektor VRF_{WI} aproksimacija prvog reda funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije metodom težinskih integrala (weighted integrals)

$$\begin{aligned} \text{VRF}_{\text{WI}}(\kappa_x, \kappa_y) &= \sum_{(e)} \sum_{(f)} \sum_{k,l} \sum_{m,n} \text{diag} \left(\mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_{kl}^{(e)} \mathbf{w}_0 \right) \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_{mn}^{(f)} \mathbf{w}_0 \\ &\quad \cdot \left[\left(C I_{kl}^{(e)} C I_{mn}^{(f)} + S I_{kl}^{(e)} S I_{mn}^{(f)} \right) \cos(\Delta x_{fe} \kappa_x + \Delta y_{fe} \kappa_y) \right. \\ &\quad \left. - \left(S I_{kl}^{(e)} C I_{mn}^{(f)} - C I_{kl}^{(e)} S I_{mn}^{(f)} \right) \sin(\Delta x_{fe} \kappa_x + \Delta y_{fe} \kappa_y) \right] \end{aligned} \quad (4.6.61)$$

a za $(g) = (e), (f)$

$$C I_{kl}^{(g)} = \int_0^{L_x^{(g)}} \int_0^{L_y^{(g)}} \xi_g^k \eta_g^l \cos(\kappa_x \xi_g + \kappa_y \eta_g) d\xi_g d\eta_g \quad (4.6.62)$$

$$S I_{kl}^{(g)} = \int_0^{L_x^{(g)}} \int_0^{L_y^{(g)}} \xi_g^k \eta_g^l \sin(\kappa_x \xi_g + \kappa_y \eta_g) d\xi_g d\eta_g \quad (4.6.63)$$

4.7. Metoda lokalnog uprosječenja za ploče

Za daljnju stohastičku analizu ploče možemo primijeniti metodu lokalnog uprosječenja. Matricu krutosti ploče za svaki konačni element možemo prikazati kao

$$\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{D}_0^{(e)} [1 + \alpha_g^{(e)}] , \quad (4.7.64)$$

gdje slučajnu varijablu $\alpha_g^{(e)}$ zovemo *lokalni prosjek slučajnog polja* $g^{(e)}(x, y)$ na konačnom elementu (e) , a definiramo kao

$$\alpha_g^{(e)} = \frac{1}{L_x^{(e)} L_y^{(e)}} \int_0^{L_x^{(e)}} \int_0^{L_y^{(e)}} g^{(e)}(\xi, \eta) d\xi d\eta , \quad (4.7.65)$$

Stohastička elementarna matrica krutosti je sada oblika

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_0^{(e)} [1 + \alpha_g^{(e)}] , \quad (4.7.66)$$

odnosno stohastički dio matrice krutosti glasi

$$\Delta \mathbf{K}^{(e)} = \alpha_g^{(e)} \mathbf{K}_0^{(e)} , \quad (4.7.67)$$

pri čemu imamo samo jednu nepoznatu slučajnu varijablu, težinski integral $X_{00}^{(e)}$ po svakom konačnom elementu (e).

Na temelju istog pristupa kao kod metode težinskih integrala, vektor varijance odziva konstrukcije možemo prikazati kao

$$\text{Var}[\mathbf{w}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(\kappa_x, \kappa_y) \text{VRF}_{\text{LA}}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y , \quad (4.7.68)$$

gdje je vektor VRF_{LA} aproksimacija prvog reda funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije metodom lokalnog uprosječenja,

$$\begin{aligned} \text{VRF}_{\text{LA}}(\kappa_x, \kappa_y) &= \sum_{(e)} \sum_{(f)} \text{diag} \left(\mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_0^{(e)} \mathbf{w}_0 \right) \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_0^{(f)} \mathbf{w}_0 \\ &\cdot \left[\left(CI_{00}^{(e)} CI_{00}^{(f)} + SI_{00}^{(e)} SI_{00}^{(f)} \right) \cos(\Delta x_{fe} \kappa_x + \Delta y_{fe} \kappa_y) \right. \\ &\left. - \left(SI_{00}^{(e)} CI_{00}^{(f)} - CI_{00}^{(e)} SI_{00}^{(f)} \right) \sin(\Delta x_{fe} \kappa_x + \Delta y_{fe} \kappa_y) \right] . \end{aligned} \quad (4.7.69)$$

Vektor varijance odziva definiran je sada uz značajno smanjenje broja računskih operacija (ukinuto je u proračunu 37×37 sumacija po svakom konačnom elementu), u smislu davanja postupka primijenjivog s inženjerskog aspekta, to jest dobivanja rješenja neznatno slabije kvalitete uz bitno kraći i jednsotavniji tijek proračuna.

4.8. Gornja granica koeficijenta varijacije

Promatramo li odziv konstrukcije u smjeru konkretnog stupnja slobode w_i i pripadnu komponentu funkcije varijabilnosti odziva konstrukcije $\text{VRF}_i(\kappa_x, \kappa_y)$. Varijanca tog pomaka ograničena je veličinom $\text{VRF}_i(\kappa_x^*, \kappa_y^*)$

$$\text{Var}[w_i] \leq \sigma_{rr}^2 \text{VRF}_i(\kappa_{x,i}^*, \kappa_{y,i}^*) , \quad (4.8.70)$$

gdje je $(\kappa_{x,i}^*, \kappa_{y,i}^*)$ točka u području domene valnih brojeva u kojoj funkcija varijabilnosti odziva konstrukcije $\text{VRF}_i(\kappa_x, \kappa_y)$ poprima maksimalnu vrijednost. Posebno je bitna činjenica da gornja granica ne ovisi o funkciji spektralne gustoće i u tom smislu neovisna je o distribuciji spektra slučajnosti ulaznih parametara. Na isti način slijedi i koeficijent varijacije progiba u smjeru konkretnog stupnja slobode kao

$$\text{CoV}_{w_i} = \sigma_{ff} \frac{\sqrt{\text{VRF}_i}}{w_{0i}} . \quad (4.8.71)$$

5. Matematička formulacija zadaće stohastičke analize savijanja ploče

5.1. Varijacijska formulacija jednadžbe ploče u determinističkom slučaju

Zadaća određivanja progiba tankih ploča u varijacijskoj formulaciji glasi

$$\begin{cases} \text{Naći } w \in V^0 \text{ takav da} \\ (\forall w' \in V^0) a(w, w') = l(w') \end{cases} \quad (5.1.1)$$

gdje su

$$a(w, w') = \int_{\Omega} D [(1 - \nu) \nabla(\nabla w) \cdot \nabla(\nabla w') + \nu \Delta w \Delta w'] d\Omega \quad , \quad (5.1.2)$$

$$l(w') = \int_{\Omega} q w' d\Omega \quad . \quad (5.1.3)$$

5.2. Egzistencija i jedinstvenost rješenja stohastičke zadaće savijanja ploče

Neka je $(\Omega_{\omega}, \mathcal{F}, p)$ vjerojatnosti prostor. Skup Ω_{ω} je skup svih mogućih događaja, realizacija vrijednosti ulaznih parametara, npr. krutosti ploče na savijanje D na području Ω , \mathcal{F} σ -algebra događaja, a $p_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$ vjerojatnosna mjera. Neka je ω proizvoljna moguća realizacija događaja iz skupa Ω_{ω} , pripadnu vrijednost krutosti ploče označimo sa $D(\omega)$, a pripadne vrijednosti odziva konstrukcije (progiba) sa $w(\omega)$.

Promatramo stohastičku rubnu zadaću:

Za zadanu funkciju $q \in L^2(\Omega)$, naći $w : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, koja zadovoljava

$$\begin{cases} \Delta(\bar{D}\Delta w) = q & \text{u } \Omega, \\ w = w_0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2.4)$$

gdje je Ω ograničeno područje u \mathbf{R}^2 , a \bar{D} slučajna realna funkcija.

Neka je v ograničena slučajna funkcija u $L^2(\Omega \times \Omega_{\omega})$,

$$v : \Omega \times \Omega_{\omega} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \|v\| < \infty \quad , \quad (5.2.5)$$

s normom

$$\|v\|^2 = \mathbf{E} \left[\int_{\Omega} v^2(x, y, \cdot) dx dy \right] \quad . \quad (5.2.6)$$

Za funkciju \bar{D} pretpostavljamo da je ograničena i strogo pozitivna, $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$ takvi da vrijedi

$$0 < \alpha_1 \leq \bar{D}(x, y) \equiv D(x, y, \omega) \leq \alpha_2 < \infty \quad . \quad (5.2.7)$$

U smislu varijacijske formulacije, promatramo prostor

$$V = \{w : \Omega \times \Omega_{\omega} \rightarrow \mathbf{R} : \|w\|_V < \infty, \quad w|_{\partial\Omega \times \Omega_{\omega}} = w_0\} \quad . \quad (5.2.8)$$

Zbog ograničenja funkcije $D(x, y, \omega)$, (5.2.7), norma $\|\cdot\|_V$ dobro je definirana sa

$$\|w\|_V^2 = \mathbb{E} \left[\int_{\Omega} D(x, y, \omega) [(1 - \nu) |\nabla(\nabla w)|^2 + \nu |\Delta w|^2] dx dy \right], \quad (5.2.9)$$

gdje su sve potrebne podintegralne derivacije samo po površinskim koordinatama, x, y . Skalarni produkt koji inducira prethodnu normu, (5.2.9), dan je bilinearnom formom $a_{\omega} : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$,

$$a_{\omega}(w, w') = \mathbb{E} \left[\int_{\Omega} D(x, y, \omega) [(1 - \nu) \nabla(\nabla w(x, y, \omega)) \cdot \nabla(\nabla w'(x, y, \omega)) + \nu \Delta w(x, y, \omega) \Delta w'(x, y, \omega)] dx dy \right]. \quad (5.2.10)$$

Očito, V je Hilbertov prostor slučajnih funkcija. Bilinearna forma $a_{\omega}(w, w')$ je neprekidna i koercivna,

$$|a_{\omega}(w, w')| \leq \|w\|_V \|w'\|_V, \quad \forall w, w' \in V, \quad (5.2.11)$$

$$\|w\|_V^2 \leq a(w, w), \quad \forall w \in V. \quad (5.2.12)$$

Za svaku $q \in L^2(\Omega)$, postoji konstanta C takva da vrijedi

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_{\Omega} q w dx dy \right] \right| \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V. \quad (5.2.13)$$

Tada, na temelju Lax-Milgramovog teorema, za svaku $q \in L^2(\Omega)$, postoji jedinstveno slabo rješenje w stohastičke rubne zadaće (5.2.4) koje zadovoljava

$$a_{\omega}(w, w') = \mathbb{E} \left[\int_{\Omega} q w d\Omega \right], \quad \forall w' \in V. \quad (5.2.14)$$

5.3. Formulacija zadaće metodom težinskih integrala

Pretpostavimo da postoji $K \in \mathbf{N}$ takav da su X_n , $n = 1, \dots, K$ međusobno nezavisne slučajne varijable za koje vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{E}[X_n^2] = 1 \quad (5.3.15)$$

i b_n , $n = 1, \dots, K$ uniformno ograničene realne funkcije takve da slučajnu funkciju \bar{D} možemo napisati u obliku

$$\bar{D}(x, y, \omega) = \mathbb{E}[\bar{D}](x, y) + \sum_{n=1}^K b_n(x, y) X_n(\omega), \quad (x, y, \omega) \in \Omega \times \Omega_{\omega}. \quad (5.3.16)$$

Pretpostavljamo da X_n , $n = 1, \dots, K$ imaju ograničeno područje vrijednosti Γ_n ,

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= X_n(\Omega_{\omega}), & \Gamma_n &= (-\gamma_n, \gamma_n) \subset \mathbf{R}, \quad \gamma_n > 0, \\ \Gamma &= \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_K, \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

i da je ρ_n funkcija gustoće vjerojatnosti takva da je

$$0 < \beta_1 \leq \rho_n \leq \beta_2 < +\infty \quad n = 1, \dots, K \quad . \quad (5.3.18)$$

Simetričnost područja vrijednosti Γ_n i stroga pozitivnost funkcije gustoće vjerojatnosti ρ_n pretpostavljeni su zbog jednostavnije daljnje analize.

Ako je slučajna funkcija \bar{D} dana jednadžbom (5.3.16), tada u smislu Doob-Dynkinove leme, rješenje w od (5.2.14) možemo zapisati kao funkcija od X_n , $n = 1 \dots, K$ kao

$$w(x, y, \omega) = w(x, y, X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad . \quad (5.3.19)$$

Stohastičku zadaću (5.2.4) možemo sada zapisati u ekvivalentnom obliku: Za zadanu funkciju $q \in L^2(\Omega)$, naći $w : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, koja zadovoljava

$$\begin{cases} \Delta(\bar{D}\Delta w) = q & \text{u } \Omega \times \gamma, \\ w = w_0 & \text{na } \partial\Omega \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.3.20)$$

Za prikaz varijacijske formulacije uvodimo skalarni produkt

$$(w, w')_\rho = \int_{\Gamma} \rho(z) \int_{\Omega} w(x, y) w'(x, y) d\Omega dz \quad , \quad (5.3.21)$$

gdje su $\rho(z) = \rho_1(z_1) \dots \rho_K(z_K)$ i $z_n = X_n(\omega)$, $n = 1, \dots, K$ i pripadnu induciranu normu $\|\cdot\|_\rho$. Definiramo sljedeće prostore

$$L_\rho(\Omega, \Gamma) = \{v : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R} : \|v\|_\rho < +\infty\} \quad , \quad (5.3.22)$$

$$W(\Omega, \Gamma) = \{v \in L_\rho : \|v\|_W < +\infty, v|_{\partial\Omega \times \Gamma} = 0\} \quad . \quad (5.3.23)$$

Zbog (5.2.7), norma $\|\cdot\|_W$ dobro je definirana sa

$$\|v\|_W^2 = \int_{\Gamma} \rho(z) \int_{\Omega} D(x, y, \omega) [(1 - \nu) |\nabla(\nabla w)|^2 + \nu |\Delta w|^2] dx dy dz \quad . \quad (5.3.24)$$

Prostor $W(\Omega, \Gamma)$ Hilbertov je prostor ekvivalentan prostoru V . Pripadna bilinerana forma glasi

$$\begin{aligned} a_\omega(w, w') &= \int_{\Gamma} \rho(z) \int_{\Omega} D(x, y) [(1 - \nu) \nabla(\nabla w(x, y)) \cdot \nabla(\nabla w'(x, y)) \\ &\quad + \nu \Delta w(x, y) \Delta w'(x, y)] dx dy dz \quad . \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Bilinearna je forma (5.3.25) neprekidna i koercivna,

$$|a_\omega(w, w')| \leq \|w\|_W \|w'\|_W \quad , \quad \forall w, w' \in W \quad , \quad (5.3.26)$$

$$\|w\|_W^2 \leq a(w, w) \quad , \quad \forall w \in W \quad . \quad (5.3.27)$$

Za svaku $q \in L^2(\Omega)$, postoji konstanta C takva da vrijedi

$$|(q, w')_\rho| \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)} \|w'\|_W \quad . \quad (5.3.28)$$

Tada, na temelju Lax-Milgramovog teorema, za svaku $q \in L^2(\Omega)$, postoji jedinstveno slabo rješenje $w \in W$ stohastičke rubne zadaće (5.3.20) koje zadovoljava

$$a_\omega(w, w') = (q, w')_\rho \quad , \quad \forall w' \in W \quad . \quad (5.3.29)$$

Početnu smo stohastičku rubnu zadaću savijanja ploče (5.2.4) zapisali u ekvivalentnom prikladnom determinističkom obliku (5.3.20). Neizvjesnost slučajne funkcije \bar{D} prikazana je kao zbroj konačnog broja međusobno nezavisnih slučajnih varijabli.

U praktičnom smislu nemoguće je odrediti rješenje za svaku moguću realizaciju ω . Za karakterizaciju neizvjesnosti odziva konstrukciju proračunat će se pripadno očekivanje, varijanca i koeficijent varijacije.