Zadaci s pismenih ispita iz matematike 2 s rješenjima

MATEMATIKA II

20.3.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y) = Arc\cos\dfrac{2x-4y}{x^2+y^2} + \ln xy.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = \sqrt{2}e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2=9$ i $z=0.$

3. Izračunajte $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \left(y\ln y - y + e^x\right)dx + \left((x+y)\ln y + \sqrt{4-y^2}\right)dy.$

4. Izračunaj $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS,$ gdje je Σ plašt stošca $x^2+y^2=4z^2, 0\le z\le 4.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $2xydx - \left(x^2+y^2\right)dy = 0.$

Rješenja: 1. $Df = \left\{(x,y)\in R^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \ge 5, (x-1)^2 + (y+2)^2 \ge 5, xy > 0\right\}.$
2. $2\sqrt{2}\pi e^3\left(2e^3+1\right).$
3. $6\ln 2 - \dfrac{15}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\pi}{3} + e^2 - e.$
4. $512\sqrt{5}\pi.$
5. $y^2 - x^2 = cy.$

MATEMATIKA II

20.3.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y) = Arc\sin\dfrac{2y-4x}{x^2+y^2} + \ln\dfrac{x}{y}.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = \sqrt{2}e^{3-\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2=4$ i $z=0.$

3. Izračunajte $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \left((x+y)\ln x + \sqrt{4-x^2}\right)dx + \left(x\ln x - x + e^y\right)dy.$

4. Izračunaj $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS,$ gdje je Σ plašt stošca $x^2+y^2=9z^2, 0\le z\le 2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(2x-4y)dx + (x+y)dy = 0.$

Rješenja: 1. $Df = \{(x,y) \in R^2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 5, (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 5, xy > 0\}$.

2. $2\sqrt{2}\pi e(e^2 - 3)$.

3. $6\ln 2 - \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + e^2 - e.$

4. $108\sqrt{10}\pi.$

5. $(y-2x)^3 = c(y-x)^2.$

MATEMATIKA II

17.4.2004.

1. Nađite one tangencijalne ravnine na plohu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, koje prolaze točkom $A(1,1,0)$, a okomite su na ravninu $x + y + z - 7 = 0.$

2. Izračunajte $\iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{(x^2+y^2)^3 + 1}\,dxdy$, gdje je $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

3. Izračunajte $\int\limits_\Gamma xds$, gdje je Γ presječnica ploha $y = 3 - x^2$ i $y = z.$

4. Izračunaj tok vektorskog polja $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy'\ln x - 2y = \ln x.$

Rješenja: 1. $\pi_1 ... y - z - 1 = 0, \pi_2 ... 4x - y - 3z - 3 = 0.$

2. $\frac{13\pi}{108} + \frac{13\sqrt{3}}{288}.$

3. $\frac{31}{6}.$

4. $\frac{4R^5\pi}{5}.$

5. $y = c\ln^2 x - \ln x.$

MATEMATIKA II

22.5.2004.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 1.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2, y = x$ i $y = \sqrt{3}x,$ koje se nalazi u prvom oktantu.

3. Izračunajte $\int_\Gamma x^4 ds,$ gdje je Γ kružnica $x^2 + y^2 = 2y.$

4. Izračunajte $\iint_\Sigma z dS,$ gdje je Σ dio rotacionog paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2,$ koji se nalazi iznad ravnine $z = 0.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(2xy + \ln x)dx + (x^2 - ye^y)dy = 0.$

Rješenja: 1. Stacionarne točke su $A(1,0), B(0,1).$ U točki A funkcija ima lokalni minimum, dok u točki B nema ekstrem.

2. $V = \frac{\pi}{144}(8\sqrt{2} - 7).$

3. $\frac{3\pi}{4}.$

4. $\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5} - 11).$

5. $x^2 y + x \ln x - x + e^y - ye^y = c.$

MATEMATIKA II

17.6.2004.

1. Na krivulji $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti od ishodišta najveći.

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 = 3x$ i kardioidom $r = 1 + \cos\varphi$ koji se nalzi unutar prve, a izvan druge krivulje.

3. Izračunajte $\int_{\widehat{\Gamma}} arctgx dx + x^3 y dy,$ gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio parabole $x = y^2$ od točke $A(1,1)$ do $B(0,0)$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu $z = 2 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0,$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' = x^2 e^x + 3.$

Rješenja: 1. $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. π.

3. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{8} - \frac{\pi}{4}$.

4. $\frac{5\pi}{2}$.

5. $y = c_1 + c_2 e^{2x} - (x^2 + 2)e^x - \frac{3}{2}x.$

MATEMATIKA II

17.6.2004.

1. Na krivulji $4x^2 + 6xy + 4y^2 = 14$ odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti od ishodišta najveći.

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 = 6x$ i kardioidom $r = 2(1 + \cos\varphi)$ koji se nalzi unutar prve, a izvan druge krivulje.

3. Izračunajte $\int_{\widehat{\Gamma}} xy dx + arctgy dy,$ gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio parabole $y = x^2$ od točke $A(1,1)$ do $B(0,0)$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = 2x\vec{i} - 2yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu $z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0,$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^x + 1.$

Rješenja: 1. $A\left(\sqrt{7},-\sqrt{7}\right), B\left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right).$

2. $4\pi.$

3. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}.$

4. $\frac{64\pi}{3}.$

5. $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}+\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{16}x\right)e^x-\frac{1}{3}.$

MATEMATIKA II

8.7.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+z^2-xy-8=0$ koje su paralene s ravninom $x-2y-2z+11=0.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2+z^2=6$ i $z=x^2+y^2.$

3. Izračunajte $\int_{\widehat{\Gamma}}(x+y)^2dx-x^2dy,$ gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio sinusoide $y=\sin x$ od točke $A(0,0)$ do $B(\pi,0).$

4. Izračunajte $\iint_{\Sigma}\left(z^2+1\right)dS,$ gdje je Σ dio sfere $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'y''=y'^3+y'^2.$

Rješenja: 1. $\pi_1 \ldots x-2y-2z-8=0, \pi_2 \ldots x-2y-2z+8=0.$

2. $\frac{2\pi}{3}\left(6\sqrt{6}-11\right).$

3. $\frac{\pi^3}{3}+\frac{9\pi}{2}.$

4. $\frac{14\pi}{3}.$

5. $y=\left(y+c_1\right)e^{c_1x+c_2}.$

MATEMATIKA II

8.7.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu, te ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$.

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2+z^2=2$ i $z=x^2+y^2$.

3. Izračunajte $\int_{\widehat{\Gamma}}(x+y)^2dx+(x^2+1)dy$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $y=\cos x$ od točke $A(0,1)$ do $B(\pi,-1)$.

4. Izračunajte $\iint_{\Sigma}(z^2+2)dS$, gdje je Σ dio sfere $x^2+y^2+z^2=1$ u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy''=y'+y'\ln\frac{y'}{x}$.

Rješenja: 1. $Df=\{(x,y)\in R^2 : x\geq -1, y\geq -1\}$. Stacionarna točka funkije je $A\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, no u toj točki fukcija nema ekstrem.

2. $\frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{\pi^3}{3}+\pi^2+\frac{\pi}{2}-2$.

4. $\frac{7\pi}{6}$.

5. ${c_1}^2y=c_1xe^{c_1x}-e^{c_1x}+c_2$.

MATEMATIKA II

2.9.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z=2xy$ koje prolaze točkom $A(1,0,-4)$, a okomite su na ravninu $x=y$.

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y=2x^2, y+z=8$ i $z=0$.

3. Izračunajte $\int_{\Gamma}x\cos y\,ds$, gdje je Γ rub kvadrata $|x|+|y|=1$.

4. Izračunajte $\iint_{\Sigma}\left(\sqrt{1-z^2}-z\right)dS$, gdje je Σ dio plohe $z^2=x^2+y^2, 0\leq z\leq 1$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(y^2-6xy)dx+3x^2dy=0$.

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 2x + 2y + z + 2 = 0, \pi_2 ... 4x + 4y - z - 8 = 0.$

2. $V = \dfrac{1024}{15}.$

3. $0.$

4. $0.$

5. $y(x + c) = 3x^2.$

MATEMATIKA II

2.9.2004.

1. Nađite tangencijalne ravnine na plohu $z = 3xy$ koje prolaze točkom $A(0,0,9)$, a okomite su na ravninu $x + y + 6z - 5 = 0.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x = 5x^2, x + z = 5$ i $z = 0.$

3. Izračunajte $\int_\Gamma x \sin y ds,$ gdje je Γ rub kvadrata $|x| + |y| = 2.$

4. Izračunajte $\iint_\Sigma \dfrac{\sqrt{1 - z^2}}{3 + z^2} dS,$ gdje je Σ dio plohe $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy' = y + \dfrac{x^2}{y}\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}.$

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 3x - 9y + z - 9 = 0, \pi_2 ... 9x - 3y - z + 9 = 0.$

2. $V = \dfrac{40}{3}.$

3. $0.$

4. $2\sqrt{2}\pi(\ln 3 - 1).$

5. $e^{-\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = cx.$

MATEMATIKA II

16.9.2004.

1. a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y}\ln(x+y)$.

   b) Nađite tangencijalnu ravninu na plohu $z=\sqrt{1-x^2-y}\ln(x+y)$ u točki $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},.\right)$.

2. Izračunajte $\iint\limits_D y^2\sin x dxdy,$ gdje je D područje u ravnini, ograničeno krivuljama $y=2\cos x-1,\ y=0$ i $x=0$ u prvom kvadrantu.

3. Izračunajte krivuljni integral $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,\pi)}(z\cos zx-y\sin x)dx+\cos xdy+x\cos zxdz.$

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=\vec{i}-\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{j}$ kroz zatvorenu plohu (orijentiranu u smjeru vanjskih normala) koju čini dio plohe $z=\sqrt{x^2+y^2}$ u prvom oktantu, zajedno s ravninama $x=0,\ y=0$ i $z=1$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''\cos x+y'\sin x=1,$ uz uvjete $y(0)=0$ i $y'(0)=1$.

Rješenja: 1. a) $Df=\{(x,y)\in R^2 : x+y>0, y\leq 1-x^2\}$.

b) $\pi ... x+y-2z-1=0.$

2. $\frac{1}{24}.$
3. $2\cos 1.$
4. $2-2\cos 1-\sin 1.$
5. $y=1+\sin x-\cos x.$

MATEMATIKA II

16.9.2004.

1. a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=\sqrt{2+x-y^2}\ln(x+y)$.

   b) Nađite tangencijalnu ravninu na plohu $z=\sqrt{2+x-y^2}\ln(x+y)$ u točki $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},.\right)$.

2. Izračunajte $\iint\limits_D y^2\cos x\,dx\,dy,$ gdje je D područje u ravnini, ograničeno krivuljama $y=1+\sin x,\ y=0$ i $x=0$ u prvom kvadrantu.

3. Izračunajte krivuljni integral $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,\pi)}\cos y\,dx+(z\cos yz-x\sin y)dy+y\cos yz\,dz.$

4. Izračunaj tok vektorskog polja $\vec{a}=\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i}-3\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu (orijentiranu u smjeru vanjskih normala) koju čini dio plohe $z=\sqrt{x^2+y^2}$ u prvom oktantu, zajedno s ravninama $x=0,\ y=0$ i $z=1$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''\sin x-y'\cos x=1,$ uz uvjete $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ i $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Rješenja: 1. a) $Df=\{(x,y)\in R^2 : x+y>0, x\geq y^2-2\}$.

b) $\pi ... 3x+3y-2z-3=0.$

2. $-\frac{1}{12}.$
3. $\cos 1.$
4. $2\sin 1-\cos 1-1.$
5. $y=1-\sin x-\cos x.$

MATEMATIKA II

6.11.2004.

1. Odredite maksimum funkcije $f(x,y)=7-5x+12y,$ uz uvjet $x^2+y^2=4.$

2. Izračunajte volumen tijela koje nastaje presjekom ploha $x^2+y^2=4$ i $x^2+z^2=4.$

3. Izračunajte $\int_{\widehat{\Gamma}} xydx+\left(x^2+y^3\right)dy,$ gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio kružnice $x^2+y^2=R^2$ od točke $A(R,0)$ do točke $B(0,R).$

4. Izračunajte plošni integral $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{(1+x+z)^2},$ gdje je Σ dio ravnine $x+y+z=1$ u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''-5y'+6y=x^2e^{2x}+1.$

Rješenja: 1. $33.$

2. $V=\frac{64}{3}.$

3. $\frac{R^3}{3}+\frac{R^4}{4}.$

4. $\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$

5. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}x\right)e^{2x}+\frac{1}{6}.$

MATEMATIKA II

11.12.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=Arc\cos\frac{2x-4y}{x^2+y^2}+\ln xy.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z=\sqrt{2}e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2=9$ i $z=0.$

3. Izračunajte $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left(y\ln y-y+e^x\right)dx+\left((x+y)\ln y+\sqrt{4-y^2}\right)dy.$

4. Izračunaj $\iint_{\Sigma} x^2dS,$ gdje je Σ plašt stošca $x^2+y^2=4z^2, 0\le z\le 4.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $2xydx-\left(x^2+y^2\right)dy=0.$

Rješenja: 1. $Df = \{(x,y)\in R^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \ge 5, (x-1)^2 + (y+2)^2 \ge 5, xy > 0\}.$

2. $2\sqrt{2}\pi e^3 (2e^3 + 1).$

3. $6\ln 2 - \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + e^2 - e.$

4. $512\sqrt{5}\pi.$

5. $y^2 - x^2 = cy.$

MATEMATIKA II

11.12.2004.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y) = Arc\sin\frac{2y-4x}{x^2+y^2} + \ln\frac{x}{y}.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = \sqrt{2}e^{3-\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2 + y^2 = 4$ i $z = 0.$

3. Izračunajte $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \left((x+y)\ln x + \sqrt{4-x^2}\right)dx + \left(x\ln x - x + e^y\right)dy.$

4. Izračunaj $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS,$ gdje je Σ plašt stošca $x^2 + y^2 = 9z^2, 0 \le z \le 2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(2x-4y)dx + (x+y)dy = 0.$

Rješenja: 1. $Df = \{(x,y)\in R^2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 \ge 5, (x-2)^2 + (y+1)^2 \ge 5, xy > 0\}.$

2. $2\sqrt{2}\pi e(e^2 - 3).$

3. $6\ln 2 - \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + e^2 - e.$

4. $108\sqrt{10}\pi.$

5. $(y-2x)^3 = c(y-x)^2.$

MATEMATIKA II

15.1.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2 y + y$.

2. Izračunajte $\iint\limits_D xydxdy$, gdje je D područje u R^2 omeđeno krivuljom $y = \ln x$ i pravcima $x + y = 1$ i $x = 2$.

3. Pomoću Greenove formule izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}} \left(e^x \sin y - y^2 + x\right)dx + e^x \cos y dy$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krirvulje $x^2 + y^2 = 4x$, koji se nalazi iznad osi x, od točke $A(4,0)$ do točke $B(0,0)$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = \left(z - x^2\right)\vec{j} + \sqrt{4 - z}\,\vec{k}$ kroz plohu $\widehat{\Sigma} = \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 4\right\}$, orijentiranu tako da vektor normale zatvara oštar kut s vektorom $\vec{k}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\left(x^2 + 1\right)y'' + 2xy' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su $A\left(0, -\frac{1}{2}\right), B(1,1), C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, dok u B i C nema ekstrema.

2. $\ln^2 2 - \ln 2 + \dfrac{1}{12}$.

3. $\dfrac{8}{3}$.

4. $\dfrac{16\pi}{3}$.

5. $y = c_1 arctgx + \dfrac{(arctgx)^2}{2} + c_2$.

MATEMATIKA II

3.2.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu $z = x^2 + y^2 + xy$ koje prolaze točkom $A(1,0,-6)$, a okomite su na ravninu $x = y$.

2. Izračunajte površinu oba lika omeđena krivuljom $x^2 + y^2 = y$ i pravcem $y = \sqrt{3}x$.

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma} xyds$, gdje je Γ presječnica ploha $x = 1 - y^2$ i $x = z$ u prvom oktantu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x^4\vec{i} + \vec{j}$ kroz zatvorenu plohu $\hat{\Sigma} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1\right\} \cup \left\{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$, orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'' = y^2y' + y'^2$.

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 3x + 3y + z + 3 = 0, \pi_2 ... 6x + 6y - z - 12 = 0.$

2. $P_1 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}, P_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$

3. $\frac{19}{120}.$

4. $0.$

5. $y = (y + c_1)e^{c_1x + c_2}.$

MATEMATIKA II

3.2.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu $z = x^2 + y^2 - xy$ koje prolaze točkom $A(0,1,-6)$, a okomite su na ravninu $x + y = 15$.

2. Izračunajte površinu oba lika omeđena krivuljom $x^2 + y^2 = x$ i pravcem $y = \sqrt{3}x$.

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma} xyds$, gdje je Γ presječnica ploha $y = 1 - x^2$ i $y = z$ u prvom oktantu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = y^4\vec{j} + \vec{k}$ kroz zatvorenu plohu $\hat{\Sigma} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1\right\} \cup \left\{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$, orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'' = y^2y' + y'^2$.

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 3x-3y-z-3=0, \pi_2 ... 6x-6y+z+12=0.$

2. $P_1=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{16}, P_2=\frac{5\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{16}.$

3. $\frac{19}{120}.$

4. $0.$

5. $y=(y+c_1)e^{c_1x+c_2}.$

MATEMATIKA II

17.2.2005.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=\sqrt{9^{x^2+2xy+y^2}-3^{36-2x^2+4xy-7y^2}}$ te izračunajte $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Izračunajte volumen manjeg tijela omeđenog plohama $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ i $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

3. a) Provjerite da je polje $\vec{a}=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\vec{i}+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\vec{j}-\frac{xy}{z^2}\vec{k}$ potencijalno.

   b) Izračunajte $\int\limits_{(0,1,1)}^{(2,1,1)}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz.$

4. Pomoću Stokesova teorema izračunajte $\int\limits_{\Gamma}\vec{a}d\vec{r}$, ako je $\vec{a}=2xz\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$, a $\widehat{\Gamma}$ pozitivno orijentirana krivulja nastala presjekom ravnine $x+y+2z=2$ s koordinatnim ravninama.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\left(y'-\frac{y}{x}\right)arctg\frac{y}{x}=1,$ uz uvjet $y(1)=0.$

Rješenja: 1. $Df=\{(x,y)\in R^2 : 4x^2+9y^2\geq 36\}.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{9^{x^2+2xy+y^2}(2x+2y)\ln 9+3^{36-2x^2+4xy-7y^2}(4x-14y)\ln 3}{2\sqrt{9^{x^2+2xy+y^2}-3^{36-2x^2+4xy-7y^2}}}.$$

2. $V=\frac{2\pi}{3}\left(8-4\sqrt{2}\right).$

3. $2.$

4. $-\frac{2}{3}.$

5. $\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=0.$

MATEMATIKA II

19.3.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x^2}{y}+y+1.$

2. Izračunajte $\iint\limits_D \sin x dx dy,$ gdje je D područje u ravnini omeđeno krivuljom $y=x^2$ i pravcem $y=x.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}}(x+y)^2 dx+\left(x^2-y^2\right)dy,$ gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $y=2-|x-2|$ od točke $x=0$ do točke $x=4.$

4. Izračunajte $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dS,$ gdje je Σ dio sfere $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy'\ln x-2y=\ln x.$

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su $A(2,2), B(-2,-2).$ Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, a u točki B lokalni maksimum.

2. $2-2\cos 1-\sin 1.$

3. $\frac{80}{3}.$

4. $4\pi.$

5. $y=c\ln^2 x-\ln x.$

MATEMATIKA II

16.4.2005.

1. Ako je $z=\dfrac{4x}{\varphi\left(x-y^2\right)-x-y^2}$, pokažite da je $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z+z^2.$

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho^3dz.$

3. Izračunajte krivuljni integral $\int\limits_\Gamma\sqrt{6-4x}ds$ po zatvorenoj krivulji $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, gdje je Γ_1 presječnica ploha $x=1-y^2$ i $y=z$ u prvom oktantu, a Γ_2 spojnica točaka $A(1,0,0)$ i $B(0,1,1)$.

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma xydS$, gdje je Σ dio plohe $z=2-x^2-y^2$, omeđen ravninama $y=0$ i $y=\sqrt{3}x$, u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''+4y=\cos 2x+x^2e^{2x}$.

Rješenja: 2. $\dfrac{128\pi}{15}$.

3. $\dfrac{10}{3}+3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. $\dfrac{149}{160}$.

5. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\left(\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$.

MATEMATIKA II

21.5.2005.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu $x^2+xy+y^2+z^2-2z=1,$ koje su paralelne s ravninom $4x+5y-2z+7=0.$

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kardioidom $r=2(1+\sin\varphi)$ i kružnicom $x^2+(y-3)^2=9,$ koji se nalazi unutar obje krivulje.

3. Izračunajte krivuljni integral $\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$, gdje je Γ presječnica ploha $y=\dfrac{x^2}{3}$ i $z=\dfrac{2}{9}xy$ od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(3,3,2).$

4. Izračunajte površinu dijela plohe cilindra $x^2+z^2=1$ u prvom oktantu, koji se nalazi između ravnina $y=x$ i $y=2x.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(xe^x+y-\cos y)dx+(x+x\sin y+\ln y)dy=0.$

Rješenja: 1. $\pi_1...4x+5y-2z-6=0, \pi_2...4x+5y-2z+10=0.$

2. $5\pi.$

3. $\dfrac{387}{20}.$

4. $P=1.$

5. $xe^x-e^x+xy-x\cos y+y\ln y-yc.$

MATEMATIKA II

16.6.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=x^4-2x^2y+y^3-y+7.$

2. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z=x^2+y^2$ i $z=4y.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}}(x+y)^2dx+(x^2+y^2)dy$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $y=1-|x+1|$ od točke $x=-2$ do točke $x=0.$

4. Izračunajte $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+1)dS,$ gdje je Σ dio sfere $x^2+y^2+z^2=1$ u prvom oktantu.

5. Metodom varijacije konstanti riješite diferencijalnu jednadžbu $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}.$

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), C(1,1), D(-1,1)$. Od toga funkcija ima lokalni minimum u točkama C i D, dok u A i B nema ekstrema.

2. 8π.

3. $\frac{10}{3}$.

4. $\frac{2\pi}{3}$.

5. $y=(x+c_1)\sin x+(\ln\cos x+c_2)\cos x$.

MATEMATIKA II

7.7.2005.

1. a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=\sqrt{xy+1}+\sqrt{x^2-y}$.

   b) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z=\sqrt{xy+1}+\sqrt{x^2-y}$, u točki $T(0,-4,.)$.

2. Izračunajte $\iint\limits_D \frac{x^2dxdy}{(x^2+y^2)^3}$, gdje je D područje u ravnini omeđeno krivuljama $x^2+y^2=y, x^2+y^2=2y, x=0$ i $y=x$.

3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}}(x^2+ye^x)dx+(e^x+\ln(x^2+1))dy$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $y=x^2$ od točke $A(-1,1)$ do točke $B(1,1)$.

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma x^2dS$, gdje je Σ dio plohe $z=x^2+y^2$ koji se nalazi unutar sfere $x^2+y^2+z^2=6$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy''-(x+1)y'=e^x$.

Rješenja: 1. a) $Df=\{(x,y)\in R^2 : xy\geq -1, y\leq x^2\}$.

b) $\pi ... 8x+y+4z-8=0$.

2. $\frac{3}{8}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\frac{2}{3}+e-\frac{1}{e}$.

4. $\frac{149\pi}{60}$.

5. $y=c_1xe^x-c_1e^x-e^x+c_2$.

MATEMATIKA II

7.7.2005.

1. Na krivulji $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ odredite točke najbliže ishodištu.

2. Izračunajte $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz,$ gdje je V područje u R^3 omeđeno plohama $z = x^2 + y^2, z = 1$ i $z = 4$.

3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}} \left(e^y + \ln\left(y^2+1\right)\right)dx + \left(y^2 + xe^y\right)dy,$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $x = y^2$ od točke $A(1,1)$ do točke $B(1,-1)$.

4. Izračunajte $\iint\limits_{\widehat{\Sigma}} \vec{a}\,d\vec{S},$ gdje je $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{k}$, a $\widehat{\Sigma}$ dio ravnine $2x + 2y + z = 2$ u prvom oktantu, orijentiran normalom koja zatvara oštar kut s vektorom $\vec{k}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'' + y'^2 = yy'$.

Rješenja: 1. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

2. $21\pi.$

3. $-\frac{2}{3} - e + \frac{1}{e}.$

4. $\frac{2}{3}.$

5. $\ln\left(y^2 + c_1\right) = x + c_2.$

MATEMATIKA II

8.9.2005.

1. Ako je $z(x,y) = xy + \dfrac{y}{\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{x}{y}}$, pokažite da vrijedi $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicama $x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3,\ (x-1)^2 + y^2 = 1$ i pravcem $y = 0.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma} \left(x + y^3 + z\right) ds,$ gdje je Γ presječnica ploha $z = x^2 + y^2$ i $z = 2 - x^2 - y^2$ u prvom oktantu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = 6x\vec{i} - y^3\vec{j} + 3y^2 z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju čini dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ za koji je $z \geq 1$ zajedno s ravninom $z = 1,$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $2x^2 dy - \left(y^2 + 4xy\right)dx = 0.$

Rješenja: 2. $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}.$

3. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{3}.$

4. $10\pi.$

5. $y = cx(y + 2x).$

MATEMATIKA II

8.9.2005.

1. Ako je $z(x,y)=xy+\dfrac{x}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y}}$, pokažite da vrijedi $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicama $x^2+(y-1)^2=1,\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2=3$ i pravcem $x=0.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}\left(x^3+y+z\right)ds,$ gdje je Γ presječnica ploha $x^2+y^2=4$ i $z=6-x^2-y^2$ u prvom oktantu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=x^2\vec{i}+3y\vec{j}-2xz\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju čini dio sfere $x^2+y^2+z^2=4$ za koji je $z\geq 1$ zajedno s ravninom $z=1,$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\left(6xy+y^2\right)dx-3x^2dy=0.$

Rješenja: 2. $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}.$

3. $2\pi+\dfrac{44}{3}.$

4. $5\pi.$

5. $y(c-x)=3x^2.$

MATEMATIKA II

22.9.2005.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=x+\frac{y^2}{2x}+\frac{x^2}{y}+\frac{5}{2x}$.

2. Izračunajte $\iiint\limits_V (x+y)^2\,dxdydz$, gdje je V područje u R^3 koje se nalazi izvan sfere $x^2+y^2+z^2=4$, a unutar sfere $x^2+y^2+z^2=4z$, te unutar cilindra koji se dobije translacijom presjeka te dvije sfere po osi z.

3. a) Provjerite da je vektorsko polje $\vec{a}=(y\ln y-y)\vec{i}+(x+y)\ln y\,\vec{j}$ potencijano.

   b) Izračunajte $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)}(y\ln y-y)dx+(x+y)\ln y dy$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=z\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu, orijentirane normalom koja zatvara oštar kut s vektorom $\vec{k}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'+y\cos x=\sin 2x$.

Rješenja: 1. Stacionarne točke funkcije su $A(1,1), B(-1,-1)$. Od toga u točki A funkcija ima lokalni minimum, a u točki B lokalni maksimum.

2. 9π.

3. $6\ln 2-\frac{15}{4}$.

4. $\frac{16\pi}{3}$.

5. $y=2\sin x-2+ce^{-\sin x}$.

MATEMATIKA II

22.9.2005.

1. a) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=Arc\cos\frac{x^2+y^2}{2x-2y}+\ln(x-y)$.

   b) Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

2. Izračunajte $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, gdje je V područje u R^3 omeđeno plohama $z=x^2+y^2$ i $z=3y$.

3. a) Provjerite da je vektorsko polje $\vec{a}=\left(arctgx+e^{-y}\right)\vec{i}+\left(1-xe^{-y}\right)\vec{j}$ potencijano.

   b) Izračunajte $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}\left(arctgx+e^{-y}\right)dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy$.

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma xy\,dS$, gdje je Σ dio plohe $y=x^2$ za koji je $y\le 1$, a koji se nalazi između ravnina $z=0$ i $z=1$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy''+y'^2=y'^3$.

Rješenja: 1. a) $Df=\left\{(x,y)\in R^2:(x-1)^2+(y+1)^2\le 2,\, y<x\right\}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 0.

3. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2+1+\frac{1}{e}$.

4. 0.

5. $y+c_1y^2=x+c_2$.

MATEMATIKA II

19.11.2005.

1. a) Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$. (6 bodova)

   b) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ u točki $T(1,2,.)$. (2 boda)

2. Izračunajte $\iint_D \frac{y^2}{x^2}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,$ ako je D područje u ravnini omeđeno kružnicama $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ i pravcima $y=\sqrt{3}x, y=0,$ u prvom kvadrantu.

3. Izračunajte $\int_\Gamma z^2dx+arctgx dy+dz,$ ako je Γ dio presječnice ploha $y=1-x^2$ i $y=z$ od točke $A(0,1,1)$ do točke $B(1,0,0)$.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=z^3\vec{i}+y^3\vec{j}+x^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''+9y=\cos 3x+xe^{3x}$.

RJEŠENJA: 1. a) Točka $T(4,4)$ je točka u kojoj funkcija ima lokalni maksimum.

b) $\pi ... 3y-z+3=0.$

2. $3-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$

3. $\frac{8}{15}-\frac{\pi}{2}.$

4. $\frac{4R^5\pi}{5}.$

5. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{6}x\sin 3x+\left(\frac{1}{18}x-\frac{1}{54}\right)e^{3x}.$

MATEMATIKA II

17.12.2005.

1. Pokažite da funkcija $z = y + \dfrac{y}{1-\varphi\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)}$ zadovoljava jednadžbu $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y}$.

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral $\int\limits_0^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^3 d\rho \int\limits_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma} (x-y)^2\, dx - \left(x^2 - y^2\right) dy,$ gdje je Γ dio krivulje $y = 1 - |x-1|$ od točke $x = 0$ do točke $x = 2$. Skicirajte krivulju Γ.

4. Izračunajte $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xy}{\sqrt{1+4z}} dS,$ gdje je Σ dio plohe $z = x^2 + y^2$ koji se nalazi ispod ravnine $z = 2y$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'y'' = y'^3 + yy'^2$.

Rješenja: 2. $\dfrac{64\pi}{15}$.

3. $\dfrac{16}{3}$.

4. 0.

5. $\ln(\ln y + c_1) = x + c_2$.

MATEMATIKA 2

17.12.2005.

1. Pokažite da funkcija $z = y - \dfrac{y}{1+\varphi\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)}$ zadovoljava jednadžbu $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}.$

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}}dz.$

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2-y^2\right)dx-\left(x-y\right)^2dy,$ gdje je Γ dio krivulje $y=1+|x-2|$ od točke $x=0$ do točke $x=3.$ Skicirajte krivulju Γ.

4. Izračunajte $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xy}{\sqrt{1+2z}}dS,$ gdje je Σ dio plohe $2z=x^2+y^2$ koji se nalazi ispod ravnine $z=x.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $yy'y''+y'^3=y'^2$.

Rješenja: 2. $\dfrac{\pi}{15}.$

3. $\dfrac{5}{3}.$

4. $0.$

5. $y+c_1\ln\left(y-c_1\right)=x+c_2.$

MATEMATIKA II

14.1.2006.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu $z = xy - x$ koje prolaze točkom $B(-2,-3,6)$, a okomite su na ravninu $2x - 2y - 2z = 3$.

2. Izračunajte $\iiint\limits_V \frac{1}{1+x^2}\,dxdydz,$ gdje je V područje u R^3 omeđeno plohama $y = 1 - x^2, z = y$ i $z = 2y$.

3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(x + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$ ako je Γ pozitivno orijentiran rub područja u ravnini omeđenog kružnicama $x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x$ i pravcima $y = x, y = -x.$

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ kroz dio ravnine $x + 2y + z = 2$ u prvom oktantu orijentiranog normalom koja zatvara oštar kut s vektorom $\vec{i}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(y\sin x - 2x\cos y)dx + ((x^2 - y)\sin y - \cos x)dy = 0.$

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 2x + y + z + 1 = 0, \pi_2 ... 5x + 4y + z + 16 = 0.$

2. $\pi - \frac{8}{3}.$

3. $0.$

4. $\frac{2}{3}.$

5. $-y\cos x - x^2\cos y + y\cos y - \sin y = c.$

MATEMATIKA II

2.2.2006.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=x^3+\frac{x^2}{2}+4xy+2y^2-4x-4y+1.$

2. Izračunajte $\iint\limits_D y^2\cos x\,dx\,dy,$ gdje je D područje u ravnini, ograničeno krivuljama $y=1+\sin x,\ y=0$ i $x=0$ u prvom kvadrantu.

3. Izračunajte $\int\limits_\Gamma x\,ds,$ gdje je Γ presječnica ploha $y=3-x^2$ i $y=z,$ u prvom oktantu.

4. Izračunaj tok vektorskog polja $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2+y^2+z^2=R^2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy''=y'+y'\ln\frac{y'}{x}.$

Rješenja:
1. Stacionarne točke su $A(1,0), B(0,1).$ U točki A funkcija ima lokalni minimum, dok u točki B nema ekstrem.
2. $-\frac{1}{12}.$
3. $\frac{31}{6}.$
4. $\frac{4R^5\pi}{5}.$
5. $c_1^{\,2}y=c_1xe^{c_1x}-e^{c_1x}+c_2.$

MATEMATIKA 2

9.2.2006.

1. Na krivulji $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 7$ odredite točke koje su najudaljenije od ishodišta.

2. Izračunaj površinu lika omeđenog kružnicama $(x-1)^2 + y^2 = 1, x^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 = 3$, koji se nalazi unutar obje krivulje.

3. a) Provjerite da je polje $\vec{a} = (y + \ln(x+1))\vec{i} + \left(x + \cos y - e^y\right)\vec{j}$ potencijalno.

b) Izračunajte $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (y + \ln(x+1))dx + \left(x + \cos y - e^y\right)dy.$

4. Pomoću Stokesovog teorema izračunajte $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}d\vec{r}$ ako je $\vec{a} = y\vec{i} - 2yz\vec{j} + z\vec{k}$, a Γ krivulja nastala presjekom ravnine $x + y + 2z = 2$ s koordinatnim ravninama.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy' + y = x\sin x$, uz uvjet $y(\pi) = 0$.

Rješenja: 1. Tražene točke su $T_1\left(\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right), T_2\left(-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right)$.

2. $P = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$

3. $2\ln 2 + 2 + \sin 1 - e.$

4. $-\frac{2}{3}.$

5. $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{\pi}{x}.$

MATEMATIKA II

16.2.2006.

1. Odredite tangencijalne ravnine na plohu $x^2 + xy + y^2 + z^2 = 7$ koje su paralelne s ravninom $5x + 4y = 3.$

2. Izračunajte $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$ ako je D područje u prvom kvadrantu omeđeno kardioidom $r = 1 + \cos\varphi,$ kružnicom $x^2 + y^2 = 3x$ i osi $x,$ koje se nalazi izvan prve, a unutar druge krivulje.

3. Izračunajte $\int\limits_\Gamma (x-y)^3 dx - (x^2 - y^2)dy$, ako je Γ dio krivulje $y = 1 - |x-1|$ od točke $x = 0$ do točke $x = 3.$ Skicirajte krivulju.

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma (x+y)dS,$ ako je Σ dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ u prvom oktantu.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy'' - y' = \frac{x^2}{1+x^2}.$

Rješenja: 1. $\pi_1 ... 5x + 4y - 14 = 0, \pi_2 ... 5x + 4y + 14 = 0.$

2. $1 - \frac{1}{2}\ln 2.$

3. $40.$

4. $\frac{9\pi}{2}.$

5. $y = \frac{x^2}{2} arctgx + \frac{1}{2} arctgx - \frac{1}{2}x + c_1 x^2 + c_2.$

MATEMATIKA 2

23.2.2006.

1. Pokažite da funkcija $z = \dfrac{y}{1+\varphi\left(\ln y + \dfrac{x^2}{2y^2}\right)}$ zadovoljava jedndažbu $\left(x^2 - y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz.$

2. Izračunajte $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, gdje je V područje u R^3 omeđeno plohama $z = x^2 + y^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 6.$

3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}} \left(x^2 + ye^x\right)dx + \left(e^x + \ln\left(x^2+1\right)\right)dy$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $y = x^2$ od točke $A(-1,1)$ do točke $B(1,1)$.

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma xyzdS,$ gdje je Σ dio plohe $x^2 + y^2 = 1$ u prvom oktantu koji se nalazi između ravnina $z = 0$ i $z = 2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + y = \cos x + xe^x.$

Rješenja: 2. $\dfrac{\pi}{15}\left(72\sqrt{6} - 164\right).$

3. $\dfrac{2}{3} + e - \dfrac{1}{e}.$

4. $1.$

5. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \dfrac{1}{2} x \sin x + \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\right)e^x.$

MATEMATIKA 2

23.2.2006.

1. Pokažite da funkcija $z = \dfrac{x}{1-\varphi\left(\ln x + \dfrac{y^2}{2x^2}\right)}$ zadovoljava jedndažbu $\left(y^2 - x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} + xy\dfrac{\partial z}{\partial x} = yz.$

2. Izračunajte $\iiint\limits_V y^2 dxdydz$, gdje je V područje u R^3 omeđeno plohama $z = x^2 + y^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

3. Pomoću Greenovog teorema izračunajte $\int\limits_{\widehat{\Gamma}} \left(e^y + \ln\left(y^2+1\right)\right)dx + \left(y^2 + xe^y\right)dy,$, gdje je $\widehat{\Gamma}$ dio krivulje $x = y^2$ od točke $A(1,1)$ do točke $B(1,-1).$

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma xyzdS,$ gdje je Σ dio plohe $x^2 + y^2 = 4$ u prvom oktantu koji se nalazi između ravnina $z = 0$ i $z = 1.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - y = \sin x + (x+1)e^x.$

Rješenja: 2. $\dfrac{\pi}{15}\left(8\sqrt{2} - 7\right).$

3. $-\dfrac{2}{3} - e + \dfrac{1}{e}.$

4. $2.$

5. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x + \left(\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x\right)e^x.$

MATEMATIKA 2

18.3.2006.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=Arc\sin\frac{x^2+y^2}{2y}+\ln(x-y)$.

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral $\int\limits_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}}dz$.

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}x^3 ds$ gdje je Γ dio presječnice ploha $y=1-x^2$ i $y=z$ u prvom oktanu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ kroz dio ravnine $2x+y+z=2$ u prvom oktantu orijentiranog normalom koja zatvara oštar kut s vektorom $\vec{i}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(y\ln y+e^x)dx+(x\ln y+x-tgy)dy=0$.

Rješenja: 1. $Df=\{(x,y)\in R^2 : x^2+(y-1)^2\le 1, x^2+(y+1)^2\le 1, y<x\}$.

2. $\frac{\pi}{15}$.

3. $\frac{149}{240}$.

4. $\frac{5}{3}$.

5. $xy\ln y+e^x+\ln\cos y=c$.

MATEMATIKA 2

18.3.2006.

1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije $f(x,y)=Arc\sin\frac{x^2+y^2}{2x}+\ln(y-x)$.

2. Prelaskom na sferne koordinate izračunajte integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}}dz$.

3. Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}x^3 ds$ gdje je Γ dio presječnice ploha $y=1-x^2$ i $y=z$ u prvom oktanu.

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ kroz dio ravnine $x+2y+z=2$ u prvom oktantu orijentiranog normalom koja zatvara oštar kut s vektorom $\vec{i}$.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $(y\ln x+y+ctgx)dx+(x\ln x-e^y)dy=0$.

Rješenja: 1. $Df = \{(x,y)\in R^2 : (x-1)^2 + y^2 \le 1, (x+1)^2 + y^2 \le 1, y > x\}$

2. $\frac{16\pi}{15}.$

3. $\frac{149}{240}.$

4. $-\frac{1}{3}.$

5. $xy\ln x + \ln\sin x - e^y = c.$

MATEMATIKA 2

8.4.2006.

1. Odredite minimum funkcije $f(x,y) = 7 - 3x + 4y,$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 4.$

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 = 6y$ i kardioidom $r = 2(1+\sin\varphi)$ koji se nalazi unutar prve, a izvan druge krivulje.

3. Provjerite da je vektorsko polje $\vec{a} = (z\cos zx - y\sin x)\vec{i} + \cos x\vec{j} + x\cos zx\vec{k}$ potencijalno te izračunajte krivuljni integral $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,\pi)} (z\cos zx - y\sin x)dx + \cos x dy + x\cos zx dz.$

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x\vec{i} - 2\vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 4y = x^3 - 1 + 3\cos 2x.$

Rješenja: 1. $f(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}) = -3.$

2. $P = 4\pi.$

3. $2\cos 1.$

4. $\frac{4R^3\pi}{3} + \frac{4R^5\pi}{5}.$

5. $y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + x^3 - 6x - 1 + \frac{3}{4}x\sin 2x.$

MATEMATIKA 2

8.4.2006.

1. Odredite maksimum funkcije $f\left(x,y\right)=5+4x-3y,$ uz uvjet $x^2+y^2=9.$

2. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom $x^2+y^2=3x$ i kardioidom $r=1+\cos\varphi$ koji se nalazi unutar obje krivulje.

3. Provjerite da je vektorsko polje $\vec{a}=\cos y\vec{i}+\left(z\cos yz-x\sin y\right)\vec{j}+y\cos yz\vec{k}$ potencijalno te izračunajte krivuljni integral $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,\pi)}\cos ydx+\left(z\cos yz-x\sin y\right)dy+y\cos yzdz.$

4. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a}=3\vec{i}+y\vec{j}-z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2+y^2+z^2=R^2.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''-2y'+y=\left(x+1\right)e^x+2\sin x.$

Rješenja: 1. $f(\frac{12}{5},-\frac{9}{5})=20.$

2. $P=\frac{5\pi}{4}.$

3. $\cos 1.$

4. $\frac{4R^3\pi}{3}-\frac{4R^5\pi}{5}.$

5. $y=c_1e^x+c_2xe^x+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x+\cos x.$

MATEMATIKA 2

20.5.2006.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=\frac{8}{x}-\frac{x^2}{y}-16y-3.$

2. Izračunajte $\iiint\limits_V y^2dxdydz,$ ako je V područje omeđeno sferama $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=4.$

3. Izračunajte $\int\limits_\Gamma (y+z)dx+e^x dy+dz,$ ako je Γ dio presječnice ploha $y=1-x^2, y=z$ od točke $A(-1,0,0)$ do točke $B(1,0,0).$

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z}},$ ako je Σ dio rotacionog paraboloida $z=4-x^2-y^2$ koji se nalazi iznad ravnine $z=0.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy'+y=\frac{1}{x^2+x},$ uz uvjet $y(1)=\ln\frac{1}{2}.$

Rješenja: 1. Funkcija f ima u točki $A(1,-\frac{1}{4})$ lokalni minimum, a u točki $B(-1,\frac{1}{4})$ lokalni maksimum

2. $\frac{124\pi}{15}.$

3. $\frac{8}{3}-\frac{4}{e}.$

4. $\frac{\pi}{12}(17\sqrt{17}-1).$

5. $y=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$

MATEMATIKA 2

20.5.2006.

1. Ispitajte ekstreme funkcije $f(x,y)=1-\frac{8}{y}+\frac{y^2}{x}+16x.$

2. Izračunajte $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz,$ ako je V područje omeđeno sferama $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=9.$

3. Izračunajte $\int\limits_\Gamma 2e^y dx-dy+(x+y+z)dz,$ ako je Γ dio presječnice ploha $x=1-y^2, x=z$ od točke $A(1,0,1)$ do točke $B(0,1,0).$

4. Izračunajte $\iint\limits_\Sigma \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z}},$ ako je Σ dio rotacionog paraboloida $z=1-x^2-y^2$ koji se nalazi iznad ravnine $z=0.$

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'\cos x+y\sin x=1,$ uz uvjet $y(0)=1.$

Rješenja: 1. Funkcija f ima u točki $A(\frac{1}{4},-1)$ lokalni minimum, a u točki $B(-\frac{1}{4},1)$ lokalni maksimum

2. $\frac{968\pi}{15}.$

3. $-\frac{20}{3}.$

4. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$

5. $y=\cos x+\sin x.$