

# ODREĐIVANJE UTJECAJNIH LINIJA GREDNIH NOSAČA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

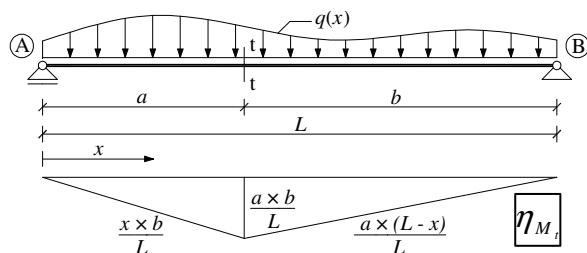
Hak, S. & Meštrović, M.

**Sažetak:** Iako je metoda konačnih elemenata primjenom u programskim paketima za elektronička računala u novije vrijeme postala nezamjenjivim alatom u inženjerskoj praksi, potrebno je dobivene rezultate prihvatiti uz oprez, svjesno vodeći računa o mogućim pogreškama. Na vrlo jednostavnim primjerima lako su uočljiva odstupanja od točnih rješenja. Prikazana je primjena metode konačnih elemenata za rješavanje važnog problema iz područja građevne statike, određivanje utjecajnih linija za geometrijske i statičke veličine na grednim nosačima. Poznato je da one odgovaraju progibnim linijama nosača od opterećenja odgovarajućom Diracovom funkcijom. Za prikaz progiba štapnog konačnog elementa raspoložive su, međutim, isključivo koordinate funkcije klase  $C^2$  koje ne omogućavaju egzaktni prikaz diskontinuiteta koji se javljaju na utjecajnim linijama za statičke veličine. Zamjenom Diracove funkcije ekvivalentnim čvornim opterećenjem na diskretiziranom nosaču i egzaktnim rješavanjem novog slučaja opterećenja dobivena je aproksimacija tražene utjecajne linije. Nizom primjera izrađenih u programskom paketu *SAP 2000 Advanced v. 10.1.1.* pokazano je da postupak daje zadovoljavajuću točnost, a usporedba s poznatim egzaktnim rješenjima potvrđuje da smanjenjem veličine elementa na mjestu diskontinuiteta aproksimacija konvergira.

**Ključne riječi:** utjecajne linije, ekvivalentno čvorno opterećenje, metoda konačnih elemenata

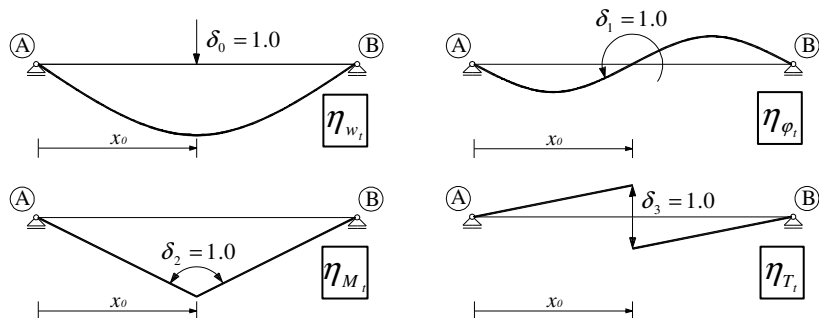
## 1 UVOD

Utjecajne funkcije imaju važnu ulogu kod proračuna konstrukcija na djelovanje pokretnih opterećenja kakva se mogu primjerice pojaviti na mostovima, kranskim stazama ili nekim zgradama. S obzirom da prikazuju funkcijsku ovisnost  $\eta_A(x)$  odabrane geometrijske ili statičke veličine  $A$  o položaju jediničnog opterećenja na nosaču, utjecajne funkcije omogućuju jednostavno određivanje najnepovoljnijeg položaja pokretnog opterećenja. Odabrana tražena veličina može biti bilo koja unutarnja sila, ležajna reakcija, pomak ili kut zaokreta u prethodno odabranoj točki nosača [6, 7]. Na slici 1. prikazana je utjecajna linija za moment na prostoj gredi u poprečnom presjeku  $t-t$ .



Sl. 1. Utjecajna linija za moment u poprečnom presjeku  $t-t$

Može se pokazati da utjecajna linija za pomak ili kut zaokreta odgovara progibnoj liniji od opterećenja jediničnom silom odnosno momentom, a za moment ili poprečnu silu odgovara progibnoj liniji od opterećenja jediničnim relativnim kutem zaokreta odnosno jediničnim relativnim pomakom okomito na os konstrukcije. Općenito, utjecajna linija odgovara progibnoj liniji nosača od opterećenja odgovarajućom Diracovom funkcijom  $\delta_i$  [4, 5]. Jedinična opterećenja s odgovarajućim progibnim linijama na primjeru proste grede prikazana su na slici 2.



Sl. 2. Jedinična opterećenja i odgovarajuće progibne linije na prostoj gredi

Primjenom Bettijeve teorema o uzajamnosti radova [9] izvode se izrazi pomoću kojih, iz poznate utjecajne linije za odabranu veličinu, možemo dobiti odgovarajući iznos progiba, kuta zaokreta, momenta ili poprečne sile zbog proizvoljnog kontinuiranog opterećenja  $q(x)$ :

$$w_i = \int_0^l q(x)\eta_{w_i}(x)dx, \quad (1)$$

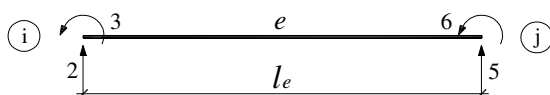
$$\varphi_i = w_i' = \int_0^l q(x)\eta_{\varphi_i}(x)dx, \quad (2)$$

$$M_i = w_i'' = \int_0^l q(x)\eta_{M_i}(x)dx, \quad (3)$$

$$T_i = w_i''' = \int_0^l q(x)\eta_{T_i}(x)dx. \quad (4)$$

## 2 ŠTAPNI KONAČNI ELEMENT S ČETIRI STUPNJA SLOBODE

Za određivanje utjecajnih linija metodom konačnih elemenata na grednim nosačima bit će dovoljan štapni konačni element s četiri stupnja slobode [1, 8] prikazan na slici 3.



Sl. 3. Štapni konačni element s četiri stupnja slobode

Nepoznatu funkciju pomaka možemo napisati u diskretiziranom obliku:

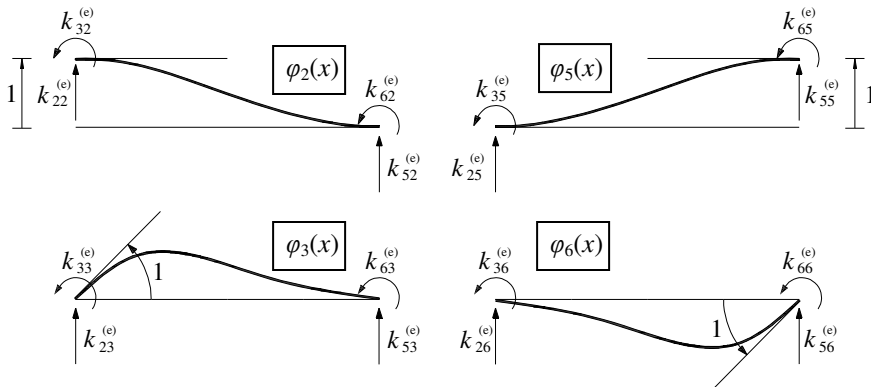
$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 + \dots + \mathbf{N}_n \bar{\mathbf{u}}_n, \quad (5)$$

gdje su  $\bar{\mathbf{u}}_i = \left\{ \begin{matrix} \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \end{matrix} \right\}$  nepoznati pomaci čvorova, a  $\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \varphi_i \end{bmatrix}$  odabrane koordinatne funkcije koje općenito možemo prikazati u obliku polinoma 3. stupnja:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (6)$$

$$\varphi'(x) = a_0 + a_1x + 2a_2x + 3a_3x^2. \quad (7)$$

Za promatrani štapni konačni element potrebne su četiri koordinatne funkcije prikazane na slici 4. Svaku od njih možemo odrediti iz četiri rubna uvjeta, prema tablici 1., zadavanjem jedinične vrijednosti pomaka ili kuta zaokreta na mjestu i u smjeru odgovarajućeg stupnja slobode, dok su ostali stupnjevi slobode spriječeni [1, 5].



Sl. 4. Koordinatne funkcije na štapnom elementu s četiri stupnja slobode

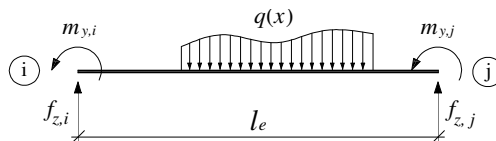
rubni uvjeti	koordinatne funkcije
$\varphi_2(0) = 1$ $\varphi_2(l_e) = 0$ $\varphi_2'(0) = 0$ $\varphi_2'(l_e) = 0$	$\varphi_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3}$
$\varphi_3(0) = 0$ $\varphi_3(l_e) = 0$ $\varphi_3'(0) = 1$ $\varphi_3'(l_e) = 0$	$\varphi_3(x) = x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2}$
$\varphi_5(0) = 0$ $\varphi_5(l_e) = 1$ $\varphi_5'(0) = 0$ $\varphi_5'(l_e) = 0$	$\varphi_5(x) = \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3}$
$\varphi_6(0) = 0$ $\varphi_6(l_e) = 0$ $\varphi_6'(0) = 0$ $\varphi_6'(l_e) = 1$	$\varphi_6(x) = -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2}$

Tabl. 1. Rubni uvjeti i izrazi za koordinatne funkcije na štapnom elementu s četiri stupnja slobode

Elemente matrice krutosti štapnog elementa možemo odrediti prema izrazu:

$$k_{i,j} = \int_0^{l_e} EI \varphi_i' \varphi_j'' dx. \quad (8)$$

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapnog elementa ima četiri komponente, koncentriranu silu i koncentrirani moment u svakom čvoru [1], prikazane na slici 5.



Sl. 5. Ekvivalentno čvorno opterećenje štapnog elementa

### 3 EKVIVALENTNO ČVORNO OPTEREĆENJE ŠTAPNOG ELEMENTA

Dobivene koordinatne funkcije su klase  $C^2$  i ne omogućavaju egzaktan prikaz diskontinuiteta koji se javljaju na utjecajnim linijama za statičke veličine. Stoga moramo Diracove funkcije zamijeniti ekvivalentnim čvornim opterećenjem na diskretiziranom nosaču. Egzaktno rješenje novog slučaja opterećenja odgovarat će aproksimaciji tražene utjecajne linije [3, 4].

Općenito, za štapni element opterećen distribuiranom silom  $q(x)$  tražene čvorne sile  $f_i$ , gdje  $i = 2, 3, 5, 6$  označava stupanj slobode, možemo izračunati iz jednadžbe:

$$f_i \times 1.0 = \int_0^{l_e} q(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 2, 3, 5, 6 \quad (9)$$

prema kojoj čvorna sila  $f_i$  na jediničnom pomaku ili kutu zaokreta vrši isti rad kao distribuirana sila na progibu u obliku odgovarajuće koordinatne funkcije  $\varphi_i(x)$ . Za opterećenje Diracovom funkcijom  $\delta_k$  na mjestu  $x_0$  vrijedi jednačnja:

$$f_i \times 1.0 = \int_0^{l_e} \delta_k(x_0) \varphi_i(x) dx, \quad i = 2, 3, 5, 6; \quad k = 0, \dots, 3 \quad (10)$$

prema kojoj je čvorna sila  $f_i$  geometrijska ili statička veličina na mjestu  $x_0$ , dualna opterećenju  $\delta_k$ , koja odgovara progibnoj liniji u obliku koordinatne funkcije  $\varphi_i(x)$  [2, 3, 4]. U tablici 2. prikazano je opterećenje Diracovim funkcijama s odgovarajućim dualnim veličinama i čvornim silama.

jedinično opterećenje $\delta_k, k = 0, \dots, 3$	dualna veličina	čvorna sila $f_i$
$\delta_0$ – jedinična sila	$w$ – pomak	$\varphi_i(x_0)$
$\delta_1$ – jedinični moment	$\varphi$ – kut zaokreta	$\varphi'_i(x_0)$
$\delta_2$ – jedinični kut zaokreta („lom“)	$M$ – moment	$M_i(x_0) = -EI\varphi''_i(x_0)$
$\delta_3$ – jedinični pomak („skok“)	$T$ – poprečna sila	$T_i(x_0) = -EI\varphi'''_i(x_0)$

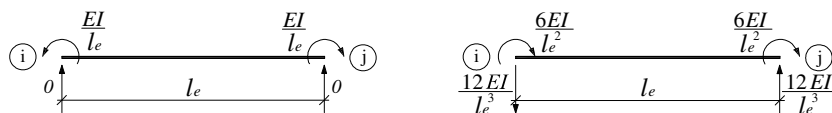
Tabl. 2. Diracove funkcije, dualne veličine i čvorne sile

Za proračun utjecajnih linija statičkih veličina metodom konačnih elemenata odredit ćemo ekvivalentno čvorno opterećenje za jedinični kut zaokreta i pomak uz pretpostavku da se veličina za koju tražimo utjecajnu liniju nalazi na polovici raspona promatranog konačnog elementa.

čvorne sile	$f_i = -EI\varphi''_i(x_0)$	$f_i = -EI\varphi'''_i(x_0)$
$f_2(x_0 = l_e/2)$	$-EI\left(-\frac{6}{l_e^2} + \frac{12x_0}{l_e^3}\right) = 0$	$-EI \times \frac{12}{l_e^3} = -\frac{12EI}{l_e^3}$
$f_3(x_0 = l_e/2)$	$-EI\left(-\frac{4}{l_e} + \frac{6x_0}{l_e^2}\right) = \frac{EI}{l_e}$	$-EI \times \frac{6}{l_e^2} = -\frac{6EI}{l_e^2}$
$f_5(x_0 = l_e/2)$	$-EI\left(\frac{6}{l_e^2} - \frac{12x_0}{l_e^3}\right) = 0$	$EI \times \frac{12}{l_e^3} = \frac{12EI}{l_e^3}$
$f_6(x_0 = l_e/2)$	$-EI\left(-\frac{2}{l_e} + \frac{6x_0}{l_e^2}\right) = -\frac{EI}{l_e}$	$-EI \times \frac{6}{l_e^2} = -\frac{6EI}{l_e^2}$

Tabl. 3. Izrazi za čvorne sile zbog jediničnog kuta zaokreta i pomaka

Izrazi za čvorne sile zbog jediničnog kuta zaokreta i pomaka prikazani su u tablici 3., a dobivene vrijednosti sa stvarnim smjerovima djelovanja na slici 6.



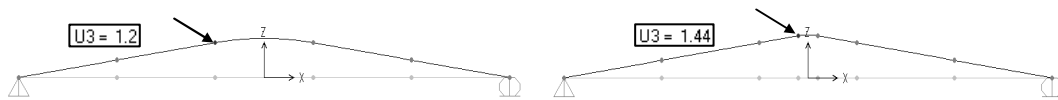
Sl. 6. Čvorno opterećenje zbog jediničnog kuta zaokreta („loma“) i pomaka („skoka“)

Dobivene izraze možemo primijeniti za određivanje utjecajnih linija u nekom od programskih paketa za proračun konstrukcija. Prikazani numerički primjeri izrađeni su u programu *SAP2000 Advanced v. 10.1.1.*

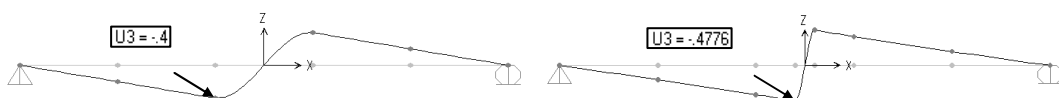
## 4 NUMERIČKI PRIMJERI

### 4.1 Utjecajne linije za moment i poprečnu silu na prostoj gredi

Slike 7. i 8. prikazuju utjecajne linije na prostoj gredi dobivene za moment i poprečnu silu na polovici raspona  $L = 6.0$  m. Pri tome je najprije odabrana podjela na šest konačnih elemenata dužine  $l_e = L/5 = 1.2$  m, a zatim je rješenje poboljšano smanjenjem opterećenog konačnog elementa na  $l_e = L/25 = 0.24$  m.



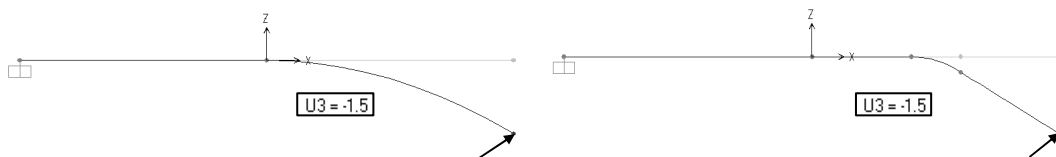
Sl. 7. Utjecajna linija na prostoj gredi za moment na polovici raspona



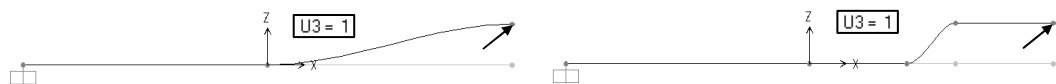
Sl. 8. Utjecajna linija na prostoj gredi za poprečnu silu na polovici raspona

### 4.2 Utjecajne linije za moment i poprečnu silu na konzolnoj gredi

Slike 9. i 10. prikazuju utjecajne linije na konzolnoj gredi dobivene za moment i poprečnu silu na polovici raspona  $L = 6.0$  m. Pri tome je najprije odabrana podjela na dva konačna elementa dužine  $l_e = L/2 = 3.0$  m, a zatim je rješenje poboljšano smanjenjem opterećenog konačnog elementa na  $l_e = L/10 = 0.6$  m.



Sl. 9. Utjecajna linija na konzolnoj gredi za moment na polovici raspona



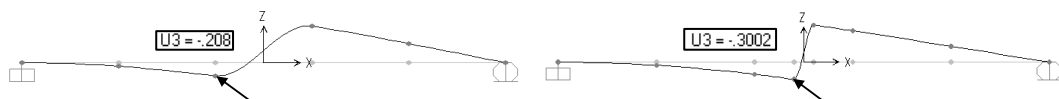
Sl. 10. Utjecajna linija na konzolnoj gredi za poprečnu silu na polovici raspona

### 4.3 Utjecajne linije za moment i poprečnu silu na jednostrano upetoj gredi

Slike 11. i 12. prikazuju utjecajne linije na jednostrano upetoj gredi dobivene za moment i poprečnu silu na polovici raspona  $L = 6.0$  m. Pri tome je najprije odabrana podjela na šest konačnih elemenata dužine  $l_e = L/5 = 1.2$  m, a zatim je rješenje poboljšano smanjenjem opterećenog konačnog elementa na  $l_e = L/25 = 0.24$  m.



Sl. 11. Utjecajna linija na jednostrano upetoj gredi za moment na polovici raspona



Sl. 12. Utjecajna linija na jednostrano upetoj gredi za poprečnu silu na polovici raspona

## 5 ZAKLJUČAK

Nizom primjera pokazano je da opisani postupak određivanja utjecajnih linija na grednim nosačima metodom konačnih elemenata daje zadovoljavajuću točnost. Pri tome dobiveno približno rješenje odstupa od egzaktog samo na promatranom opterećenom elementu pomoću kojeg je modeliran onaj dio konstrukcije na kojem se nalazi veličina za koju tražimo utjecajnu liniju. Za ostale konačne elemente nosača, približna i egzaktna utjecajna linija se podudaraju. U tablici 4. prikazana je ovisnost kuta loma približne utjecajne linije na jednostrano upetoj gredi za moment na polovici raspona iz prethodnog primjera o duljini opterećenog konačnog elementa. Usporedba s egzaktnim utjecajnim linijama potvrđuje da smanjenjem veličine elementa na mjestu diskontinuiteta aproksimacija konvergira.

duljina opterećenog konačnog elementa $l_e$ [m]	kut loma točnog rješenja $\varphi$ [rad]	kut loma približnog rješenja $\varphi^a$ [rad]	apsolutna pogreška $\Delta \varphi = \varphi - \varphi^a$ [rad]	relativna pogreška $\frac{\Delta \varphi}{\varphi} \times 100$ [%]
$L/3 = 2.0$	1.0	0.75179	0.24821	24.821
$L/5 = 1.2$	1.0	0.85622	0.14378	14.378
$L/25 = 0.24$	1.0	0.97022	0.02978	2.978
$L/50 = 0.12$	1.0	0.98511	0.01489	1.489

Tabl. 4. Kut loma približnog rješenja u ovisnosti o duljini opterećenog elementa

### Literatura:

- [1] Dvornik, J., Lazarević, D., „Plošni nosači – bilješke s predavanja“, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2006.
- [2] Grätsch, T., „L<sub>2</sub>-Statik“, Dissertation, Universität Kassel, 2002., [http://www.winfem.de/Dissertation\\_Graetsch.pdf](http://www.winfem.de/Dissertation_Graetsch.pdf)
- [3] Materna, D., „Finite Elemente u Einflussfunktionen“, Diplomarbeit, Universität Kassel, 2002., <http://www.winfem.de/DiplomarbeitMaterna.pdf>
- [4] Panke, T., „Berechnung von Einflussfunktionen mit der Methode der finiten Elemente“, Diplomarbeit, Universität Kassel, 2002., <http://www.winfem.de/Diplom1.pdf>
- [5] Reese, S., „Grundlagen der FEM“, Ruhr-Universität Bochum, 2003., <http://www.nm.ruhr-uni-bochum.de/lehre/advelem/fem.pdf>
- [6] Simović, V., Fresl, K., „Građevna statika – bilješke i skice s predavanja“, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, <http://www.grad.hr/nastava/gsbilj1/bilj1.html>
- [7] Simović, V., „Građevna statika I“, Građevinski institut Zagreb, 1988.
- [8] Sorić, J., „Metoda konačnih elemenata“, Golden marketing-tehnička knjiga Zagreb, 2004.
- [9] Šimić, V., „Otpornost materijala I“, Školska knjiga Zagreb, 1992.

### Autori:

Sanja Hak, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Fra A. Kačića-Miošića 26, 10 000 Zagreb, tel. 4639 340, e-mail: [shak@grad.hr](mailto:shak@grad.hr), web stranica: [www.grad.hr/nastava/gsbilj1/bilj1.html](http://www.grad.hr/nastava/gsbilj1/bilj1.html)

Mladen Meštović, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Fra A. Kačića-Miošića 26, 10 000 Zagreb, tel. 4639 608, e-mail: [mestar@grad.hr](mailto:mestar@grad.hr), web stranica: [www.grad.hr/nastava/gsbilj1/bilj1.html](http://www.grad.hr/nastava/gsbilj1/bilj1.html)