

Funkcija sila

Zadatak 1.

Čestica mase m giba se pod djelovanjem sile čija je funkcija sila $U(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 3\sin z + 4$. U položaju 1 $(1, 0, -2\pi)$ čestica ima kinetičku energiju $E_{k,1} = 8Nm$. Kolika je maksimalna kinetička energija čestice $E_{k,max}$?

$$E_{k,1} + E_{p,1} = const. = E_{k,max} + E_{p,min}$$

$$E_p = -U,$$

$$\begin{aligned}\nabla U = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} &= F_x = 4x - 4y + 8 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= F_y = 2y - 4x \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= F_z = -3\cos z\end{aligned}$$

Potencijalna energija u položaju 1 $(1, 0, -2\pi)$:

$$E_{p,1} = -U(1, 0, 2\pi) = -(2 + 8 + 4) = -14 J$$

Potencijalna energija je minimalna u položaju stabilne ravnoteže. Da bi odredili taj položaj postavljamo jednadžbu ravnoteže

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = \vec{0} \quad & 1) F_x = 0 = 4x - 4y + 8 \\ & 2) F_y = 0 = 2y - 4x \\ & 3) F_z = 0 = -3\cos z\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo koordinate položaja ravnoteže:

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pošto funkcija $\sin z$ poprima različite vrijednosti za $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$, a nama treba $E_{p,min}$, potrebno je provjeriti veličinu potencijalne energije u oba ravnotežna položaja.

$$\text{položaj } 2(2, 4, \frac{\pi}{2}) \quad E_{p,2} = -U(2, 4, \frac{\pi}{2}) = -(8 - 32 + 16 + 16 - 3 + 4) = -9 J$$

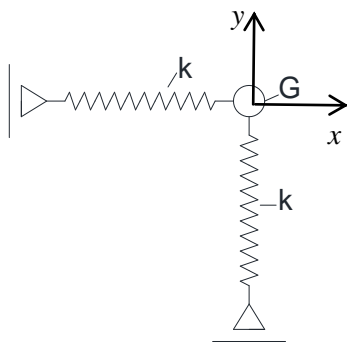
$$\text{položaj } 3(2, 4, \frac{3\pi}{2}) \quad E_{p,3} = -U(2, 4, \frac{3\pi}{2}) = -(8 - 32 + 16 + 16 + 3 + 4) = -15 J = E_{p,min}$$

$$E_{k(1)} + E_{p(1)} = E_{k,max} + E_{p,min} \quad \Rightarrow \quad 8 + (-14) = E_{k,max} - 15 \quad \Rightarrow \quad E_{k,max} = 9 J$$

Funkcija sila

Zadatak 2.

Čestica težine $G=80$ N pričvršćena je za dvije opruge krutosti $k=40$ N/cm. Čestica i opruge mogu se pomicati u vertikalnoj ravnini tako da opruge ostaju paralelne prikazanom položaju. Odredi funkciju potencijalnog polja sila i jednadžbe ekvipotencijalnih krivulja potencijalnog polja sila (krivulje jednake potencijalne energije).



Funkcija potencijalne energije sustava pisana je u odnosu na položaj u kojem opruge nisu deformirane (nivo c):

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 + G \cdot y + c$$

$$\vec{F} = \nabla V \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = F_x = k \cdot x$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y = k \cdot y + G$$

Ravnotežni položaj:

$$\begin{aligned} F_x = 0 &= k \cdot x \\ F_y = 0 &= k \cdot y + G \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\frac{G}{k} = -\frac{80}{40} = -2 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$V = \text{const} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 + G \cdot y \quad / \cdot \frac{2}{k}$$

$$c_1 = x^2 + y^2 + \frac{2G}{k} \cdot y$$

$$c_1 = x^2 + y^2 + 4y$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = c_1 + 4$$

$$x^2 + (y+2)^2 = c_2$$

Ekvipotencijalne krivulje su kružnice sa središtem u $x = 0$, $y = -2$, i polumjerom r koji ovisi o odabranoj veličini konstante c_2 , $r = c_2$.

