MATEMATIKA I 1.kolokvij zadaci za vježbu I dio

1. Odredite $\vec{c_0}$ i kosinuse kuteva koje s koordinatnim osima čini vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ako je
$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}, \ \ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}.$$

2. Odredite koliki je volumen paralelepipeda, čiji se bridovi poklapaju s radijvektorima:
$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \ \ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \ \ \vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

3. Odredite α tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ budu okomiti. Odredite kut između vektora $\vec{a} + \vec{b}$ i vektora $\vec{a} - \vec{b}$.

4. (a) Odredite modul vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, ako je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$.
   (b) Odredite $\alpha \in R$ tako da $\vec{a} \times \vec{b}$ bude okomit na vektor $\vec{c} = \vec{i} + \alpha\vec{j}$.

5. Odredite:
   (a) Kosinus kuta α paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}$.
   (b) Površinu tog paralelograma.

6. Odredite:
   (a) Površinu trokuta s vrhovima A(1,3,4), B(2,3,5) i C(0,2,4).
   (b) Visinu v_A.

7. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + (2\lambda + 1)\vec{j}$, , $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Odredite $\lambda \in R$, tako da zadani vektori budu komplanarni.

8. U ravnini $x+2y+3z-14 = 0$ odredite točku, koja je najbliža ishodištu koordinatnog sustava, i izračunajte njenu udaljenost do ishodišta.

9. Zadani su vrhovi tetraedra $A(3, -2, 1), B(2, 5, 0), C(-2, 4, 0), D(0, 0, 10)$. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži visina v_D tetraedra.

10. Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leži točka $T(2, 1, -1)$ i koja odsijeca na osi x odrezak 2, a na osi y odrezak 1.

11. Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leži točka $T(1, -1, 1)$ a okomita je na ravnine $x - y + z - 1 = 0$, $2x + y + z + 1 = 0$.

12. Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leže točke $A(1, 2, 3)$ i $B(-2, -1, 3)$ a okomita je na ravninu $x - +4y - 2z + 5 = 0$.

13. Provjerite da su ravnine $x - 2y + z - 1 = 0, \ 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ paralelne , pa odredite njihovu međusobnu udaljenost.

14. Odredite A i B tako da pravac p... $x-1=y-2=z-3$ leži u ravnini π... $Ax+By+z+1=0$.

15. Za koju vrijednost od A je ravnina $Ax+3y-5z+1=0$ paralelna pravcu

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{3}=z.$$

16. Odredite jednadžbu ravnine u kojoj leže pravci $p_1 \ldots \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$, $p_2 \ldots \frac{x+1}{-2}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-2}{-2}$

17. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi točkom T(3,-1,-2) i paralelna s pravcima $p1 \ldots \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-1}{2}$, $p2 \ldots \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+4}{-7}$.

18. Pravac p presječnica je ravnina $5x-3y+2z-5=0$ i $2x-y-z-1=0$. Napišite kanonske jednadžbe tog pravca. U kojoj točki pravac p probada ravninu $z=1$?

19. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrši pravac $\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{3}$, $y=-2$ i koja je okomita na ravninu $2x-4y+z=0$.

20. Odredite točku Q simetričnu točki P(2,-3,2) obzirom na ravninu $x+2y+2z-9=0$.

21. Odredite sjecište pravaca

    $p_1 \ldots \frac{x+2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-4}{-1}$, $p_2 \ldots \frac{x+3}{2}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{4}$.

22. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži visina v_a trokuta čiji su vrhovi A(5,2,3), B(8,3,-5) i C(5,0,7).

23. Odredite kuteve koje s koordinatnim osima zatvara pravac određen kao presječnica ravnina $3x-y+2z=0$ i $6x-3y+2z-2=0$.

24. Odredite točke u kojima koordinatne osi probadaju ravninu $3x-y+4z-12=0$.

25. Odredite točke u kojima pravac $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=z-6$ probada koordinatne ravnine.

26. Odredite kut koji zatvara brid tetraedra na kojem leže vrhovi A i D s ravninom baze ABC, ako su vrhovi tetraedra

    A(0 ,-1 ,1), B(1 ,1 ,5), C(-3 ,2 ,-2) i D(2 ,5 ,-2).

27. Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leže točke A(2,3,-1), B(1,1,0), C(0,-2,1).

28. Točkama A(a,2,2) i B(2,1,1) prolazi pravac p_1, a točkama C(3,0,3) i D(4,-1,2) pravac p_2. Odredi a tako da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini.

29. Ortogonalna projekcija pravca p koji leži u ravnini $x+y+2z-6=0$ na ravninu $z=0$ je pravac $y=x$. Odredite kanonske jednadžbe pravca p.

30. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem okomit je na os x i siječe pravac $\frac{x+2}{2}=\frac{y-7}{-2}=z$.

31. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži presječnicu ravnina $3x+2y+5z+6=0$ i $x+4y+3z+4=0$, a usporedna je s osi x.

32. Odredite jednadžbu ravnine u kojoj leži točka M(1,2,3) i pravac x=t+1, y=2t, z=3t-2.

33. Odredite jednadžbu pravca koji leži u ravnini $3x-2y-2z=1$, prolazi točkom T(1,0,1) i okomit je na os z.

34. Na pravacu $x=y=z$ odredite točku koja je jednako udaljena od točaka A(2,4,0) i B(4,0,4).

35. Na pravcu
$$\frac{x+2}{6}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$
odredi točku jednako udaljenu od ravnina $x-2y+2z=0$, $-2x+4y-4z+12=0$.

36. Odredite jednadžbu pravca koji je paralelan pravcu x=t+1, y=2t, z=3t-2 a prolazi točkom M(1,2,3).

37. Odredite cjelobrojni parametar λ, tako da se pravci
$$\frac{x+4}{\lambda}=y-2=z \qquad , \qquad x+3=\frac{y}{2}\frac{z+1}{\lambda}$$
sijeku.

38. Odredite točku Q simetričnu točki P(4,1,6) obzirom na pravac
$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-7}{-2}=z.$$

39. Odredite udaljenost točke A(1,2,0) od pravca koji prolazi točkama B(-1,-1,-1) i C(2,2,2).

40. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(1,1,1)$ na pravac koji je presječnica ravnina $x+y+z=3$ i $x-2y+z=1$.

Rješenja:

1. $c_0=\frac{2}{3}\overrightarrow{i}-\frac{2}{3}\overrightarrow{j}-\frac{1}{3}\overrightarrow{k}$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$.
2. $V=16$.
3. $\alpha=3$, $\cos(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=-\frac{5}{19}$.
4. $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{19}$, $\alpha=3$.
5. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $P=3$.

6. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $v_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\lambda = 2$.

8. $T(1,2,3)$, $d(T,O) = \sqrt{14}$.

9. $p \ldots \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{29}$.

10. $\pi \ldots x + 2y + 2z - 2 = 0$.

11. $\pi \ldots 2x - y - 3z = 0$.

12. $\pi \ldots 2x - 2y - 3z + 11 = 0$.

13. $d = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

14. $A = 2$, $B = -3$.

15. $A = -1$.

16. $\pi \ldots 2x + y - 4z + 3 = 0$.

17. $\pi \ldots 21x + 25y + 21z + 4 = 0$.

18. $p \ldots \frac{x+2}{5} = \frac{y+5}{9} = z$, $T(3,4,1)$.

19. $\pi \ldots 3x + y - 2z + 5 = 0$.

20. $Q(4,1,6)$.

21. $S(1,-2,3)$.

22. $p \ldots \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{-1}$, $z = 3$.

23. $p \ldots \frac{x}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+\frac{1}{2}}{-3}$, $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{61}}$, $\cos\beta = \frac{6}{\sqrt{61}}$, $\cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{61}}$.

24. $A(4,0,0), B(0,-12,0), C(0,0,3)$.

25. $A\left(0, \frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right), B\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{11}{2}\right), C(-17,-22,0)$.

26. $\sin\alpha = \frac{13}{7\sqrt{6}}$.

27. $\pi \ldots x + z - 1 = 0$.

28. $a = 1$.

29. $p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

30. $p \ldots x = 0, \frac{y}{5} = z$.

31. $\pi \ldots 5y + 2z + 3 = 0$.

32. $\pi \ldots 4x - 5y + 2z = 0$.

33. $p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}, z = 1$.

34. $T(3, 3, 3)$.

35. $T(1, 0, 1)$.

36. $p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

37. $\lambda = -1$.

38. $Q\left(\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

39. $d = \sqrt{2}$.

40. $T'\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$.

MATEMATIKA I 1.kolokvij zadaci za vježbu II dio

1. Odredite vrijednost parametra t tako da bude

$$\begin{bmatrix} 1 & t^2+t-6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Odredite barem jednu matricu $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ($\mathbf{B}$ nije nul matrica) takvu da bude $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Zadana je matrica: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

   Izračunajte matricu $\mathbf{A^2}$.

4. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte $\mathbf{2A^2 - A - 5I}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Pokažite da vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

6. Odredite vrijednost od a tako da za matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

7. Zadana su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunajte matricu $\mathbf{B^T A^T}$.

8. Odredite a tako da matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6-a & -2 & 0 \\ 2 & 6-a & -2 \\ 0 & -2 & 6-a \end{bmatrix}.$$

bude singularna.

9. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je regularna, odredite joj inverznu matricu i provjerite rezultat.

10. Riješite matričnu jednadžbu **XA=B** ako su zadane: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -13 & 0 \\ -10 & -19 \end{bmatrix}$.

11. Riješite matričnu jednadžbu **AX=B** ako su zadane: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

12. Riješite matričnu jednadžbu **BX=I-A** ako su zadane: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

13. Riješite matričnu jednadžbu **AXB=I** ako su zadane: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Odredite rang matrice A ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Odredite rang matrice A ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Ispitajte rang matrice A u ovisnosti od parametra a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 3a-2 \\ 1 & a & 1 & 2-2a \\ 0 & 1 & a & -2-a \end{bmatrix}.$$

17. Ispitajte rang matrice A u ovisnosti od parametra a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Zadan je sustav:

$$3x + y - z = 0$$
$$2x - y + 5z = 0$$
$$4x + 3y + \lambda z = 0$$

Odredite λ tako da sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Napišite barem jedno netrivijalno rješenje.

19. Riješite sustav:

$$x + 2y + 3z + v = 0$$
$$-4x - 3y - 2z - 2v = 0$$
$$3x + 4y + 5z = 0$$

Napišite barem jedno netrivijalno rješenje sustava.

20. Pokažite da ravnine

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$-4x - 3y - 2z = 0$$
$$3x + 4y + 5z = 0$$

imaju jedan pravac zajednički. Odredite njegove kanonske jednadžbe.

21. Imaju li zajedničku točku ravnine:

$$2x - 4y + 3z = 1$$

$$x - 2y + 4z = 3$$

$$3x - y + 5z = 2\,?$$

22. Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav:

$$3x + 5y \quad = 1$$

$$2x + 3y - z = 5$$

$$x + y - 2z = 9$$

$$3x - y + z = 4\,?$$

23. Gaussovim postupkom eliminacije riješite sustav:

$$x + y + z + v = 2$$

$$-2x - 4y + z + v = 1$$

$$x - y - z + v = 5.$$

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Odredite karakteristični polinom i svojstvene vrijednosti te matrice.

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Odredite svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{C}$.

26. Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

27. Pokažite da matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ poništava svoj karakteristični polinom.

28. Pokažite da matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ poništava svoj karakteristični polinom.

29. Jedna svojstvena vrijednost matrice$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ jednaka je $\lambda = 5$. Odredite barem jedan svojstveni vektor.

30. Provjerite koji od vektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ je svojstveni vektor matrice

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ za svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$.

31. Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ jedan je svojstveni vektor matrice

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Odredite pripadnu svojstvenu vrijednost .

Rješenja:

1. $t = 2$ ili $t = -3$
2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ $c \in R$, $d \in R$
3. $\mathbf{A^2} = \mathbf{A}$
4. $\mathbf{2A^2} - \mathbf{A} - \mathbf{5I} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 4 \\ 3 & -8 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{bmatrix}$
5. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
6. $a = 2$
7. $\mathbf{B^T A^T} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
8. $a = 6$
9. $det(A) \neq 0$, $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$
10. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$
11. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

14. $r(A) = 3$

15. $r(A) = 3$

16. $r(A) = 2$ za $a = 0$, $a = \sqrt{2}$ i $a = -\sqrt{2}$ a $r(A) = 3$ za sve ostale $a \in R$

17. $r(A) = 2$ za $a = 3$ a $r(A) = 3$ za $a \neq 3$

18. $\lambda = -7$, $\begin{bmatrix} \dfrac{-4t}{5} \\ \dfrac{17t}{5} \\ t \end{bmatrix}$ $t \in R$

19. $\begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ $t \in R$

20. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}.$

21. Da, determinanta sustava $D = -25 \neq 0$

22. $x = \dfrac{43}{19},\ y = \dfrac{-22}{19},\ z = \dfrac{-75}{19}.$

23. $\begin{bmatrix} \dfrac{7-2t}{2} \\ \dfrac{-19+6t}{10} \\ \dfrac{2-3t}{5} \\ t \end{bmatrix}$ $t \in R$

24. $\lambda_{1,2,3} = 1$

25. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$

26. $\lambda_{1,2} = -1$, $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ $t \in R$, $t \neq 0$

27. $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$

28. $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A^2} - \mathbf{A^3} = \mathbf{O}$

29. $\begin{bmatrix} t \\ \frac{4}{3}t \\ t \end{bmatrix} \quad t \in R,$ jedan svojstveni vektor je $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{x}$ je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$

31. $\lambda = -1$