

Redovi

1. Napišite opći član i ispitajte konvergenciju reda:

$$\frac{3 \cdot 1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{3 \cdot 2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3 \cdot 4}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3 \cdot 8}{\sqrt[3]{4}} + \dots$$

2. Odredite opći član reda i ispitajte njegovu konvergenciju:

$$\frac{1! \cdot 5}{2} + \frac{2! \cdot 7}{4} + \frac{3! \cdot 9}{8} + \frac{4! \cdot 11}{16} + \dots$$

3. Odredite opći član i ispitajte konvergenciju reda:

$$\frac{2}{2!} + \frac{4}{4!} + \frac{8}{6!} + \frac{16}{8!} + \dots$$

4. Naite opći član i ispitajte konvergenciju reda:

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{4 \cdot 9} + \frac{6}{8 \cdot 27} + \frac{8}{16 \cdot 81} + \dots$$

5. Odredite opći član i ispitajte konvergenciju reda:

$$\frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{9 \cdot 2}{4} + \frac{27 \cdot 3}{8} + \frac{81 \cdot 4}{16} + \dots$$

6. Odredite opći član i ispitajte konvergenciju reda:

$$\frac{1}{3!} + \frac{\sqrt{3}}{5!} + \frac{\sqrt{5}}{7!} + \frac{\sqrt{7}}{9!} + \dots$$

Rješenja:

1. $a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$, red divergira.
2. $a_n = \frac{n! \cdot (2n+3)}{2^n}$, red divergira.
3. $a_n = \frac{2^n}{(2n)!}$, red konvergira.
4. $a_n = \frac{2n}{2^n \cdot 3^n}$, red konvergira.
5. $a_n = \frac{3^n \cdot n}{2^n}$, red divergira.
6. $a_n = \frac{\sqrt{2n-1}}{(2n+1)!}$, red konvergira.

Domena funkcije i derivacija

1. Odredite prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = \ln \sqrt{1-x} + \sqrt{\ln(1-x)}.$$

2. Odredite prirodno područje definicije i prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}.$$

3. Odredite prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = \frac{1}{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}.$$

4. Odredite prirodno područje definicije i prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}.$$

5. Odredite prirodno područje definicije i prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Odredite prirodno područje definicije i nultočke funkcije

$$f(x) = \frac{\ln(-x+3)}{\sqrt{x-2}}.$$

7. Odredite prirodno područje definicije, prvu derivaciju i nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}.$$

8. Odredite prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}.$$

9. Odredite prirodno područje definicije, nultočke funkcije i inverznu funkciju od

$$f(x) = -\log_5(x+1).$$

10. Odredite inverznu funkciju, prirodno područje definicije i nultočke inverzne funkcije za

$$f(x) = 3 \cdot 2^{1-x} + 1.$$

Rješenja :

1. $\mathcal{D} = \langle -\infty, 0 \rangle$.

2. $\mathcal{D} = \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{0, 1\}$.

4. $\mathcal{D} = [-3, 2 \rangle$, $f'(x) = \frac{5}{(x+3)(2-x)}$.

5. $\mathcal{D} = \langle -1, 1 \rangle$, $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

6. $\mathcal{D} = \langle 2, 3 \rangle$, funkcija nema nultočku.

7. $\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 3x^2 e^{\frac{1}{x}} - x e^{\frac{1}{x}}$, nultočke derivacije su $x = 0$ i $x = \frac{1}{3}$.

8. $\mathcal{D} = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle \cup [1, \infty \rangle$.

9. $\mathcal{D} = \langle -1, \infty \rangle$, nultočka je $x = 0$, $f^{-1}(x) = 5^{-x} - 1$.
10. $f^{-1}(x) = 1 - \log_2 \frac{x-1}{3}$, prirodno područje definicije inverzne funkcije $\mathcal{D} = \langle 1, \infty \rangle$, nultočka je $x = 7$.

Tangenta i normala

1. Odredite jednadžbe onih tangenti na graf funkcije $f(x) = x^4 - x + 3$ koje prolaze ishodištem.
2. Odredite jednadžbe onih tangenti na graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$, koje su paralelne pravcu $y = 12x - 12$.
3. Odredi domenu i nultočke funkcije $f(x) = \log \frac{2+x}{2-x}$, te koeficijent smjera tangente na njen graf u nultočki.
4. U kojoj točki grafa funkcije $f(x) = \ln(x + 1)$ tangenta na graf funkcije zatvara s pozitivnim dijelom osi x kut od 45 stupnjeva?
5. Koji kut s pozitivnim dijelom osi x zatvara tangenta na graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ u ishodištu?
6. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \arctan(1 + \frac{1}{x})$ u nultočki.

Rješenja:

1. $y = -5x, y = 3x$.
2. $y = 12x + 7, y = 12x - 31$.
3. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{4}{\ln 10}$.
4. $T(0, 0)$.
5. $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
6. $y = -x - 1$.

Ekstremi

1. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^2(x - 4)^2$.
2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \ln(x - 1) - x$.
3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.
4. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$.
5. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x - 2 \arctan x$.
6. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x\sqrt{3 - x}$.

7. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.
8. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x^2$.
9. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
10. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x \ln x$.

Rješenja:

1. Funkcija f ima u točkama $x = 0$ i $x = 4$ lokalni minimum, $f(0) = 0$, $f(4) = 0$. A u točki $x = 2$ funkcija ima lokalni maksimum $f(2) = 16$.
2. U točki $x = 2$ funkcija ima lokalni maksimum $f(2) = -2$.
3. Funkcija f ima u točki $x = 0$ lokalni maksimum $f(0) = 2$, dok u točki $x = 2$ funkcija ima lokalni minimum $f(2) = 6$.
4. Funkcija u točki $x = 0$ ima lokalni maksimum $f(0) = \frac{1}{2}$.
5. Funkcija f ima u točki $x = -1$ lokalni maksimum $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, a u točki $x = 1$ lokalni minimum $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.
6. Funkcija u točki $x = 2$ ima lokalni maksimum $f(2) = 2$.
7. Funkcija u točkama $x = -1$ i $x = 1$ ima lokalni maksimum, $f(-1) = f(1) = \frac{1}{e}$, a u točki $x = 0$ lokalni minimum $f(0) = 0$.
8. Funkcija f u točki $x = 0$ ima lokalni minimum $f(0) = 0$.
9. Funkcija u točki $x = 0$ ima lokalni minimum $f(0) = -1$.
10. Funkcija u točki $x = \frac{1}{e}$ ima lokalni minimum $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

Limes funkcije i asimptote:

1. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln \frac{1}{x}.$$

2. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x.$$

3. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x e^{\ln^2 x}}.$$

4. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}).$$

5. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x}.$$

6. Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

7. Odredite jednadžbu kose asimptote funkcije $f(x) = \frac{2x^3-1}{x^2+1}$.

8. Ispitajte parnost i neparnost za funkciju $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, te joj odredite asimptote.

9. Odredite jednadžbu kose asimptote funkcije $f(x) = xe^{\frac{-1}{x^2}}$ za $x \rightarrow \infty$.

10. Odredite jednadžbu kose asimptote funkcije $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ za $x \rightarrow \infty$.

11. Odredite jednadžbu kose asimptote funkcije $f(x) = x - 2 \arctan x$ za $x \rightarrow \infty$.

12. Ispitajte ima li horizontalne asimptote funkcija $f(x) = \ln(1 + 2^x)$.

13. Ispitajte ima li funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ vertikalnu asimptotu za $x = -2$.

14. Ispitajte ima li funkcija $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ vertikalnu asimptotu za $x = 0$.

15. Odredite prirodno područje definicije i ispitajte ima li funkcija $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$ horizontalnu asimptotu za $x \rightarrow \infty$.

16. Odredite prirodno područje definicije i ispitajte ima li funkcija $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ horizontalnu i vertikalnu asimptotu.

Rješenja :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln \frac{1}{x} = 0.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{xe^{\ln^2 x}} = 0.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) = 2.$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x} = -2.$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = -1.$

7. $y = 2x.$

8. Funkcija je neparna, ima dvije horizontalne asimptote: $y = 1$ i $y = -1$.

9. $y = x.$

10. $y = x.$

11. $y = x - \pi.$

12. $y = 0$ je horizontalna asiptota za $x \rightarrow -\infty$.

13. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4} = -\infty$, $x = -2$ je vertikalna asimptota.
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$ nije vertikalna asimptota.
15. $\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$, $y = \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota.
16. $\mathcal{D} = \langle 0, \infty \rangle$, $x = 0$ je vertikalna asimptota, $y = 0$ je horizontalna asimptota.

Konveksnost i konkavnost

1. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8.$$

2. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$.

Rješenja:

- Funkcija je konveksna na intervalima $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.
- Funkcija je konveksna na intervalima $\langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle$ i $\langle \frac{1}{3}, +\infty \rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$.