

Modeli tla

Diplomski studij

Antun Szavits-Nossan

Prosinac 2011.

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 1

- Pretpostavlja se da student ovog predmeta ima osnovna znanja iz otpornosti materijala (naprezanja, deformacije, ...); ovo poglavlje uvodi u opći kontekst mehanike neprekidnih sredina;
- Mehanika tla: primjena mehanike neprekidnih sredina na tlo;
- Sastavnice mehanike neprekidnih sredina:
 - **Materijalno tijelo** na koje djeluju sile i koje se deformira;
 - Svaka **materijalna točka tijela** ima svoju **gustoću** i **radij vektor** kojem se definira položaj te točke u tro-dimenzionalnom prostoru u **početnom** (nedeformiranom) **obliku** (konfiguraciji);

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 2

- **Deformacija tijela (u širem smislu)** se opisuje **pomacima svake materijalne točke** tijela; pomak točke je vektor, a pomaci svih točaka se opisuju vektorskom funkcijom vektorske varijable – radij vektora te točke; te funkcije pomaka moraju biti sukladne zadanim pomacima na rubnim dijelovima tijela (**rubni uvjeti**);
- **Deformacija tijela (u užem smislu)**: u okolini promatrane točke tijela definira se **gradijent vektorske funkcije pomaka**; za zadani koordinatni sustav, gradijent vektorske funkcije u okolini promatrane točke tijela prikazuje se kvadratnom matricom 3×3 (3 funkcije za 3 komponente pomaka, svaka derivirana sa svakom od 3 komponente radij vektora); **simetrični dio matrice gradijenta** naziva se **matricom deformacije** i predstavlja se kao kvadratna simetrična matrica 3×3 ; asimetrični dio matrice gradijenta pomaka predstavlja rotaciju krutog tijela;
- Vektorske funkcije pomaka i matrice deformacija sastavni su dijelovi **kinematike neprekidne sredine**;

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 3

- U bilo kojoj **točki tijela** promatra se ravnina **prereza tijela**. U **proizvoljno maloj okolini** te točke na ravnini prereza djeluje **vektor naprezanje** definiran kao sila (vektor) koja djeluje na toj maloj okolini podijeljena s površinom te male okoline; kaže se da naprezanje predstavlja kinetički dio interakcije dvaju dijelova tijela sa suprotnih strana prereza – tijelo s jedne strane prereza djeluje naprezanjem na tijelo s druge strane prereza (po Newtonovom **zakonu akcije i reakcije** ta djelovanja su jednaka po veličini, a suprotan po smjeru);
- Kroz promatranu točku tijela prolazi beskonačno različito orijentiranih prereza pa u toj točki djeluje beskonačno različitih naprezanja. Cauchy je pokazao da se to ukupno stanje naprezanja može prikazati **tenzorom naprezanja**; tenzor naprezanja je u matematičkom smislu **linearni operator (linearna funkcija)** koji **transformira jediničnu normalu** prereza (vektor jedinične duljine normalan na prerez) u **naprezanje** na tom prerezu; naprezanje i gustoća dio su kinetike neprekidne sredine;

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 4

- Analogno Newtonovoj mehanici materijalnih točaka, u mehanici neprekidnih sredina vrijede **opći zakoni mehanike neprekidnih sredina**: već ranije spomenuti **zakon akcije i reakcije**, zatim **jednadžbe gibanja i zakoni održanja energije**; ti zakoni su također sastavni dio **kinetike neprekidne sredine**;
- **Kinetički zakoni** mehanike neprekidnih sredina imaju oblik **parcijalnih diferencijalnih jednadžbi**; to su jednadžbe funkcija tenzora naprezanja, koje na rubovima tijela moraju biti sukladne zadanim opterećenjima (**rubni uvjeti**), te funkcije vremena pa moraju zadovoljiti i zadano stanje naprezanja u početnoj konfiguraciji tijela (**početni uvjeti**);
- Da bi se kinetičke jednadžbe riješile, mora se uspostaviti **veza između kinetike i kinematike** tj. **veza između tenzora naprezanja i tenzora deformacija**;

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 5

- **Vezom između tenzora deformacije i tenzora naprezanja definira se mehaničko ponašanje materijala;** te se veze nazivaju **konstitucijskim jednadžbama ili modelima** razmatranih materijala; različiti materijali imaju različita mehanička svojstva (krutost, čvrstoća, vodopropusnost itd.) pa se opisuju različitim modelima;
- **Modeli** mehaničkog ponašanja materijala imaju svoju **strukturu** i svoje **parametre**: strukturu predstavlja oblik njihovog analitičkog zapisa, a parametrima se ta struktura kvantificira (na pr.: struktura → elastičnost, parametar → modul elastičnosti);
- U općem slučaju **struktura modela** materijala mora biti takva da **bilo koja povijest deformacija** (tok deformacija od najranije povijesti do promatranog trenutka) **daje jednoznačno trenutačno naprezanje** u promatranom trenutku (općenito obrat ne vrijedi – na primjer, neku žicu možemo proizvoljno rastegnuti, ali njena uzdužna sila ne može biti veća od čvrstoće žice).

Mehanika neprekidnih sredina (kontinuum) i mehanika tla 6

- Zadaće mehanike neprekidnih sredina
 - Formulacija strukture modela materijala;
 - Rješavanje problema rubnih i početnih uvjeta deformabilnog tijela (problema određivanje raspodjele naprezanja i deformacija u razmatranom tijelu s izabranim modelom materijala za zadane rubne i početne uvjete).
- Ovaj kolegij usredotočit će se samo na osnovne modele tla kao i na određivanje njihovih parametara
 - Modeli materijala samo su veće ili manje aproksimacije mehaničkog ponašanja stvarnih materijala;
 - Mehaničko ponašanje tla je vrlo složeno; do danas nije razvijen model tla koji bi obuhvatio sve vidove te složenosti;
 - Što je model složeniji to je zahtjevnije rješavanje razmatranog problema početnih i rubnih uvjeta;
 - Iz navedenih razloga danas se u geotehničkoj praksi koriste samo znatno pojednostavljeni modeli.

Naprezanja i deformacije 1

- **Vektor naprezanje:** sila (vektor), koja djeluje na nekoj infinitezimalnoj (proizvoljno maloj) plohi podijeljena s površinom te plohe – dimenzija mu je sila/površina (kN/m^2 , MN/m^2); Može se rastaviti na komponente - na **normalno** (komponenta u smjeru normale na plohu) i **posmično** (komponenta okomito na normalu); u zadanom tro-dimenzijskom koordinatnom sustavu vektor se može prikazati stupčastom matricom (matrica vektora naprezanja) s tri komponente (jedan stupac, 3 retka); komponente matrice vektora naprezanja ovise o izboru koordinatnog sustava.
- **Vektor deformacija:** relativna promjena veličine i oblika infinitezimalnog (proizvoljno malog) tijela u smjeru okomitom na promatrani prerez; **normalna komponenta** tog vektora predstavlja relativno skraćenje tijela u promatranoj točki u smjeru normale na promatrani prerez, a **posmična komponenta** relativnu promjenu oblika tijela u smjeru iste normale; komponente deformacija su bez-dimenzijske veličine.

Naprezanje i deformacije 2

- **Matrica tenzora naprezanja (ili samo matrica naprezanja):** slika tenzora naprezanja u zadanom koordinatnom sustavu u obliku simetrične kvadratne matrice 3×3 ; opisuje potpuno stanje naprezanja u promatranoj točki tijela; u matematičkom smislu je linearni operator koji transformira vektor normale na promatrani prerez tijela (u promatranoj točki) u vektor naprezanja u istoj točki prereza.
- **Matrica tenzora deformacija (ili samo matrica deformacija):** slika tenzora deformacija u zadanom koordinatnom sustavu u obliku simetrične kvadratne matrice 3×3 ; opisuje potpuno stanje deformacija u promatranoj točki tijela; u matematičkom smislu je linearni operator koji transformira vektor normale na promatrani prerez tijela (u promatranoj točki) u vektor deformacija u istoj točki prereza.
- Tenzor i matrica tenzora naprezanja ili deformacije ponekad se skraćeno naziva samo naprezanjem odnosno samo deformacijom kad je iz konteksta jasno o čemu se radi; u slučajevima kad to može izazvati zabunu poželjno je izbjegavati skraćene nazive.

Naprezanje i deformacije 3

Matrica naprezanja u pravokutnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu s koordinatnim osima 1, 2 i 3

- Naprezanja

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} & \sigma_{32} = \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- Deformacije

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} = \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} = \epsilon_{13} & \epsilon_{32} = \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ista naprezanja i deformacije u koordinatnom sustavu glavnih osi

- Naprezanja

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ glavna naprezanja

- Deformacije

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ glavne deformacije

Princip efektivnih naprezanja 1

(K. Terzaghi)

- **Tlo** se sastoji iz **skeleta** (prostor koji zauzima struktura čvrstih čestica i pore među njima) i **pora** ispunjenih fluidom; **fluid** može biti samo **voda (zasićeno tlo)** ili mješavina vode i **zraka (djelomično zasićeno tlo)** ili samo zraka (**suho tlo**); ovdje će se razmatrati samo zasićeno tlo;
- Pod **deformacijom tla** podrazumijeva se **deformacija skeleta**;
- **Naprezanje u fluidu** naziva se **tlakom**; to naprezanje može biti samo normalno (**nema posmične komponente**); iz toga slijedi da je tlak fluide u promatranoj točki isti na svim zamišljenim prerezima kroz tu točku;
- **Skelet tla se može deformirati**; međutim, iskustvo pokazuje da je **deformacija skeleta pod promjenom tlaka fluida je zanemariva**; to se pripisuje velikoj krutosti čestica tla;
- Pri bilo kojoj deformaciji skeleta **volumen čestica tla se ne mijenja**; to znači da **svaka promjena volumena tla (skeleta) izaziva suprotnu promjenu volumena pora**; ako je deformacija takva da ne mijenja volumen tla, ne mijenja se ni volumen pora;

Princip efektivnih naprezanja 2

(K. Terzaghi)

- Tlo, kao i svaki drugi materijal, prenosi **naprezanje**;
- **Kako promjena tlaka fluida u zasićenom tlu ne može deformirati skelet, onda se samo razlika naprezanja i tlaka fluida može dovesti u vezu s deformacijom tla;**
- **Razlika naprezanja i tlaka fluida naziva se efektivnim napreznjem;** radi jasnoće i razlikovanja od efektivnog naprezanja, naprezanje u tlu se ponekad naziva i **ukupnim napreznjem**; ukupno naprezanje je, dakle, zbroj efektivnog naprezanja i tlaka fluida u porama; tlak fluida u porama naziva se skraćeno **pornim tlakom**; naziv „ukupno naprezanje” (umjesto samo „naprezanje”) korisno je koristiti uvijek kad postoji opasnost od zabune;

Princip efektivnih naprezanja 3

(K. Terzaghi)

- Opisani pojam i svojstva efektivnih naprezanja naziva se **principom efektivnih naprezanja**; riječ „princip” (a ne „zakon”) koristi se u nazivu jer on vrijedi za tlo samo približno (naime, jer slijedi iz opažene pojave da je deformacija skeleta uslijed promjene tlaka fluida zanemariva; znači, koliko god bila mala ipak postoji);
- **Princip efektivnih naprezanja** može se sada izreći i na slijedeći način:
 - **Tenzor (ili matrica) efektivnog naprezanje je razlika tenzora (matrice) ukupnog naprezanja i tenzora (matrice) pornog tlaka;**
 - **efektivno naprezanje je otpor deformaciji skeleta tla.**

Princip efektivnih naprezanja 4

(K. Terzaghi)

- Još o efektivnom naprezanju
 - Obzirom da se u principu efektivnih naprezanja govori o tlaku fluida, on važi samo kad se fluidu može pripisati jedinstveni tlak – to je u slučajevima kad su pore zasićene ili gotovo zasićene jednim fluidom (obično vodom); u slučaju da su pore djelomično zasićene jer se sastoje iz dva odvojena fluida, vode i zraka, tlak fluida gubi smisao, a time i princip efektivnih naprezanja; zato se kaže da princip efektivnih naprezanja (u svom izvornom obliku) vrijedi samo za zasićena tla (ili za gotovo zasićena tla kod kojih se voda s vrlo malim mjehurićima zraka može još smatrati jedinstvenim fluidom);
 - Voda u porama u kojoj nema mjehurića zraka (zasićeno tlo) je u odnosu na skelet vrlo kruta prema promjeni volumena (krutost obzirom na promjenu volumena joj je slična krutosti betona); taj se odnos volumne krutosti vode i skeleta u praksi pretpostavlja beskonačnim;

Princip efektivnih naprezanja 5

(K. Terzaghi)

- Ako su deformacije tla takve da mu se ni u jednoj materijalnoj točki ne mijenja volumen (tako zvano **nedrenirano stanje zasićenog tla**), nema potrebe za uvođenjem pojma efektivnih naprezanja; **tada se mogu dovesti u vezu deformacije tla i ukupna naprezanja** pa kažemo da se provodi analiza u ukupnim napreznjima (i u takvim slučajevima može se koristiti pojam efektivnog naprezanja, ali nije nužno); u suprotnom, kažemo da se provodi analiza u efektivnim napreznjima; analizom u ukupnim napreznjima veličina pornih tlakova ostaje nepoznata.

Princip efektivnih naprezanja 6

(K. Terzaghi)

- Efektivna naprezanja u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu (prema geomehaničko konvenciji – tlak i tlačno naprezanje je pozitivno):

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij};$$

- σ'_{ij} efektivna naprezanja, σ_{ij} ukupna naprezanja, u porni tlak, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$ Kroneckerov simbol ili jedinična matrica

- Općenito:
$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - u \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- U smjeru glavnih osi:
$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - u \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\sigma'_{11} = \sigma_{11} - u$; $\sigma'_{12} = \sigma_{12}$; itd.
- $\sigma'_1 = \sigma_1 - u$, itd.
- Napomena: o baratanju matricama vidi kasnije)

Izotropna linearna elastičnost 1

- Općenito
 - Linearna i izotropna elastičnost je najjednostavniji model odnosa naprezanja i deformacija; deformacije u tlu su deformacije skeleta tla; prema **principu efektivnih naprezanja** odgovarajuća naprezanja su efektivna.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E'} [\sigma'_1 - \nu'(\sigma'_2 + \sigma'_3)]$$

- **Standardni oblik:** $\epsilon_2 = \frac{1}{E'} [\sigma'_2 - \nu'(\sigma'_1 + \sigma'_3)]$;

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E'} [\sigma'_3 - \nu'(\sigma'_1 + \sigma'_2)]$$

- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$: **glavne deformacije**;
- $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$: **glavna efektivna naprezanja**;
- **Materijalne konstante za efektivna naprezanja:** E' , Youngov modul; ν' , Poissonov broj;
- 1, 2 i 3: oznaka pravokutnih koordinatnih osi koje se poklapaju s **glavnim smjerovima** efektivnih naprezanja i deformacija.

Izotropna linearna elastičnost 2

- Predznaci naprežanja i deformacija u mehanici tla
tlak, skraćenje: pozitivno, +
vlak, produženje: negativno, -
- Značenje materijalnih konstanti

– Za $\sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$:

$$E' = \sigma'_1 / \epsilon_1$$

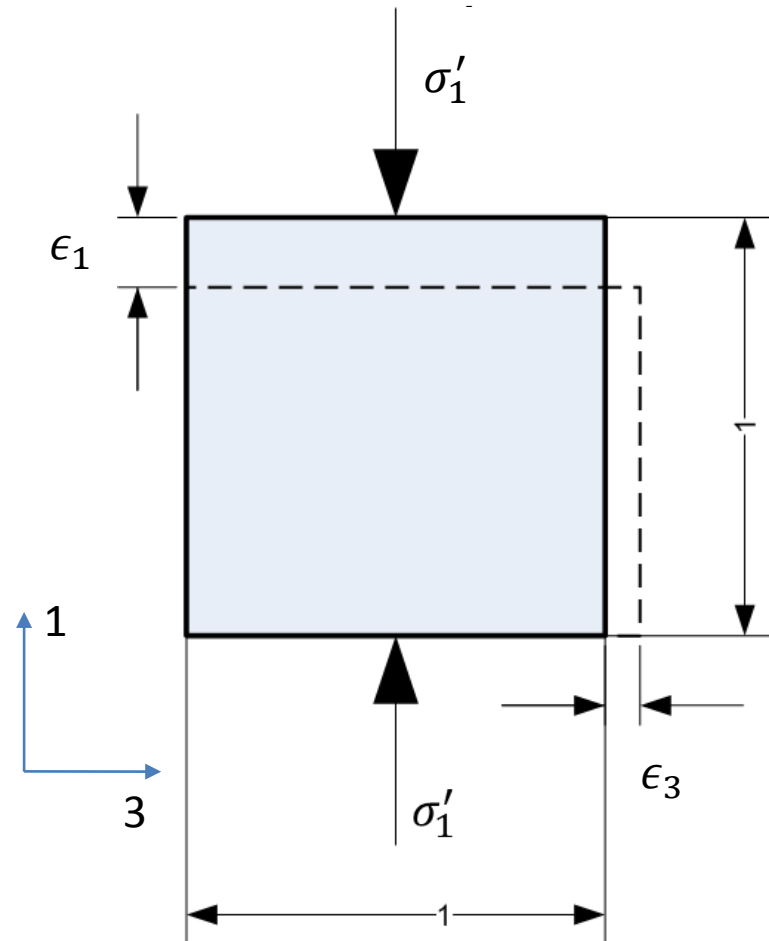
$$\nu' = -\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

– Ili, za $\sigma'_2 = \sigma'_3 = \text{const.}$:

$$E' = \Delta\sigma'_1 / \Delta\epsilon_1$$

$$\nu' = -\frac{\Delta\epsilon_3}{\Delta\epsilon_1} = -\frac{\Delta\epsilon_2}{\Delta\epsilon_1}$$

Napomena: Δ označava promjenu



Izotropna linearna elastičnost 3

- Opći matrični oblik konstitucijske jednadžbe (modela) u pravokutnom (Kartezijevom) koordinatnom sustavu

$$\sigma'_{ij} = K' \epsilon_V \delta_{ij} + 2G' e_{ij}; i, j = 1, 2, 3$$

ili

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = K' \epsilon_V \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\delta_{ij}} + 2G' \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}$$

stupac

redak

Napomena: simetrala ili dijagonala matrice δ_{ij} ; e_{ij} : prvi indeks označava redak, a drugi indeks stupac – član matrice se nalazi u matrici na presjeku odgovarajućeg stupca i retka; matrični oblik jednadžbe predstavlja skraćeni oblik pisanja običnih jednadžbi – na primjer: $\sigma'_{23} = K' \cdot \epsilon_V \cdot 0 + 2G' e_{23}$; matrica se množi brojem tako da se svaki član matrice pomnoži tim brojem; matrice istog ranga (na pr. kao ovdje 3x3) zbrajaju se da se zbroje članovi istog stupca i retka.

Volumenska deformacija:

$$\epsilon_V = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33};$$

Devijator deformacije (matrica):

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_V \delta_{ij}; e_{11} + e_{22} + e_{33} \equiv 0$$

Kroneckerov simbol ili jedinična matrica:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}.$$

Na primjer:

$$e_{11} = \epsilon_{11} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) * 1 = \frac{2}{3}\epsilon_{11} - \frac{1}{3}(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}); e_{23} = \epsilon_{23} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) * 0 = \epsilon_{23}$$

Izotropna linearna elastičnost 4

- Matrični oblik konstitucijske jednadžbe (modela) u koordinatnom sustavu koji se poklapa s glavnim smjerovima matrice efektivnih naprezanja i deformacija

- $$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = K' \epsilon_V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2G' \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

- $\sigma'_i = K' \epsilon_V + 2G' e_i, i = 1, 2, 3$

- $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$

- $e_i = \epsilon_i - \frac{1}{3} \epsilon_V, i = 1, 2, 3$

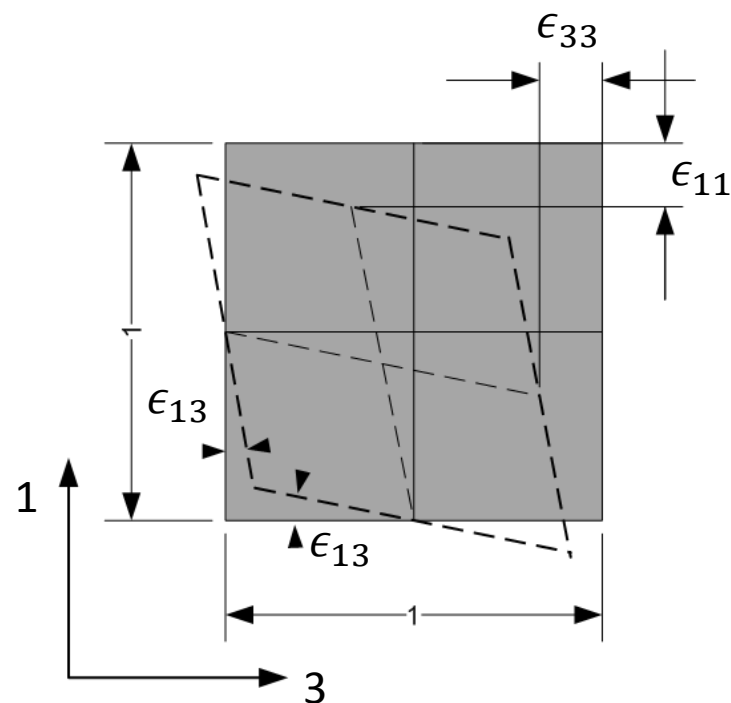
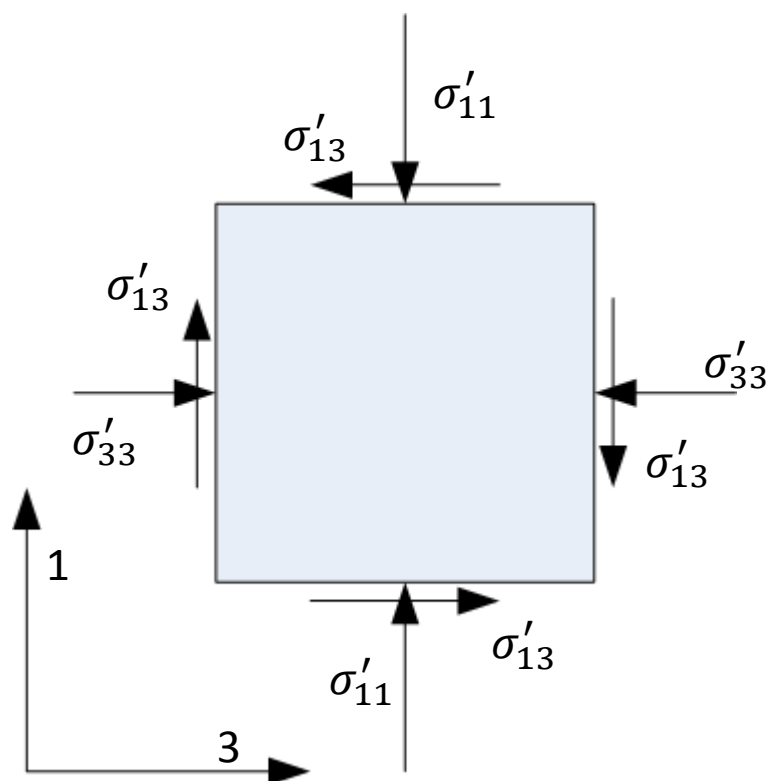
Izotropna linearna elastičnost 5

- Nazivi komponenti matrice deformacija i efektivnih naprezanja
 - Normalne deformacije i normalna efektivna naprezanja: ϵ_{ij} i σ'_{ij} za $i = j$;
 - Posmične deformacije i posmična naprezanja: ϵ_{ij} i σ'_{ij} za $i \neq j$;
- Materijalni parametri
 - Volumni modul: $K' = \frac{E'}{3(1-2\nu')}$
 - Posmični modul: $G' = \frac{E'}{2(1+\nu')}$

Izotropna linearna elastičnost 6

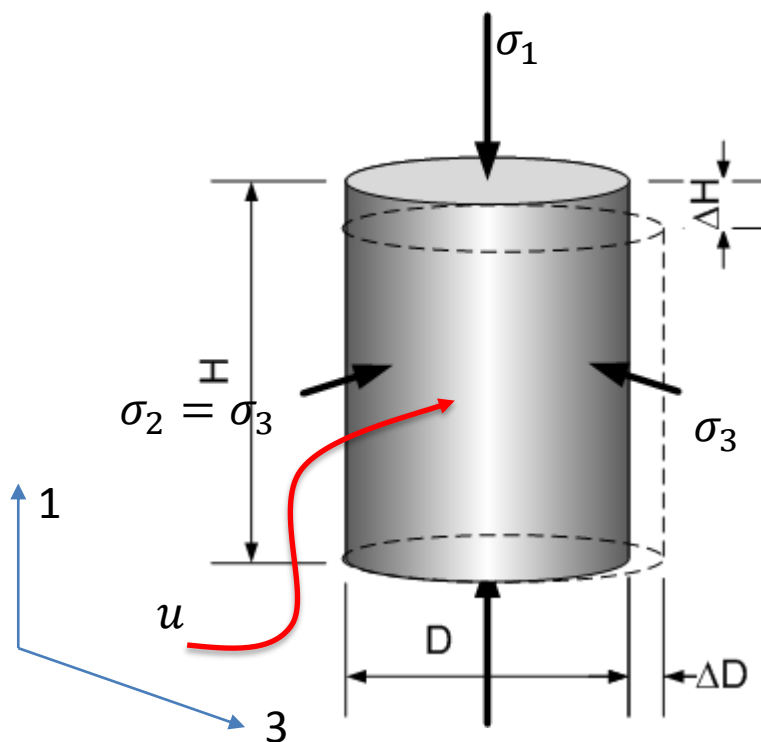
Efektivna naprezanja (pozitivna)

Deformacije (pozitivne)



Izotropna linearna elastičnost 7

Uzorak tla u troosnom pokusu



Matrice naprezanja i deformacija

- $\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma_1$
 σ_3 - ćelijski tlak
 $\Delta\sigma_1$ - opterećenje koje se nanosi izvan troosne ćelije
 u - porni tlak
- $\epsilon_1 = -\frac{\Delta H}{H}; \quad \epsilon_3 = -\frac{\Delta D}{D}$
- $\sigma_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$
- $\epsilon_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$

Izotropna linearna elastičnost 8

Model u uvjetima troosnog pokusa

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \sigma_1 - u; \sigma'_3 = \sigma_3 - u; \\ \sigma'_1 &= K' \epsilon_V + 2G' e_1, \\ \sigma'_3 &= K' \epsilon_V + 2G' e_3; \\ \epsilon_V &= \epsilon_1 + 2\epsilon_3, \\ e_1 &= \epsilon_1 - \frac{1}{3}\epsilon_V = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3), \\ e_3 &= -\frac{1}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3); \\ e_1 + 2e_3 &= 0.\end{aligned}$$

Napomene

p i p' srednje ukupno i efektivno naprezanje;

q devijatorsko naprezanja

ϵ_V volumenska deformacija

ϵ_S devijatorska deformacija

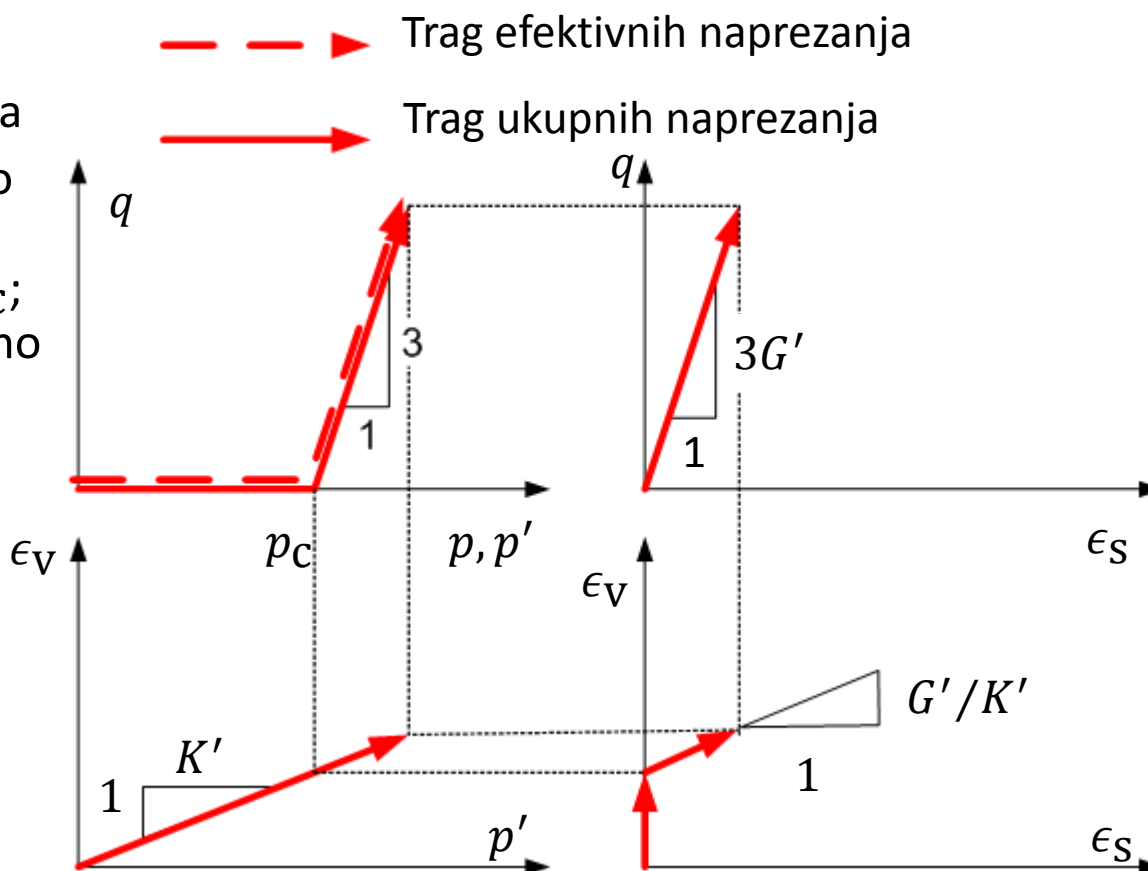
Alternativni izrazi (Cambridge) za troosni pokus

- $p' = p - u$
 $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$
 $p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$
 $q = q' = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3$
 $q = \Delta\sigma_1$
 $\sigma'_1 = p' + \frac{2}{3}q, \sigma'_3 = p' - \frac{1}{3}q$
- $\epsilon_V = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$
 $\epsilon_S = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3) = e_1$
- $p' = K' \epsilon_V$
 $q = 3G' \epsilon_S$

Izotropna linearna elastičnost 9

• Troosni izotropno konsolidirani drenirani (CID) pokus

I. faza: izotropna konsolidacija do konsolidacijsko pritiska $p' = p_c$;
 II. faza: drenirano smicanje,
 $\sigma_3 = \text{konst.}$,
 $d\sigma_3 = 0$,
 $u = \text{konst.}$,
 $dq = d\sigma'_1$,
 $dp' = \frac{1}{3}d\sigma'_1$,
 $dq = 3dp'$;



Izotropna linearna elastičnost 10

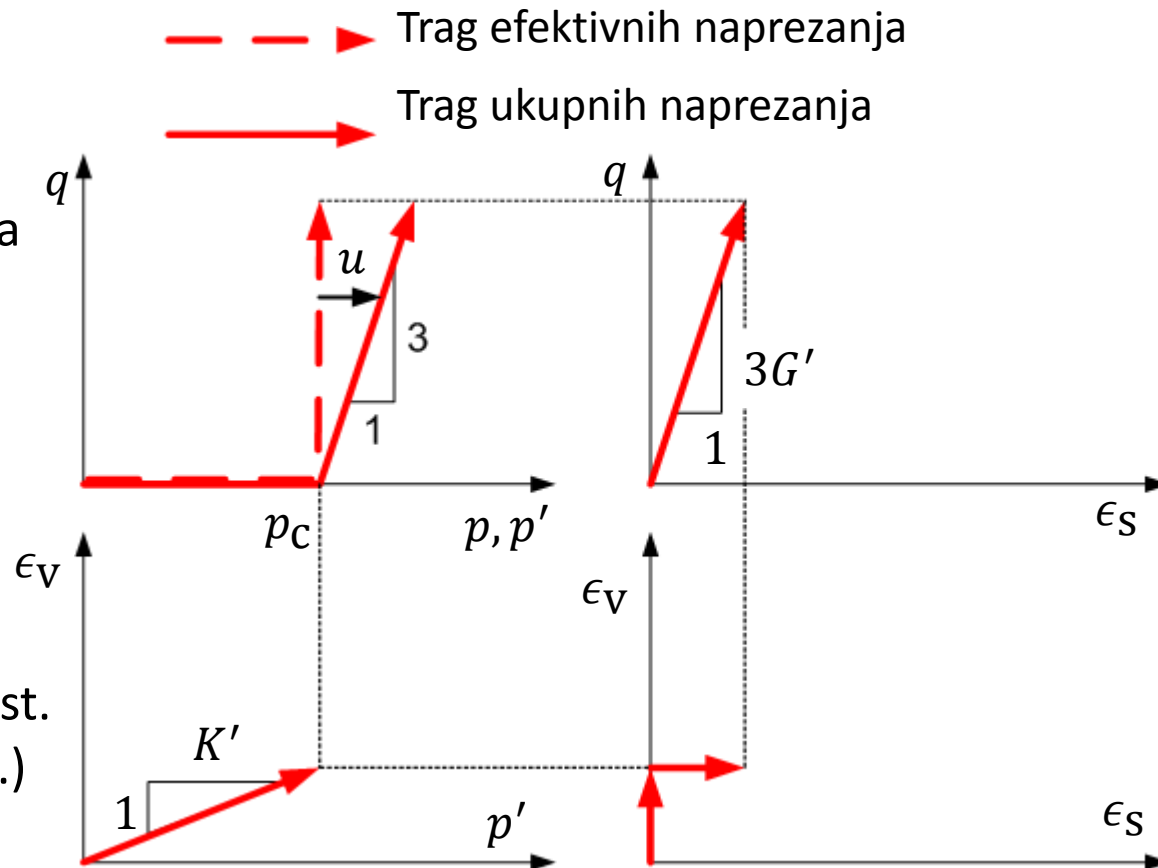
- Komentari uz CID pokus
 - Kao i svaki CID pokus, ovaj s prethodne slike sastoji se iz dvije faze u slijedu, prva je izotropna konsolidacija ($q = 0$), a druga smicanje ($\sigma_3 = p_C = \text{konst.}$, p_C se naziva pritiskom konsolidacije);
 - obje faze pokusa su drenirane (stalno je otvoren dren i brzina opterećenja je dovoljno mala tako da je porni tlak $u \approx \text{konst.}$ u ovom slučaju ≈ 0 – uzorak je stalno gotovo konsolidiran); zbog toga su u svakom trenutku efektivna naprezanja gotovo jednaka ukupnim pa su i tragovi obje vrste naprezanja u $q/(p, p')$ dijagramu identični;
 - Efektivna naprezanja slijede elastičnu konstitucijsku jednadžbu;
- U I. fazi p' raste iz 0 do pritiska konsolidacije p_C ; pri tome je $q = 0$; iz konstitucijske jednadžbe slijedi da p' raste proporcionalno s ϵ_V ; faktor proporcionalnosti je volumenski modul K' ; kako je $q = 0$ to je i $\epsilon_S = 0$;
- U II. fazi raste i p' i q ; trag naprezanja je nagnut uz $\frac{dq}{dp'} = 3$; q raste proporcionalno s ϵ_S uz faktor proporcionalnosti jednak $3G'$; kako raste i p' , raste i volumenska deformacija po istom zakonu kao i u I. fazi; omjer $\frac{d\epsilon_S}{d\epsilon_V}$ slijedi nakon uvrštavanja diferencijalnog oblika konstitucijske jednadžbe, $d\epsilon_S = \frac{dq}{G'}$ i $d\epsilon_V = \frac{dp'}{K'}$;

Izotropna linearna elastičnost 11

- Troosni izotropno konsolidirani nedrenirani (CIU) pokus

I. faza: izotropna konsolidacija;
II. faza: nedrenirano smicanje

I. faza: kao CID;
II. faza: $\epsilon_V = \text{konst.}$
(pa je i p' konst.)



Izotropna linearna elastičnost 12

- Komentari uz CIU pokus
 - Kao i svaki CIU pokus, ovaj s prethodne slike sastoji se iz dvije faze: I. faza je izotropna konsolidacija s otvorenim drenom (kao i u I. fazi CID pokusa), a druga faza je nedrenirano smicanje (za razliku od II. faze CID pokusa, sada je dren zatvoren);
 - Zbog zatvorenog drene u II. fazi pokusa, volumen uzorka u toj fazi se ne mijenja pa je $\epsilon_V = \text{konst.}$ ili $d\epsilon_V = 0$; zbog toga je u toj fazi i $p' = \text{konst.} = p_C$; kako vrijedi ista konstitucijska jednačba kao i u CID pokusu, odnos devijatorskog naprezanja i devijatorske deformacije ostaje isti kao i u CID pokusu; volumenska deformacija je konstantna i jednaka je $\frac{p_C}{K'}$;
 - Kako je uvijek $q = q'$ (zbog principa efektivnih naprezanja), slijedi opet iz principa efektivnih naprezanja da je u svakom trenutku $u = p - p'$ za svaki q ;
 - Kao i u CID pokusu, linije jednakih volumenskih deformacija u q/p' dijagramu su vertikalni pravci, a linije jednakih devijatorskih deformacija su vodoravni pravci.

Izotropna linearna elastičnost 13

- Razvoj pornog tlaka u fazi smicanja CIU pokusa

$$u = p - p' = \left(p_c + \frac{q}{3}\right) - K' \epsilon_V = \left(p_c + \frac{q}{3}\right) - K' \left(\frac{p_c}{K'}\right) = \frac{q}{3}$$

- Edometarski (drenirani) pokus u troosnom uređaju
 - Moguće ostvariti jer je edometarki kao i troosni pokus osno simetričan (os u smjeru glavnog, vertikalnog, naprezanja σ_1 pa su bočna naprezanja $\sigma_2 = \sigma_3$); ostvaruje se opterećivanjem izvan ćelije uz takvu istovremenu prilagodbu ćelijskog tlaka koja drži $\epsilon_3 = 0$.

$$\epsilon_3 = 0, \epsilon_V = \epsilon_1, \epsilon_S = \frac{2}{3} \epsilon_1;$$

$$\frac{\epsilon_S}{\epsilon_V} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{q}{p'} = \frac{3G' \epsilon_S}{K' \epsilon_V} = \frac{2G'}{K'}; \quad p' = K' \epsilon_V = K' \epsilon_1; \quad q = 3G' \epsilon_S = 2G' \epsilon_1;$$

$$\sigma'_1 = K' \epsilon_V + 2G' \epsilon_S = \left(K' + \frac{4}{3} G'\right) \epsilon_1 = E'_{\text{oed}} \epsilon_1;$$

$$\text{Edometarski modul } E'_{\text{oed}} = K' + \frac{4}{3} G' = \frac{1-\nu'}{(1-2\nu')(1+\nu')} \quad (\text{ranije se označavao s } M')$$

Nacrtaj ove rezultate u četverostrukom dijagramu $q - p', q - \epsilon_S, \epsilon_V - p'$ i $\epsilon_V - \epsilon_S$!

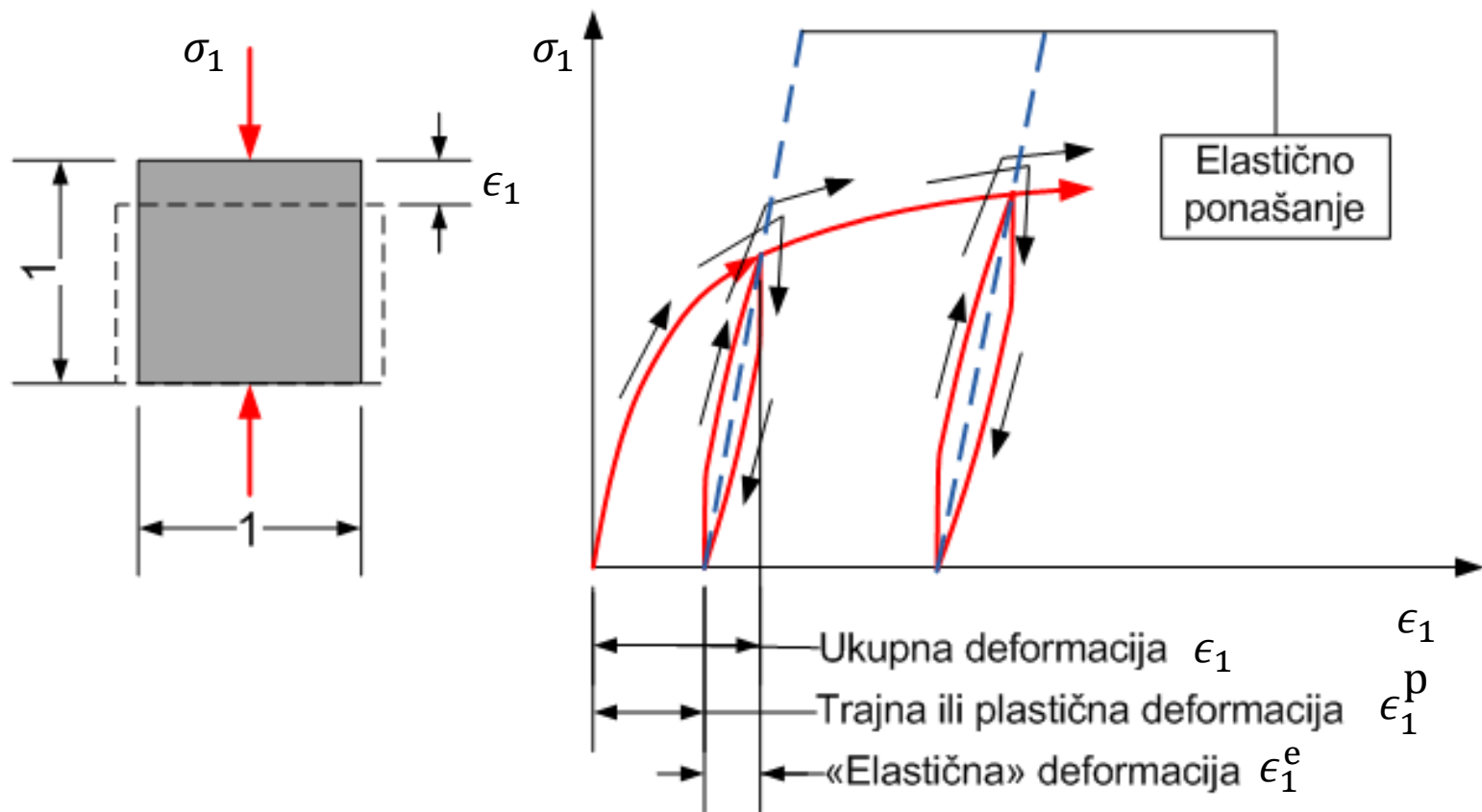
Izotropna linearna elastičnost 14

- Izotropna linearna elastičnost ne može opisati neka značajna svojstva tla:
 - nelinearnost odnosa efektivnih napreznja i deformacija;
 - Razliku ponašanja pri opterećenju i rasterećenju;
 - Utjecaj srednjeg efektivnog napreznja na odnosa napreznja i deformacija pri smicanju;
 - Čvrstoću tla;
 - Promjenu volumena pri smicanju uz konstantno srednje efektivno napreznje (dilatacija);
 - Kritično stanje;
 - Utjecaj promjene volumena uzorka na odnos efektivnih napreznja i deformacija;
 - Anizotropiju;
 - Puzanje;
 - Itd.
- Izotropno linearno elastični model ipak se koristi za opis ponašanja tla u praksi; upotreba modela je moguća ako (u konkretno razmatranom problemu rubnih i početnih uvjeta):
 - u očekivanom rasponu napreznja i deformacija nedostaci modela nisu bitni (na primjer, ako se ne očekuje pojava sloma, ako se nelinearni odnosi napreznja i deformacija mogu aproksimirati linearnim, i slično);
 - ako su očekivane razlike između stvarnog ponašanja tijela i idealiziranog ponašanja opisanog modelom praktično prihvatljive;

Ocjena navedenih uvjeta ne može biti egzaktna i sigurna u jednakoj mjeri u svim slučajevima pa je nužno potrebno iskustvo s pozivom na konkretne primjere u kojima se primjena modela pokazala prihvatljivom (ili neprihvatljivom). To primjenu modela čini složenom.

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 1

- Primjer elasto-plastičnog ponašanja materijala



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 2

- Zapažanja:
 - Tijekom monotonog deformiranja **naprezanje**, kao odgovor materijala na tu pobudu, je **nelinearna funkcija deformacije**; ta je funkcija obično konveksna (krutost materijala s porastom deformacije opada), dok naprezanje konačno ne dosegne neki **maksimum** koji nazivamo **čvrstoćom materijala**;
 - Pri **potpunom rasterećenju** opaža se **trajna zaostala deformacija**; ova se deformacija naziva **plastičnom**; pri rasterećenju krutost materijala je veća nego neposredno prije rasterećenja;
 - Pri ponovnom opterećenju odnos naprezanja i deformacije slijedi približno krivulju rasterećenja dok se ne dosegne točka početka rasterećenja; iza te točke materijal ponaša kao da nije bio rasterećivan; ova se točka naziva **točkom popuštanja** (jer materijal popušta u odnosu na prethodnu krutost);
 - Pri kasnijem ponovnom rasterećenju i opterećenju do nove točke popuštanja krutost materijala je približno jednaka krutosti u prethodnom ciklusu rasterećenje-opterećenje;
 - Krutost **u ciklusu rasterećenje-opterećenje** prije točke popuštanja približno je konstantna; takvo ponašanje liči na **elastično**;
 - Opisano ponašanje je tipični pokazatelj da **naprezanje nije funkcija deformacije, već je funkcija njene povijesti**;

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 3

- Jednostavno idealizirano ponašanje:

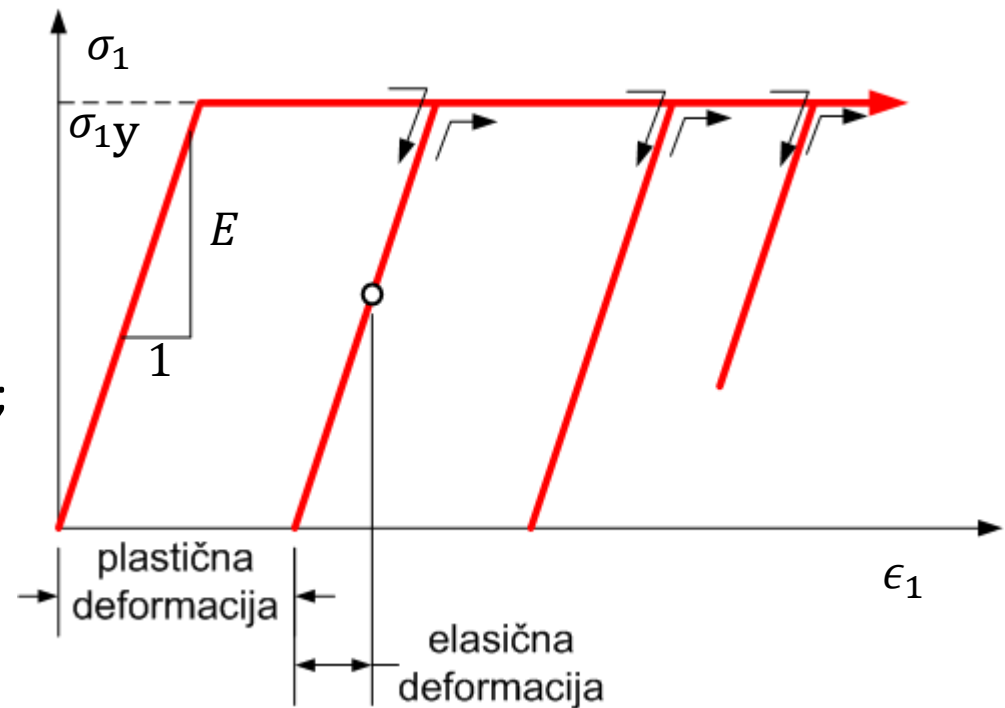
Za $\sigma_1 < \sigma_{1y}$ ponašanje je linearno elastično;

Za sve točke popuštanja vrijedi $\sigma_1 = \sigma_{1y}$;

σ_{1y} je ujedno i čvrstoća materijala; ukupna deformacija je zbroj elastične i plastične $\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^p$;

Naprezanje je funkcija elastične deformacije

$$\sigma_1 = E\epsilon_1^e = E(\epsilon_1 - \epsilon_1^p)$$



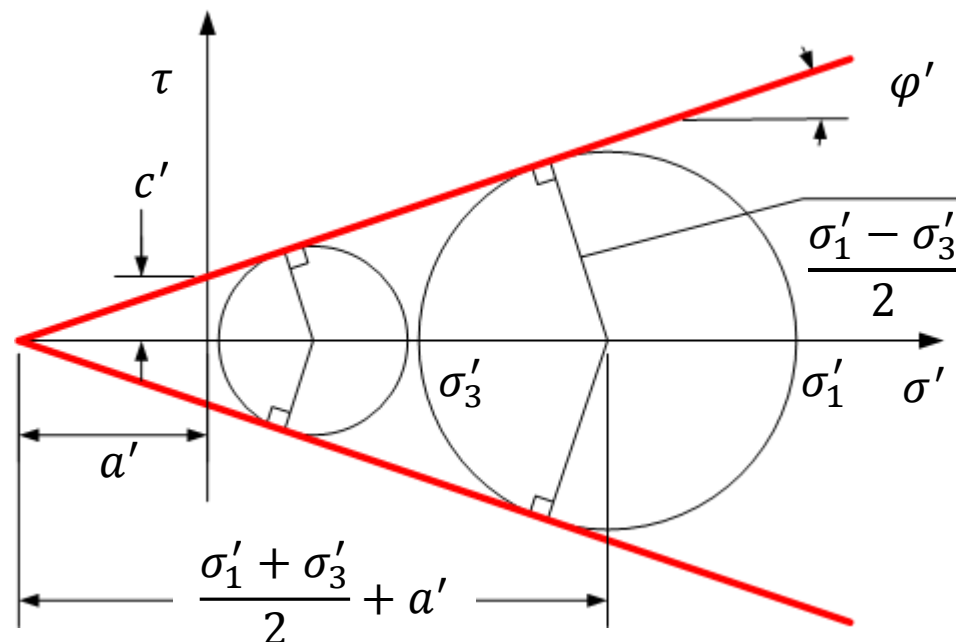
Mohr-Coulombov elasto-plastični model 4

- Mohr-Coulombov zakon čvrstoće za troosni pokus u Mohrovu dijagramu

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \varphi' = (\sigma' + a') \tan \varphi'$$

$$a' = \frac{c'}{\tan \varphi'}$$

- Mohrov dijagram i Mohr-Coulombovi pravci čvrstoće



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 5

Mohr-Coulombov zakon čvrstoće preko glavnih efektivnih naprezanja

Mohr-Coulombovi pravci čvrstoće u p' – q dijagramu

za $\sigma'_1 > \sigma'_3$ (troosna kompresija $\Delta\sigma_1 > 0$)

$$\sin \varphi' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2a'}$$

Uvrštavanje ranije pokazanih veza između glavnih efektivnih naprezanja i parametara p' i q :

$$q_f = (p' + a')M_C$$

$$M_C = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'}$$

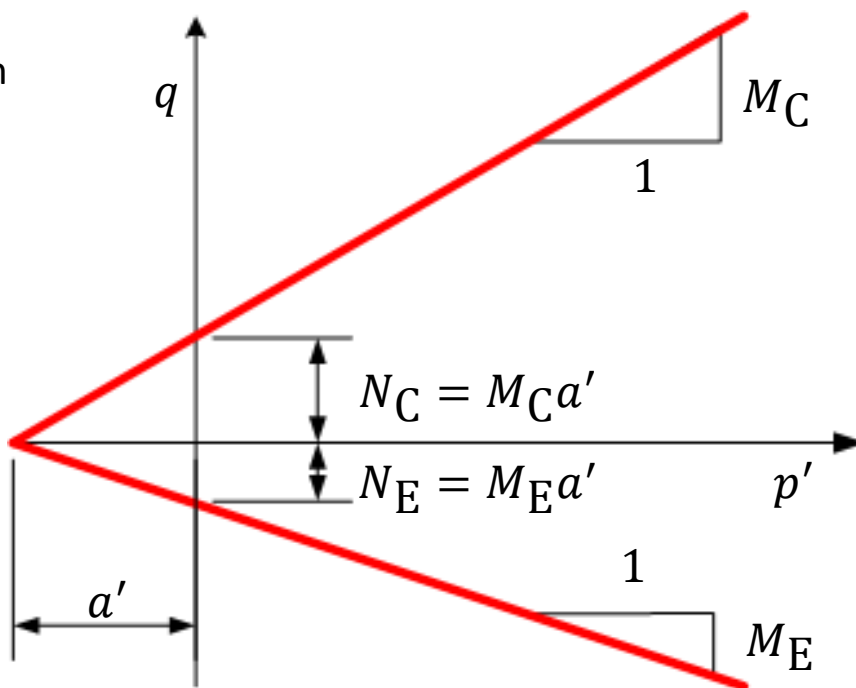
za $\sigma'_1 < \sigma'_3$ (troosna ekstenzija $\Delta\sigma_1 < 0$)

$$\sin \varphi' = \frac{\sigma'_3 - \sigma'_1}{\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2a'}$$

$$q_f = -(p' + a')M_E$$

$$M_E = \frac{6 \sin \varphi'}{3 + \sin \varphi'}; \quad \frac{M_E}{M_C} = \frac{3 - \sin \varphi'}{3 + \sin \varphi'}$$

Napomena: q_f je devijator naprezanja q pri slomu.



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 6

- Ekvivalencija efektivnih naprezanja i elastičnih deformacija

$$p' = K' \epsilon_V^e, \quad q = 3G' \epsilon_S^e \quad \text{ili}$$

$$\epsilon_V^e = \frac{p'}{K'}, \quad \epsilon_S^e = \frac{q}{3G'}.$$

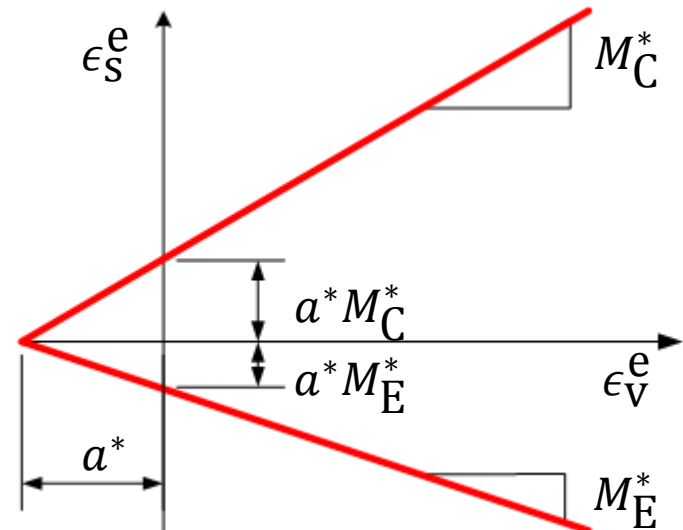
- Mohr-Coulombov zakon čvrstoće izražen preko elastičnih deformacija (za kompresiju)

$$q = (a' + p')M_C,$$

ili nakon uvrštavanja elastičnih
jednadžbi

$$\epsilon_S^e = (a^* + \epsilon_V^e)M_C^*$$

$$\text{gdje je } a^* = \frac{a'}{K'} \text{ i } M_C^* = \frac{M_C K'}{3G'}.$$

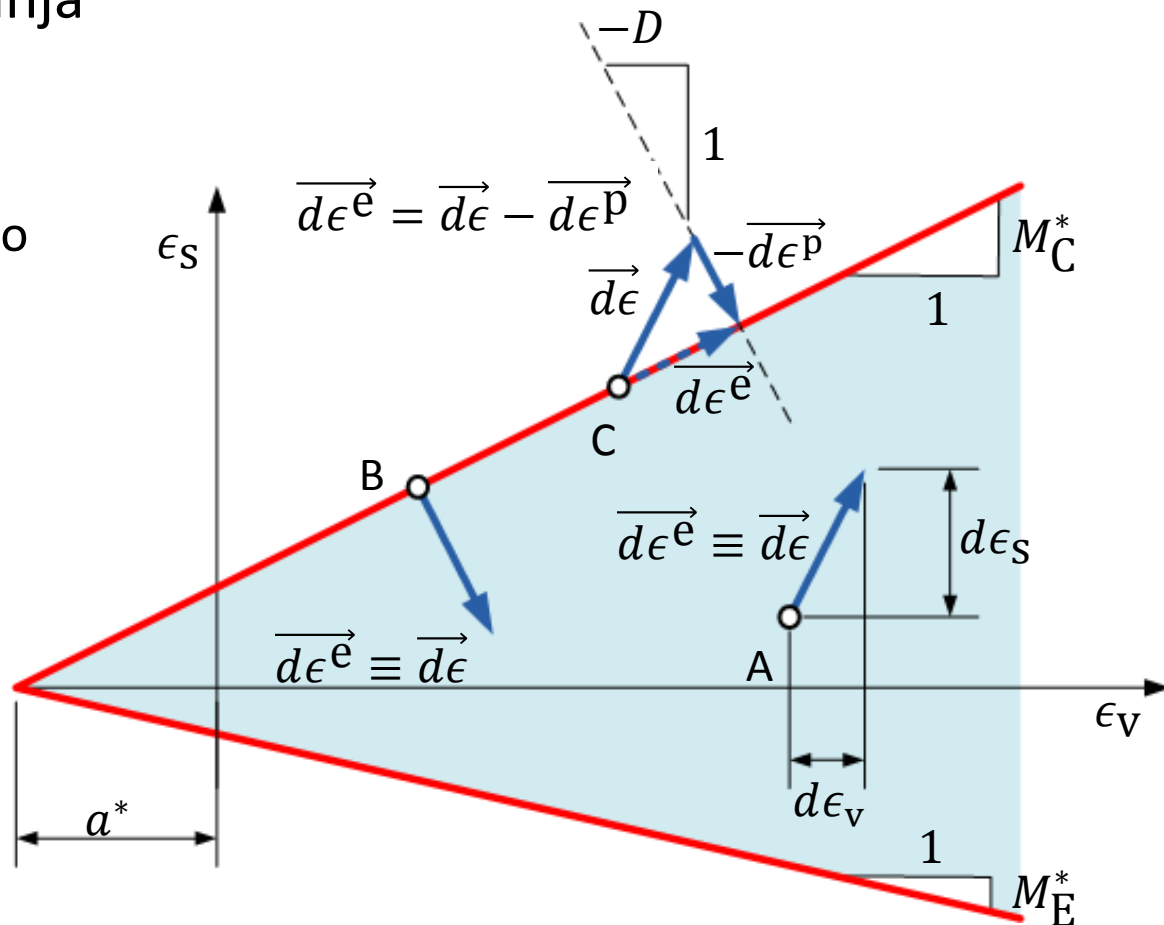


Mohr-Coulombov elasto-plastični model 7

- Postavke Mohr-Coulombovog modela (za troosni pokus)
 - Za stanje naprezanja u prostoru unutar područja omeđenom Mohr-Coulombovim pravcima čvrstoće **(elastično područje)**, **ponašanje materijala je linearno elastično**;
 - Za stanje naprezanja koje zadovoljava Mohr-Coulombov zakon čvrstoće, **razvoj deformacija se može prikazati kao zbroj elastičnih i plastičnih komponenti**; ako dođe do pojave plastičnih deformacija za takvo stanje naprezanja, kaže se da materijal popušta, a za Mohr-Coulombove pravce da predstavljaju pravce popuštanja **(uvjet popuštanja)**;
 - Stanja naprezanja izvan prostora omeđenog Mohr-Coulombovim pravcima čvrstoće nisu moguća;
 - Omjer malih inkremenata volumenske i devijatorske komponente plastične deformacije je konstantan i neovisan o stanju naprezanja; negativna vrijednost tog odnosa naziva se **dilatacijom** (širenje);
 - Omjer komponenti inkremenata plastičnih deformacija određuje **smjer malog inkrementa plastične deformacije koji može biti usmjeren samo van elastičnog područja**; ovo se svojstvo naziva **pravilom tečenja**;

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 8

- Tri slučaja ponašanja
 - A: elastično,
 - B: elastično,
 - C: elasto-plastično



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 9

- Matematička formulacija
 - Efektivna naprezanja, deformacije i njihovi inkrementi u q/p' i ϵ_S/ϵ_V dijagramima mogu se prikazati kao vektori;
 - Rastav inkremenata deformacija (općenito):

$$d\epsilon_V = d\epsilon_V^e + d\epsilon_V^p,$$

$$d\epsilon_S = d\epsilon_S^e + d\epsilon_S^p;$$
 - Inkrementi elastičnih deformacija (općenito):

$$d\epsilon_V^e = \frac{dp'}{K'}, \quad d\epsilon_S^e = \frac{dq}{3G'};$$
 - U elastičnom području:

$$d\epsilon_V^p \equiv 0, \quad d\epsilon_S^p \equiv 0;$$
 - Komponente **normale na pravac čvrstoće** usmjerene van elastičnog područja -
 - kompresija:
 $n_S = 1, \quad n_V = -M_C;$
 - ekstenzija:
 $n_S = -1, \quad n_V = -M_E;$
 - **Inkrementi plastičnih deformacija:**

$$d\epsilon_S^p = d\lambda m_S, \quad d\epsilon_V^p = d\lambda m_V;$$
 m_S i m_V su komponente vektora koji opisuju smjer inkrementa plastične deformacije, a $d\lambda$ je faktor veći ili jednak nuli koji određuje veličinu tog inkrementa – njegova veličina će se odrediti iz uvjeta zakona popuštanja (čvrstoće); komponente m_S i m_V moraju zadovoljiti uvjet da je odgovarajući vektor usmjeren van elastičnog područja

$$m_V n_V + m_S n_S \geq 0$$

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 10

– Kvocijent $D = -\frac{d\epsilon_V^p}{d\epsilon_S^p} = -\frac{m_V}{m_S}$ se

naziva **dilatacijom** (širenje) i materijalna je konstanta modela; za kompresiju se može uzeti da je $m_S = 1$ pa je $d\epsilon_S^p = d\lambda$, $m_V = -D$ i $D \geq -\frac{1}{M_C}$, a za ekstenziju $m_S = -1$ pa je tada $d\epsilon_S^p = -d\lambda$, $m_V = D$ i $D \leq \frac{1}{M_E}$;

- **Uvjet da stanje naprezanja ne može preći izvan elastičnog područja** (tj. da efektivna naprezanja moraju ostati na pravcu popuštanja –

za kompresiju:

$$q = (a' + p')M_C,$$

ili nakon uvrštavanja elastičnih jednadžbi

$$\epsilon_S^e = (a^* + \epsilon_V^e)M_C^* ;$$

Diferenciranjem slijedi

$$d\epsilon_S^e = M_C^* d\epsilon_V^e,$$

$$\text{gdje je } M_C^* = \frac{M_C K'}{3G'} \text{ i } a^* = \frac{a'}{K'} ;$$

Pri tome za inkremente efektivnih naprezanja vrijedi

$$d\epsilon_V^e = d\epsilon_V - d\epsilon_V^p = d\epsilon_V + D d\epsilon_S^p$$

$$d\epsilon_S^e = d\epsilon_S - d\epsilon_S^p$$

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 11

Uvrštavanjem inkremenata efektivnih naprezanja u gornju jednadžbu (**uvjet popuštanja**) za kompresiju slijedi za nepoznati $d\lambda = d\epsilon_S^p$ (koji ne smije biti negativan za kompresiju):

$$d\epsilon_S^p = \left\langle \frac{d\epsilon_S - M_C^* d\epsilon_V}{1 + M_C^* D} \right\rangle.$$

Zagrade $\langle \quad \rangle$ se nazivaju McCauleyove i imaju značenje $\langle x \rangle = x$ za $x \geq 0$ i $\langle x \rangle = 0$ za $x < 0$;

Sličan se izraz za $d\epsilon_S^p$ može izvesti i za slučaj ekstenzije.

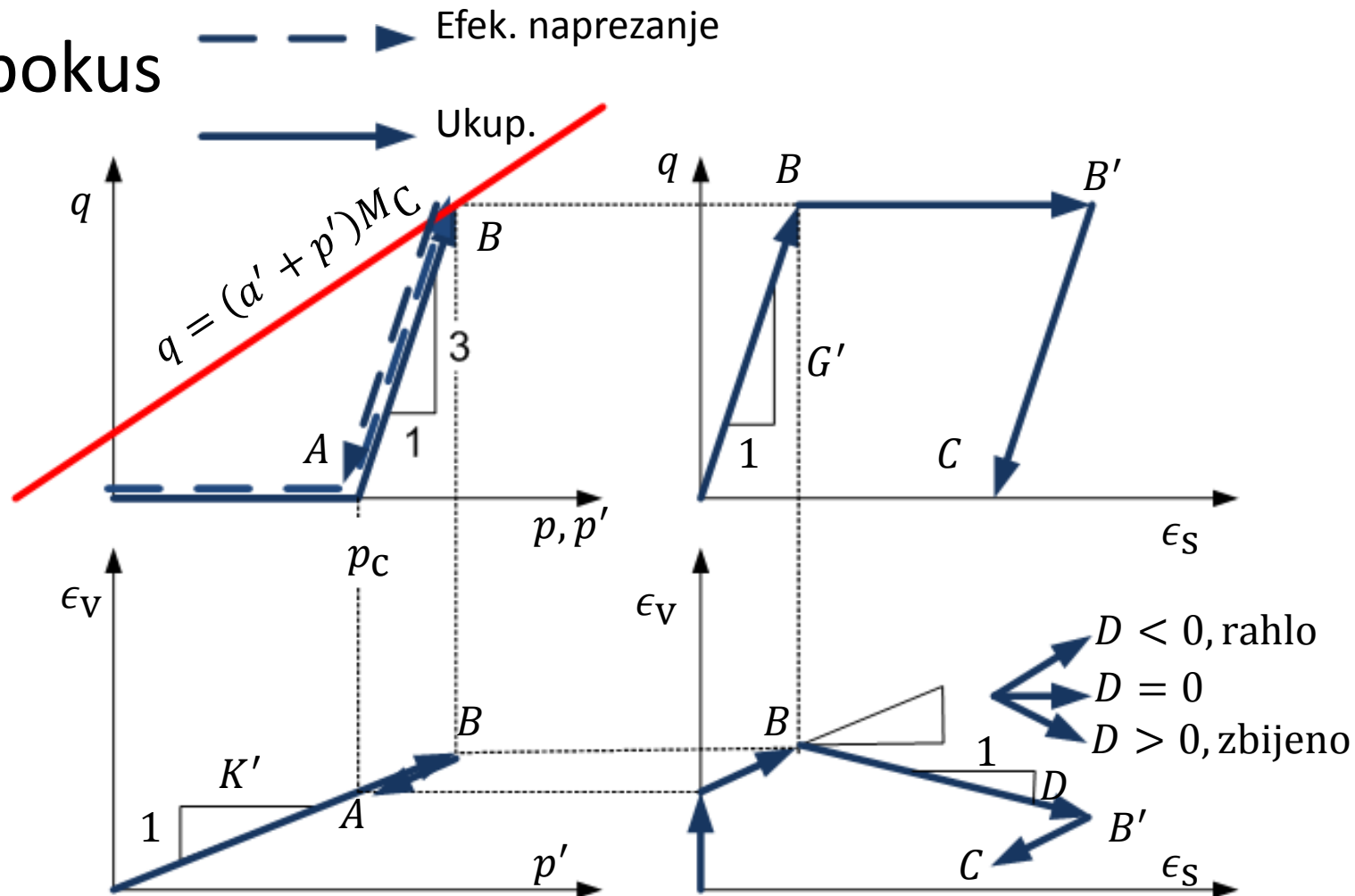
Ako se za slučaj kompresije stavi za dilataciju

$$D = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi}, \text{ tada s } \psi \text{ naziva } \mathbf{kutom}$$

dilatacije. Za slučaj $\psi = \varphi'$ govori se o **asocijativnoj plastičnosti**, a u suprotnom o neasocijativnoj plastičnosti. U slučaju asocijativne plastičnosti, smjer inkrementa plastične deformacije je okomit na Mohr-Coulombov pravac čvrstoće.

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 12

- CID pokus



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 13

- Komentar uz CID pokus
 - Ponašanje prikazano na prethodnoj slici slijedi iz strukture modela, ali ga je moguće obrazložiti i jednostavnijim argumentima koji slijede;
 - Ponašanje modela je identično izotropno linearno elastičnom sve dok trag efektivnih naprezanja u II. fazi pokusa (drenirano smicanje) ne dosegne Mohr-Coulombov pravac čvrstoće;
 - Povećanjem devijatorske deformacije iza točke B , naprezanje ostaje konstantno (zbog $\sigma_3 = p_c = \text{konst.}$ točka koja opisuje stanje naprezanja mora ležati na pravcu $\overline{AB}$, a ne može prijeći Mohr-Coulombov pravac čvrstoće) sve do točke B' kada počinje rasterećenje (q/ϵ_s dijagram);

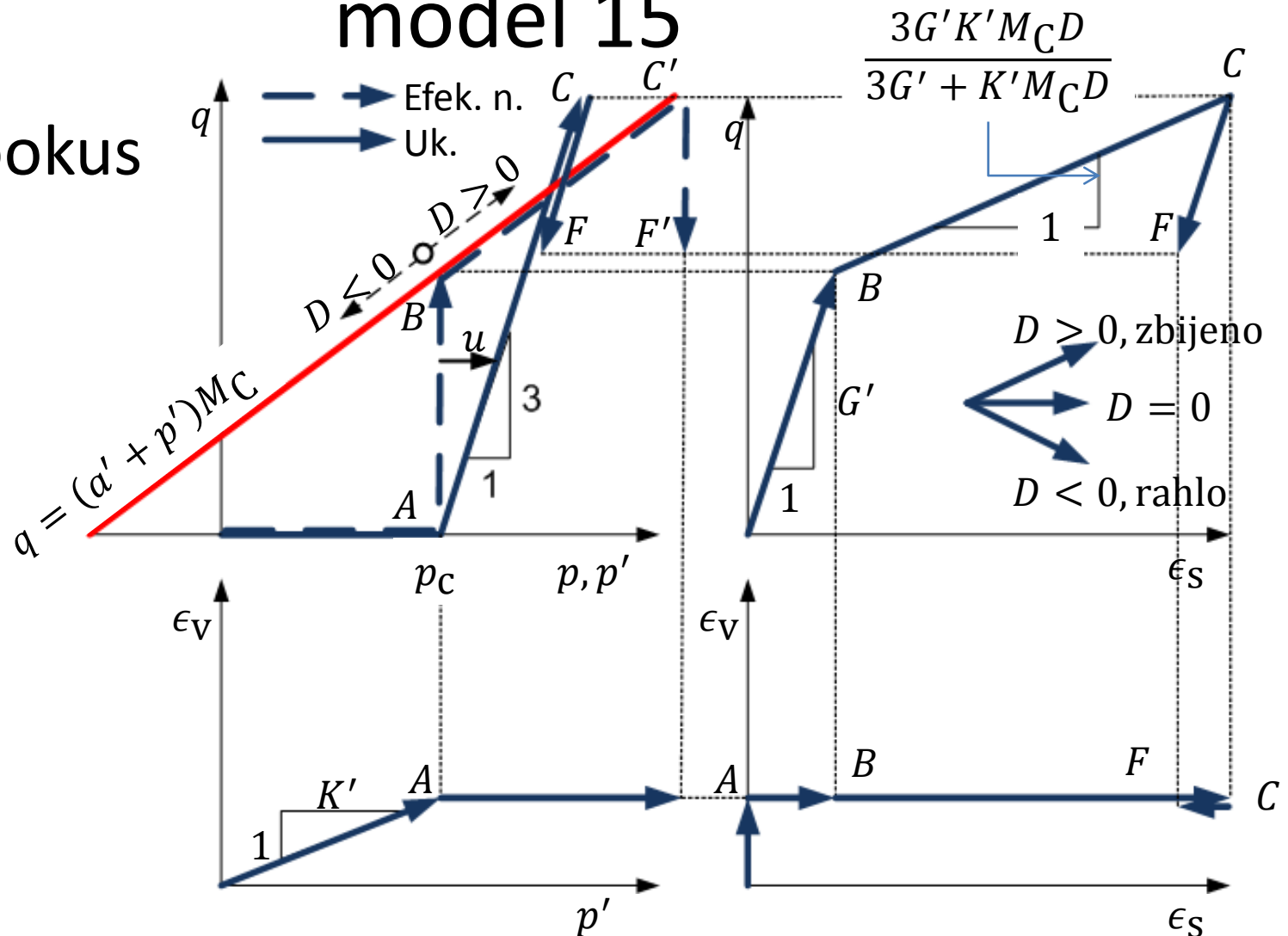
Mohr-Coulombov elasto-plastični model 14

- Tijekom popuštanja (točka B u q/p' dijagramu ili duljina $\overline{BB'}$ u q/ϵ_S dijagramu), inkrement devijatorske deformacije jednak je inkrementu plastične devijatorske deformacije (elastični inkrement jednak je nuli jer je devijatorsko naprezanje konstantno); obzirom da je i inkrement elastične volumenske deformacije jednak nuli (jer je srednje efektivno naprezanje konstantno), slijedi da je negativna vrijednost nagiba duljine $\overline{BB'}$ jednaka dilataciji D koja opisuje negativni kvocijent inkremenata volumenske i devijatorske plastične deformacije.
- Pri rasterećenju (duljina $\overline{B'C}$) ponašanje modela je opet samo elastično (kao i pri prvotnom opterećenju od točke A do točke B).

Mohr-Coulombov elasto-plastični

model 15

- CIU pokus



Mohr-Coulombov elasto-plastični model 16

- Komentar uz CIU pokus
 - Ponašanje je identično kao za izotropni linearno elastični model sve dok trag efektivnih naprezanja u q/p' dijagramu ne dosegne Mohr-Coulombov pravac čvrstoće;
 - Daljnjim povećanjem devijatorske deformacije iza točke B , trag ukupnih naprezanja slijedi prethodni pravac (jer je to uvjetovano konstantnim bočnim pritiskom u troosnoj ćeliji); trag efektivnih naprezanja ne može prijeći Mohr-Coulombov pravac pa ga mora slijediti (udesno za $D > 0$ – naime, materijal popušta uz rast plastične devijatorske deformacije, a plastična volumenska deformacija za $D > 0$ pada; obzirom da je volumenska deformacija konstantna, elastična joj komponenta mora rasti u istoj mjeri u kojoj plastična pada, a time raste i srednje efektivno naprezanje);
 - Nagib pravca iz točke B u točku C , naznačen na slici, slijedi iz strukture MC modela, a moguće ga je odrediti primjenom jednadžbi modela;
 - Za slučaj da je $D < 0$ (rast volumenske plastične deformacije s porastom devijatorske posmične deformacije), trag efektivnih naprezanja u q/p' dijagramu slijedio bi Mohr-Coulombov pravac ulijevo, a materijal bi u točki B imao nedreniranu čvrstoću veličine M_{CpC} ;
 - Pri rasterećenju od točke C u q/ϵ_S dijagramu, ponašanje je elastično; u q/p' dijagramu to se manifestira vertikalnom dužinom $\overline{C'F'}$ što je kompatibilno s uvjetom da je volumenska deformacija, a time i elastična volumenska deformacija, još uvijek konstantna (zbog nedreniranih uvjeta);

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 17

- Komentar uz Mohr-Coulombov model
 - U odnosu na izotropni linearno elastični model, Mohr-Coulombov (MC) model uvodi pojam čvrstoće (pravac popuštanja) te pojavu plastičnih deformacija i pojavu dilatacije (samo za stanja naprezanja pri popuštanju-slomu);
 - Dilatacija je posebno svojstvo zrnatih materijala; kod zbijenih se tala pri dreniranom smicanju zrna penju jedna na druga i time povećavaju volumen materijala (smanjuje se volumenska deformacija), a kod rahlih tla zrna upadaju u međuprostor drugih zrna pa se volumen tla smanjuje (povećava se volumenska deformacija);
 - Dok je izotropni linearno elastični model imao dva materijalna parametra (K' i G' , ili E' i ν'), MC model ima tri dodatna parametra: efektivnu koheziju c' (ili efektivnu adheziju a'), efektivni kut trenja φ' i dilataciju D (ili kut dilatacije ψ);
 - Kut dilatacije ψ predstavlja odklon gibanja zrna tla od smjera smicanja;
 - MC model je znatno bolji od izotropnog linearno elastičnog, ali ipak, mnoge vidove ponašanja realnog tla ne može opisati: nelinearno i elasto-plastično ponašanje prije sloma, dilatacija prije sloma, ovisnost odnosa efektivnih naprezanja i deformacija o srednjem efektivnom naprezanju, ispravno modeliranje drenirane i nedrenirane čvrstoće istim materijalnim parametrima, itd.;

Mohr-Coulombov elasto-plastični model 18

- Iz tih je razloga za primjenu MC modela u praksi opet, kao i kod izotropnog linearno elastičnog modela, nužno utvrditi da su njegovi nedostaci za razmatrani slučaj nebitni;
- Osim opisana dva jednostavna modela materijala za primjenu na tlo, razvijeni su i znatno složeniji modeli; mada ti modeli imaju manje nedostataka od opisanih (model bez nedostataka do danas nije razvijen), rjeđe se koriste u praksi zbog svoje složenosti koja otežava ispravno sagledavanje njihovih mogućnosti te traži složene i skupe postupke određivanje potrebnih materijalnih parametara.