Poglavlje 1
Kombinatorika

1.1 Permutacije

Permutacija je poredak konačnog broja objekata u redoslijed. Ako imamo n objekata, onda je broj mogućih poredaka $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Zadatak (1.1.)

Napišite sve permutacije bez ponavljanja skupa $S = \{1, 2, 3\}$.

Rješenje: Permutacije su uređene trojke skupa S: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. Broj permutacija: $3! = 6$.

Zadatak (1.2.)

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, pri čemu se znamenke ne smiju ponavljati?

Rješenje: Ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ takva broja.

Zadatak (1.3.)

Na koliko načina možemo razdijeliti 5 različitih pari čarapa u 5 ladica ako u svaku ladicu smijemo staviti samo jedan par?

Rješenje: Na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.

1.2 Permutacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n objekata od čega je n_1 objekata prve vrste, n_2 objekata druge vrste, ... i n_k objekata k-te vrste. Broj različitih poredaka ove familije je

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Zadatak (1.4.)

Na koliko načina je moguće nanizati 4 zelene, 5 plavih i 6 crvenih perlica?

Rješenje: Perlice razlikujemo samo po boji, dakle bitan nam je poredak perlica koje su međusobno različitih boja. Kad bi svih 15 perlica bilo različite boje, mogli bismo ih nanizati na 15! načina. Međutim, moramo uzeti u obzir da se perlice istih boja međusobno ne razlikuju, pa dobivamo konačan broj od $\frac{15!}{4! \cdot 5! \cdot 6!} = 630630$ mogućnosti.

Zadatak (1.5.)

Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 1, 2, 2, 2$?

Rješenje: Od ukupno 5 znamenaka, imamo dvije jedinice i tri dvojke, dakle možemo sastaviti $\frac{5!}{2!3!} = 10$ različitih peteroznamenkastih brojeva.

Zadatak (1.6.)

Na koliko načina možemo rasporediti 5 osobnih automobila, 7 motocikala i 3 kombi-vozila na 15 policijskih postaja ako svakoj postaji pripada samo jedno vozilo?

Rješenje: Na $\frac{15!}{5!7!3!} = 720720$ načina.

1.3 Varijacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n$. Varijacija je poredak bilo kojih k objekata (od n) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Specijalno, ako je $k = n$, onda se radi o permutaciji.

Zadatak (1.7.)

Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$ tako da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Prvu znamenku možemo izabrati na 6 načina, drugu znamenku na 5 načina, a treću na 4 načina (znamenke se ne smiju ponavljati). Ukupan broj mogućnosti: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Zadatak (1.8.)

Koliko ima različitih dvoznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Budući da 0 ne može biti na prvom mjestu (inače nemamo dvoznamenkasti broj!), prvu znamenku možemo izabrati na 4 načina. Drugu znamenku također biramo na 4 načina jer se znamenke ne smiju ponavljati. Dakle, broj različitih dvoznamenkastih brojeva iz skupa S je $4 \cdot 4 = 16$.

Zadatak (1.9.)

U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo odabrati 3 loptice bez vraćanja ako je poredak izvučenih loptica bitan?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina.

Zadatak (1.10.)

U kutiji se nalaze 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti najviše jednu lopticu?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina.

1.4 Varijacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $k \geqslant 1$. Varijacija s ponavljanjem je poredak bilo kojih k (možemo ponavljati/uzimati isti objekt) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n^k.$$

Zadatak (1.11.)

Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5$ ako dozvoljavamo ponavljanje?

Rješenje: Budući da je ponavljanje znamenki dozvoljeno, sva tri broja možemo izabrati na 5 načina, pa ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ mogućnosti.

Zadatak (1.12.)

Iz kutije u kojoj je sedam kuglica različitih boja izvlačimo dvije kuglice jednu po jednu, s vraćanjem ponovo u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti tim postupkom ako je poredak izvučenih kuglica bitan?

Rješenje: Navedenim postupkom dobit ćemo $7 \cdot 7 = 49$ različitih uzoraka.

Zadatak (1.13.)

U kutiji su 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 6 kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj loptica?

Rješenje: Na $6^3 = 216$ načina.

1.5 Kombinacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $0 \leqslant k \leqslant n$. Kombinacija je bilo koji podskup veličine k ove familije. Takvih podskupova imamo

$$\binom{n}{k}.$$

Neka su $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant n$. Binomni koeficijent, u oznaci $\binom{n}{k}$, je broj dan formulom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1$, jer definiramo $0! = 1$.

(ii) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(iii) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

Zadatak (1.14.)

Na koliko načina možemo iz grupe od 10 ljudi izabrati četveročlani odbor?

Rješenje: Na $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$ načina.

Zadatak (1.15.)

Skup od 50 proizvoda sadrži 10 neispravnih proizvoda. Na koliko se različitih načina može formirati uzorak koji bi sadržavao 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda?

Rješenje: U skupu se nalazi 10 neispravnih i 40 ispravnih proizvoda. Od 10 neispravnih, mi izabiremo 3 proizvoda na $\binom{10}{3}$ načina. Iz podskupa ispravnih proizvoda izabiremo 5 proizvoda na $\binom{40}{5}$ načina. Dakle, osmeročlani uzorak u kojem ima 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda možemo formirati na $\binom{40}{5} \cdot \binom{10}{3} = 78960960$ načina.

Zadatak (1.16.)

U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo izabrati 3 loptice bez vraćanja ako poredak izabranih loptica nije bitan?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina.

Zadatak (1.17.)

Imamo 3 jednake loptice. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti samo jednu lopticu?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina.

1.6 Kombinacije s ponavljanjem

Imamo n različitih spremnika. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kombinacija s ponavljanjem je bilo koji raspored k objekata (koje ne razlikujemo) u tih n spremnika. Objekte možemo zamišljati kao kuglice u nizu, a spremnike određujemo s $n-1$ pregradom. Stoga takvih rasporeda imamo

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

Npr. na slici prikazujemo jedan takav raspored 8 kuglica u 6 spremnika.

Figure: Raspored 8 objekata u 6 spremnika

Slika određuje sljedeći raspored: dvije kuglice u prvi spremnik, jedna u drugi spremnik, tri u treći spremnik, jedna u četvrti spremnik, nijedna u peti spremnik i jedna u šesti spremnik. Prebrojimo sad moguće rasporede za n spremnika i k objekata. U tom bismo slučaju na slici imali ukupno $k + n - 1$ mjesto za kuglicu i pregradu. Raspored je određen odabirom k mjesta na koje bismo stavili kuglice, odnosno odabirom $n - 1$ mjesta na koje bismo stavili pregrade.

Zadatak (1.18.)

Na koliko se načina 10 jednakih kuglica može rasporediti u 5 različitih kutija?

Rješenje: To možemo učiniti na $\binom{10+5-1}{4}$ načina.

Zadatak (1.19.)

Deset jednakih olovaka raspoređujemo u tri različite posude. Koliko razdioba možemo dobiti?

Rješenje: $n = 3, k = 10$. Možemo dobiti $\binom{3+10-1}{2} = 66$ različitih razdioba.

Zadatak (1.20.)

U studentskoj menzi se prodaju tri vrste kolača. Na koliko je načina moguće kupiti 9 kolača?

Rješenje: Imamo tri različite vrste kolača ($n = 3$) od kojih želimo sastaviti skup od 9 kolača ($k = 9$). To je moguće napraviti na $\binom{3+9-1}{2} = \binom{11}{2} = 55$ načina.

Zadatak (1.21.)

Iz kutije u kojoj su tri kuglice različitih boja izvlačimo jednu kuglicu, bilježimo boju i vraćamo je u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti ako postupak ponavljamo 8 puta uz pretpostavku da redoslјed nije bitan?

Rješenje: $n = 3, k = 8$, dobit ćemo $\binom{3+8-1}{8} = 45$ različitih uzoraka.

Zadatak (1.22.)

Koliko rješenja (x, y, z) u skupu $\mathbb{N}_0$ ima jednadžba $x + y + z = 10$?

1.7 Skupovi

Događaji će se u vjerojatnosti prikazivati kao skupovi.

Zadatak (1.23.)

A, B i C su događaji vezani za isti prostor elementarnih događaja Ω. Koristeći skupovne operacije napišite izreke za događaje:

a) nastupili su A i B dok C nije nastupio,
b) nastupila su barem dva događaja,
c) nastupio je samo jedan događaj.

Rješenje:

a) $A \cap B \cap C^C$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

Zadatak (1.24.)

Na slučajan način izabiremo studenta Građevinskog fakulteta u Zagrebu.
Razlikujemo sljedeće događaje:
$A \ldots$ izabrana osoba je pušač
$B \ldots$ izabrana osoba ima plavu kosu
$C \ldots$ izabrana osoba je student prve godine
Opišite riječima događaje:

a) $A^C \cap B \cap C$
b) $(A \cup B)^C$
c) $A \cup (B \cap C)^C$

Rješenje:

a) Izabrana osoba je plavokosi nepušač, student prve godine.
b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \Rightarrow$ Izabrana osoba je nepušač koji nema plavu kosu.
c) $A \cup B^C \cup C^C \Rightarrow$ Izabrana osoba ili puši ili nema plavu kosu ili nije student prve godine.