Vjerojatnosni prostor

Teorija vjerojatnosti

Teorija vjerojatnosti je grana matematike koja proučava slučajne pojave/pokuse.

Pokusi mogu biti:

- deterministički - ishod je određen uvjetima u kojima se pokus izvršava (npr. hlađenjem se voda ledi)
- slučajni - ishod nije u potpunosti određen uvjetima u kojima se pokus izvršava (npr. bacanje igraće kocke)

Teorija vjerojatnosti pokušava odrediti neizvjesnosti događaja vezanih uz određeni slučajan pokus.

Teorija vjerojatnosti

Prve snažne ideje za teorijom vjerojatnosti javile su se u kontekstu igara na sreću (bacanje novčića, bacanje igraće kocke, igre s kartama, itd.).

Mnoge takve igre (slučajni pokusi) imaju zajedničke sljedeće dvije karakteristike:

(i) imaju najviše konačno mnogo ishoda

(ii) svi ishodi su jednako vjerojatni (izvjesni).

Npr. bacanje tri simetrična novčića, bacanje dvije simetrične kocke ili izvlačenje karte iz špila karata. Novčić i kocka su simetrični ako su svi ishodi jednako vjerojatni.

Vjerojatnost *a priori*

Definicija (Vjerojatnost *a priori*)

Izvršavamo pokus koji ima najviše konačno mnogo ishoda koji su svi jednako vjerojatni. ***Vjerojatnost a priori*** događaja vezanog uz ovaj pokus se definira kao

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj svih ishoda}}.$$

Vjerojatnost *a priori*

Primjer

Slučajan pokus bacanja simetrične igraće kocke ima konačno šest ishoda i svi su jednako vjerojatni (kocka je simetrična). Dakle, vjerojatnost *a priori* da je prilikom jednog bacanja kocke pao paran broj iznosi

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vjerojatnost *a priori*

Problemi vjerojatnosti *a priori* su sljedeći:

(i) primjenjiva je samo na slučajne pokuse s konačno mnogo jednako vjerojatnih ishoda

(ii) sama definicija je kružna, tj. u definiciji koristimo pojam “vjerojatnost”.

Vjerojatnost *a posteriori*

Definicija (Vjerojatnost *a posteriori*)

Izvršavamo neki slučajan pokus. Neka je A događaj vezan uz taj pokus. **Vjerojatnost *a posteriori*** događaja A se definira kao

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

gdje je n_A broj pojavljivanja događaja A u n ponavljanja pokusa.

Vjerojatnost *a posteriori*

Vjerojatnost *a posteriori* zapravo koristi statistički pristup za definiranje vjerojatnosti. Imamo sljedeće probleme:

- oslanja se na beskonačno ponavljanje pokusa, tj. nepraktična je
- ne možemo biti sigurni da gornji limes uopće postoji.

Vjerojatnosni prostor

Konačno 1933. g. ruski matematičar A. N. Kolmogorov uvodi matematički ispravnu definiciju vjerojatnosti.

Izvršavamo neki slučajan pokus.

- $\Omega =$ skup svih mogućih ishoda tog pokusa
  Ω nazivamo **prostorom elementarnih događaja**
- elemente od Ω nazivamo **elementarnim događajima** i označavamo ih s ω

Vjerojatnosni prostor

U pokusu bacanja igraće kocke je

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- brojevi $1, 2, 3, 4, 5$ i 6 su elementarni događaji tog pokusa.

Osim elementarnih događaja od interesa su i neki drugi objekti čije vjerojatnosti želimo računati, podskupovi od Ω. Npr. u Primjeru 1 skup $A = \{2, 4, 6\}$ (pao je paran broj).

To nije uvijek moguće učiniti za svaki podskup od Ω!
Za Ω diskretan (konačan ili prebrojiv) to možemo napraviti, ali inače ne.

Prostor događaja

Skup podskupova od Ω čiju vjerojatnost želimo računati mora imati određena svojstva/strukturu koja su u skladu s prirodom problema koje proučavamo.
Neka je $\mathcal{F}$ skup podskupova od Ω koja zadovoljava sljedeće:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Skup $\mathcal{F}$ nazivamo **prostorom događaja**, a njegove elemete **događajima**.

Prostor događaja

Iz gornjih svojstava lagano se izvede sljedeće:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Dakle, $(\Omega, \mathcal{F})$ opisuje događaje vezane uz naš pokus.

Prostor događaja

Za Ω diskretan uvijek možemo uzeti $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{P}(\Omega)$ je **partitivni skup** od Ω, tj. skup svih podskupova od Ω.

U primjeru bacanja igraće kocke imamo

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \dots, \{6\},\\
&\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{5,6\},\\
&\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \dots, \{4,5,6\},\\
&\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \dots, \{3,4,5,6\},\\
&\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \dots, \{2,3,4,5,6\},\\
&\{1,2,3,4,5,6\}\}.
\end{aligned}$$

Definicija vjerojatnosti

Definicija

Vjerojatnost je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava sljedeće:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjunktni $\implies \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo **vjerojatnosnim prostorom**.

Problem: za dani slučajni pokus nemamo točnu definiciju funkcije $\mathbb{P}$. (Taj problem rješava matematička statistika.)

Vjerojatnosni prostor - primjeri

Primjer

Bacamo simetričan novčić.
$\Omega = \{P, G\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{G\}, \{P, G\}\}$
Zbog simetrije je za $\mathbb{P}$ prirodno uzeti vjerojatnost *a priori*, tj.
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/2$ za $\omega \in \Omega$.

Primjer

Bacamo simetričnu kocku.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6$ za $\omega \in \Omega$.

Vjerojatnosni prostor

- Za definiranje vjerojatnosti $\mathbb{P}$ vezane uz diskretan Ω dovoljno je definirati $\mathbb{P}$ za elementarne događaje.
- Vjerojatnosti ostalih događaja onda slijede iz svojstva (ii) u definiciji vjerojatnosti.

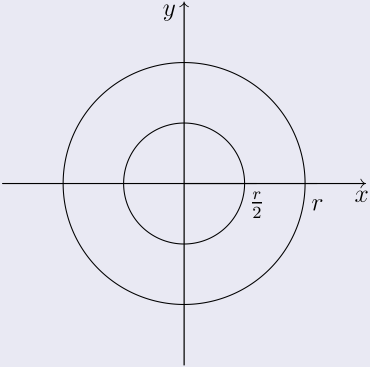
Npr. želimo izračunati vjerojatnost da je simetričnoj kocki pao broj 5 ili 6.

$$\mathbb{P}(\{5,6\}) = \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Vjerojatnosni prostor - primjeri

Primjer

Unutar kruga radijusa $r > 0$ biramo točku na slučajan način. Kolika je vjerojatnost da se odabrana točka nalazi bliže rubu kruga nego centru?



Vjerojatnosni prostor - primjeri

Primjer (nastavak)

Očito je

$$\Omega = \{\omega = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}.$$

Zanima nas vjerojatnost događaja

$$A = \left\{\omega = (x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 > \frac{r^2}{4}\right\}$$

(točka se nalazi bliže rubu ako se nalazi izvan kruga radijusa $r/2$, vidi Sliku).

Ima smisla za $A \in \mathcal{F}$ definirati

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{pov}(A)}{\mathrm{pov}(\Omega)},$$

gdje $\mathrm{pov}(A)$ predstavlja površinu skupa A.

Primjer (nastavak)

Stoga je tražena vjerojatnost

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r^2\pi - \frac{r^2}{4}\pi}{r^2\pi} = \frac{3}{4}.$$

Ovakva definicija je opravdana uz pretpostavku uniformnosti (svaka točka je "jednako vjerojatna").

Svojstva vjerojatnosti

Gornji primjer sugerira da na vjerojatnost trebamo gledati kao na mjeru, jer u biti ona i jest mjera, mjera neizvjesnosti.
Dajmo sada neka svojstva vjerojatnosti. Za sve $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi:

(i) $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

(ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$