Metoda konačnih razlika

Rješavamo problem ravnoteže žice, to jest,

$$\boxed{-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x),}$$

uz rubne uvjete:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \text{ (lijevi kraj je pričvršćen)}, \\ u'(l) &= 0 \text{ (desni kraj je slobodan) ili } u(l) = 0. \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da je napetost konstantna: $p(x) = p$ i rješavamo:

$$\boxed{u''(x) - \frac{q(x)}{p}u(x) + \frac{f(x)}{p} = 0 \text{ uz } u(0) = u'(l) = 0,}$$

ili

$$\boxed{u''(x) - \frac{q(x)}{p}u(x) + \frac{f(x)}{p} = 0 \text{ uz } u(0) = u(l) = 0,}$$

Postupak:

- Podijelimo segment $[0, l]$ na n jednakih malih dijelova širine $h = \frac{l}{n}$, to jest,
$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < \ldots < x_n = x_{n-1} + h = l$$

- Uvodimo oznake $u(x_i) = u_i$, $u'(x_i) = u_i'$, $u''(x_i) = u_i''$, za $i = 0, 1, \ldots, n$. Iz Taylorovog razvoja znamo da je
$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_i + h) \approx u_i + h \cdot u_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'', \text{ za } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$
Analogno, vrijedi da je
$$u_{i-1} = u(x_{i-1}) = u(x_i - h) \approx u_i - h \cdot u_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'', \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zbrajanjem ta dva izraza dobivamo

$$u_i'' \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \text{ za } i = 1, 2, ..., n-1.$$

Dakle, uz oznake $f_i = f(x_i)$ i $q_i = q(x_i)$ diferencijalna jednadžba $u''(x) - q(x)u(x) + f(x) = 0$ $(p = 1)$ u točkama $x_i, i = 1, 2, ..., n-1$ prelazi u sustav od $n-1$ jednadžbi:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - q_i u_i + f_i = 0,$$

to jest,

$$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i - u_{i+1} = h^2 f_i, \ i = 1, 2, ..., n-1.$$

Iz rubnih uvjeta dobivamo:

$$u_0 = 0 \text{ (lijevi kraj pričvršćen)}$$

$$0 = u'(l) = u'(x_n) = u_n' \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \text{ tj., } u_n = u_{n-1}.$$

Sve skupa, dobili smo sustav od $n-1$ jednadžbi s $n-1$ nepoznanica

$$\boxed{A(h)u = b(h)},$$

gdje su

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+h^2q_2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2q_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1+h^2q_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$b(h) = \begin{pmatrix} f_1 h^2 \\ f_2 h^2 \\ . \\ . \\ . \\ f_{n-1} h^2 \end{pmatrix}, \text{ i } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Napomena:

U slučaju da rješavamo problem ravnoteže žice s konstantnom napetosti p i ako su rubovi pričvršćeni, tj. u(0) = u(l) = 0, problem se rješava potpuno analogno; umjesto $u_0 = 0$ i $u_n = u_{n-1}$ imamo $u_0 = u_n = 0$.

Zadatak (1.)

Riješite metodom konačnih razlika:

a) $u''(x) - x^2u(x) + x = 0$ na $[0,1]$, ako je $h = 0.25$ $(n = 4)$ i $u(0) = u'(1) = 0$,

b) $u''(x) - u(x) + x = 0$ na $[0,1]$, ako je $h = 0.25$ $(n = 4)$ i $u(0) = u(1) = 0$.

Rješenje (a):

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1,\ f(x) = x \quad \text{i} \quad q(x) = x^2.$$

Rješenje (a):

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1,\ f(x) = x \quad \text{i} \quad q(x) = x^2.$$

Dakle, rješavamo sustav

$$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i) - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3.$$

Sustav glasi

$$\begin{aligned}
-u_0 + (2 + h^2 q_1) - u_2 &= h^2 f_1 \\
-u_1 + (2 + h^2 q_2) - u_3 &= h^2 f_2 \\
-u_2 + (1 + h^2 q_3) - u_4 &= h^2 f_3.
\end{aligned}$$

Iz rubih uvjeta imamo $u_0 = 0$ i $u_4' = 0 \implies u_3 = u_4$:

$$\begin{aligned}
(2 + \frac{1}{256})u_1 - u_2 &= \frac{1}{64} \\
-u_1 + (2 + \frac{1}{64})u_2 - u_3 &= \frac{1}{32} \\
-u_2 + (1 + \frac{9}{256})u_3 &= \frac{3}{64}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0.0842,\ u_2 = 0.153,\ u_3 = 0.193,\ u_4 = 0.193.$$

Rješenje (b):

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1,\ f(x) = x \quad \text{i} \quad q(x) = 1.$$

Rješenje (b):

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1,\ f(x) = x \quad \text{i} \quad q(x) = 1.$$

Dakle, rješavamo sustav

$$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i) - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3.$$

Iz rubih uvjeta imamo $u_0 = 0$ i $u_4 = 0$:

$$\begin{aligned} (2 + \frac{1}{16})u_1 - u_2 &= \frac{1}{64} \\ -u_1 + (2 + \frac{1}{16})u_2 - u_3 &= \frac{1}{32} \\ -u_2 + (2 + \frac{1}{16})u_3 &= \frac{3}{64}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0.0348,\ u_2 = 0.0563,\ u_3 = 0.05,\ u_4 = 0.$$

Valna jednadžba (eksplicitna shema)

Promatramo problem oscilacija konstantno napete žice u sredstvu bez otpora i bez utjecaja vanjske sile:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},}$$

uz rubne i početne uvjete:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t) &= 0 \ \ \text{(lijevi i desni kraj je pričvršćen)}, \\ u(x,0) &= \alpha(x) \ \ \text{(zadani početni položaj)}, \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \beta(x) \ \ \text{(zadana početna brzina)}. \end{aligned}$$

Postupak:

- Podijelimo segment $[0, l]$ na n jednakih malih dijelova širine $h = \frac{l}{n}$. U ovom problemu imamo i vremensku dimenziju koja nije ograničena; vrijedi $t \in [0, +\infty >$, pa umjesto podjele na n jednakih dijelova uzimamo proizvoljan korak širine τ.

  $[0, l]$ je podijeljen točkama $x_i, i = 0, 1, ..., n$:

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < ... < x_n = x_{n-1} + h = l,$$

  $[0, +\infty >$ je podijeljen točkama $t_i, i = 0, 1, 2, ...$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \tau < t_2 = t_1 + \tau < ....$$

  Uočimo da je $\boxed{x_i = ih}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, a $\boxed{t_j = j\tau}$ $(j = 0, 1, 2, ...)$.

- Zanima nas što se događa s vrijednostima funkcije u u točkama $(x_i, t_j) = (ih, j\tau)$ koje zovemo $(i,j) - ti$ čvor.
  Označimo $u(x_i, t_j) = u_{ij},\ i = 0, 1, ..., n,\ j = 0, 1, 2, ...$ Iz rubnih uvjeta imamo:

$$u_{i0} = \alpha(x_i) = \alpha_i,$$
$$\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \beta(x_i) = \beta_i,\ \text{za } i = 0, 1, ..., n.$$

  - $\frac{\partial u_{i0}}{\partial t}$ aproksimiramo kao i prije pomoću Taylorovog polinoma:

$$\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} \approx \frac{u_{i1} - u_{i0}}{\tau},$$

    to jest,

$$\boxed{u_{i1} = u_{i0} + \tau\beta_i = \alpha_i + \tau\beta_i},\ \text{za } i = 0, 1, ..., n.$$

  - Iz uvjeta $u(0, t) = u(l, t) = 0$ imamo

$$\boxed{u_{0j} = u_{nj} = 0},\ \text{za } j = 0, 1, 2, ...$$

Kao i prije, aproksimacijom Taylorovim polinomom dobijemo

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},$$
$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\tau^2}.$$

Sve skupa, aproksimacija jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ u čvoru (i,j) glasi

$$\boxed{\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}},$$

za $i = 1, ..., n-1$ i $j = 2, 3, ...;$

jer je za $j = 0$, $u_{i0} = \alpha_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$,
a za $j = 1$ je $u_{i1} = \alpha_i + \tau\beta_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$.

Dakle,

$$\boxed{u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + c^2\delta^2 u_{i-1,j} + 2(1 - c^2\delta^2)u_{i,j} + c^2\delta^2 u_{i+1,j},}$$

gdje je $\delta = \frac{\tau}{h}$.

Pokazuje se da mora vrijediti $\boxed{\delta \leq 1}$ da bi rješenje bilo stabilno.

Zadatak (2.)

Riješite sljedeći rubni problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= \frac{1}{8}\sin(\pi x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

ako je $h = \tau = 0.25$ $(n = 4)$.

Rješenje:

$$\delta = \frac{\tau}{h} = 1 \implies u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3, \ldots$$

Rješenje:

$$\delta = \frac{\tau}{h} = 1 \implies u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, \; j = 2, 3, \ldots$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

Rješenje:

$$\delta = \frac{\tau}{h} = 1 \implies u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3, \ldots$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

(2) $u_{i0} = \alpha_i$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4$, tj.

$$u_{00} = 0,\ u_{10} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = 0.088,\ u_{20} = \frac{1}{8},\ u_{30} = 0.088,\ u_{40} = 0.$$

Rješenje:

$$\delta = \frac{\tau}{h} = 1 \implies u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, \; j = 2, 3, \ldots$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

(2) $u_{i0} = \alpha_i$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ tj.

$$u_{00} = 0, \; u_{10} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = 0.088, \; u_{20} = \frac{1}{8}, \; u_{30} = 0.088, \; u_{40} = 0.$$

(3) $u_{i1} = \alpha_i + \tau \beta_i = \alpha_i = u_{i0}$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4.$

Rješenje:

$$\delta = \frac{\tau}{h} = 1 \implies u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, \; j = 2, 3, \ldots$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

(2) $u_{i0} = \alpha_i$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ tj.

$$u_{00} = 0, \; u_{10} = \frac{1}{8} \sin\frac{\pi}{4} = 0.088, \; u_{20} = \frac{1}{8}, \; u_{30} = 0.088, \; u_{40} = 0.$$

(3) $u_{i1} = \alpha_i + \tau\beta_i = \alpha_i = u_{i0}$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4.$

Uočimo još da su zbog simetričnosti rubnih uvjeta i rješenja simetrična, tj. $u_{0j} = u_{4j}$ i $u_{1j} = u_{3j}$ za $j = 0, 1, 2 \ldots$

x \ t	0 (j=0)	0.25 (j=1)	0.5 (j=2)	0.75 (j=3)	1 (j=4)
0 (i=0)	0	0	0	0	0
0.25 (i=1)	0.088	0.088			
0.5 (i=2)	0.125	0.125			
0.75 (i=3)	0.088	0.088			
1 (i=4)	0	0	0	0	0

$$u_{12} = u_{01} + u_{21} - u_{10} = 0 + 0.125 - 0.088 = 0.037 = u_{32}$$
$$u_{22} = u_{11} + u_{31} - u_{20} = 0.088 + 0.088 - 0.125 = 0.05 \qquad \text{itd.}$$

$$u_{12} = u_{01} + u_{21} - u_{10} = 0 + 0.125 - 0.088 = 0.037 = u_{32}$$
$$u_{22} = u_{11} + u_{31} - u_{20} = 0.088 + 0.088 - 0.125 = 0.05 \qquad \text{itd.}$$

x \ t	0 (j=0)	0.25 (j=1)	0.5 (j=2)	0.75 (j=3)	1 (j=4)
0 (i=0)	0	0	0	0	0
0.25 (i=1)	0.088	0.088	0.037	-0.037	-0.088
0.5 (i=2)	0.125	0.125	0.05	-0.05	-0.125
0.75 (i=3)	0.088	0.088	0.037	-0.037	-0.088
1 (i=4)	0	0	0	0	0

Vođenje topline (eksplicitna shema)

Promatramo problem provođenja topline kroz homogeni štap (toplinski kapacitet i koeficijent provođenja su konstantni) bez vanjskog prijenosa topline:

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},}$$

uz rubne i početne uvjete:

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ (lijevi i desni kraj su na konstantnoj temperaturi $0^\circ C$),
$u(x,0) = g(x)$ (početna distribucija topline).

Postupak:

- Podijelimo segment $[0, l]$ na n jednakih malih dijelova širine $h = \frac{l}{n}$. Opet imamo i vremensku dimenziju koja je beskonačna ($t \in [0, +\infty >$), pa umjesto podjele na n jednakih dijelova uzimamo proizvoljan korak širine τ.

$[0, l]$ je podijeljen točkama $x_i, i = 0, 1, ..., n$:

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < ... < x_n = x_{n-1} + h = l,$$

$[0, +\infty >$ je podijeljen točkama $t_i, i = 0, 1, 2, ...$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \tau < t_2 = t_1 + \tau < ....$$

Opet je $\boxed{x_i = ih}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, a $\boxed{t_j = j\tau}$ $(j = 0, 1, 2, ...)$.

Zanima nas što se događa s vrijednostima funkcije $u(x,t)$ u točkama $(x_i, t_j) = (ih, j\tau)$ koje zovemo $(i,j) - ti$ čvor.
Označimo
$u(x_i, t_j) = u_{ij},\ i = 0, 1, ..., n,\ j = 0, 1, 2, ...$ i $g(x_i) = g_i,\ i = 0, 1, ..., n$. Iz rubnih uvjeta imamo:

$$
\begin{aligned}
u_{i0} &= g(x_i) = g_i,\ \text{za } i = 0, 1, ..., n,\\
u_{0j} &= u_{nj} = 0,\ \text{za } j = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

Kao i prije, aproksimacijom pomoću Taylorovog polinoma dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2},\\
\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} &\approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau},
\end{aligned}
$$

pa aproksimacija diferencijalne jednadžbe $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ u čvoru (i, j) glasi:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau} = c^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2},$$

za $i = 1, 2, ..., n-1$, i $j = 1, 2, ...$

Dakle,

$$\boxed{u_{i,j+1} = c^2\delta u_{i-1,j} + (1 - 2c^2\delta)u_{ij} + c^2\delta u_{i+1,j}}$$

za $i = 1, 2, ..., n-1$ i $j = 1, 2, ...$, gdje je $\delta = \frac{\tau}{h^2}$.

Da bi postupak bio stabilan, mora vrijediti $c^2\delta \leq \frac{1}{2}$, to jest

$$\boxed{\tau \leq \frac{1}{2c^2} h^2}$$

(korak po vremenu mora biti mali u usporedbi s korakom po prostornoj koordinati).

Zadatak (3.)

Riješite sljedeći rubni problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{if } x \in [0, \frac{2}{3}] \\ -3x + 3 & \text{if } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

ako je $h = \frac{1}{5}$ $(n = 5)$ i $\tau = \frac{1}{100}$.

Rješenje:
$\delta = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4}$ i $c^2\delta = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, dakle metoda je stabilna.
Kako je $c^2 = 1$ i $\delta = \frac{1}{4}$ imamo:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \frac{1}{4} u_{i-1,j} + \frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{4} u_{i+1,j} \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \right) \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, 4\, j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Rješenje:
$\delta = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4}$ i $c^2\delta = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, dakle metoda je stabilna.
Kako je $c^2 = 1$ i $\delta = \frac{1}{4}$ imamo:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \frac{1}{4}u_{i-1,j} + \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{4}u_{i+1,j} \\ &= \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right) \quad \text{za} \quad i = 1,2,3,4\, j = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Iz rubih i početnih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{5j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

Rješenje:
$\delta = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4}$ i $c^2\delta = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, dakle metoda je stabilna.
Kako je $c^2 = 1$ i $\delta = \frac{1}{4}$ imamo:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= \frac{1}{4} u_{i-1,j} + \frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{4} u_{i+1,j} \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \right) \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, 4 \, j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Iz rubih i početnih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{5j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

(2) $u_{i0} = g_i$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, tj.

$$u_{00} = 0, \; u_{10} = 0.3, \; u_{20} = 0.6, \; u_{30} = 0.9, \; u_{40} = 0.6, \; u_{50} = 0.$$

x \ t	0 (j=0)	0.01 (j=1)	0.02 (j=2)	0.03 (j=3)	0.04 (j=4)	0.05 (j=5)
0 (i=0)	0	0	0	0	0	0
0.2 (i=1)	0.3					
0.4 (i=2)	0.6					
0.6 (i=3)	0.9					
0.8 (i=4)	0.6					
1 (i=5)	0	0	0	0	0	0

$$u_{11} = \frac{1}{4}\left(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}\right) = 0.3$$

$$u_{22} = \frac{1}{4}\left(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}\right) = 0.6 \qquad \text{itd.}$$

$$u_{11} = \frac{1}{4}\left(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}\right) = 0.3$$

$$u_{22} = \frac{1}{4}\left(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}\right) = 0.6 \qquad \text{itd.}$$

x \ t	0 (j=0)	0.01 (j=1)	0.02 (j=2)	0.03 (j=3)	0.04 (j=4)	0.05 (j=5)
0 (i=0)	0	0	0	0	0	0
0.2 (i=1)	0.3	0.3	0.3	0.29	0.275	0.251
0.4 (i=2)	0.6	0.6	0.5625	0.5218	0.48	0.439
0.6 (i=3)	0.9	0.75	0.6625	0.587	0.523	0.467
0.8 (i=4)	0.6	0.55	0.4625	0.3968	0.345	0.303
1 (i=5)	0	0	0	0	0	0

EKSPLICITNA SHEMA - vrijednosti u vremenu t se dobivaju preko vrijednosti u ranijim vremenima.

Problemi s eksplicitnim shemama:

- korak po vremenu, τ, mora biti mali u usporedbi s korakom po prostornoj koordinati; u suprotnom se nagomilava greška zaokruživanja
- numerička nestabilnost
- treba balansirati i pogrešku metode i pogrešku zaokruživanja

Vođenje topline (implicitna shema)

Promatramo problem provođenja topline kroz homogeni štap (toplinski kapacitet i koeficijent provođenja su konstantni) bez vanjskog prijenosa topline:

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},}$$

uz rubne i početne uvjete:

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ (lijevi i desni kraj su na konstantnoj temperaturi $0^\circ C$),
$u(x,0) = g(x)$ (početna distribucija topline).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\lambda}{h^2}[u(x+h,t+k) - 2u(x,t+k) + u(x-h,t+k)] + \\ + \frac{1-\lambda}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)],\ \lambda \in [0,1].$$

Izraz $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ aproksimiramo težinskom sredinom centralnih razlika po x u trenucima t i $t + k = t + \Delta t$. Za $\lambda = \frac{1}{2}$, to je obična aritmetička sredina, a za $\lambda = 0$ dobijemo eksplicitnu shemu.

Ovdje je problem što ne znamo $u(x, t + k)$, ali za fiksirani trenutak t_j i $i = 1, ..., n - 1$ dobijemo linearni sustav od $n - 1$ jednadžbi s $n - 1$ nepoznanica iz kojeg dobijemo aproksimaciju funkcije u unutrašnjim čvorovima mreže, u_{ij}.
Početni uvjet: $u_{i0} = g_i,\ i = 0, ..., n, \quad \rightarrow$ sustav jednadžbi za $u_{i1},\ i = 1, ..., n - 1$ kojeg riješimo $\rightarrow$ ... do zadnjeg indeksa.
Dakle, u svakom vremenskom trenutku rješavamo linearni sustav.
Prednost je numerička stabilnost, tj. možemo uz grublji vremenski korak dobiti istu točnost.

Eliptički problemi (membrana)

Promatramo problem ravnoteže pravokutne, homogene, izotropno napete membrane $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ili Poissonovu jednadžbu, to jest:

$$\boxed{\Delta u(x, y) = g(x, y),} \text{ na } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = h(x, y),$$

gdje je $g(x, y) = -\frac{f(x,y)}{p}$ za vanjsku silu f i napetost p.

Postupak:

- Segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{b-a}{n}$ i segment $[c, d]$ podijelimo na m jednakih dijelova širine $k = \frac{d-c}{m}$. Dakle, Ω podijelimo na $n \cdot m$ jednakih dijelova (pravokutnika). Točke koje smo dobili na segmentima $[a, b]$ i $[c, d]$ su redom:

$$x_i = a + ih, \ i = 0, 1, ..., n,$$
$$y_j = c + jk, \ j = 0, 1, ..., m.$$

Točku $(x_i, y_j) = (a + ih, c + jk)$ zovemo (i, j)-ti čvor mreže.

Uvodimo oznake:
$u(x_i, y_j) = u_{ij}, g(x_i, y_j) = g_{ij}, h(x_i, y_j) = h_{ij}$

- Taylorovim polinomom aproksimiramo parcijalne derivacije 2.reda:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2},$$
$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{k^2}.$$

Aproksimacija jednadžbe $\Delta u(x, y) = g(x, y)$ u čvoru (i, j) je dana sa:

$$\boxed{\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{k^2} = g_{ij}.}$$

Zbog jednostavnosti uzimamo $h = k$ i sređivanjem dobivamo:

$$\boxed{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = h^2 g_{ij}},$$

za $i = 1, ..., n-1,\ j = 1, ..., m-1.$
Iz rubnog uvjeta slijedi: $u_{ij} = h_{ij}$ za $i = 0$ ili $i = n$ ili $j = 0$ ili $j = m$.

Zadatak (4.)

Riješite:

$$\Delta u = 8x^2y^2$$

na $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$ uz $u|_{\partial\Omega} = 0$ ako je korak $h = 1$.

Zadatak (4.)

Riješite:

$$\Delta u = 8x^2y^2$$

na $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$ uz $u|_{\partial\Omega} = 0$ ako je korak $h = 1$.

Rješenje:

$$1 = h = \frac{2-(-2)}{n} \implies n = m = 4.$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, 3, 4$

Zadatak (4.)

Riješite:

$$\Delta u = 8x^2y^2$$

na $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$ uz $u|_{\partial\Omega} = 0$ ako je korak $h = 1$.

Rješenje:

$$1 = h = \frac{2-(-2)}{n} \implies n = m = 4.$$

Iz rubih uvjeta imamo

(1) $u_{0j} = u_{4j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, 3, 4$

(2) $u_{i0} = u_{i4} = 0$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4.$

Uočimo da je funkcija $g(x,y) = 8x^2y^2$ simetrična, dakle mora biti

$$u_{13} = u_{31} = u_{11} = u_{33} \qquad \text{i} \qquad u_{12} = u_{21} = u_{23} = u_{32}.$$

Rješavamo sustav

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 g_{i,j},\ i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3.$$

Zbog simetrije dovoljno je pogledati sustav za čvorove $(3,3)$, $(3,2)$ i $(2,2)$.

- $(3,3)$: $u_{43} + u_{23} + u_{34} + u_{32} - 4u_{33} = g_{33} = 8$
- $(3,2)$: $u_{42} + u_{22} + u_{33} + u_{31} - 4u_{32} = g_{32} = 0$
- $(2,2)$: $u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21} - 4u_{22} = g_{22} = 0$

Dobijemo sustav

$$
\begin{aligned}
2u_{32} - 4u_{33} &= 8 \\
u_{22} + 2u_{33} - 4u_{32} &= 0 \\
4u_{32} - 4u_{22} &= 0
\end{aligned}
$$

čije je rješenje $u_{33} = -3$, $u_{22} = -2$ i $u_{32} = -2$.

Dobijemo sustav

$$2u_{32} - 4u_{33} = 8$$
$$u_{22} + 2u_{33} - 4u_{32} = 0$$
$$4u_{32} - 4u_{22} = 0$$

čije je rješenje $u_{33} = -3$, $u_{22} = -2$ i $u_{32} = -2$.

x \ t	-2 (j=0)	-1 (j=1)	0 (j=2)	1 (j=3)	2 (j=4)
-2 (i=0)	0	0	0	0	0
-1 (i=1)	0	-3	-2	-3	0
0 (i=2)	0	-2	-2	-2	0
1 (i=3)	0	-3	-2	-3	0
2 (i=4)	0	0	0	0	0

Uočimo da prilikom rješavanja Laplaceove jednadžbe $\Delta u(x, y) = 0$ dobijemo sustav jednadžbi

$$\boxed{u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)}.$$

Dakle, vrijednosti u unutarnjim čvorevima su srednje vrijednosti u susjednim čvorovima.

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite sljedeći rubni problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} x & \text{if } x \in [0, 0.2] \\ \frac{1}{4}(1-x) & \text{if } x \in [0.2, 1] \end{cases} \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

ako je $h = \tau = 0.2$ $(n = 5)$.

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite sljedeći rubni problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 4x(1-x),$$

ako je $h = \frac{1}{10}$ $(n = 10)$ i $\delta = \frac{1}{6}$.

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite:

$$\Delta u = 0$$

na $\Omega = [0,3] \times [0,3]$ uz rubne uvjete

$$u(0,y) = u(x,3) = u(3,y) = 0, \quad u(x,0) = \frac{1}{10} \sin \frac{2\pi x}{3}$$

ako je korak $h = 1$.