Metoda konačnih elemenata

- Rješavamo problem ravnoteže žice $[0, l]$ bez elastičnog otpora sredstva, tj. $q(x) = 0$.
- Dakle, rješavamo jednadžbu

$$\boxed{(p(x)u'(x))' + f(x) = 0},$$

pri čemu je $p(x)$ napetost žice, a $f(x)$ gustoća vanjske sile koja djeluje na žicu.
- **Rubni uvjeti:** žica je u lijevom kraju pričvršćena, tj. vrijedi $u(0) = 0$, a u desnom kraju slobodna, tj. $u'(l) = 0$ (ili pričvršćena, tj. $u(l) = 0$).
- Za razliku od metode konačnih razlika koja kao rješenje ne daje funkciju, već aproksimaciju vrijednosti u određenim točkama (čvorovima), ova metoda daje funkciju koja aproksimira rješenje.

Postupak:

(1) Podijelimo segment $[0, l]$ na n jednakih dijelova širine $h = \frac{l}{n}$, tj.

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = l.$$

(2) Približno rješenje tražimo u obliku

$$\boxed{u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)}, \quad x \in [0, l],$$

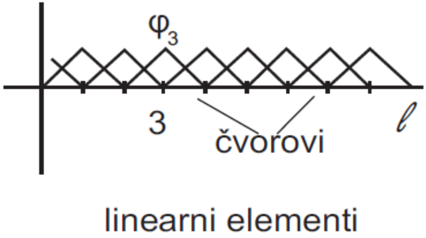
pri čemu su

$$c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R} \quad \textbf{konstante},$$

$$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textbf{konačni elementi}.$$

Konačni elementi

- **konačni elementi** su funkcije koje su različite od nule na malim komadima u $[0, l]$

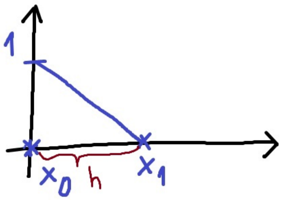


Slika: Linearni konačni elementi

Konačni elementi

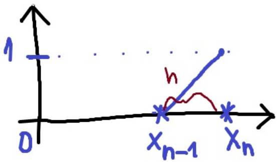
- za $i = 0$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x}{h} + 1, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$



- za $i = n$

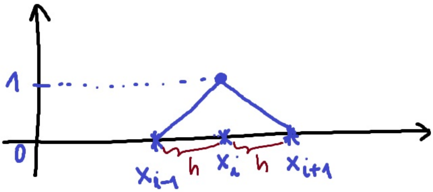
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - n + 1, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$



Konačni elementi

- za $i = 1, \cdots, n-1$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ -\frac{x}{h} + i + 1, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$



- uočimo da vrijedi

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

pa slijedi $\boxed{u_n(x_j) = c_j}$ za $j = 0, 1, \ldots, n$

Konstante c_i

- Iz lijevog rubnog uvjeta $u(0) = 0$ slijedi $u_n(0) = \boxed{c_0 = 0}$.
- Konstante $c_1, \cdots, c_n$ ćemo izračunati rješavajući sustav

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n},$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Matrica $K = [k_{ij}]$ se zove **matrica krutosti**.

Koeficijenti k_{ij}

- Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način

$$k_{ij} = \int_0^l p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\mathrm{d}x, & j = i-1, \\ -\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\mathrm{d}x, & j = i+1, \\ \dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\mathrm{d}x, & i = j \neq n, \\ \dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} p(x)\mathrm{d}x, & i = j = n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- Očito vrijedi $k_{ij} = k_{ji}$ za $i, j = 1, \ldots, n$.

Slobodni članovi b_i

Slobodni članovi b_i za $i = 1, \ dots, n$ određuju se prema formulama

$$b_i = \int_0^l f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left(\frac{x}{h} - i + 1\right)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left(-\frac{x}{h} + i + 1\right)\mathrm{d}x, & i \neq n, \\ \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\left(\frac{x}{h} - n + 1\right)\mathrm{d}x, & i = n. \end{cases}$$

Napomena

U slučaju da rješavamo problem ravnoteže žice s pričvršćenim rubovima, tj. $u(0) = u(l) = 0$, postupak je potpuno analogan. U tom slučaju je

$$c_0 = c_n = 0,$$

a ostale konstante c_i dobijemo iz sustava

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Zadatak (2.)

Riješite jednadžbu $((x+5)u'(x))' + x^3 = 0$ na $[0,5]$, uz rubne uvjete $u(0) = u'(5) = 0$, metodom konačnih elemenata ako je $h = 1$.

Rješenje:

- Zadana je napetost $p(x) = x + 5$ i gustoća vanjske sile $f(x) = x^3$.
- Razmak među čvorovima je $h = 1$, iz čega slijedi da je $n = \frac{5}{1} = 5$.
- Čvorovi mreže konačnih elemenata su

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5.$$

- Aproksimativno rješenje tražimo u obliku

$$\boxed{u_5(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i \varphi_i(x)}.$$

- Iz rubnih uvjeta imamo $c_0 = 0$.
- Konstante c_1, c_2, c_3, c_4 i c_5 ćemo izračunati iz sustava

$$\boxed{\sum_{j=1}^{5} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5}.$$

- Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način

$$k_{11} = \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} p(x) \mathrm{d}x = \int_0^2 (x+5) \mathrm{d}x = 12,$$

$$k_{12} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_2} p(x) \mathrm{d}x = -\int_1^2 (x+5) \mathrm{d}x = k_{21} = -6.5,$$

$$k_{13} = k_{31} = k_{14} = k_{41} = k_{15} = k_{51} = 0,$$

$$k_{22} = \frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_3} p(x) \mathrm{d}x = \int_1^3 (x+5) \mathrm{d}x = 14,$$

$$k_{23} = -\frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_3} p(x)\mathrm{d}x = -\int_2^3 (x+5)\mathrm{d}x = k_{32} = -7.5,$$

$$k_{24} = k_{42} = k_{25} = k_{52} = 0,$$

$$k_{33} = \frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_4} p(x)\mathrm{d}x = \int_2^4 (x+5)\mathrm{d}x = 16,$$

$$k_{34} = -\frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_4} p(x)\mathrm{d}x = -\int_3^4 (x+5)\mathrm{d}x = k_{43} = -8.5,$$

$$k_{35} = k_{53} = 0,$$

$$k_{44} = \frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_5} p(x)\mathrm{d}x = \int_3^5 (x+5)\mathrm{d}x = 18,$$

$$k_{45} = -\frac{1}{h^2}\int_{x_4}^{x_5} p(x)\mathrm{d}x = -\int_4^5 (x+5)\mathrm{d}x = k_{54} = -9.5,$$

$$k_{55} = \frac{1}{h^2}\int_{x_4}^{x_5} p(x)\mathrm{d}x = \int_4^5 (x+5)\mathrm{d}x = 9.5.$$

- Koeficijenti b_i određuju se prema formulama:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^5 f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^3(x-1+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 x^3(-x+1+1)\mathrm{d}x = 1.5, \\
b_2 &= \int_0^5 f(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 x^3(x-2+1)\mathrm{d}x + \int_2^3 x^3(-x+2+1)\mathrm{d}x = 9, \\
b_3 &= \int_0^5 f(x)\varphi_3(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 x^3(x-3+1)\mathrm{d}x + \int_3^4 x^3(-x+3+1)\mathrm{d}x = 28.5, \\
b_4 &= \int_0^5 f(x)\varphi_4(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_3^4 x^3(x-4+1)\mathrm{d}x + \int_4^5 x^3(-x+4+1)\mathrm{d}x = 66,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_5 &= \int_0^5 f(x)\varphi_5(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_4^5 x^3(x-5+1)\mathrm{d}x = 51.5.
\end{aligned}
$$

- Konačno, rješavamo sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
12c_1 - 6.5c_2 &= 1.5, \\
-6.5c_1 + 14c_2 - 7.5c_3 &= 9, \\
-7.5c_2 + 16c_3 - 8.5c_4 &= 28.5, \\
-8.5c_3 + 18c_4 - 9.5c_5 &= 66, \\
-9.5c_4 + 9.5c_5 &= 51.5.
\end{aligned}
$$

- Rješenje sustava je određeno programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

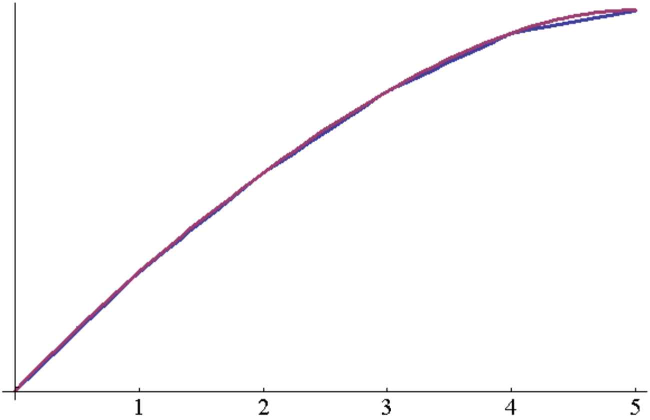
$$
c_1 = 28.4545,\ c_2 = 52.3007,\ c_3 = 71.7674,\ c_4 = 85.5909,\ c_5 = 91.0119.
$$

- Dakle, približno rješenje ima oblik

$$u_5(x) = 28.4545\varphi_1(x) + 52.3007\varphi_2(x) + 71.7674\varphi_3(x) + 85.5909\varphi_4(x) + 91.0119\varphi_5(x).$$

- Točno rješenje rubnog problema dobiveno pomoću progamskog paketa *MATHEMATICA*© glasi:

$$u(x) = -325.521 + \frac{1}{4}\left(500(5+x) - 75(5+x)^2 + \frac{20}{3}(5+x)^3 - \frac{1}{4}(5+x)^4\right).$$



Slika: Točno rješenje i približno rješenje dobiveno metodom konačnih elemenata

Zadatak (1.)

Riješite jednadžbu $(x^2 u'(x))' + x + 2 = 0$ na $[0, 1]$, uz rubne uvjete $u(0) = u(1) = 0$, metodom konačnih elemenata ako je $h = 0.2$.

Rješenje: Razmak među čvorovima je $h = 0.2 = \frac{1}{5}$, napetost je $p(x) = x^2$, a gustoća vanjske sile $f(x) = x + 2$. Čvorovi mreže konačnih elemenata su

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.4, \quad x_3 = 0.6, \quad x_4 = 0.8, \quad x_5 = 1.$$

Aproksimaciju rješenja tražimo u obliku

$$\boxed{u_5(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i \varphi_i(x)}.$$

Iz rubnih uvjeta imamo $c_0 = c_5 = 0$. Konstante c_1, c_2, c_3 i c_4 ćemo odrediti iz sustava

$$\boxed{\sum_{j=1}^{4} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4}.$$

Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način:

$$k_{11} = \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} p(x) \mathrm{d}x = 25 \int_0^{0.4} x^2 \mathrm{d}x = 0.5333,$$

$$k_{12} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_2} p(x) \mathrm{d}x = -25 \int_{0.2}^{0.4} x^2 \mathrm{d}x = k_{21} = -0.4667,$$

$$k_{22} = \frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_3} p(x) \mathrm{d}x = 25 \int_{0.2}^{0.6} x^2 \mathrm{d}x = 1.7333,$$

$$k_{23} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_2}^{x_3} p(x) \mathrm{d}x = -25 \int_{0.4}^{0.6} x^2 \mathrm{d}x = k_{32} = -1.2667,$$

$$k_{33} = \frac{1}{h^2} \int_{x_2}^{x_4} p(x) \mathrm{d}x = 25 \int_{0.4}^{0.8} x^2 \mathrm{d}x = 3.7333,$$

$$k_{34} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_3}^{x_4} p(x) \mathrm{d}x = -25 \int_{0.6}^{0.8} x^2 \mathrm{d}x = k_{43} = -2.4667,$$

$$k_{44} = \frac{1}{h^2} \int_{x_3}^{x_5} p(x) \mathrm{d}x = 25 \int_{0.6}^{1} x^2 \mathrm{d}x = 6.5333,$$

$$k_{13} = k_{31} = k_{14} = k_{41} = k_{24} = k_{42} = 0.$$

Koeficijenti b_i određuju se prema formulama

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{0.2} (x+2)(5x-1+1)\mathrm{d}x + \int_{0.2}^{0.4} (x+2)(-5x+1+1)\mathrm{d}x = 0.44, \\
b_2 &= \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0.2}^{0.4} (x+2)(5x-2+1)\mathrm{d}x + \int_{0.4}^{0.6} (x+2)(-5x+2+1)\mathrm{d}x = 0.48, \\
b_3 &= \int_0^1 f(x)\varphi_3(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0.4}^{0.6} (x+2)(5x-3+1)\mathrm{d}x + \int_{0.6}^{0.8} (x+2)(-5x+3+1)\mathrm{d}x = 0.52, \\
b_4 &= \int_0^1 f(x)\varphi_4(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0.6}^{0.8} (x+2)(5x-4+1)\mathrm{d}x + \int_{0.8}^{1} (x+2)(-5x+4+1)\mathrm{d}x = 0.56.
\end{aligned}
$$

- Konačno, koeficijenti $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ određuju se iz sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 0.5333c_1 - 0.4667c_2 &= 0.44, \\ -0.4667c_1 + 1.7333c_2 - 1.2667c_3 &= 0.48, \\ -1.2667c_2 + 3.7333c_3 - 2.4667c_4 &= 0.52, \\ -2.4667c_3 + 6.5333c_4 &= 0.56. \end{aligned}$$

- Rješenje sustava je određeno programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$c_1 = 2.2161,\ c_2 = 1.5895,\ c_3 = 0.9796,\ c_4 = 0.4556.$$

- Dakle, približno rješenje ima oblik

$$\boxed{u_5(x) = 2.2161\varphi_1(x) + 1.5895\varphi_2(x) + 0.9796\varphi_3(x) + 0.4556\varphi_4(x)}.$$

Domaća zadaća

Zadatak (3.)

Riješite problem ravnoteže žice duljine $l = 3$, napetosti $p(x) = x^2 + x$, na koju djeluje vanjska sila linijske gustoće $f(x) = x - 1$ ako su rubovi žice pričvršćeni, metodom konačnih elemenata uz korak $h = 0.5$.

Zadatak (4.)

Riješite problem ravnoteže žice duljine $l = 2$, napetosti $p(x) = x$, na koju djeluje vanjska sila linijske gustoće $f(x) = 3x^2$ ako je lijevi kraj žice je pričvršćen, a desni slobodan, metodom konačnih elemenata uz $h = 0.4$.